TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro Gradu -tutkielma

Antti Saarinen

Mitta- ja integrointiteoriaa

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
huhtikuu 2003

Sisältö

Johdanto

Historiaa

Mitta- ja integrointiteorian historiaa on käsitelty laajahkosti kirjassa [1] ja suppeammin kirjassa [3]. Esitämme tässä muutamia poimintoja kyseisistä teoksista.

1800-luvun lopun täsmällisyyden painotus johti useat matemaatikot esittämään "patologisia"funktioita, joiden epätavalliset ominaisuudet rikkoivat jotakin aikaisemmin totena pidettyä teoreemaa vastaan. Eräät ansioituneet analyysin harjoittajat ilmaisivat huolensa siitä, että kiinnostus erikoistapauksiin suuntaa nuorten matemaatikkojen mielenkiinnon pois sen ajan suurista ratkaisemattomista kysymyksistä. Hermite kertoo kääntäneensä selkänsä "tälle valitettavalle derivaatattomien funktioiden rutolle pelon ja kauhun sekaisin tuntein."Poincaré jakoi opettajansa huolen:

> "Aikaisemmin uusi funktio keksittiin johonkin käytännön tarpeeseen; tänään niitä keksitään nimenomaan siksi, että niillä voidaan osoittaa edeltäjiemme ajattelun puutteet eikä niistä koskaan saada johdetuksi mitään muuta."

Kaikesta huolimatta epätavallisten tapausten tutkimus ja edeltäjien töiden kyseenalaistaminen johti kaksi nuorta ranskalaista matemaatikkoa määrittelemään käsitteitä, joilla on perustavanlaatuinen merkitys eräiden 1900-luvun yleisluontoisempien teorioiden kehityksessä. Henri Lebesgue (1875–1941) sai tavanomaisen matemaattisen koulutuksen siitä huolimatta, että hän oli osoittanut poikkeuksellista kunnioituksen puutetta kyseenalaistaessaan professoreidensa väitteitä. Hänen Nancyssä vuonna 1902 hyväksytty väitöskirjansa oli kuitenkin epätavallinen sikäli, että käytännössä se rakensi integraalilaskennan perusteet uudelleen. Hänen työnsä poikkesi yleisesti hyväksytyistä näkemyksistä niin paljon, että Lebesgue joutui Cantorin tapaan ulkoisen kritiikin ja omien epäilystensä tyrmäämäksi. Vähitellen hänen näkemyksiään alettiin kuitenkin hyväksyä laajemmin ja vuonna 1910 hänet nimitettiin professoriksi Sorbonneen. Hän ei kuitenkaan perustanut "koulukuntaa"tai keskittynyt perustamalleen alalle. Vaikka hänen integraalin käsitteensä oli hämmästyttävä yleistys, Lebesgue pelkäsi, että "yleisiin teorioihin palautettu matematiikka on vain kaunis muoto, jolla ei ole sisältöä. Se kuolee nopeasti."Myöhempi kehitys näyttää osoittavan, että hänen yleistysten haitallisia vaikutuksia koskevat pelkonsa olivat perusteettomia.

Riemannin integraali hallitsi integraalilaskennan tutkimusta ennen kuin Lebesguesta tuli "jatkoajan Arkhimedes". 1800-luvun lopulla trigonometristen sarjojen ja Cantorin *Mengenlehren* tutkimus osoitti matemaatikoille, että funktionaalisuuden perusajatuksen tulee olla pisteittäinen vastaavuus tai "kuvaus"uudemmassa mielessä eikä niinkään muutoksen tasaisuus. Cantor oli jo pohtinut mitallisia joukkoja, mutta hänen määritelmänsä mukaan kahden joukon yhdisteen mitta voi olla pienempi kuin joukkojen mittojen summa.

Lebesguen välitön edeltäjä mittateorian tutkimuksessa, Émile Borel (1871–1956), poisti Cantorin määritelmän puutteita. Borel vietti eräänlaista kaksoiselämää, sillä hän jätti Pariisin yliopiston professuurin ottaakseen aktiivisesti osaa hallinnollisiin asioihin. Hän oli kansanedustaja vuosina 1924–1936, ja ennen pidätystään Vichyn hallituksen kaudella vuonna 1940 hän ehti toimia laivastoministerinä. Hänen vuotta 1924 edeltävä matemaatisten julkaisujensa luettelo on vaikuttava ja se sisältää puolisen tusinaa kirjaa. Eräs varhaisimmista käsittelee epätavallista aihetta *Leçons sur les séries divergentes* ja se ilmestyi vuonna 1901. Borel osoittaa, miten joillekin hajaantuville sarjoille voidaan määritellä summa, joka on järkevä näitä sarjoja koskevissa relaatioissa ja operaatioissa. Jos sarja on esimerkiksi $\sum u_n$, sen "summa"voidaan määritellä lausekkeeksi $\int_0^\infty e^x \sum_0^\infty (u_n x^n)/n dx$, jos integraali on olemassa. Viime vuosisadan alussa oli melkoista kiinnostusta tällaisiin määritelmiin.

Borelin kestävämpi tulos liittyy kuitenkin joukko-opin soveltamiseen funktioteoriaan, jossa hänen nimensä on säilynyt tutussa Heinen-Borelin lauseessa:

> "Jos suoran suljettu pistejoukko voidaan peittää sellaisella avoimien välien kokoelmalla, että jokainen joukon piste kuuluu ainakin yhteen väliin, on olemassa äärellinen välien kokoelma, joka

peittää joukon."

Heine oli esittänyt tämän teoreeman hieman toisenlaisin termein vuonna 1872, mutta se jäi huomiotta, ja Borel esitti sen uudelleen vuonna 1895. Borelin nimi liitetään myös joukkoon, joka saadaan reaalilukujen suoran suljetuista ja avoimista väleistä toistamalla yhdiste- ja leikkausoperaatioita numeroituvaan välien kokoelmaan. Jokaisella Borelin joukolla on myös mitta hänen määrittelemässään mielessä.

Pohtiessaan Borelin joukkoja koskevaa työtä Lebesgue huomasi, että Riemannin integraalin määritelmässä on se puute, että se soveltuu vain erikoistapauksiin. Määritelmä nimittäin olettaa, että funktio on epäjatkuva korkeintaan numeroituvassa pistejoukossa. Jos funktiolla $y = f(x)$ on "riittävästi" (esimerkiksi ylinumeroituva määrä) epäjatkuvuuskohtia, välin $[x_{i-1}, x_i]$ lyhetessä funktion ylä- ja alasumma tällä välillä ei välttämättä lähesty samaa arvoa.

Sen sijaan, että olisi jakanut riippumattoman muuttujan alueen osiin, Lebesgue jakoi funktion arvojoukon osaväleihin Δy_i ja valitsi jokaisesta osavälistä arvon η_i. Tämän jälkeen hän etsi "mitan"$m(E_i)$ x-akselin pisteiden joukolle E_i, jossa funktio f saa likimain arvon η_i. Integraalilaskennan aikaisemmat harjoittajat laskivat sekä suuria että pieniä jakamattomia suureita yhteen järjestyksessä vasemmalta oikealle, kun taas Lebesgue, joka piti asioiden esittämisestä epämuodollisesti, ryhmitteli mieluummin samansuuruiset jakamattomat ryhmiksi ennen yhteenlaskua. Riemannin aikaisemman summan $S_n = \sum f(x_i)\Delta x_i$ tilalle hän kirjoitti Lebesgue-tyyppisen summan $S_n = \sum \eta_i m(E_i)$ ja antoi välien pituuksien lähestyä nollaa.

Tässä pääpiirteissään kuvaamamme Lebeguen integraali on tietenkin määritelty paljon täsmällisemmin käyttämällä ylä- ja alarajoja sekä Lebeguen mittaa, mutta palaamme näiden käsitteiden määritelmiin työssämme myöhemmin. Valaiseva esimerkki osoittaa miten Lebesguen menetelmä toimii. Pidämme tunnettuna, että kaikkien välin $[0, 1]$ rationaalilukujen E_1 Lebesguen mitta on nolla ja että tämän välin kaikkien irrationaalilukujen E_2 mitta on yksi. On määritettävä funktion f integraali tällä välillä, kun $f(x) = 0$ rationaaliluvuille ja $f(x) = 1$ irrationaaliluvuille. Nyt Lebesguen summaksi muodostuu $S_n = 0 \cdot m(E_1) + 1 \cdot m(E_2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$. Huomattavaa on, että saman funktion Riemannin integraali ei tietenkään ole tällä välillä olemassa.

Emme ole vielä määritelleet termiä *joukon mitta* tai *mitallinen funktio*, koska sitä ei ole helppo tehdä tavallisen kielen sanoin. Lisäksi sana *mitta* voi tarkoittaa eri asioita. Kun Lebesgue esitteli uuden integraalin käsitteensä, hän käytti sanaa mitta nykyään Lebeguen mittana tunnetussa erityisessä merkityksessä. Se oli klassisen pituuden ja alan käsitteiden laajennus yleisempiin kuin tavanomaisiin käyriin ja pintoihin liittyviin joukkoihin. Nykyään termiä mitta käytetään vieläkin laajemmassa merkityksessä, jolloin kentän R mitta on yksinkertaisesti ei-negatiivinen funktio μ, jolla on ominaisuus $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$ jokaiselle numeroituvalle kentän R luokalle A_i, joilla ei ole yhteisiä alkioita.

Sen lisäksi, että uusi integraalin käsite kattaa laajemman funktioiden luokan kuin Riemannin integraali, derivoinnin ja (Lebesguen yleisessä mielessä määrittelemän) integroinnin välisellä käänteisellä riippuvuudella on vähemmän poikkeuksia. Jos esimerkiksi funktio g on differentioituva välillä $[a, b]$ ja $g'(x) = f(x)$ on rajoitettu, niin funktio f on Lebesgue-integroituva ja $g(b) - g(a) = \int_{a\,L}^{b} f(t)\mathrm{d}t$. Sen sijaan Riemannin integraali $\int_{a\,R}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ ei ehkä ole edes olemassa, kun funktioihin g ja g' kohdistetaan samat rajoitukset.

Lebesguen ajatukset ovat 1800-luvun lopulta, mutta tulivat laajempaan tietoon vasta, kun hän julkaisi ajatuksiaan kahdessa, viime vuosisadan alussa ilmestyneessä, klassisessa kirjassa: *Leçons sur les séries trigonométriques* ilmestyi vuonna 1903 ja *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* julkaistiin vuonna 1904. Näiden kirjojen sisältämät vallankumoukselliset ajatukset johtivat uusiin yleistyksiin, joita ovat muun muassa Denjoyn ja Haarin integraalit, jotka ranskalainen Arnaud Denjoy (1884–1974) ja unkarilainen Alfred Haar (1885–1933) määrittelivät. Kolmas tunnettu viime vuosisadan integraali on Lebeguen-Stieltjesin-integraali, joka on Lebesguen ja hollantilaisen analyytikko T. J. Stieltjesin ajatusten yhdistelmä. Näiden ja muiden tutkijoiden työ on muuttanut ja yleistänyt integraalin käsitettä niin perusteellisesti, että on sanottu integroinnin teorian olevan viime vuosisadan luomus, vaikka integrointi itsessään on peräisin jo Arkhimedeen ajoilta. Tieto uudesta teoriasta levisi myös vauhdilla. Esimerkiksi N. N. Luzin (1883–1950), joka oli Pariisissa vuosina 1912–1914, toi suuren osan uusista ajatuksista Moskovaan.

Työn sisällöstä ja rakenteesta

Työ käsittelee mitta- ja integrointiteoriaa ja onkin sen vuoksi selkeästi jakautunut kahteen osaan. Mittateorian osuus seuraa pääasiassa kirjojen [4] ja [7] esitystä ja integrointiteorian osuus eteenee pääasiassa kirjojen [2] ja [5] mukaan. Lukijalta edellytämme analyysin ja joukko-opin perusteiden hallintaa.

Luvussa yksi esitämme muutamia alustavia tarkasteluja, joita tarvitsemme myöhemmissä luvuissa. Vaikka tämän luvun asia on helppoa, esitämme täydellisyyden vuoksi lauseille todistukset. Myös kansallista mielenkiintoa herättävä Lindelöfin lause todistetaan tässä luvussa.

Luvussa kaksi tutustumme mittateoriaan. Aloitamme yleisellä mittateorialla mm. määrittelemällä mitan ja ulkomitan käsitteet. Todistamme myös keskeisen lauseen:

> Tietyn ulkomitan suhteen mitalliset joukot muodostavat σ-algebran ja ulkomitan rajoittuma tähän joukkoon on mitta.

Esimerkkitapaukseksi otamme Lebesguen mitan, jota tarkastelemmekin hieman tarkemmin. Luvun kaksi keskeisiin tuloksiin kuuluu myös Carathéodoryn laajennuslause:

> Olkoon kuvaus μ mitta algebrassa $\mathcal{A}$ ja kuvaus μ^* mitan μ indusoima ulkomitta. Tällöin ulkomitan μ^* rajoittuma $\bar{\mu}$ μ^*-mitallisiin joukkoihin on kuvauksen μ laajennus sellaiseen σ-algebraan, joka sisältää algebran $\mathcal{A}$. Mikäli kuvaus μ on σ-äärellinen, niin laajennus $\bar{\mu}$ pienimpään sellaiseen σ-algebraan $\mathcal{B}$, joka sisältää algebran $\mathcal{A}$, on ainoa σ-algebrassa $\mathcal{B}$ määritelty mitta, joka on kuvauksen μ laajennus.

Luvussa kaksi esitämme myös todistuksen Carathéodoryn laajennuslauseelle.

Luvussa kolme siirrymme tarkastelemaan mitallisia kuvauksia. Mitallisten kuvausten tarkastelu on siinä mielessä oleellista, että integraalin käsite (jonkun mitan suhteen) on järkevää määritellä (tämän saman mitan suhteen) mitallisille funktioille. Luvussa kolme esittelemme myös uudet käsitteet *limit superior* ja *limit inferior* sekä tarkastelemme erilaisten rajafunktioiden (ts. funktioiden, jotka saadaan erilaisten funktiojonojen raja-arvoina) mitallisuutta.

Luvussa neljä siirrymme tarkastelemaan integrointiteoriaa. Rajoitumme tarkastelemaan yleistä integraalin käsitettä, emmekä enää esittele erikseen

Lebesguen integraalia (lukija voi halutessaan ajatella yleisen mitan paikalle Lebesguen mitan, jolloin tulee määritelleeksi Lebesguen integraalin). Tässä luvussa esitämme todistuksineen myös keskeiset integraalien monotonisuus- ja suppenemislauseet. Esimerkkeinä mainittakoon monotonisen suppenemisen lause:

> Olkoon (f_n) jono mitallisia funktioita, ja $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ jokaisella indeksin n arvolla. Tällöin
>
> $$\int \lim_{n \to \infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

sekä dominoidun suppenemisen lause:

> Olkoon (f_n) sellainen jono mitallisia funktioita, että $|f_n| \leq g$, missä funktio g on integroituva, ja $\lim_{n \to \infty} f_n = f$. Tällöin funktio f on integroituva ja
>
> $$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Luvussa viisi tarkastelemme Fubinin lausetta, joka sitoo mielenkiintoisella tavalla yhteen esittämämme mitta- ja integrointiteorian tarkastelut. Ennen lauseen esittämistä joudumme määrittelemään tulomitan käsitteen. Fubinin lauseen todistus on kuitenkin niin pitkä ja monipolvinen, että emme sitä tässä työssä esitä. Sen sijaan viittaamme lähdeteoksiin, joissa Fubinin lauseen todistus on esitetty. Tyydymmekin luvussa viisi vain tarkastelemaan muutamia esimerkkejä Fubinin lauseen soveltamisesta.

Yleisesti työn lukijalle kerrottakoon, että lähes kaikkia esitettyjä todistuksia on muokattu esitystapaamme sopiviksi, joten sellaisenaan niitä ei lähdeteoksista löydy. Viitatessamme lähdeteoksiin olemmekin tyytyneet sanaan "vertaa", sillä todistusten asiasisältö on kuitenkin vastaava. Myös muutamia omia lauseita (lähdeteoksissa tunnetuksi oletettuja asioita) on esitetty ja todistettu.

Luku 1

Alustavia tarkasteluja

1.1 Yleistä

Laajennetulla reaalilukujoukolla $\overline{\mathbf{R}}$ tarkoitamme joukkoa $\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Määrittelemme seuraavaksi äärettömyyksien käyttäytymisen yhteen-, kerto- ja jakolaskuissa.

Määritelmä 1.1.1 Olkoon $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin

i)

$$\begin{array}{rclcll} a + \infty & = & \infty + a & = & \infty, & \text{kun } a \neq -\infty, \\ a - \infty & = & -\infty + a & = & -\infty, & \text{kun } a \neq \infty. \end{array}$$

Lisäksi $-(\infty) = -\infty$ ja $-(-\infty) = \infty$.

Lausekkeita $\infty - \infty$ ja $-\infty + \infty$ emme määrittele.

ii)

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & \text{kun } a > 0, \\ -\infty, & \text{kun } a < 0, \\ 0, & \text{kun } a = 0. \end{cases}$$

iii)

$$(-\infty)a = a(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{kun } a > 0, \\ \infty, & \text{kun } a < 0, \\ 0, & \text{kun } a = 0. \end{cases}$$

iv)

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, & \text{kun } 0 < a, \\ -\infty, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$$

Lauseketta $\frac{0}{0}$ emme määrittele.

v)

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0, \text{ kun } a \neq \pm\infty.$$

Lausekkeita $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ emme määrittele.

1.2 Joukko-oppia

Merkitsemme $A \subseteq B$, kun joukko A on joukon B osajoukko ja asetamme merkinnän $A \subset B$ tarkoittamaan tilannetta, jossa joukko A on joukon B *aito* osajoukko (ts. $A \subseteq B$ ja $A \neq B$).

Määritelmä 1.2.1 Olkoon X (perus)joukko ja joukko $A \subseteq X$. Tällöin merkitsemme joukon A *komplementtia* (perusjoukon suhteen) symbolilla A^c. Siis

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Määritelmä 1.2.2 Olkoon X joukko. Tällöin joukon X *potenssijoukko* $\mathcal{P}(X)$ on

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Joukon X (mielivaltainen) *joukkoperhe* $\mathcal{F}$ on

$$\mathcal{F} = \{A_i \in \mathcal{P}(X) \mid i \in I\},$$

missä joukko I on mielivaltainen indeksijoukko.

Määritelmä 1.2.3 Olkoon kokoelma $\mathcal{F}$ joukon X joukkoperhe. Tällöin joukkoperheen $\mathcal{F}$ *yhdiste*

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \in A \mid \text{jollakin joukolla } A \in \mathcal{F}\},$$

ja *leikkaus*

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \in A \mid \text{kaikilla joukoilla } A \in \mathcal{F}\}.$$

Joskus joukkoperheen yhdistettä ja leikkausta merkitään myös $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$ ja $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$. Usein yhdisteitä ja leikkauksia tarkasteltaessa indeksijoukkona on luonnollisten lukujen joukko $\mathbf{N}$, jolloin yhdiste (ja vastaavasti leikkaus) voidaan kirjoittaa

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \ , \ \bigcup_{n}^{\infty} A_n \text{ tai } \bigcup_{n} A_n.$$

Lause 1.2.1 (de Morganin lait) *Olkoon kokoelma $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ joukon X joukkoperhe. Tällöin*

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \text{ ja } (\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Todistus: Todistamme ominaisuuksista edellisen, jälkimmäisen toditus on vastaava. Osoitamme ensin, että $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^c$. Jos $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \emptyset$, niin asia on selvä. Muussa tapauksessa valitsemme mielivaltaisen alkion $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$. Tällöin $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$ ja edelleen $x \notin A_i$ aina, kun $i \in I$. Nyt $x \in A_i^c$ aina, kun $i \in I$, joten $x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c$. Olemme siis osoittaneet, että $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^c$ $(*)$.

Vastaavasti voimme osoittaa, että $\bigcap_{i\in I} A_i^c \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$ $(**)$. Väite seuraa nyt kohdista $(*)$ ja $(**)$.

$\square$

Lause 1.2.2 *Olkoon kokoelma $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ joukon X joukkoperhe ja joukko $B \subseteq X$. Tällöin ovat voimassa osittelulait yhdisteelle ja leikkaukselle ts.*

$$B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$$

ja

$$B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i).$$

Todistus: Lyhyyden vuoksi todistamme ensimmäisen kohdan ekvivalenssiketjulla. Nyt

$$\begin{aligned}
x \in B \cap (\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i) &\Leftrightarrow x \in B \text{ ja } x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i \\
&\Leftrightarrow x \in B \text{ ja } x \in A_i, \text{ jollakin } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in B \cap A_i, \text{ jollakin } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{i\in I}(B \cap A_i),
\end{aligned}$$

joten on osoitettu, että $B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$.

Toista kohtaa varten osoitamme ensin, että $B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$. Jos $B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \emptyset$, niin asia on selvä. Muutoin valitsemme mielivaltaisen alkion $x \in B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i)$. Tällöin $x \in B$ tai $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Jos $x \in B$, niin selvästi $x \in B \cup A_i$ aina, kun $i \in I$, joten $x \in \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$. Jos taas $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, niin $x \in A_i$ aina, kun $i \in I$. Tällöin siis $x \in B \cup A_i$ jokaisella $i \in I$, joten $x \in \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$. Olemme siis osoittaneet, että $B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$.

Osoitamme lopuksi, että $\bigcap_{i\in I}(B \cup A_i) \subseteq B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i)$. Jos $\bigcap_{i\in I}(B \cup A_i) = \emptyset$, niin asia on selvä. Muussa tapauksessa valitsemme mielivaltasen alkion $x \in \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$. Teemme nyt vastaoletuksen, että $x \notin B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i)$. Tällöin $x \notin B$ ja $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$. Erityisesti siis on olemassa sellainen joukko A_k, $k \in I$, että $x \notin A_k$. Koska kuitenkin $x \in \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$, niin $x \in B \cup A_i$ aina, kun $i \in I$. Vastaoletuksen mukaan $x \notin B$, joten $x \in A_i$ aina, kun $i \in I$. Tämä on kuitenkin ristiriita, koska oletimme, että on olemassa sellainen indeksin arvo k, että $x \notin A_k$. Vastaoletus on siis väärä, joten $\bigcap_{i\in I}(B \cup A_i) \subseteq B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i)$.

Täten olemme osoittaneet, että $B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$.

$\square$

Lause 1.2.3 *Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, $\{A_i \mid i \in I\}$ joukon X joukkoperhe ja $\{B_j \mid j \in J\}$ joukon Y joukkoperhe. Tällöin*

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \text{ ja } f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

Edelleen

$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \text{ ja } f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Todistus: Todistamme lauseen ensimmäisen kohdan ja jätämme muiden kohtien todistamisen lukijalle. Osoitamme ensin, että $f(\bigcup_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Jos $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \emptyset$, niin asia on selvä. Muussa tapauksessa valitsemme mielivaltaisen alkion $y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$. Tällöin on olemassa sellainen alkio $x \in X$, että $y = f(x)$ ja $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Nyt $x \in A_i$ ja edelleen $y \in f(A_i)$, jollakin indeksin $i \in I$ arvolla. Täten $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ ja $f(\bigcup_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

Vastaavalla tavalla voimme osoittaa, että $\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcup_{i\in I} A_i)$. Olemme siis osoittaneet, että $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

$\square$

Määritelmä 1.2.4 Olkoon X joukko ja Σ joukon X joukkoperhe. Tällöin joukko Σ on (joukon X) *algebra*, jos

i) $\emptyset \in \Sigma$,

ii) jos $E \in \Sigma$, niin $E^c \in \Sigma$,

iii) jos $\{E_0, E_1, \ldots, E_k\} \subseteq \Sigma$, niin $\bigcup_{i=0}^{k} E_i \in \Sigma$.

Määritelmä 1.2.5 Olkoon X joukko ja Σ joukon X joukkoperhe. Tällöin joukko Σ on (joukon X) *σ-algebra*, jos

i) $\emptyset \in \Sigma$,

ii) jos $E \in \Sigma$, niin $E^c \in \Sigma$,

iii) jos $E_i \in \Sigma$, $i \in \mathbf{N}$, niin $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \in \Sigma$.

Lause 1.2.4 *Olkoon kokoelma Σ mielivaltainen σ-algebra. Tällöin, jos $E_i \in \Sigma$, $i \in \mathbf{N}$, niin $\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i \in \Sigma$.*

Todistus: Oletamme, että joukot $E_i \in \Sigma$. Tällöin myös $E_i^c \in \Sigma$ ja edelleen $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^c \in \Sigma$, koska Σ on σ-algebra. Nyt $(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^c)^c \in \Sigma$. Toisaalta de Morganin lain nojalla $(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^c)^c = \bigcap_{i=0}^{\infty}(E_i^c)^c = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$. Täten olemme todistaneet väitteen.

$\square$

1.3 Euklidinen avaruus

Euklidisella avaruudella tarkoitamme avaruutta $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ (joukon $\mathbf{R}$ karteesinen tulo itsensä kanssa n kertaa), johon olemme määritelleet Euklidisen metriikan. Tällä avaruudella tulee olemaan keskeinen rooli n-ulotteista Lebeguen mittaa määriteltäessä, joten käsittelemme avaruutta $\mathbf{R}^n$ tässä hieman tarkemmin.

Kutsumme avaruuden $\mathbf{R}^n$ alkioita pisteiksi tai vektoreiksi. Huomaamme, että

$$x \in \mathbf{R}^n \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

missä kukin $x_i \in \mathbf{R}$.

Määritelmä 1.3.1 Olkoon $x, y \in \mathbf{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n,$$

ja

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Helposti huomaamme, että alkio $(0, 0, \ldots, 0)$ on avaruuden $\mathbf{R}^n$ nolla-alkio. Lisäksi jokaisella avaruuden $\mathbf{R}^n$ alkiolla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on vasta-alkio $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbf{R}^n$. Kahden alkion x ja y erotus $x - y$ voidaan nyt palauttaa yhteenlaskun määritelmään sopimalla, että $x - y = x + (-y)$.

Huomaamme, että systeemi $\langle \mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$ toteuttaa muutkin vektoriavaruuden määritelmän kohdista:

(VS$_1$) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n : x + y = y + x,$

(VS$_2$) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n : (x + y) + z = x + (y + z),$

(VS$_3$) $\exists 0 \in \mathbf{R}^n : x + 0 = x,$

(VS$_4$) $\forall x \in \mathbf{R}^n : \exists -x \in \mathbf{R}^n : x + (-x) = 0,$

(VS$_5$) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n : \forall a \in \mathbf{R} : a(x + y) = ax + ay,$

(VS$_6$) $\forall x \in \mathbf{R}^n : \forall a, b \in \mathbf{R} : (a + b)x = ax + bx,$

(VS$_7$) $\forall x \in \mathbf{R}^n : \forall a, b \in \mathbf{R} : a(bx) = (ab)x,$

(VS$_8$) $\forall x \in \mathbf{R}^n : 1x = x \ (1 \in \mathbf{R}),$

ja on siis vektoriavaruus.

Määritelmä 1.3.2 Olkoot $x, y \in \mathbf{R}^n$. Tällöin alkioiden x ja y *pistetulo* on

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ (\in \mathbf{R}).$$

Määritelmä 1.3.3 Olkoon $x \in \mathbf{R}^n$. Tällöin alkion x *normi* on

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Normin avulla voimme määritellä myös kahden alkion välisen etäisyyden avaruudessa $\mathbf{R}^n$. Tarkoitamme alkioiden x ja y etäisyydellä alkion $x - y$ normia $|x - y|$.

Tarkastelemme vielä avoimia ja suljettuja joukkoja avaruudessa $\mathbf{R}^n$. Tätä varten otamme käyttöön merkinnät:

$$\begin{array}{rcl} B(x,r) & = & \{y \in \mathbf{R}^n \mid |y - x| < r\}, \\ S(x,r) & = & \{y \in \mathbf{R}^n \mid |y - x| = r\}, \\ \overline{B}(x,r) & = & \{y \in \mathbf{R}^n \mid |y - x| \leq r\}, \end{array}$$

kun $x \in \mathbf{R}^n$ ja $r > 0$.

Määritelmä 1.3.4 Joukko $V \subseteq \mathbf{R}^n$ on *avoin*, jos jokaista $x \in V$ kohti on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x,r) \subseteq V$.

Määritelmä 1.3.5 Joukko $V \subseteq \mathbf{R}^n$ on *suljettu*, jos joukko $\mathbf{R}^n \backslash V$ on avoin.

Edellä olevista määritelmistä ei seuraa, että mielivaltainen joukko on aina avoin tai suljettu. Huomattavaa on, että on olemassa joukkoja, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja. Toisaalta on olemassa joukkoja, jotka eivät ole avoimia, mutta eivät myöskään suljettuja.

Esimerkki 1.3.1 *i)* Joukko $B(x,r)$ on avoin jokaisella $x \in \mathbf{R}^n$ ja $r > 0$.

ii) Joukko $\overline{B}(x,y)$ on suljettu joukko jokaisella $x \in \mathbf{R}^n$ ja $r > 0$.

iii) Joukot $\mathbf{R}^n$ ja $\emptyset$ ovat sekä avoimia että suljettuja.

iv) Puoliavoimet välit $[a,b[\subseteq \mathbf{R}$ eivät ole avoimia eikä suljettuja.

Kohtien *i) - iv)* havaintojen todistukset ovat helppoja ja jätämmekin ne lukijalle.

Lause 1.3.1 *Olkoot joukot $A_i \subseteq \mathbf{R}^n$, missä $i \in I$. Tällöin, jos joukko A_i on avoin jokaisella indeksin i arvolla, niin joukko $\bigcup_{i \in I} A_i$ on avoin. Jos taas joukko A_i on suljettu jokaiselle ideksin i arvolla, niin joukko $\bigcap_{i \in I} A_i$ on myös suljettu.*

Todistus: Jätämme todistuksen yksityiskohdat lukijalle.

$\square$

Lause 1.3.2 *Olkoot joukot $A_i \subseteq \mathbf{R}^n$, missä $i = 1, 2, \ldots, k$. Tällöin, jos joukot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ovat avoimia, niin joukko $\bigcap_{i=1}^k A_i$ on avoin. Jos taas joukot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ovat suljettuja, niin joukko $\bigcup_{i=1}^k A_i$ on suljettu.*

Todistus: Jätämme todistuksen yksityiskohdat lukijalle.

$\square$

Huomautamme, että mielivaltaiset avointen joukkojen leikkaukset eivät välttämättä ole avoimia ja että mielivaltaiset suljettujen joukkojen yhdisteet eivät välttämättä ole suljettuja.

Esimerkki 1.3.2 Merkitsemme $O = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Nyt

$$\bigcup_{r \in \mathbf{R}_+} \overline{B}(O, r) = \mathbf{R}^n,$$

joka on avoin ja

$$\bigcap_{r \in \mathbf{R}_+} B(O, r) = \{O\},$$

joka on suljettu.

Lause 1.3.3 *Olkoon joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$ avoin. Tällöin joukko A voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

missä joukot B_i ovat avoimia kuulia (ts. $B_i = B(x, r)$ jollakin $x \in \mathbf{R}^n$ ja $r > 0$).

Todistus: Koska joukko $\mathbf{Q}$ on numeroituva, niin joukko $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}_+$, missä $\mathbf{Q}_+ = \{q \in \mathbf{Q} \mid q > 0\}$, on numeroituvien joukkojen äärellisenä tulona numeroituva.

Osoitamme, että joukko

$$J = \{(q, r) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}_+ \mid B(q, r) \subseteq A\}$$

on sellainen, että

$$A = \bigcup_{(q,r)\in J} B(q,r),$$

jolloin väite seuraa joukon J numeroituvuudesta.

Olkoon nyt $x \in A$. Koska joukko A on avoin, on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että $B(x,\delta) \subseteq A$. Yleisyyttä rajoittamatta voimme olettaa, että $\delta \in \mathbf{Q}_+$. Koska joukko $\mathbf{Q}^n$ on joukon $\mathbf{R}^n$ tiheä osajoukko, on olemassa sellainen alkio $q \in \mathbf{Q}^n$, että $|x-q| < \frac{\delta}{2}$. Tällöin $x \in B(q, \frac{\delta}{2})$.

Olkoon nyt $y \in B(q, \frac{\delta}{2})$. Tällöin kolmioepäyhtälön perusteella

$$|y-x| \leq |y-q| + |q-x| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

jolloin $y \in B(x,\delta) \subseteq A$. Näin ollen $B(q,\frac{\delta}{2}) \subseteq A$. Koska $q \in \mathbf{Q}^n$ ja $\frac{\delta}{2} \in \mathbf{Q}_+$, niin $(q,\frac{\delta}{2}) \in J$ ja

$$x \in B(q, \frac{\delta}{2}) \subseteq \bigcup_{(q,r)\in J} B(q,r).$$

Näin ollen $A \subseteq \bigcup_{(q,r)\in J} B(q,r)$. Edelleen, koska $B(q,r) \subseteq A$ jokaisella $(q,r) \in J$, niin

$$A = \bigcup_{(q,r)\in J} B(q,r).$$

$\square$

Lause 1.3.4 (Lindelöfin lause) (Vrt. [3, s. 92]) *Olkoon joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$ mielivaltainen ja olkoot joukot V_i, $i \in I$, avoimet ja sellaiset, että $A \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Tällöin on olemassa sellainen numeroituva kokoelma $I_0 \subseteq I$, että $A \subseteq \bigcup_{i\in I_0} V_i$.*

Todistus: Lauseen 1.3.3 nojalla jokainen avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä joukon $\mathbf{R}^n$ avoimia kuulia. Itse asiassa voimme sanoa, että jokainen avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä em. kuulajoukon jonkun osajoukon avoimien kuulien avulla. Toisin sanoen, jos

$$\mathcal{B} = \{B(q,r) \subseteq \mathbf{R}^n \mid q \in \mathbf{Q}^n, r \in \mathbf{Q}_+\},$$

niin jokaista avointa joukkoa G kohti on olemassa sellainen kokoelma $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, että $G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_0} B$.

Olkoon nyt $\mathcal{G} = \{V_i \mid i \in I\}$ joukon A avoin peite. Tällöin jokaista joukkoa V_i kohti on olemassa sellainen kokoelma $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$, että

$$V_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B.$$

Olkoon $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$. Koska $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, niin kokoelma $\mathcal{C}$ on numeroituva. Lisäksi

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B.$$

Valitsemme nyt jokaista joukkoa $B \in \mathcal{C}$ kohti sellaisen indeksin $i \in I$, jolla joukko $B \subseteq V_i$ ja merkitsemme näiden indeksien kokoelmaa symbolilla I_0. Tällöin

$$\bigcup_{i \in I_0} V_i \supseteq \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B = \bigcup_{i \in I} V_i \supseteq A.$$

Näin ollen joukko $\{V_i \mid i \in I_0\}$ on peitteen $\mathcal{G}$ numeroituva osapeite, joka peittää joukon A.

$\square$

Avaruutta X, jossa on voimassa Lindelöfin lause, sanomme Lindelöfin avaruudeksi. Tulemme tarvitsemaan Lindelöfin lausetta muutamassa mittateoria osuuden tarkastelussa.

Luku 2

Mittateoriaa

2.1 Yleistä mittateoriaa

Määritelmä 2.1.1 Olkoon Γ joukkoluokka ja $\sigma : \Gamma \to \overline{\mathbf{R}}$ kuvaus. Sanomme, että kuvaus σ on *täysadditiivinen joukkofunktio*, mikäli

i) Γ on σ-algebra,

ii) $\sigma(\emptyset) = 0$,

iii) joukkojen $E_i \in \Gamma$, missä $i \in \mathbf{N}$, ollessa pistevieraita $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i)$ on määritelty ja $\sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i)$.

Määritelmä 2.1.2 Ei-negatiivinen, täysadditiivinen joukkofunktio on *mitta*.

Lause 2.1.1 *Olkoon kokoelma Γ σ-algebra ja kuvaus $\mu : \Gamma \to [0, \infty]$ mitta. Tällöin kuvaus μ on monotoninen: Jos A on sellainen joukko, että $A \subseteq B$, niin $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Todistus: Olkoot joukot A ja B sellaiset, että $A \subseteq B$. Helposti huomaamme, että $B = (B \backslash A) \cup A$. Koska selvästi joukot $B \backslash A$ ja A ovat erilliset, seuraa mitan μ määritelmästä, että $\mu((B \backslash A) \cup A) = \mu(B \backslash A) + \mu(A)$. Tällöin $\mu(B) = \mu(B \backslash A) + \mu(A)$. Koska mitta μ on ei-negatiivinen, $\mu(B \backslash A) \geq 0$, joten $\mu(A) \leq \mu(B)$. Täten mitta μ on monotoninen.

$\square$

Määritelmä 2.1.3 Olkoon X (perus)joukko, kokoelma $\mathcal{B}$ joukon X σ-algebra ja kuvaus μ σ-algebrassa $\mathcal{B}$ määritelty mitta. Tällöin kutsumme kolmikkoa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *mitta-avaruudeksi.*

Määritelmä 2.1.4 Olkoon kolmikko $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Sanomme mitan μ olevan äärellinen, jos $\mu(X) < \infty$. Edelleen sanomme mitan μ olevan *σ-äärellinen*, jos on olemassa sellaiset joukot $X_i \in \mathcal{B}$, että

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$$

ja $\mu(X_i) < \infty$ jokaisella indeksin i arvolla.

Määritelmä 2.1.5 Olkoon kolmikko $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Jos σ-algebra $\mathcal{B}$ sisältää kaikki nollamitallisten joukkojen osajoukot (ts. jos joukko $B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) = 0$ ja joukko $A \subseteq B$, niin $A \in \mathcal{B}$), niin mitta-avaruus $(X, \mathcal{B}, \mu)$ on *täydellinen.*

Määritelmä 2.1.6 Olkoon X joukko. Kuvaus $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on *ulkomitta* joukossa X, mikäli

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

ii) kuvaus μ^* on monotoninen: Jos $A \subseteq B$, kun $A, B \in X$, niin $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

iii) kuvaus μ^* on subadditiivinen: Jos $E_i \subseteq X$, kun $i \in I$, niin $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$.

Ehdoista *i)* ja *ii)* seuraa, että myös kuvaus μ^* on ei-negatiivinen.

Määritelmä 2.1.7 (Carathéodoryn ehto) Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X. Tällöin joukko $E \subseteq X$ on *μ^*-mitallinen* (tai lyhyemmin mitallinen), jos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

aina, kun $A \subseteq X$.

Koska $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ ja ulkomitta μ^* on subadditiivinen, niin $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$. Osoitettaessa siis joukkoa E μ^*-mitalliseksi (tai lyhyemmin mitalliseksi) riittää osoittaa, että

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

mielivaltaisella joukolla A.

Lause 2.1.2 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta ja joukko E sellainen, että $\mu^*(E) = 0$. Tällöin joukko E on μ^*-mitallinen.*

Todistus: Olkoon A mielivaltainen joukko. Nyt $A \cap E \subseteq E$, joten $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$. Toisaalta $A \cap E^c \subseteq A$, joten

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Täten joukko E on μ^*-mitallinen.

□

Lause 2.1.3 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta ja joukko E μ^*-mitallinen. Tällöin myös joukko E^c on μ^*-mitallinen.*

Todistus: Olkoon joukko A mielivaltainen. Koska joukko E on μ^*-mitallinen,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap (E^c)^c) + \mu^*(A \cap E^c),$$

mistä väite seuraa.

□

Lause 2.1.4 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta ja olkoot joukot $E_1, E_2, \ldots, E_n$ μ^*-mitalliset. Tällöin joukko $\bigcup_{i=1}^n E_i$ on μ^*-mitallinen (kaikilla indeksin n arvoilla).*

Todistus: Osoitamme tämän iduktiolla. Todistusta varten valitsemme mielivaltaisen joukon A.

1°) Olkoot joukot E_1 ja E_2 mitalliset. Tällöin $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_1)^c)$, koska joukko E_1 on mitallinen ja edelleen $\mu^*(A \cap (E_1)^c) = \mu^*((A \cap (E_1)^c) \cap E_2) + \mu^*((A \cap (E_2)^c) \cap (E_2)^c)$, koska joukko E_2 on mitallinen.

Nyt selvästi $(A \cap (E_2)^c) \cap (E_2)^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c$. Edelleen $((A \cap (E_1)^c) \cap E_2) \cup (A \cap E_1) = A \cap (E_1 \cup E_2)$, joten ulkomitan μ^* subadditiivisuuden perustella

$$\mu^*((A \cap (E_1)^c) \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)).$$

Saadaan siis, että mielivaltaisella joukolla A

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_1)^c) \\
&= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*((A \cap (E_1)^c) \cap E_2) + \mu^*((A \cap (E_2)^c) \cap (E_2)^c) \\
&\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c),
\end{aligned}$$

joten joukko $E_1 \cup E_2$ on mitallinen.

2°) Tehdään induktio-oletus, että joukko $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ on mitallinen. Toistamalla edellisen kohdan päättely joukoille $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ja E_{n+1} voidaan osoittaa, että joukko $\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$ on mitallinen.

3°) Väite seuraa nyt induktioperiaatteesta.

□

Lause 2.1.5 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta ja olkoot joukot $E_1, E_2, \ldots, E_n$ μ^*-mitalliset. Tällöin joukko $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ on μ^*-mitallinen (kaikilla indeksin n arvoilla).*

Todistus: Voimme kirjoittaa

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c \right)^c,$$

joten väite seuraa nyt lauseista 2.1.3 ja 2.1.4.

□

Lause 2.1.6 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta ja olkoot joukot E_1 ja E_2 μ^*-mitalliset. Tällöin joukko $E_1 \backslash E_2$ on μ^*-mitallinen.*

Todistus: Helposti näemme, että $E_1 \backslash E_2 = E_1 \cap E_2^c$. Joukko E_2^c on lauseen 2.1.3 nojalla mitallinen ja kahden mitallisen joukon leikkaus on lauseen 2.1.5 mukaan mitallinen. Täten olemmekin todistaneet väitteen.

$\square$

Lause 2.1.7 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta ja olkoot E_i, missä $i \in \mathbf{N}$, sellaiset μ^*-mitalliset joukot, että $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$. Tällöin on olemassa sellaiset pareittain erilliset, μ^*-mitalliset joukot F_i, että $F_i \subseteq E_i$ ja*

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i.$$

Todistus: Moudostamme joukkojonon F_i seuraavasti. Olkoon $F_0 = E_0$ ja

$$F_i = E_i \backslash \bigcup_{k=0}^{i-1} E_k.$$

Nyt joukko F_0 on selvästi mitallinen. Toisaalta lauseiden 2.1.4 ja 2.1.6 nojalla joukot F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ovat mitalliset. Edelleen selvästi $F_i \subseteq E_i$ jokaisella indeksin i arvolla.

Osoitamme vielä, että $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ ja että joukot F_i ovat pareittain erilliset.

Jos joukko $E = \emptyset$, niin selvästi $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$. Oletamme nyt, että $E \neq \emptyset$ ja valitsemme mielivaltaisen alkion $x \in E$. Tällöin $x \in E_i$, jollakin indeksin i arvolla. Jos nyt $x \in E_j$ jokaisella indeksin j arvolla, jolla $j < i$, niin $x \in E_0$. Tällöin, koska $F_0 = E_0$, $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$. Muussa tapauksessa on olemassa pienin sellainen luku $j < i$, että $x \in E_j$, mutta $x \notin E_k$, kun $k < j$. Tällöin siis $x \in E_j$ ja $x \notin \bigcup_{i=0}^{j-1} E_i$, joten $x \in E_j \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} = F_j$ ja edelleen $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$. Olemme siis osoittaneet, että $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ $(*)$.

Jos $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i = \emptyset$, niin selvästi $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \subseteq E$. Jos taas $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \neq \emptyset$, niin valitaan mielivaltainen $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$. Tällöin $x \in F_i$, jollakin indeksin i arvolla. Joukon F_i määritelmän nojalla siis $x \in E_i \backslash \bigcup_{k=0}^{i-1} E_k$. Erityisesti siis $x \in E_i$, jollakin indeksin i arvolla, joten $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = E$. Olemme siis osoittaneet, että $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \subseteq E$ $(**)$.

Nyt ehdoista $(*)$ ja $(**)$ seuraa, että $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i = E$.

Olkoot nyt i ja j sellaiset indeksit, että $i \neq j$. Yleisyyttä rajoittamatta voimme olettaa, että $i < j$. Teemme vastaoletuksen, että $F_i \cap F_j \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa sellainen alkio x, että $x \in F_i$ ja $x \in F_j$. Nyt koska $x \in F_i$, niin joukon F_i määritelmän nojalla $x \in E_i$. Tällöin, koska $i < j$, $x \in \bigcup_{k=0}^{j-1} E_k$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $x \in F_j$. On siis oltava, että $F_i \cap F_j = \emptyset$, mikä pitikin osoittaa.

□

Lause 2.1.8 (Vrt. [4, s. 8]) *Merkitköön M ulkomitan μ^* suhteen mitallisten joukkojen luokkaa ja μ funktion μ^* rajoittumaa luokkaan M. Tällöin funktio μ on mitta.*

Todistus: Osoitamme tämän useassa vaiheessa.

i) Ulkomitan μ^* määritelmän nojalla $\mu^*(\emptyset) = 0$, joten tyhjä joukko on mitallinen lauseen 2.1.2 nojalla. Siis $\emptyset \in M$.

ii) Olkoon E sellainen joukko, että $E \in M$. Tällöin lauseen 2.1.3 nojalla myös joukko $E^c \in M$.

iii) Oletamme, että joukot $E_i \in M$, kun $i \in \mathbf{N}$. Osoitamme nyt, että $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} E_i \in M$. Lauseen 2.1.7 nojalla on olemassa sellaiset pareittain erilliset, mitalliset joukot F_i, että $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} E_i = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i$, joten riittää osoittaa, että $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i \in M$. Merkitään $S_n = \bigcup_{i=0}^{n} F_i$ ja osoitetaan induktiolla, että tällöin, kun $n \geq 0$,

$$\mu^*(A \cap S_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu^*(A \cap F_i).$$

Tapaus $n = 0$ on selvä. Lauseen 2.1.4 perusteella joukko S_n on mitallinen, joten $\mu^*(A \cap S_{n+1}) = \mu^*(A \cap S_{n+1} \cap S_n) + \mu^*(A \cap S_{n+1} \cap (S_n)^c)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap S_{n+1}) &= \mu^*(A \cap S_{n+1} \cap S_n) + \mu^*(A \cap S_{n+1} \cap (S_n)^c) \\
&= \mu^*(A \cap S_n) + \mu^*(A \cap F_{n+1}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n} \mu^*(A \cap F_i) + \mu^*(A \cap F_{n+1}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n+1} \mu^*(A \cap F_i),
\end{aligned}$$

mikä oli osoitettavakin. Merkitään seuraavaksi $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$. Nyt siis $S_n \subseteq S$, kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Tällöin ulkomitan μ^* monotonisuuden ja äsken todistetun perusteella on voimassa, että

$$\mu^*(A \cap S) \geq \mu^*(A \cap S_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu^*(A \cap F_i).$$

Nyt kun $n \to \infty$, nähdään joukon S määritelmän nojalla, että

$$\mu^*(A \cap S) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A \cap F_i).$$

Käänteinen epäyhtälö on voimassa ulkomitan μ^* subadditiivisuuden perusteella, joten

$$\mu^*(A \cap S) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A \cap F_i).$$

Lisäksi mielivaltaisella joukolla A on voimassa, että

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap S_n) + \mu^*(A \cap (S_n)^c) \\ &\geq \textstyle\sum_{i=0}^{n} \mu^*(A \cap F_i) + \mu^*(A \cap S^c). \end{aligned}$$

Antamalla nyt $n \to \infty$ ja käyttämällä edellä todistettua saadaan vihdoin, että

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \cap S^c),$$

joten joukko S on siis mitallinen. Siis $S = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} E_i \in M$.

Nyt kohdista *i), ii)* ja *iii)* seuraa, että joukkoluokka M on σ-algebra. Osoitamme vielä, että ulkomitan μ^* rajoittuma μ σ-algebraan M on mitta.

iv) Olkoot E_i, missä $i \in \mathbf{N}$, pareittain erilliset joukot σ-algebrasta M ja A mielivaltainen joukko. Nyt kohdan *iii*) nojalla joukko $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} E_i$ on mitallinen, joten $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i)$ on määritelty. Vielä pitää osoittaa, että funktio μ on täysadditiivinen. Edellisen kohdan nojalla pareittain erillisille joukoille E_i on voimassa $\mu^*(A \cap S) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$, missä $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ ja joukko A mielivaltainen. Asetamme nyt $A = S$, jolloin siis

$$\mu(S) = \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i)$$

ja funktio μ on täysadditiivinen.

$\square$

Lause 2.1.9 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta ja olkoot joukot E_i, $i \in \mathbf{N}$, μ^*-mitalliset. Tällöin joukot $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ ja $\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$ ovat μ^*-mitalliset.*

Todistus: Lauseen 2.1.3 mukaan joukot E_i^c ovat mitalliset. Edelleen joukko $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^c$ on mitallinen lauseen 2.1.8 kohdan *iii*) nojalla. Toisaalta

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^c \right)^c$$

ja lauseen 2.1.3 nojalla mitallisen joukon komplementti on mitallinen, joten myös joukko $\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$ on mitallinen.

$\square$

Määritelmä 2.1.8 Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Tarkastelemme jotakin ominaisuutta P ja merkitsemme $P(x)$, mikäli ominaisuus P on voimassa alkiolla $x \in X$. Jos nyt

$$\mu(\{x \in X \mid \neg P(x)\}) = 0,$$

sanomme, että ominaisuus P on voimassa melkein kaikkialla (m.k.).

Olisi luonnollista ajatella näitä nollamitallisia joukkoja "poikkeusjoukkoina". Tuntuisi luontevalta, että poikkeusjoukon osajoukotkin olisivat aina poikkeusjoukkoja. Näin ei kuitenkaan aina ole; voi olla, että $\mu(A) = 0$ $(A \in \mathcal{B})$, mutta jollekin $A' \subseteq A$ pätee $A' \notin \mathcal{B}$. Tällaisia ongelmia ei synny, mikäli tarkasteltava mitta μ on täydellinen.

2.2 Lebesguen mitta

Tässä kappaleessa tarkastelemme Lebesguen mittaa euklidisessa avaruudessa $\mathbf{R}^n$. Kutsumme joukkoa $I \subseteq \mathbf{R}^n$ *n-väliksi*, jos

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n,$$

missä kukin joukko I_j on avaruuden $\mathbf{R}$ väli. Sanomme, että n-väli I on avoin (suljettu), jos *jokainen* väleistä I_j on avoin (suljettu).

Määritelmä 2.2.1 Olkoon $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ sellainen n-väli, että välien I_j päätepisteet ovat a_j ja b_j; $a_j < b_j$. Tällöin n-välin I *geometrinen mitta* l on

$$l(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

Erityisesti $l(\emptyset) = 0$.

Geometrisella mitalla l on yhteys Riemannin integraaliin. Nimittäin, jos I on n-väli kuten edellä ja $\chi_I : \mathbf{R}^n \to \{0, 1\}$ on joukon I karakteristinen funktio (ks. määritelmä 3.1.3), niin valitsemalla sellainen n-väli Q, että $I \subseteq Q$, saadaan

$$\int_Q \chi_I = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n) = l(I).$$

Lause 2.2.1 *Olkoot joukot I ja $I_0, \ldots, I_k$ sellaisia n-välejä, että $I \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} I_i$. Tällöin $l(I) \leq \sum_{i=0}^{k} l(I_i)$. Jos lisäksi leikkauksilla $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, ei ole sisäpisteitä ja $I = \bigcup_{i=0}^{k} I_i$, niin $l(I) = \sum_{i=0}^{k} l(I_i)$.*

Todistus: Todistuksen yksityiskohdat jätämme lukijalle.

□

Jatkossa tavoitteenamme on määritellä Lebesguen mitta m_n kuvauksena

$$m_n : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, \infty],$$

joka toteuttaisi seuraavat ehdot:

i) $m_n(E)$ on määritelty jokaisella joukolla $E \subseteq \mathbf{R}^n$ ja $m_n(E) \geq 0$.

ii) n-välille I on voimassa $m_n(I) = l(I)$.

iii) Kuvaus m_n on (numeroituvasti) täysadditiivinen: Jos joukot E_k ovat pareittain erillisiä, niin

$$m_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m_n(E_k).$$

iv) Kuvaus m_n on siirtoinvariantti: Kun $E \subseteq \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$ ja joukko $E+x = \{y + x \mid y \in E\}$, niin

$$m_n(E + x) = m_n(E).$$

Myöhemmin osoittautuu kuitenkin, että ehdot $i) - iv)$ eivät voi olla samaan aikaan voimassa. Lebesguen mittaa määritellessämme joudumme siis heikentämään jotakin yo. ehdoista. Meidän kannaltamme on tarkoituksenmukaisinta heikentää ehtoa $i)$. Haluamme, että $m_n(E)$ olisi määritelty mahdollisimman monella joukolla E. Määrittelemmekin Lebesguen mitan siten, että kaikki joukot $E \subseteq \mathbf{R}^n$ eivät välttämättä ole Lebesgue-mitallisia, mutta kuitenkin niin, että ehdot $ii) - iv)$ ovat voimassa.

Myös Lebesgue esitti ratkaisun ehtojen $i) - iv)$ synnyttämään problematiikkaan. Hänen ideansa oli rajoittaa osajoukkoja, joita voidaan mitata. Hän tulikin määritelleeksi mitallisten joukkojen perheen joille Lebeguen mitta on määritelty ja toteuttaa ehdot $ii) - iv)$.

Asetetut ehdot ovat muussakin mielessä ongelmalliset, sillä ei ole ollenkaan selvää, onko ylipäätään olemassa sellaista joukkofunktiota, joka toteuttaisi vaadituista ehdoista kolme ensimmäistä. Tällaisen funktion olemassaolo nimittäin riippuu kontinuumihypoteesista. Jos oletamme, että kontinuumihypoteesi on voimassa, on tällaisen joukkofunktion konstruointi mahdotonta. Tähän asiaan emme kuitenkaan paneudu tässä sen enempää.

Esimerkki 2.2.1 Oletamme, että kuvaus $m_1 : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to [0, \infty]$ toteuttaa edellä olleet ehdot *i)-iv)*, ja lisäksi ehdossa *iii)* sallitaan mielivaltaisen monen joukon yhdisteet. Tällöin voimme kirjoittaa

$$[0, 1] = \bigcup_{0 \leq x \leq 1} \{x\}.$$

Joukkoa $[0, 1]$ voidaan pitää avaruuden $\mathbf{R}$ n-välinä, joten $m_1([0, 1]) = 1$. Jos oletamme, että $m_1(\{x\}) = 0$, niin

$$1 = m_1([0, 1]) = \sum_{x \in [0,1]} m_1(\{x\}) = \sum_{x \in [0,1]} 0,$$

missä tulee ylitsepääsemättömiä vaikeuksia, jos tulkitaan nollien (vaikkakin ylinumeroituva) summa aina nollaksi. Jos taas olisi $m_1(\{x\}) = a > 0$, niin voitaisiin kai sanoa, että $\sum_{x \in [0,1]} a = \infty$ ja jälleen olisimme hankaluuksissa.

Edellisen esimerkin valossa onkin järkevää vaatia kohdassa *iii*) additiivisuus vain numeroituville yhdisteille.

Määritelmä 2.2.2 Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}^n$ joukko. Kokoelma $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$, missä kukin joukko $I_k \subseteq \mathbf{R}^n$ on rajoitettu, avoin n-väli (tai $\emptyset$), on joukon A *Lebesguen peite*, jos

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Lause 2.2.2 (Vrt. [7, s. 55] ja [6, s. 7]) *Funktio* $m_n^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, \infty]$, *missä*

$$m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

on ulkomitta joukossa $\mathbf{R}^n$.

Todistus:

i) Selvästi $m_n^*(\emptyset) = 0$.

ii) Olkoot A ja B sellaiset joukot, että $A \subseteq B$. Olkoon $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ joukon B Lebesguen peite. Tällöin

$$A \subseteq B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

joten kokoelma $\mathcal{F}$ on myös joukon A Lebesguen peite. Selvästi siis

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\} \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Tästä edelleen seuraa, että

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Tällöin siis $m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$, mikä oli osoitettavakin.

iii) Suoraan funktion m_n^* määritelmästä seuraa (infimumin ε-ominaisuuden nojalla), että jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen joukon A Lebesguen peite $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \leq m_n^*(A) + \varepsilon.$$

Olkoon nyt $\varepsilon > 0$ ja $E_i \subseteq \mathbf{R}^n$, kun $i \in I$. Merkitään $E = \bigcup_i E_i$. Olkoon nyt kokoelma $\mathcal{F}_i = \{I_{i1}, I_{i2}, \ldots\}$ joukon E_i sellainen Lebesguen peite, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{ik}) \leq m_n^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Helposti nähdään, että kokoelma $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$ on joukon E Lebesguen peite. Nyt funktion m_n^* määritelmän mukaan

$$m_n^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} l(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{ik}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(E_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(E_i) + \varepsilon$$

Koska luku ε oli mielivaltainen on oltava, että

$$m_n^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(E_i).$$

Tällöin siis

$$m_n^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(E_i),$$

eli funktio m_n^* on subadditiivinen.

$\square$

Määritelmä 2.2.3 Joukon $A \subseteq \mathbf{R}^n$ (n-ulotteinen) *Lebesguen ulkomitta* on $m_n^*(A)$.

Merkitsemme avaruuden $\mathbf{R}^n$ Lebesgue-mitallisten joukkojen luokkaa $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Nyt lauseen 2.1.8 mukaan Lebesguen ulkomitan m_n^* rajoittuma m_n joukkoluokkaan $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ on mitta. Myohemmin osoitamme, että on olemassa joukkoja, jotka eivät ole Lebesgue-mitallisia (ts. että $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$).

Esimerkki 2.2.2 Tarkastelemme avaruutta $\mathbf{R}^2$. Olkoon A eräs jana tasossa. Merkitsemme $A = \{(x,0) \mid a \leq x \leq b\}$. Olkoon nyt luku $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja joukko $I_\varepsilon =]a-\varepsilon, b+\varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Tällöin joukko I_ε on avoin n-väli ja $A \subseteq I_\varepsilon$, joten

$$0 \leq m_2^*(A) \leq l(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b-a+2\varepsilon).$$

Nyt $2\varepsilon(b-a+2\varepsilon) \to 0$, kun $\varepsilon \to 0$, joten $m_2^*(A) = 0$.

Esimerkki 2.2.3 Rationaalilukujen joukko $\mathbf{Q}$ on numeroituva, joten voimme kirjoittaa $\mathbf{Q} = \{q_j \mid j \in \mathbf{Z}_+\}$. Olkoon nyt luku $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt jokaista indeksin arvoa j kohti, olkoon

$$I_j = \left] q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \right[.$$

Nyt I_j on avoin väli ja $l(I_j) = \frac{2\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2^j}$. Selvästi $\mathbf{Q} \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$, joten

$$0 \leq m_1^*(\mathbf{Q}) \leq \sum_{j=1}^\infty l(I_j) = \sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = \varepsilon.$$

Koska luku ε on mielivaltainen, niin $m_1^*(\mathbf{Q}) = 0$.

Lause 2.2.3 *Jos joukko $I \subseteq \mathbf{R}^n$ on n-väli, niin $m_n^*(I) = l(I)$.*

Todistus: (Vrt. [7, s. 54]) Olkoon joukko I n-väli. Valitsemme nyt mielivaltaisen luvun $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen avoin n-väli J, että $I \subseteq J$ ja $l(J) \leq l(I) + \varepsilon$. Koska joukko $\{J\}$ on n-välin I Lebesguen peite, niin selvästi $m_n^*(I) \leq l(J)$ ja edelleen $m_n^*(I) \leq l(I) + \varepsilon$. Nyt, koska luku ε on mielivaltainen, $m_n^*(I) \leq l(I)$.

Osoittaaksemme, että $l(I) \leq m_n^*(I)$, oletamme ensin, että n-väli I on suljettu. Olkoon kokoelma $\mathcal{F}$ n-välin I Lebesguen peite. Koska n-väli I on suljettu ja rajoitettu, on se kompakti, joten on olemassa äärellinen alipeite $\mathcal{F}_0 = \{I_0, \ldots, I_k\} \subseteq \mathcal{F}$. Nyt lauseen 2.2.1 mukaan $l(I) \leq \sum_{i=0}^k l(I_i)$, joten selvästi $l(I) \leq m_n^*(I)$.

Oletamme sitten, että n-väli I ei ole suljettu ja valitsemme mielivaltaisen luvun $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen suljettu n-väli J, että $J \subseteq I$ ja $l(J) \geq l(I) - \varepsilon$. Nyt, koska funktio m_n^* on monotoninen, $m_n^*(I) \geq m_n^*(J)$. Koska n-väli J on suljettu, on edellä todistetun nojalla on voimassa $m_n^*(J) = l(J)$, joten $m_n^*(I) \geq l(I) - \varepsilon$. Koska luku ε on mielivaltainen, niin $m_n^*(I) \geq l(I)$.

Olemme siis osoittaneet, että $m_n^*(I) = l(I)$ aina, kun joukko I on n-väli.

$\square$

Lause 2.2.4 *Jos joukko $I \subseteq \mathbf{R}^n$ on n-väli, niin joukko I on Lebesgue-mitallinen ja $m_n(I) = l(I)$.*

Todistus: Lauseen 2.2.3 nojalla riittää osoittaa, että mielivaltainen n-väli I on Lebesgue-mitallinen ts. aina, kun joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$, niin

$$m_n^*(A) \geq m_n^*(A \cap I) + m_n^*(A \cap I^c).$$

Olkoon joukko $I \subseteq \mathbf{R}^n$ n-väli ja joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Todistusta varten valitsemme mielivaltaisen luvun $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen joukon A Lebesguen peite $\mathcal{F} = \{J_0, J_1, \ldots\}$, että $\sum_{i=0}^{\infty} l(J_i) \leq m_n^*(A) + \varepsilon$. Merkitsemme nyt $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, missä joukot $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ovat avaruuden $\mathbf{R}$ välejä. Merkitsemme myös $J_i = J_{i0} \times J_{i1} \times \cdots \times J_{in}$, missä joukot $J_{i0}, J_{i1}, \ldots, J_{in}$ ovat avoimia avaruuden $\mathbf{R}$ välejä (merkintä on mahdollinen, sillä joukot J_i ovat Lebesguen peitteen jäseninä avoimia). Tällöin voimme kirjoittaa

$$J_i \cap I = (J_{i0} \cap I_0) \times (J_{i1} \cap I_1) \times \cdots \times (J_{in} \cap I_n),$$

joten selvästi joukko $J_i \cap I = \emptyset$ tai $J_i \cap I = J_i'$, missä J_i' on n-väli. Nyt joukko $J_i \backslash I$ ei välttämättä ole n-väli, mutta helpohkosti huomaamme, että on olemassa sellainen äärellinen joukko n-välejä, sanokaamme $J_{i0}'', J_{i1}'', \ldots, J_{ik}''$, että $J_i \backslash I = \bigcup_k J_{ik}''$ ja leikkauksilla $J_i' \cap J_{ik}''$ ja $J_{ih}'' \cap J_{ik}''$ $(h \neq k)$ ei ole sisäpisteitä.

Nyt $J_i = J_i' \cup (\bigcup_k J_{ik}'')$, joten voimme lauseen 2.2.1 nojalla sanoa, että $l(J_i) = l(J_i') + \sum_k l(J_{ik}'')$. Edelleen lauseen 2.2.3 mukaan saamme $l(J_i) = m_n^*(J_i') + \sum_k m_n^*(J_{ik}'')$, joten voimme kirjoittaa

$$m_n^*(A) + \varepsilon \geq \sum_i l(J_i) = \sum_i m_n^*(J_i') + \sum_i \sum_k m_n^*(J_{ik}'').$$

Ulkomitta m_n^* on subadditiivinen, joten

$$\sum_i m_n^*(J_i') + \sum_i \sum_k m_n^*(J_{ik}'') \geq m_n^*(\bigcup_i J_i') + m_n^*(\bigcup_i (\bigcup_k J_{ik}'')).$$

Osoitamme nyt, että $A \cap I \subseteq \bigcup_i J_i'$ ja $A \cap I^c \subseteq \bigcup_i (\bigcup_k J_{ik}'')$. Jos joukko $A \cap I = \emptyset$, niin asia on selvä. Muussa tapauksessa valitsemme mielivaltaisen alkion $x \in A \cap I$. Nyt $x \in A$, joten $x \in J_k$, jollakin indeksin arvolla k, joten $x \in J_k \cap I$ ja edelleen $x \in J'_k$ jollakin indeksin arvolla. Siis $x \in \bigcup_i J'_i$, joten $A \cap I \subseteq \bigcup_i J'_i$.

Jos joukko $A \cap I^c = \emptyset$, niin asia on selvä. Muussa tapauksessa valitsemme mielivaltaisen alkion $x \in A \cap I^c$. Tällöin $x \in J_i$ ja $x \notin I$, jollakin indeksin arvolla. Nyt $x \in J_i \backslash I = \bigcup_k J''_{ik}$, joten $x \in \bigcup_i (\bigcup_k J''_{ik})$. Siis $A \cap I^c \subseteq \bigcup_i (\bigcup_k J''_{ik})$.

Nyt ulkomitan monotonisuuden nojalla saamme

$$m_n^*(A) + \varepsilon \geq m_n^*(A \cap I) + m_n^*(A \cap I^c).$$

koska nyt luku ε oli mielivaltainen on oltava, että

$$m_n^*(A) \geq m_n^*(A \cap I) + m_n^*(A \cap I^c),$$

joten n-väli I on siis Lebesgue-mitallinen.

□

Lause 2.2.5 *Olkoon joukko $E \subseteq \mathbf{R}^n$. Tällöin*

$$m_n^*(E + x) = m_n^*(E)$$

aina, kun $x \in \mathbf{R}^n$.

Todistus: Tarkastelemme aluksi avointa n-väliä $J =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots]a_n, b_n[$. Olkoon nyt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Tällöin

$$J + x =]a_1 + x_1, b_1 + x_1[\times]a_2 + x_2, b_2 + x_2[\times \cdots]a_n + x_n, b_n + x_n[,$$

joten

$$l(J + x) = \prod_{i=1}^{n} ((b_i + x_i) - (a_i + x_i)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = l(J).$$

Olkoon nyt ε ja $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ sellainen joukon E Lebesguen peite, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \leq m_n^*(E) + \varepsilon.$$

Selvästi jokainen joukko $I_j + x$ on rajoitettu ja avoin n-väli. Lisäksi, jos $y \in E + x$, niin $y - x \in E$, joten on olemassa sellainen indeksin j arvo, että

$y - x \in I_j$. Tällöin $y \in I_j + x$. Näin ollen jono $\{I_j + x\}_{j=1}^{\infty}$ on joukon $E + x$ peite. Nyt

$$m_n^*(E + x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j + x) = \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \leq m_n^*(E) + \varepsilon.$$

Koska luku ε on mielivaltainen, $m_n^*(E + x) \leq m_n^*(E)$.

Toisaalta voimme kirjoittaa $E = (E + x) - x = (E + x) + (-x)$, jolloin

$$m_n^*(E) = m_n^*((E + x) + (-x)) \leq m_n^*(E + x).$$

Täten olemme todistaneet väitteen.

$\square$

Lause 2.2.6 *Olkoon joukko $E \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mitallinen ja $x \in \mathbf{R}^n$. Tällöin joukko $E + x$ on Lebesgue-mitallinen ja $m_n(E + x) = m_n(E)$.*

Todistus: Edellisen lauseen nojalla riittää osoittaa, että joukko $E + x$ on mitallinen. Valitaan siis mielivaltainen $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Nyt $m_n^*(A) = m_n^*(A - x)$ edellisen lauseen nojalla. Lisäksi, koska joukko E on mitallinen, niin

$$m_n^*(A - x) = m_n^*((A - x) \cap E) + m_n^*((A - x) \cap E^c).$$

Koska $((A - x) \cap E) + x = A \cap (E + x)$ ja $((A - x) \cap E^c) + x = A \cap (E + x)^c$, niin saamme

$$m_n^*(A) = m_n^*(A \cap (E + x)) + m_n^*(A \cap (E + x)^c),$$

mikä pitikin osoittaa.

$\square$

Edelläolevat lauseet siis osoittavat, että Lebesgue-mitallisuus toteuttaa aikaisemmin tämän kappaleen alussa mainitsemamme ehdot $ii) - iv)$. Seuraavaksi osoitammekin, että ehto $i)$ ei ole enää voimassa ts. että $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$. Itse asiassa yksinkertaisuuden vuoksi osoitamme väitteen tapauksessa $n = 1$, mutta vastaava esimerkki on löydettävissä myös yleisessä tapauksessa.

Lause 2.2.7 *On olemassa sellainen joukko $F \subseteq \mathbf{R}$, että $F \notin \mathcal{L}(\mathbf{R})$.*

Todistus: (Vrt. [4, s. 15]) Olkoon luku ξ mielivaltainen irrationaaliluku tai $= 0$. Lisäksi merkitsemme $E_\xi = \{\xi + q \mid q \in \mathbf{Q}\}$. Nyt selvästi $E_{\xi_1} \cap E_{\xi_2} = \emptyset$, jos $E_{\xi_1} \neq E_{\xi_2}$. Valitsemme nyt jokaisesta joukosta E_ξ täsmälleen yhden sellaisen alkion η, että $0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}$ (mikäli $E_{\xi_1} = E_{\xi_2}$, valitsemme saman alkion η). Olkoon joukko F alkioiden η kokoelma. Osoitamme seuraavaksi, että yllä olevalla tavalla konstruoitu joukko F ei ole Lebegue-mitallinen.

Olkoon k sellainen kokonaisluku, että $k \geq 2$, ja olkoon joukko $F_k = \{\eta + \frac{1}{k} \mid \eta \in F\}$. Tällöin $F_k \cap F_j = \emptyset$, jos $k \neq j$. Nimittäin muutoin $\eta_1 + \frac{1}{k} = \eta_2 + \frac{1}{j}$, missä luku $\eta_1 \in E_{\xi_1}$ ja luku $\eta_2 \in E_{\xi_2}$ ja $E_{\xi_1} \cap E_{\xi_2} = \emptyset$, sillä $\eta_1 \neq \eta_2$. Tällöin

$$\xi_1 + r_1 + \frac{1}{k} = \xi_2 + r_2 + \frac{1}{j},$$

missä luvut r_1 ja r_2 ovat rationaalilukuja. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällöin $E_{\xi_1} \cap E_{\xi_2} \neq \emptyset$, mikä on ristiriidassa aikaisemmin olettamamme kanssa.

Teemme nyt vastaoletuksen, että joukko F on mitallinen. Tällöin lauseen 2.2.5 mukaan joukot F_k $(k \geq 2)$ ovat myös mitalliset ja $m(F_k) = m(F)$. Koska joukot F_k ovat siis pareittain erilliset ja sisältyvät suljettuun väliin $[0, 1]$, niin

$$am(F) = \sum_{k=2}^{a+1} m(F_k) \leq 1,$$

kaikilla kokonaisluvuilla a. Täten $m(F) = 0$.

Tarkastelemme seuraavaksi joukkoa $G_r = \{r + \eta \mid \eta \in F\}$, missä luku r on rationaaliluku. Nyt $m(G_r) = 0$. Jos luvut r ja s ovat erisuuret rationaaliluvut, niin $G_r \cap G_s = \emptyset$. Täten koska

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{r_n} =]-\infty, \infty[,$$

niin $m(]-\infty, \infty[) = 0$, mikä on mahdotonta. Tekemämme vastaoletus on siis väärin, joten olemme osoittaneet, että on olemassa joukko F, joka ei ole Lebesgue-mitallinen.

$\square$

Esimerkki 2.2.4 Olkoon joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$ avoin ja epätyhjä. Valitsemme nyt mielivaltaisen alkion $x \in A$. Tällöin on olemassa sellainen avoin n-väli

I_x, että $I_x \subseteq A$ (on olemassa avoin kuula $B(x, r_x) \subseteq A$ ja sen sisällä avoin n-väli). Tällöin joukko $\{I_x \mid x \in A\}$ on joukon A avoin peite. Nyt Lindelöfin lauseen nojalla on olemassa numeroituva alipeite $\{I_{x_i} \mid i \in \mathbf{N}\}$, joka peittää joukon A. Koska jokainen n-väli $I_{x_i} \subseteq A$, niin

$$A = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} I_{x_i}.$$

Siis joukko A on mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä mitallinen.

2.3 Carathéodoryn laajennuslause

Oletamme tässä kappaleessa, että tarkastelut tapahtuvat perusjoukossa X. Tämän joukon algebroja (σ-algebroja) merkitsemme kirjaimin $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ja niin edelleen.

Tähän mennessä olemme tarkastelleet ulkomitan käsitettä ja todenneet, että ulkomitan μ^* suhteen mitallisten joukkojen luokka M on σ-algebra. Olemme myös todistaneet, että ulkomitan μ^* rajoittuma joukkoloukkaan M on aina mitta. Huomattavaa tässä kohtaa on, että on olemassa myös mittoja, joita ei saada minkään ulkomitan rajoittumana.

Tässä kappaleessa lähtökohtanamme on kuvaus, josta käytämme termiä "mitta algebrassa". Aloitamme määrittelemällä tämän käsitteen.

Määritelmä 2.3.1 Olkoon kokoelma $\mathcal{A}$ algebra joukossa X ja $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ kuvaus. Tällöin kuvaus μ on *mitta algebrassa* $\mathcal{A}$, mikäli

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) jos joukot $A_i \in \mathcal{A}$ ovat pareittain erilliset ja sellaiset, että $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, niin
$$\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

Selvästi mitta algebrassa $\mathcal{A}$ on mitta, jos ja vain jos joukko $\mathcal{A}$ on σ-algebra. Tämän kappaleen tarkoituksena on osoittaa, että mikäli meillä on mitta μ algebrassa $\mathcal{A}$, voimme laajentaa kuvauksen mitaksi, joka on määritelty sellaisessa σ-algebrassa $\mathcal{B}$, että $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Ensin annettua mittaa μ hyväksi käyttäen konstruoimme ulkomitan μ^* ja osoitamme, että tämän ulkomitan rajoittuma $\bar{\mu}$ μ^*-mitallisiin joukkoihin on haluamamme laajennus.

Lause 2.3.1 *Olkoon joukko $A \in \mathcal{A}$ ja joukot $A_i \in \mathcal{A}$ sellaiset, että $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Tällöin $\mu(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$.*

Todistus: (Vrt. [7, s. 254]) Asetamme

$$B_n = A \cap A_n \cap A_{n-1}^c \cap \cdots \cap A_0^c.$$

Nyt selvästi joukot $B_n \in \mathcal{A}$ ja $B_n \subseteq A_n$. Edelleen $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, missä joukot B_n ovat pareittain erilliset, joten kuvauksen μ määritelmän kohdan *ii)* nojalla $\mu(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_n)$. Koska kuvaus μ on (soveltaen) lauseen 2.1.1 nojalla monotoninen, niin $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n)$. Täten $\mu(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$.

$\square$

Konstruoimme kuvauksen μ^* vastaavasti kuin Lebesguen ulkomitan tapauksessa.

Määritelmä 2.3.2 Olkoon kokoelma $\mathcal{A}$ algebra ja kuvaus μ mitta algebrassa $\mathcal{A}$. Olkoon μ^* kuvaus joukossa X. Asetamme

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i),$$

missä joukot $A_i \in \mathcal{A}$ ovat sellaiset, että $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Tällöin sanomme, että kuvaus μ^* on kuvauksen μ *indusoima ulkomitta.*

Lause 2.3.2 *Olkoon kuvaus μ mitta algebrassa $\mathcal{A}$ ja μ^* mitan μ indusoima ulkomitta. Tällöin kuvaus μ^* on ulkomitta.*

Todistus: Vastaava kuin Lebesguen ulkomitan tapauksessa (vrt. lause 2.2.2)

$\square$

Merkitsemme ulkomitan μ^* rajoittumaa sen suhteen mitallisiin joukkoihin symbolilla $\bar{\mu}$. Nyt lauseen 2.1.8 mukaan μ^*-mitalliset joukot muodostavat σ-algebran ja kuvaus $\bar{\mu}$ on mitta.

Lause 2.3.3 *Olkoon kuvaus μ^* ulkomitta, ja mitta $\bar{\mu}$ kuvauksen μ^* rajoittuma μ^*-mitallisiin joukkoihin. Tällöin mitta $\bar{\mu}$ on täydellinen.*

Todistus: Olkoon B sellainen μ^*-mitallinen joukko, että $\mu^*(B) = 0$. Olkoon nyt A sellainen joukko, että $A \subseteq B$. Tällöin, koska ulkomitta μ^* on monotoninen, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = 0$, joten $\mu^*(A) = 0$. Nyt lauseen 2.1.2 nojalla joukko A on μ^*-mitallinen, joten ulkomitan μ^* suhteen mitallisten joukkojen luokka sisältää kaikki nollamitallisten joukkojen osajoukot. Täten mitta $\bar{\mu}$ on täydellinen.

$\square$

Lause 2.3.4 *Olkoon kuvaus μ mitta algebrassa $\mathcal{A}$ ja μ^* mitan μ indusoima ulkomitta. Tällöin jos joukko $A \in \mathcal{A}$, niin $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Todistus: Väite seuraa suoraan kuvauksen μ^* määritelmästä.

$\square$

Lause 2.3.5 *Olkoon kuvaus μ mitta algebrassa $\mathcal{A}$ ja μ^* mitan μ indusoima ulkomitta. Tällöin jos joukko $A \in \mathcal{A}$, niin joukko A on μ^*-mitallinen.*

Todistus: (Vrt. [7, s. 255]) Olkoon joukko $A \in \mathcal{A}$ ja $E \in X$ sellainen joukko, että $\mu^*(E) < \infty$. Todistusta varten valitsemme mielivaltaisen luvun $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset joukot $A_i \in \mathcal{A}$, että $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ ja

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Koska $A_i = (A_i \cap A) \cup (A_i \cap A^c)$ ja kuvaus μ on täysadditiivinen algebrassa $\mathcal{A}$, niin $\mu(A_i) = \mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \cap A^c)$ jokaisella indeksin i arvolla. Nyt

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i \cap A^c).$$

Edelleen, koska $E \cap A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty}(A_i \cap A)$ ja $E \cap A^c \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty}(A_i \cap A^c)$, niin

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Koska luku ε on mielivaltainen, niin

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),$$

ja joukko A täten μ^*-mitallinen.

$\square$

Seuraavia tarkasteluja varten otamme käyttöön merkinnät

Määritelmä 2.3.3 Olkoon kokoelma $\mathcal{A}$ algebra. Määrittelemme kokoelman $\mathcal{A}_\sigma$ ehdolla

$$A \in \mathcal{A}_\sigma, \text{ jos ja vain jos } A = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

missä joukot $A_i \in \mathcal{A}$.

Edelleen määrittelemme kokoelman $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ ehdolla

$$A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}, \text{ jos ja vain jos } A = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

missä joukout $A_i \in \mathcal{A}_\sigma$.

Kokoelmaan $\mathcal{A}_\sigma$ kuuluvat siis joukot, jotka voidaan esittää algebran $\mathcal{A}$ jäsenten numeroituvina yhdisteinä. Kokoelman $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ taas muodostavat joukot, jotka voidaan esittää kokoelman $\mathcal{A}_\sigma$ jäsenten numeroituvina leikkauksina.

Lause 2.3.6 *Olkoon kuvaus μ mitta algebrassa $\mathcal{A}$ ja kuvaus μ^* mitan μ indusoima ulkomitta. Tällöin jokaista joukkoa $E \subseteq X$ kohti on olemassa sellainen joukko $A \in \mathcal{A}_\sigma$, että $E \subseteq A$ ja*

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon,$$

kun luku ε on mielivaltainen.

Edelleen on olemassa sellainen joukko $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, että $E \subseteq B$ ja $\mu^*(E) = \mu^*(B)$.

Todistus: (Vrt. [7, s. 256]) Olkoon joukko $E \subseteq X$. Ulkomitan μ^* määritelmän nojalla on olemassa sellaiset joukot $A_i \in \mathcal{A}$, että joukko $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ ja

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Asettamalla $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ saadaan $\mu^*(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Nyt lauseen 2.3.4 nojalla $\mu^*(A_i) = \mu(A_i)$, koska joukko $A_i \in \mathcal{A}$ jokaisella indeksin i arvolla. Siis $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$, joten

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon,$$

mikä pitikin osoittaa.

Nyt edellä todistetun nojalla jokaista positiivista kokonaislukua n kohti on olemassa sellainen joukko $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$, että $E \subset A_n$ ja $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Olkoon nyt joukko $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$. Tällöin joukko $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ ja $E \subseteq B$. Koska joukko $B \subseteq A_n$ ja kuvaus μ^* on ulkomittana monotoninen, niin $\mu^*(B) \leq \mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Koska luku n on mielivaltainen, niin $\mu^*(B) \leq \mu^*(E)$. Edelleen, koska $E \subseteq B$ ja ulkomitta μ^* on monotoninen, niin $\mu^*(B) \leq \mu^*(E)$. Täten $\mu^*(E) = \mu^*(B)$.

$\square$

Lause 2.3.7 *Olkoon μ σ-äärellinen mitta algebrassa $\mathcal{A}$ ja olkoon μ^* mitan μ indusoima ulkomitta. Olkoon lisäksi kuvaus $\bar{\mu}$ ulkomitan μ^* rajoittuma μ^*-mitallisiin joukkoihin. Tällöin joukko E on μ^*-mitallinen, jos ja vain jos joukko E voidaan esittää sellaisten joukkojen A ja B erotuksena $A \backslash B$, että joukko $A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ ja $\mu^*(B) = 0$.*

Todistus: (Vrt. [7, s. 256]) Oletamme ensin, että joukko E on sellainen, että se voidaan esittää joukkojen A ja B erotuksena $A \backslash B$ ja että $A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ sekä $\mu^*(B) = 0$. Joukko A on mitallinen, sillä jokainen algebran $\mathcal{A}$ jäsen on lauseen 2.3.5 mukaan mitallinen ja edelleen näiden jäsenten mielivaltaiset yhdisteet sekä näiden yhdisteiden mielivaltaiset leikkaukset ovat mitallisia lauseen 2.1.9 nojalla. Joukko B on mitallinen lauseen 2.1.2 mukaan ja edelleen joukko E on mitallinen kahden mitallisen joukon erotuksena.

Oletamme sitten, että joukko E on mitallinen. Koska mitta μ on σ-äärellinen, on olemassa sellaiset pareittain erilliset joukot X_i, että $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ ja $\mu(X_i) < \infty$ jokaisella indeksin i arvolla. Edelleen voimme kirjoittaa $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, missä joukko $E_i = X_i \cap E$. Tällöin joukko E on pareittain erillisten, mitallisten joukkojen yhdiste. Lauseen 2.3.6 mukaan jokaista positiivista kokonaislukua n kohti on olemassa sellainen joukko $A_{ni} \in \mathcal{A}_\sigma$, että joukko $E_i \subseteq A_{ni}$ ja

$$\bar{\mu}(A_{ni}) \leq \bar{\mu}(E_i) + \frac{1}{n2^i}.$$

Asetamme $A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_{ni}$, jolloin selvästi $E \subseteq A_n$ ja $A_n \backslash E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{ni} \backslash E)$. Tällöin

$$\bar{\mu}(A_n \backslash E) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\mu}(A_{ni} \backslash E_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n2^i} = \frac{1}{n}.$$

Koska joukko $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$, niin asettamalla $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ saamme, että joukko $A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ ja että jokaista positiivista kokonaislukua n kohti

$$A \backslash E \subseteq A_n \backslash E.$$

Täten $\bar{\mu}(A\backslash E) \leq \bar{\mu}(A_n \backslash E) \leq \frac{1}{n}$. Koska luku n on mielivaltainen on oltava, että $\bar{\mu}(A\backslash E) = 0$. Nyt $E \subseteq A$, koska $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_n$ ja $E \subseteq A_n$ jokaisella luvun n arvolla. Tällöin merkitemällä $B = A\backslash E$ saamme, että $A\backslash B = A\backslash(A\backslash E) = E$ ja $\mu^*(B) = 0$, mikä pitikin osoittaa.

$\square$

Kokoamme tämän kappaleen asiat seuraavaan lauseeseen.

Lause 2.3.8 *Olkoon kuvaus μ mitta algebrassa $\mathcal{A}$ ja kuvaus μ^* mitan μ indusoima ulkomitta. Tällöin ulkomitan μ^* rajoittuma $\bar{\mu}$ μ^*-mitallisiin joukkoihin on kuvauksen μ laajennus sellaiseen σ-algebraan, joka sisältää algebran $\mathcal{A}$. Mikäli kuvaus μ on σ-äärellinen, niin laajennus $\bar{\mu}$ pienimpään sellaiseen σ-algebraan $\mathcal{B}$, joka sisältää algebran $\mathcal{A}$, on ainoa σ-algebrassa $\mathcal{B}$ määritelty mitta, joka on kuvauksen μ laajennus.*

Todistus: (Vrt. [7, s. 257]) Lauseista 2.3.4 ja 2.3.5 seuraa suoraan, että mitta $\bar{\mu}$ on kuvauksen μ laajennus sellaiseen σ-algebraan, joka sisältää algebran $\mathcal{A}$.

Olkoon nyt kuvaus μ σ-äärellinen ja $\mathcal{B}$ pienin sellainen σ-algebra, joka sisältää algebran $\mathcal{A}$. Osoittaaksemme, että tällöin ulkomitan μ^* rajoittuma $\bar{\mu}$ μ^*-mitallisiin joukkoihin on ainoa σ-algebrassa $\mathcal{B}$ määritelty mitta, joka on mitan μ laajennus, valitsemme mielivaltaisen mitan $\mu^\bullet$, joka on määritelty σ-algebrassa $\mathcal{B}$ ja jolle $\mu^\bullet(A) = \mu(A)$ aina, kun $A \in \mathcal{A}$. Edelleen, koska kokoelman $\mathcal{A}_\sigma$ jokainen jäsen on algebran $\mathcal{A}$ jäsenten numeroituva yhdiste, huomamme, että $\mu^\bullet(A) = \bar{\mu}(A)$ aina, kun $A \in \mathcal{A}_\sigma$.

Olkoon nyt $B \in \mathcal{B}$ sellainen joukko, että $\mu^*(B) < \infty$. Tällöin lauseen 2.3.6 nojalla on olemassa sellainen joukko $A \in \mathcal{A}_\sigma$, että $B \subseteq A$ ja

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Koska $B \subseteq A$, niin

$$\mu^\bullet(B) \leq \mu^\bullet(A) = \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Tällöin, koska luku ε on mielivaltainen, $\mu^\bullet(B) \leq \mu^*(B)$ aina, kun $B \in \mathcal{B}$ $(*)$.

Koska μ^*-mitallisten joukkojen kokoelma on σ-algebra, joka sisältää algebran $\mathcal{A}$, on jokainen joukko $B \in \mathcal{B}$ μ^*-mitallinen. Olkoon nyt joukko $B \in \mathcal{B}$ ja joukko $A \in \mathcal{A}_\sigma$ sellainen, että $B \subseteq A$ ja $\mu^*(A) = \mu^*(B)+\varepsilon$. Tällöin selvästi

$$\mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(A \backslash B)$$

ja, jos $\mu^*(B) < \infty$, niin $\mu^*(A\backslash B) \leq \varepsilon$. Täten

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu^\bullet(A) = \mu^\bullet(B) + \mu^\bullet(A\backslash B) \leq \mu^\bullet(B) + \varepsilon$$

ja edelleen, koska luku ε on mielivaltainen, niin $\mu^*(B) \leq \mu^\bullet(B)$ $(**)$. Nyt kohdista $(*)$ ja $(**)$ seuraa, että $\mu^*(B) = \mu^\bullet(B)$ aina, kun $B \in \mathcal{B}$.

Koska kuvaus μ on σ-äärellinen, niin on olemassa sellaiset pareittain erilliset joukot $X_i \in \mathcal{A}$, että $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ ja $\mu(X_i) < \infty$ jokaisella indeksin i arvolla. Tällöin

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} (X_i \cap B).$$

Joukot $(X_i \cap B)$ ovat selvästi pareittain erilliset ja $(X_i \cap B) \in \mathcal{B}$ jokaisella indeksin i arvolla. Tällöin

$$\mu^\bullet(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^\bullet(X_i \cap B)$$

ja

$$\bar{\mu}(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\mu}(X_i \cap B).$$

Koska nyt $\mu^*(X_i \cap B) < \infty$, niin

$$\bar{\mu}(X_i \cap B) = \mu^\bullet(X_i \cap B)$$

ja edelleen $\bar{\mu}(B) = \mu^\bullet(B)$ aina, kun $B \in \mathcal{B}$. Olemme siis osoittaneet, että kuvaukset $\bar{\mu}$ ja $\mu^\bullet$ yhtyvät σ-algebrassa $\mathcal{B}$, joten ulkomitan μ^* rajoittuma $\bar{\mu}$ on ainoa mitta, joka on määritelty σ-algebrassa $\mathcal{B}$ ja on mitan μ laajennus.

$\square$

2.4 Mitan suppeneminen

Oletamme tässä kappaleessa, että joukko $X \neq \emptyset$, kokoelma $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra ja että kuvaus $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ on mitta. Tällöin ovat voimassa seuraavat lauseet.

Lause 2.4.1 (Vrt. [4, s. 5]) *Olkoon $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbf{N}$, kasvava jono mitallisia joukkoja. Tällöin*

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Todistus: Koska joukko $\mathcal{A}$ on σ-algebra, niin $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Helposti huomaamme, että

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_i \backslash A_{i-1}),$$

kun sovimme, että $A_{-1} = \emptyset$. Toisaalta joukot $A_i \backslash A_{i-1}$ ovat pareittain erilliset, joten mitan täysadditiivisuuden nojalla

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_i \backslash A_{i-1})) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i \backslash A_{i-1}).$$

Edelleen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i \backslash A_{i-1}) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{k} \mu(A_i \backslash A_{i-1}) = \lim_{k \to \infty} \mu(\bigcup_{i=0}^{k} (A_i \backslash A_{i-1})) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Olemme siis osoittaneet, että $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$.

$\square$

Lause 2.4.2 (Vrt. [4, s. 5]) *Olkoon $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbf{N}$, vähenevä jono mitallisia joukkoja. Tällöin, jos $\mu(A_0) < \infty$, niin*

$$\mu(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

Todistus: Lauseen 1.2.4 nojalla $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Merkisemme seuraavaksi, että $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = A$. Olkoon nyt $B_i = A_0 \backslash A_i$. Tällöin joukot B_i ovat mitallisia ja muodostavat kasvavan joukkojonon, joten lauseen 2.4.1 nojalla $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$. Nyt

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^{\infty}(A_0 \backslash A_i) = A_0 \backslash \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 \backslash A.$$

Edelleen huomaamme, että $A_0 = A_i \cup (A_0 \backslash A_i) = A_i \cup B_i$, koska joukot A_i muodostavat vähenevän joukkojonon. Selvästi joukot A_j ja B_j ovat erilliset, joten mitan täysadditiivisuudesta seuraa, että $\mu(A_0) = \mu(A_j) + \mu(B_j)$. Toisaalta $A_0 = A \cup (A_0 \backslash A)$ ja joukot A_0 ja $A_0 \backslash A$ ovat erilliset, joten $\mu(A_0) = \mu(A) + \mu(A_0 \backslash A)$. Nyt, koska $\mu(A_0) < \infty$, voimme päätellä

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_0) - \mu(A_0 \backslash A) \\
&= \mu(A_0) - \mu(\textstyle\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i) \\
&= \mu(A_0) - \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \\
&= \mu(A_0) - \lim_{k\to\infty}(\mu(A_0) - \mu(A_k)) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

Olemme siis osoittaneet, että $\mu(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

□

Itse asiassa lauseessa 2.4.2 riitäisi olettaa, että joukkojonossa A_i on olemassa sellainen joukko A_{n_0}, että $\mu(A_{n_0}) < \infty$. Tällöin voisimme siirtyä tarkastelemaan joukkojonoa B_i, missä $B_0 = A_{n_0}$, $B_1 = A_{n_0+1}$ ja niin edelleen, jolloin lausetta 2.4.2 voidaan soveltaa sellaisenaan joukkojonoon B_i.

Luku 3

Mitalliset kuvaukset

3.1 Kuvauksen mitallisuus

Määritelmä 3.1.1 Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Kuvaus $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ on *mitallinen*, jos

i) $f^{-1}(G)$ on mitallinen jokaisella avoimella joukolla $G \subseteq \mathbf{R}$,

ii) $f^{-1}(\infty)$ on mitallinen,

iii) $f^{-1}(-\infty)$ on mitallinen.

Lause 3.1.1 (Vrt. [7, s. 65]) *Olkoon joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$ mitallinen ja olkoon $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ funktio. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

i) funktio f on mitallinen,

ii) joukko $\{x \in A | f(x) < \alpha\}$ on mitallinen aina, kun $\alpha \in \mathbf{R}$,

iii) joukko $\{x \in A | f(x) > \alpha\}$ on mitallinen aina, kun $\alpha \in \mathbf{R}$,

iv) joukko $\{x \in A | f(x) \leq \alpha\}$ on mitallinen aina, kun $\alpha \in \mathbf{R}$,

v) joukko $\{x \in A | f(x) \geq \alpha\}$ on mitallinen aina, kun $\alpha \in \mathbf{R}$.

Todistus: Todistamme lauseen useassa vaiheessa osoittamalla, että $i) \Rightarrow ii)$, $ii) \Leftrightarrow v)$, $iii) \Leftrightarrow iv)$, $ii) \Leftrightarrow iv)$ ja lopuksi, että $ii) \Rightarrow i)$, jolloin olemme näyttäneet, että ehdot $i) - v)$ ovat yhtäpitävät.

Olkoon $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen ja $a \in \{x \in A | f(x) < \alpha\}$ mielivaltainen. Tällöin siis $f(a) < \alpha$. Jos nyt $f(a) > -\infty$, niin $f(a) \in (-\infty, \alpha)$ ja edelleen $a \in f^{-1}((-\infty, \alpha))$. Jos taas $f(a) = -\infty$, niin $a \in f^{-1}(-\infty)$. Kummassakin tapauksessa
$$a \in f^{-1}((-\infty, \alpha)) \cup f^{-1}(-\infty).$$
Selvästi joukko $(-\infty, \alpha)$ on avoin, joten joukko $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ on mitallinen, koska oletimme, että funktio f on mitallinen. Edelleen myös joukko $f^{-1}(-\infty)$ on funktion f mitallisuuden nojalla mitallinen. Tällöin, koska kahden mitallisen joukon yhdiste on mitallinen, on osoitettu, että ominaisuus $ii)$ on voimassa. On siis osoitettu, että $i) \Rightarrow ii)$.

Huomaamalla, että
$$\{x \in A | f(x) \geq \alpha\} = A \setminus \{x \in A | f(x) < \alpha\},$$
voimme heti todeta, että $ii) \Leftrightarrow v)$.

Samoin huomaamme myös, että
$$\{x \in A | f(x) \leq \alpha\} = A \setminus \{x \in A | f(x) > \alpha\},$$
joten on voimassa, että $iii) \Leftrightarrow iv)$.

Olkoon nyt ominaisuus $ii)$ voimassa. Selvästi
$$\{x \in A | f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in A \,\middle|\, f(x) < \alpha + \frac{1}{n} \right\},$$
joten lauseen 2.1.9 nojalla myös joukko $\{x \in A | f(x) \leq \alpha\}$ on mitallinen ja ominaisuus $iv)$ on täten voimassa. Oletetaan nyt kääntäen, että ominaisuus $iv)$ on voimassa. Nyt huomaamme, että
$$\{x \in A | f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in A \,\middle|\, f(x) \leq \alpha - \frac{1}{n} \right\},$$
joten lauseen 2.1.9 nojalla siis myös joukko $\{x \in A | f(x) < \alpha\}$ on mitallinen, joten ominaisuus $ii)$ on voimassa. Kahdesta edellisestä kohdasta siis seuraa, että $ii) \Leftrightarrow iv)$.

Oletamme lopuksi, että ominaisuus $ii)$ on voimassa (tällöin edellä todistetun nojalla ovat myös ominaisuudet $iii), iv)$ ja $v)$ voimassa). Olkoon joukko

$G \subseteq \mathbf{R}$ avoin. Tällöin on olemassa sellaiset avoimet välit $I_j = (a_j, b_j)$, että $G = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} I_j$ (Tämä johtuu siitä, että $\mathbf{R}$ on Lindelöfin avaruus). Tällöin

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} I_j) = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} f^{-1}(I_j).$$

Nyt

$$f^{-1}(I_j) = \{x \in A | a_j < f(x) < b_j\} = \{x \in A | f(x) < b_j\} \cap \{x \in A | f(x) > a_j\},$$

joten ominaisuuksien *ii)* ja *iii)* nojalla siis joukko $f^{-1}(I_j)$ on kahden mitallisen joukon leikkauksena mitallinen. Edelleen mitallisten joukkojen yhdiste on lauseen 2.1.9 nojalla mitallinen, joten joukko $f^{-1}(G)$ on mitallinen.

Selvästi voimme kirjoittaa, että

$$f^{-1}(\infty) = \bigcap_{j\in\mathbf{N}} \{x \in A | f(x) > j\}$$

ja

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{j\in\mathbf{N}} \{x \in A | f(x) < -j\}.$$

Tällöin joukot $f^{-1}(\infty)$ ja $f^{-1}(-\infty)$ ovat mitalliset, jolloin siis funktio f on mitallinen. Täten *ii)* $\Rightarrow$ *i)*.

Olemme siis osoittaneet, että ehdot *i)* $-$ *v)* ovat yhtäpitävät. $\square$

Lauseen 3.1.1 ehdoista *ii)*$-$*v)* seuraa, että myös joukko $\{x \in A | f(x) = \alpha\}$ on mitallinen aina, kun $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$.

Määritelmä 3.1.2 Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Kuvaus $f : A \to \mathbf{R}^m$ on *mitallinen* (σ-algebran $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ suhteen), jos $f^{-1}(G)$ on mitallinen jokaisella avoimella joukolla $G \subseteq \mathbf{R}^m$.

Määritelmä 3.1.3 Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}^n$ joukko. Tällöin joukon A *karakteristinen funktio* $\chi_A : \mathbf{R}^n \to \{0, 1\}$ on

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \notin A. \end{cases}$$

Lause 3.1.2 *Olkoon joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ja χ_A joukon A karakteristinen funktio. Tällöin funktio χ_A on mitallinen, jos ja vain jos joukko A on mitallinen.*

Todistus: Oletamme ensin, että joukko A on mitallinen. Olkoon nyt joukko $G \subseteq \mathbf{R}$ avoin. Nyt

$$\chi_A^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbf{R}^n, & \text{jos } \{0,1\} \subseteq G, \\ \emptyset, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \emptyset, \\ A, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \{1\}, \\ A^c, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \{0\}, \end{cases}$$

joten kaikissa tapauksissa $\chi_A^{-1}(G)$ on mitallinen, joten funktio χ_A on mitallinen.

Oletamme sitten, että funktio χ_A on mitallinen. Nyt $A = \chi_A^{-1}(1)$, joten riittää osoittaa, että $\chi_A^{-1}(1)$ on mitallinen. Juokko $\{1\}$ on selvästi suljettu, joten joukko $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ on avoin. Tällöin, koska kuvaus χ_A on mitallinen, on $\chi_A^{-1}(\mathbf{R}\backslash\{1\})$ mitallinen. Toisaalta selvästi $\chi_A^{-1}(1) = (\chi_A^{-1}(\mathbf{R}\backslash\{1\}))^c$, joten mitallisen joukon komplementtina myös $\chi_A^{-1}(1) = A$ on myös mitallinen. Täten olemme todistaneet väitteen. $\square$

Lause 3.1.3 *Olkoon joukko $A \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mitallinen ja funktio $f : A \to \mathbf{R}^m$ jatkuva. Tällöin funktio f on Lebesgue-mitallinen.*

Todistus: Valitsemme mielivaltaisen avoimen joukon $G \subseteq \mathbf{R}^m$. Tällöin, koska funktio f on jatkuva, on $f^{-1}(G)$ avoin joukossa A. Siis on olemassa sellainen avoin joukko $V \subseteq \mathbf{R}^n$, että $f^{-1}(G) = A \cap V$. Osoitamme nyt, että joukko $A \cap V$ on mitallinen. Koska joukko A on mitallinen, riittää osoittaa, että joukko V on mitallinen.

Koska joukko V on avoin, mielivaltaisella alkiolla $x \in V$ on olemassa sellainen avoin n-väli I_x, että $x \in I_x \subseteq A$. Tällöin joukko $\{I_x \mid x \in V\}$ on joukon V Lebesguen peite. Nyt, koska avaruus $\mathbf{R}^n$ on Lindelöf, on olemassa sellainen numeroituva alipeite $\{I_{x_i} \mid i \in \mathbf{N}\}$, että $V = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} I_{x_i}$. Toisaalta jokainen n-väli on Lebesgue-mitallinen, joten joukko V on mitallisten joukkojen yhdisteenä mitallinen.

Täten joukko $f^{-1}(G) = A \cap V$ on mitallinen, ja edelleen funktio f on mitallinen. $\square$

Lause 3.1.4 *Olkoot funktiot $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ ja $g : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallisia. Tällöin funktiot $f + g$ ja fg ovat mitallisia, mikäli ovat määritellyt. Lisäksi tällöin myös funktiot λf, $\lambda \in \mathbf{R}$, ja $|f|^a$, $a > 0$, ovat mitallisia.*

Todistus: Seuraa helposti lauseesta 3.1.1. Täsmällisen todistuksen jätämme lukijalle.

□

3.2 Limit superior ja limit inferior

Määritelmä 3.2.1 Olkoon $\{E_n\}$ jono joukkoja. Tällöin

i) Jonon $\{E_n\}$ *limit inferior* (merkitään $\liminf_{n\to\infty} E_n$) on $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$,

ii) Jonon $\{E_n\}$ *limit superior* (merkitään $\limsup_{n\to\infty} E_n$) on $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$.

Jos $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$ jollakin jonolla $\{E_n\}$, merkitään tätä yhteistä raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} E_n$. Tällöin sanotaan jonolla $\{E_n\}$ olevan raja-arvo, joka on $\lim_{n\to\infty} E_n$.

Joukkojonon $\{E_n\}$ limit superior on siis joukko, johon kuuluvat ne pisteen, jotka kuuluvat äärettömän moneen joukoista E_n. Limit inferior on taas joukko, joka sisältää pisteet, jotka kuuluvat kaikkiin, paitsi mahdollisesti äärelliseen määrään joukkoja E_n.

Helposti näemme, että jos joukkojono $\{E_n\}$ on kasvava tai vähenevä ($E_n \subseteq E_{n+1}$ tai $E_n \supseteq E_{n+1}$ aina, kun $n \geq 1$), niin $\lim_{n\to\infty} E_n$ on olemassa.

Myös lukujonolle (a_i) voidaan määritellä limit superior ja limit inferior.

Määritelmä 3.2.2 *Olkoon* (a_i) *jono joukossa* $\overline{\mathbf{R}}$. *Tällöin*

$$\limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty}(\sup_{i\geq k} a_i) = \inf_{k\in\mathbf{N}}(\sup_{i\geq k} a_i)$$

ja

$$\liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty}(\inf_{i\geq k} a_i) = \sup_{k\in\mathbf{N}}(\inf_{i\geq k} a_i).$$

Tarkastelemme yllä olevaa määritelmää hieman tarkemmin. Olkoon siis (a_i) jono joukossa $\overline{\mathbf{R}}$. Merkitsemme $b_k = \sup_{i\geq k} a_i$ ja $c_k = \inf_{i\geq k} a_i$. Tällöin myös $b_k \in \overline{\mathbf{R}}$ ja $c_k \in \overline{\mathbf{R}}$ jokaisella indeksin k arvolla. Edelleen $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq b_{k+1} \geq \cdots$ ja $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots$, joten on olemassa jonojen (b_i) ja (c_i) raja-arvot. Merkitsemme $\beta = \lim_{k\to\infty} b_k$ ja $\gamma = \lim_{k\to\infty} c_k$, jolloin

$\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ ja $\gamma \in \overline{\mathbf{R}}$. Helposti huomaamme, että $\beta = \inf_{k\in\mathbf{N}} b_k$ ja $\gamma = \sup_{k\in\mathbf{N}} c_k$, josta siis seuraa, että $\beta = \limsup_{i\to\infty} a_i$ ja $\gamma = \liminf_{i\to\infty} a_i$.

Huomautamme myös, että joukon $\overline{\mathbf{R}}$ mielivaltaisen jonon (a_i) limit inferior ja limit superior ovat *aina* yksikäsitteisinä olemassa.

Lause 3.2.1 *Olkoon (a_i) jono joukossa $\overline{\mathbf{R}}$. Tällöin*

i) $\liminf_{i\to\infty} a_i \le \limsup_{i\to\infty} a_i$,

ii) jos on olemassa sellainen luku i_0, että $a_i \le M \in \overline{\mathbf{R}}$ jokaisella indeksin arvolla $i \ge i_0$, niin $\limsup_{i\to\infty} a_i \le M$,

iii) jos on olemassa sellainen luku i_0, että $a_i \ge m \in \overline{\mathbf{R}}$ jokaisella indeksin arvolla $i \ge i_0$, niin $\liminf_{i\to\infty} a_i \ge m$.

Todistus:

i) Olkoon $b_k = \sup_{i\ge k} a_i$ ja $c_k = \inf_{i\ge k} a_i$. Tällöin $c_k \le b_k$ jokaisella indeksin k arvolla ja edelleen $\lim_{k\to\infty} c_k \le \lim_{k\to\infty} b_k$. Täten $\liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} c_k \le \lim_{k\to\infty} b_k = \limsup_{i\to\infty} a_i$.

ii) Olkoon i_0 sellainen luku, että $a_i \le M$ aina, kun $i \ge i_0$. Merkitsemme $b_k = \sup_{i\ge k} a_i$. Tällöin $b_k \le M$ jokaisella sellaisella indeksin k arvolla, että $k \ge i_0$. Täten $\limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} b_k \le M$.

iii) Olkoon i_0 sellainen luku, että $a_i \ge m$ aina, kun $i \ge i_0$. Merkitsemme $c_k = \inf_{i\ge k} a_i$. Tällöin $c_k \ge m$ jokaisella sellaisella indeksin k arvolla, että $k \ge i_0$. Täten $\liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} c_k \ge m$.

□

Lause 3.2.2 *Olkoon (a_i) jono joukossa $\overline{\mathbf{R}}$. Tällöin on olemassa jonon (a_i) raja-arvo* $\lim_{i\to\infty} a_i$ $(\in \overline{\mathbf{R}})$, *jos ja vain jos* $\liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i$. *Tässä tapauksessa myös*

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i.$$

Todistus: Oletamme ensin, että on olemassa jonon (a_i) raja-arvo $\alpha = \lim_{i\to\infty} a_i \in \overline{\mathbf{R}}$.

Jos $\alpha \in \mathbf{R}$, niin valitsemme mielivaltaisen luvun $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen luku i_0, että kun $i \geq i_0$, niin $\alpha - \varepsilon < a_i < \alpha + \varepsilon$. Nyt lauseen 3.2.1 nojalla $\alpha - \varepsilon \leq \liminf_{i\to\infty} a_i \leq \limsup_{i\to\infty} a_i \leq \alpha + \varepsilon$. Koska luku ε on mielivaltainen, niin $\liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i$. Selvästi myös $\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i$.

Jos $\alpha = \infty$, niin valitsemme mielivaltaisen luvun $M \in \mathbf{R}$. Tällöin on olemassa sellainen luku i_0, että kun $i \geq i_0$, niin $a_i \geq M$. Nyt lauseen 3.2.1 nojalla $M \leq \liminf_{i\to\infty} a_i \leq \limsup_{i\to\infty} a_i$. Koska luku M on mielivaltainen on oltava, että $\liminf_{i\to\infty} a_i = \infty = \limsup_{i\to\infty} a_i$. Selvästi myös $\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i$.

Tapaus $\alpha = -\infty$ menee vastaavalla tavalla kuin tapaus $\alpha = \infty$.

Oletamme sitten, että $\liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i$. Olkoon tämä yhteinen arvo α. Merkitsemme myös $c_k = \inf_{i\geq k} a_i$ ja $b_k = \sup_{i\geq k} a_i$. Tällöin, jos $\alpha \in \mathbf{R}$, niin valitsemme mielivaltaisen luvun $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset indeksin arvot k_1 ja k_2, että $b_k < \alpha + \varepsilon$, kun $k \geq k_1$, ja $c_k > \alpha - \varepsilon$, kun $k \geq k_2$. Olkoon nyt $k \geq \max\{k_1, k_2\}$, jolloin $\alpha - \varepsilon < c_k \leq a_k \leq b_k < \alpha + \varepsilon$. Koska luku ε on mielivaltainen, niin $\alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$, josta väitös seuraa.

Jos $\alpha = \infty$, niin valitsemme mielivaltaisen luvun $M \in \mathbf{R}$. Tällöin on olemassa sellainen indeksin arvo k_0, että $c_k > M$, kun $k \geq k_0$. Nyt $a_k \leq c_k > M$, kun $k \geq k_0$. Koska luku M on mielivaltainen, niin $\lim_{i\to\infty} a_i = \infty$, josta väitös seuraa.

Tapaus $\alpha = -\infty$ voidaan käsitellä vastaavalla tavalla kuin tapaus $\alpha = \infty$.

$\square$

Esimerkki 3.2.1 Tarkastelemme seuraavaksi muutamaa jonoa (a_i). Merkitsemme $b_k = \sup_{i\geq k} a_i$ ja $c_k = \inf_{i\geq k} a_i$.

i) Olkoon $(a_i) = \infty, -\infty, \infty, -\infty, \ldots$ Nyt $b_k = \infty$ ja $c_k = -\infty$ jokaisella indeksin k arvolla, joten $\limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} b_k = \infty$ ja $\liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} c_k = -\infty$.

ii) Olkoon $(a_i) = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Nyt $b_k = \infty$ ja $c_k = k$ jokaisella indeksin k arvolla, joten $\limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} b_k = \infty$ ja $\liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} c_k = \infty$. Tällöin $\limsup_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \infty$, joten $\lim_{i\to\infty} a_i = \infty$.

iii) Olkoon $(a_i) = 0, -1, 0, -2, 0, -3, \ldots$ Nyt $b_k = 0$ ja $c_k = -\infty$ jokaisella indeksin k arvolla, joten $\limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$ ja $\liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} c_k = -\infty$.

3.3 Rajafunktion mitallisuus

Lause 3.3.1 *Olkoon $f_j : A \to \overline{\mathbf{R}}$, $j \in \mathbf{N}$, mitallisia funktioita. Tällöin funktiot*

$$\sup_{j\in\mathbf{N}} f_j \ , \ \inf_{j\in\mathbf{N}} f_j \ , \ \limsup_{j\to\infty} f_j \ , \ \liminf_{j\to\infty} f_j$$

ovat mitallisia. Lisäksi jos on olemassa sellainen funktio f, että $f = \lim_{j\to\infty} f_j$, niin funktio f on mitallinen.

Todistus: Olkoon $g(x) = \sup_{j\in\mathbf{N}} f_j(x)$, kun $x \in A$ ja olkoon $a \in \mathbf{R}$ mielivaltainen. Tarkastelemme nyt joukkoa $\{x \in A \mid g(x) \leq a\}$. Koska $g(x) \leq a$, jos ja vain jos $f_j \leq a$ jokaisella indeksin j arvolla, niin voimme kirjoittaa

$$\{x \in A \mid g(x) \leq a\} = \bigcap_{j\in\mathbf{N}} \{x \in A \mid f_j \leq a\}.$$

Nyt joukko $\{x \in A \mid f_j \leq a\}$ on mitallinen jokaisella indeksin j arvolla, sillä funktio f_j ovat kaikki mitallisia. Edelleen lauseen 2.1.9 mukaan joukko $\bigcap_{j\in\mathbf{N}}\{x \in A \mid f_j \leq a\}$ on mitallinen, joten funktio $g = \sup_{j\in\mathbf{N}} f_j$ on mitallinen.

Helposti huomaamme, että $\inf_{j\in\mathbf{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbf{N}}(-f_j)$, joten myös funktio $\inf_{j\in\mathbf{N}} f_j$ on mitallinen.

Nyt $\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_{k\in\mathbf{N}}(\sup_{j\geq k} f_j)$, joten edellisten kohtien nojalla funktio $\limsup_{j\in\mathbf{N}} f_j$ on mitallinen.

Samoin $\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbf{N}}(\inf_{j\geq k} f_j)$, joten myös funktio $\liminf_{j\to\infty} f_j$ on mitallinen.

Oletamme sitten, että on olemassa sellainen funktio f, että $f = \lim_{j\to\infty} f_j$. Nyt $f = \limsup_{j\to\infty} f_j = \liminf_{j\to\infty} f_j$, siis selvästi mitallinen.

$\square$

Luku 4

Integrointiteoriaa

4.1 Yleistä integrointiteoriaa

Oletamme tässä kappaleessa, että tarkastelut tapahtuvat perusjoukossa X ja että $\mathcal{A}$ on joukon X mielivaltainen σ-algebra. Merkitsemme symbolilla μ mielivaltaista σ-algebrassa $\mathcal{A}$ määriteltyä mittaa.

Määritelmä 4.1.1 Olkoon f reaaliarvoinen funktio joukossa X. Sanomme, että funktio f on *porrasfunktio*, jos funktion f arvojoukko on äärellinen.

Tarkastelemme porrasfunktiota f hieman tarkemmin. Koska funktion f arvojoukossa A_f on vain äärellinen määrä termejä, voimme kirjoittaa $A_f = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Tällöin selvästi joukot $A_i = f^{-1}(a_i)$ ovat mitalliset ja pareittain erilliset. Lisäksi

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Huomaamme, että voimme nyt antaa porrasfunktiolle f esityksen käyttäen hyväksi joukkojen A_i karakteristisia funktioita χ_{A_i}. Voimme nimittäin kirjoittaa

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}.$$

Kutsumme tätä esitystä porrasfunktion f normaaliesitykseksi.

Lause 4.1.1 *Olkoon f joukossa X määritelty, mitallinen ei-negatiivinen funktio. Tällöin on olemassa sellainen jono (f_n) ei-negatiivisia mitallisia porrasfunktioita, että $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja $x \in X$), ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikilla alkioilla $x \in X$.*

Todistus: (Vrt. [2, s. 255]) Asetamme

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{A_{n,k}} + n\chi_{B_n},$$

missä $A_{n,k} = \{x \mid (k-1)2^{-n} < f(x) \leq k2^{-n}\}$ ja $B_n = \{x \mid f(x) > n\}$ ja osoitamme, että näin määritellyllä jonolla (f_n) on halutut ominaisuudet.

Koska funktio f on mitallinen, ovat joukot $A_{n,k}$ ja B_n mitalliset (kaikilla indeksien n ja k arvoilla). Tällöin myös funktiot $\chi_{A_{n,k}}$ ja χ_{B_n} ovat mitalliset, joten helposti näemme myös funktioiden f_n mitallisuuden.

Valitsemme nyt mielivaltaisen alkion $x \in X$ ja osoitamme, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Jos $f(x) = \infty$, niin $f_n(x) = n$ jokaisella indeksin n arvolla. Tällöin $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty = f(x)$. Jos taas $f(x) < \infty$, niin on olemassa sellainen luku $n_0 > f(x)$, että kun $n \geq n_0$, niin $(i-1)2^{-n} < f(x) \leq i2^{-n}$ jollakin $i \in \{1, 2, \ldots, n2^n\}$. Tällöin $f_n(x) = (i-1)2^{-n} < f(x) \leq i2^{-n} = f_n(x) + 2^{-n}$, joten $f(x) - 2^{-n} \leq f_n(x) < f(x)$. Täten $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ja olemme todistaneet lauseen.

$\square$

Alamme nyt määritellä integraalin käsitettä. Lähdemme liikkeelle porrasfunktion integraalista.

Määritelmä 4.1.2 Olkoon f ei-negatiivinen, mitallinen porrasfunktio ja olkoon funktiolla f normaaliesitys $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$. Tällöin

$$\int f \ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i\mu(A_i).$$

Jos joukko $A \in \mathcal{A}$, niin

$$\int_A f \ \mathrm{d}\mu = \int \chi_A f \ \mathrm{d}\mu.$$

Lause 4.1.2 *Olkoon f mitallinen porrasfunktio, jonka normaaliesitys on $\sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, ja joukko $E \in \mathcal{A}$ mielivaltainen. Tällöin*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap E).$$

Todistus: Todistuksen yksityiskohdat jätämme lukijalle.

□

Lause 4.1.3 *Olkoot funktiot f ja g ei-negatiivisia, mitallisia porrasfunktioita. Tällöin*

i) *Jos $f \leq g$, niin $\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$.*

ii) $\int (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$.

iii) $\int (tf) \, \mathrm{d}\mu = t \int f \, \mathrm{d}\mu$, *kun* $t \geq 0$.

iv) *Joukkofunktio $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ on mitta σ-algebrassa $\mathcal{A}$.*

Todistus: (Vrt. [2, s. 227])

i) Olkoon $f \leq g$ ja

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j} \text{ ja } g = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{B_j}$$

funktioiden f ja g normaaliesitykset. Nyt selvästi joukko X voidaan kirjoittaa kahtena erillisten joukkojen yhdisteenä $X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Tällöin

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap B_k).$$

Vastaavasti

$$\int g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_k \mu(A_j \cap B_k).$$

Koska $f \leq g$, niin $a_j \leq b_k$ sellaisilla indeksien j ja k arvoilla, joilla $A_j \cap B_k \neq \emptyset$, joten $\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$.

ii) Koska funkiot f ja g ovat porrasfunktioita, niin selvästi myös funktio $f+g$ on porrasfunktio. Olkoon nyt joukko $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ funktion $f+g$ arvojoukko. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int(f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} c_i\mu(\{x|f(x)+g(x)=c_i\}) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{r} c_i\mu\left(\bigcup_{a_j+b_k=c_i} A_j\cap B_k\right) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{r} c_i \sum_{a_j+b_k=c_i} \mu(A_j\cap B_k) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(a_j+b_k)\mu(A_j\cap B_k) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_j\mu(A_j\cap B_k) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_k\mu(A_j\cap B_k) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_j\mu(A_j) + \sum_{k=1}^{n} b_k\mu(B_k) \\
&= \textstyle\int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

iii) Olkoon $t \geq 0$. Tällöin

$$\int tf\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} ta_i\mu(A_j) = t\sum_{j=1}^{m} a_i\mu(A_j) = t\int f\,\mathrm{d}\mu.$$

iv) Selvästi $\nu(E) \geq 0$ mielivaltaisella joukolla E, ja $\nu(\emptyset) = 0$. Riittää siis osoittaa kuvauksen ν täysadditiivisuus. Olkoot siis joukot $E_j \in \mathcal{A}$ pareittain erilliset. Merkitään $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Nyt lauseen 4.1.2

$$\nu(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j\mu(A_j\cap E).$$

Edelleen, koska $A_j\cap E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_j\cap E_i)$, niin $\mu(A_j\cap E) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_j\cap E_i)$ indeksin j arvoilla $j = 1, 2, \ldots, m$. Nyt

$$\sum_{j=1}^{m} a_j\mu(A_j\cap E) = \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_j\cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} a_j\mu(A_j\cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Siis $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)$, ja kuvaus ν täysadditiivinen. Olemme täten osoittaneet, että kuvaus ν on mitta ja voimme päättää todistuksen.

□

Määritelmä 4.1.3 Olkoon f ei-negatiivinen, mitallinen funktio. Tällöin

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int g\,\mathrm{d}\mu \mid 0 \leq g \leq f, g \text{ on porrasfunktio.}\right\}.$$

Vastaavasti, kuten määritelmässä 4.1.2, asetamme $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int f\chi_A \, \mathrm{d}\mu$, kun joukko $A \in \mathcal{A}$.

Lause 4.1.4 *Olkoon funktio f mitallinen ja $f \geq 0$. Tällöin $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$, jos ja vain jos $f = 0$ m.k. (ts. nollamittallista joukkoa lukuunottamatta).*

Todistus: (Vrt. [2, s. 228]) Olkoon ensin $f = 0$ m.k., jolloin funktio $g = 0$ m.k. aina, kun funktio g on sellainen, että $0 \leq g \leq f$. Täten selvästi $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Olkoon sitten $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Merkitään $E = \{x | f(x) > 0\}$. Nyt voimme kirjoittaa $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, missä joukko $E_n = \{x | f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Olkoon $g_n = \frac{1}{n}\chi_{E_n}$, jolloin selvästi funktio g_n on porrasfunktio ja $0 \leq g_n \leq f$. Täten $\frac{1}{n}\mu(E_n) = \int g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int f \, \mathrm{d}\mu = 0$, joten $\mu(E_n) = 0$ jokaisella indeksin n arvolla. Siis $\mu(E) = 0$, joten joukko, jossa funktio f saa nollasta poikkeavia arvoja on nollamitallinen eli $f = 0$ m.k.

$\square$

Määritelmä 4.1.4 Olkoon f funktio. Tällöin

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0$$

ja

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) \geq 0.$$

Määritelmä 4.1.5 Olkoon f mitallinen funktio. Tällöin

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

mikäli vähintään toinen yhtälön oikean puolen integraaliesta on äärellinen. Sanomme, että funktio f on integroituva, jos sekä $\int f^+ \mathrm{d}\mu < \infty$ että $\int f^- \mathrm{d}\mu < \infty$.

Emme tässä käsittele muita integraalien ominaisuuksia, sillä toiminta määritelmien tasolla on raskasta. Seuraavassa kappaleessa esitämmekin keskeisiä integraalien monotonisuus- ja suppenemislauseita, jotka helpottavat integraalien tarkasteluja huomattavasti.

Huomautamme, että yhtä hyvin olisimme voineet määritellä μ-mitallisen funktion f integraalin, vastaavalla tavalla kuin Reimannin integraali määritellään, ylä- ja ala summien yhteisenä raja-arvona. Meidän olisi vain tarvinnut tarkastella joukon A mielivaltaista jakoa D äärellisen moneen *mitalliseen* osajoukkoon A_i ja määritellä yläsumma $S_D = \sum_i \sup_{x \in A_i} f(x)\mu(A_i)$ ja alasumma $s_D = \sum_i \inf_{x \in A_i} f(x)\mu(A_i)$. Tällöin, jos $\inf_D S_D = \sup_D s_D$, sanomme, että funktio f on mitan μ suhteen integroituva joukossa A ja

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \inf_D S_D = \sup_D s_D.$$

4.2 Monotonisuus- ja suppenemislauseita

Lause 4.2.1 (Monotonisen suppenemisen lause) *Olkoon (f_n) jono mitallisia funktioita, ja $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ jokaisella indeksin n arvolla. Tällöin*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Todistus: (Vrt. [2, s. 229]) Lauseen 3.3.1 mukaan funktio $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ on mitallinen, joten integraali $\int f \, \mathrm{d}\mu$ on määritelty. Koska $f_n \leq f_{n+1}$ jokaisella indeksin arvolla n, niin $\int f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu$. Täten myös $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$ on olemassa. Koska $f_n \leq f$ jokaisella indeksin n arvolla, niin $\int f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int f \, \mathrm{d}\mu$ ja edelleen $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Olkoon nyt g sellainen porrasfunktio, että $0 \leq g \leq f$ ja ε sellainen luku, että $0 < \varepsilon < 1$. Merkitsemme $A_n = \{x \in X | f_n(x) \geq \varepsilon g(x)\}$. Koska $f_n \leq f_{n+1}$ jokaisella indeksin n arvolla, niin selvästi myös $A_n \subseteq A_{n+1}$ jokaisella indeksin n arvolla. Olkoon nyt alkio $x \in X$ mielivaltainen. Jos $g(x) = 0$, niin $x \in A_1$. Jos taas $g(x) > 0$, niin $\varepsilon g(x) < g(x) \leq f(x)$, koska $0 < \varepsilon < 1$ ja $g(x) < \infty$. Tällöin, koska $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ja jono (f_n) on kasvava, on olemassa sellainen luku i, että $\varepsilon g(x) \leq f_i(x)$, joten $x \in A_i$. Siis $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Toisaalta selvästi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq X$, joten $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Nyt

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_n} \varepsilon g(x) \, \mathrm{d}\mu.$$

Lauseen 4.1.3 mukaan kuvaus $A_n \mapsto \int_{A_n} g \, \mathrm{d}\mu$ on mitta, joten lauseesta 2.4.1 seuraa, että $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \varepsilon \int g \, \mathrm{d}\mu$ jokaisella sellaisella luvun ε arvolla, että $0 < \varepsilon < 1$. Kun annetaan luvun ε lähestyä lukua 1 vasemmalta, saadaan

$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int g \, \mathrm{d}\mu$. Vihdoin, koska g oli sellainen porrasfunktio, että $g \leq f$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Täten olemme todistaneet väitteen.

□

Esimerkki 4.2.1 Tarkastelemme integraaleja

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Monotonisen suppenemislauseen nojalla näemme, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Edelleen

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Lause 4.2.2 *Olkoon funktiot $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ei-negatiiviset ja mitalliset. Tällöin*

$$\int \sum_{i=1}^k f_i \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^k \int f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Todistus: Todistamme tapauksen $k = 2$ (yleisen tapauksen todistus on helppo induktio). Tarkastelemme funktioita h ja g. Tällöin lauseen 4.1.1 nojalla on olemassa kasvava jono (h_n) porrasfunktioita, joka suppenee kohti funktiota h. Vastaavasti on olemassa kasvava jono (g_n) porrasfunktioita, joka suppenee kohti funktiota g. Nyt selvästi funktiojono $(h_n + g_n)$ on kasvava, funktiot $h_n + g_n$ ovat porrasfunktiota ja ko. jono suppenee kohti funktiota $h + g$. Tällöin lauseen 4.1.3 kohdan *ii)* nojalla

$$\int (h_n + g_n) \, \mathrm{d}\mu = \int h_n \, \mathrm{d}\mu + \int g_n \, \mathrm{d}\mu,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \int (h_n + g_n) \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n \, \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Edelleen monotonisen suppenemislauseen nojalla

$$\int \lim_{n\to\infty}(h_n + g_n)\ \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} h_n\ \mathrm{d}\mu + \int \lim_{n\to\infty} g_n\ \mathrm{d}\mu,$$

joten

$$\int (h+g)\ \mathrm{d}\mu = \int h\ \mathrm{d}\mu + \int g\ \mathrm{d}\mu.$$

Täten olemme todistaneet väitteen.

$\square$

Lause 4.2.3 (Beppo Levin lause) *Olkoon (f_n) jono mitallisia ei-negatiivisia funktioita. Tällöin*

$$\int \sum_{i\in\mathbf{N}} f_i\ \mathrm{d}\mu = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int f_i\ \mathrm{d}\mu.$$

Todistus: Merkitsemme $u_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$. Tällöin $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ ja $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j$. Nyt monotonisen suppenemisen lauseesta seuraa, että

$$\int \lim_{n\to\infty} u_k\ \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_k\ \mathrm{d}\mu.$$

Edelleen lauseen 4.2.2 mukaan

$$\lim_{n\to\infty} \int u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j\ \mathrm{d}\mu.$$

Olemme siis osoittaneet, että

$$\int \sum_{i\in\mathbf{N}} f_i\ \mathrm{d}\mu = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int f_i\ \mathrm{d}\mu,$$

mikä pitikin osoittaa.

$\square$

Lause 4.2.4 (Fatoun lemma) *Olkoon (f_n) jono ei-negatiivisia, mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\ \mathrm{d}\mu.$$

Todistus: (Ks. [2, s. 229]) Seuraa helposti monotonisen suppenemisen lauseesta, ja jätämmekin yksityiskohtaisen todistuksen lukijalle.

$\square$

Lause 4.2.5 (Dominoidun suppenemisen lause) *Olkoon* (f_n) *sellainen jono mitallisia funktioita, että* $|f_n| \leq g$*, missä funktio* g *on integroituva, ja* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$*. Tällöin funktio* f *on integroituva ja*

$$\int f \ \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu.$$

Todistus: (Vrt. [2, s. 231]) Selvästi funktio f on mitallinen. Koska $|f_n| \leq g$ jokaisella indeksin n arvolla, niin $|f| \leq g$. Tällöin

$$0 \leq \int |f| \ \mathrm{d}\mu \leq \int g \ \mathrm{d}\mu.$$

Oletuksen mukaan funktio g on integroituva, joten myös funktio f integroituva.

Nyt $g \pm f_n \geq 0$ jokaisella indeksin n arvolla, joten Fatoun lemman (lause 4.2.4) nojalla saadaan

$$\int g \ \mathrm{d}\mu \pm \int f \ \mathrm{d}\mu = \int (g \pm f) \ \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g \pm f_n) \ \mathrm{d}\mu.$$

Edelleen

$$\liminf_{n\to\infty} \int (g+f_n) \ \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int g \ \mathrm{d}\mu + \int f_n \ \mathrm{d}\mu \right) = \int g \ \mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu,$$

joten

$$\int f \ \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu.$$

Vastaavasti

$$\liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n) \ \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int g \ \mathrm{d}\mu - \int f_n \ \mathrm{d}\mu \right) = \int g \ \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu,$$

joten

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu \leq \int f \ \mathrm{d}\mu.$$

Siis

$$\int f \ \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu \leq \int f \ \mathrm{d}\mu,$$

joten $\int f \ \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu = \limsup_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \ \mathrm{d}\mu$ ja väite on täten todistettu.

$\square$

Luku 5

Fubinin lause

5.1 Tulomitta

Tässä luvussa oletamme, että $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$ ovat täydellisiä mitta-avaruuksia.

Määritelmä 5.1.1 Olkoon joukko $S \subseteq X \times Y$. Asetamme

$$(\mu \times \nu)^*(S) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) \right\},$$

missä infimum otetaan yli kaikkien sellaisten jonojen $(A_j \times B_j)_{j=1}^{\infty}$, että $A_j \in \mathcal{M}_X$, $B_j \in \mathcal{M}_Y$ ja $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \times B_j)$.

Lause 5.1.1 *Joukkofunktio $(\mu \times \nu)^*$ on ulkomitta joukossa $X \times Y$.*

Todistus: Selvästi $(\mu \times \nu)^*(\emptyset) = 0$ ja monotonisuus seuraa mittojen μ ja ν monotonisuudesta. On siis osoitettava, että kuvaus $(\mu \times \nu)^*$ on subadditiivinen.

Olkoot joukot $S_k \subseteq X \times Y$. Merkitsemme $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ ja valitsemme mielivaltaisen luvun ε. Tällöin jokaista indeksin k arvoa kohti on olemassa sellainen jono $(A_j^k \times B_j^k)_{j=1}^{\infty}$, missä $A_j^k \in \mathcal{M}_X$ ja $B_j^k \in \mathcal{M}_Y$, että

$$S_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j^k \times B_j^k)$$

ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^k)\nu(B_j^k) < (\mu \times \nu)^*(S_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Täten

$$\begin{aligned}
(\mu \times \nu)^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^k)\nu(B_j^k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}((\mu \times \nu)^*(S_k) + \tfrac{\varepsilon}{2^k}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}(\mu \times \nu)^*(S_k) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska luku ε on mielivaltainen on $(\mu \times \nu)^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\mu \times \nu)^*(S_k)$ ja kuvaus $(\mu \times \nu)^*$ siis subadditiivinen.

□

Merkitsemme $\mathcal{M}_{X \times Y}$ tarkoittamaan niiden joukkojen kokoelmaa, jotka ovat mitallisia kuvauksen $(\mu \times \nu)^*$ suhteen. Aikaisemmin olemme todistaneet, että näin muodostettu joukko muodostaa aina σ-algebran. Merkitköön lisäksi $(\mu \times \nu)$ kuvauksen $(\mu \times \nu)^*$ rajoittumaa joukkoon $\mathcal{M}_{X \times Y}$. Jälleen aikaisemmin esitetyn nojalla tiedämme, että kuvaus $(\mu \times \nu)$ on mitta joukossa $\mathcal{M}_{X \times Y}$.

5.2 Fubinin lause

Fubinin lause käsittelee useampiulotteisten integraalien laskemista iteroituina integraaleina. Riemannin integraalilla Fubinin lauseen vastine on kömpelö, mutta yleisemmän integraalin tapauksessa kaikki toimii kauniisti.

Lause 5.2.1 *Olkoon* $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ *ja* $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$ *täydellisiä mitta-avaruuksia. Tällöin*

i) Jos joukko $A \in \mathcal{M}_X$ *ja joukko* $B \in \mathcal{M}_Y$*, niin joukko* $A \times B \in \mathcal{M}_{X \times Y}$ *ja*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

ii) Jos joukko $S \in \mathcal{M}_{X \times Y}$*,* S *on* σ*-äärellinen suhteessa mittaan* $(\mu \times \nu)$ *ja joukko* $S_y = \{x \mid (x, y) \in S\}$ *sekä joukko* $S_x = \{y \mid (x, y) \in S\}$*, niin*

$$S_y \in \mathcal{M}_X \text{ m.k. (mitan } \nu \text{ mielessä) } y \in Y,$$

ja

$$S_x \in \mathcal{M}_Y \text{ m.k. (mitan } \mu \text{ mielessä) } x \in X.$$

Lisäksi kuvaus $y \mapsto \mu(S_y)$ on $\mathcal{M}_Y$-mitallinen ja kuvaus $x \mapsto \nu(S_x)$ on $\mathcal{M}_X$-mitallinen sekä

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(S) &= \textstyle\int_X \nu(S_x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X(\int_Y \chi_S(x,y)\,\mathrm{d}\nu)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \textstyle\int_Y \nu(S_y)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y(\int_X \chi_S(x,y)\,\mathrm{d}\mu)\,\mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

iii) Jos f on mitta-avaruuden $(X \times Y, \mathcal{M}_{X\times Y}, \mu \times \nu)$ integroituva funktio (mitan $\mu \times \nu$ suhteen), niin kuvaus $y \mapsto f(x,y)$ on integroituva mitan ν suhteen m.k. (mitan μ mielessä) $x \in X$ ja kuvaus $x \mapsto f(x,y)$ on integroituva mitan μ suhteen m.k. (mitan ν mielessä) $y \in Y$. Lisäksi kuvaus

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu$$

on integroituva mitan μ suhteen ja kuvaus

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu$$

on integroituva mitan ν suhteen. Edelleen

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \textstyle\int_X(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \textstyle\int_Y(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu)\,\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

Todistus: Tulos on klassinen ja on esitetty todistuksineen lähes jokaisessa analyysin oppikirjassa. (Ks. [2, s. 244 – 247], [3, s. 356 – 375], [4, s. 84 – 87], [5, s. 177 – 184], [6, s. 29 – 31], [7, s. 264 – 271])

$\square$

Esimerkki 5.2.1 Tarkastelemme tilannetta, jossa integrointijärjestyksen vaihtaminen ei ole sallittua. Olkoon joukko $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Tarkastelemme nyt tässä joukossa määriteltyä funktiota f. Konstruoimme funktion f seuraavasti: Olkoon $\delta_n = \frac{1}{n}$, missä $n \in \mathbf{N}$, ja $I_n =]\delta_{n+1}, \delta_n[$. Asetamme

$$g_n(t) = \frac{2}{\delta_n - \delta_{n+1}} \begin{cases} \delta_n - t, & \text{kun } \frac{1}{2}(\delta_{n+1} + \delta_n) \le t \le \delta_n, \\ t - \delta_{n+1}, & \text{kun } \delta_{n+1} \le t \le \frac{1}{2}(\delta_{n+1} + \delta_n), \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt selvästi $\int_{I_n} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ kaikilla indeksin n arvoilla.

Määrittelemme nyt funktion f asettamalla

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{kun } x=0,\\ 0, & \text{kun } y=0,\\ g_m(x)g_n(x), & \text{kun } x\in I_m, y\in I_n \text{ ja } m=n,\\ -g_m(x)g_n(x), & \text{kun } x\in I_m, y\in I_n \text{ ja } m=n+1,\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

Olkoon nyt $y\in[0,1]$. Jos $y=0$, niin $f(x,y)=0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, joten $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=0$. Jos taas $0<y\leq 1$, on olemassa täsmälleen yksi sellainen luku $n\in\mathbf{N}$, että $y\in I_n$, ja $f(x,y)=0$, vain kun $x\notin I_n$ tai $x\notin I_{n+1}$. Täten

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x &= \textstyle\sum_{m=n,n+1}\int_{I_m} f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &= \textstyle\int_{I_n} g_n(x)g_n(y)\,\mathrm{d}x-\int_{I_{n+1}} g_{n+1}(x)g_n(y)\,\mathrm{d}x\\ &= \textstyle g_n(y)\int_{I_n} g_n(x)\,\mathrm{d}x-g_n(y)\int_{I_{n+1}} g_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= g_n(y)-g_n(y)=0,\end{aligned}$$

sillä selvästi $\int_{I_m} g(t)\,\mathrm{d}t=1$ jokaisella indeksin m arvolla. Edelleen $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=0$ jokaisella muuttujan y arvolla, joten

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=0.$$

Olkoon nyt $x\in[0,1]$. Jos $x=0$, niin $f(x,y)=0$ kaikilla muuttujan y arvoilla, joten $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=0$. Jos taas $0<x\leq 1$, on olemassa täsmälleen yksi sellainen luku $m\in\mathbf{N}$, että $x\in I_m$. Jos $m\geq 2$, niin $f(x,y)=0$ vain kun $y\notin I_m$ tai $y\notin I_{m-1}$. Jos taas $m=1$, niin $f(x,y)=0$ vain jos $y\notin I_1$. Joten jos $x\in I_m$, missä $m\geq 2$, niin

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \textstyle\sum_{n=m,m-1}\int_{I_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y\\ &= \textstyle\int_{I_m} g_m(x)g_m(y)\,\mathrm{d}y-\int_{I_{m-1}} g_m(x)g_{m-1}(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \textstyle g_m(x)\int_{I_m} g_m(y)\,\mathrm{d}y-g_m(x)\int_{I_{m-1}} g_{m-1}(y)\,\mathrm{d}y\\ &= g_m(x)-g_m(x)=0.\end{aligned}$$

Jos taas $x\in I_1$, niin

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{I_1} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{I_1} g_1(x)g_1(y)\,\mathrm{d}y=g_1(x)\int_{I_1} g_1(y)\,\mathrm{d}y=g_1(x).$$

Täten

$$\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq \delta_2, \\ g_1(x), & \text{kun } x \in I_1. \end{cases}$$

ja edelleen

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x = \int_{I_1} g_1(x)\ \mathrm{d}x = 1,$$

joten

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y.$$

Esimerkki osoitaa, että aina suinkaan ei integroinnin järjestystä voi vaihtaa. Sovellettaessa siis Fubinin lausetta on ensin varmistuttava, että lauseen asettamat ehdot ovat voimassa. Tämän esimerkin tapauksessa lauseen soveltaminen kaatuu vaatimukseen funktion f integroituvuudesta.

Huomautamme, että Fubinin lausetta ei voi kääntää. Toisin sanoen iteroitujen integraalien olemassaolo yhtäsuurina ei riitä takaamaan sitä, että funktio olisi integroituva vastaavan tulomitan suhteen.

Esimerkki 5.2.2 Tarkastelemme funktiota

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} te^{-x\sin t}\ \mathrm{d}t,$$

missä $x > 0$. Osoitamme Fubinin lauseeseen nojautuen, että funktio f on integroituva välillä $]0,\infty[$. Koska integraali on positiivinen ja mitallinen kummankin muuttujan suhteen, voimme laskea

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x &= \textstyle\int_0^\infty (\int_0^{\frac{\pi}{2}} te^{-x\sin t}\ \mathrm{d}t)\ \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^\infty te^{-x\sin t}\ \mathrm{d}x)\ \mathrm{d}t \\ &= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\ \mathrm{d}t < \infty, \end{aligned}$$

koska lauseke $\frac{t}{\sin t}$ on rajoitettu välillä $]0,\frac{\pi}{2}]$ (se, että lauseketta $\frac{t}{\sin t}$ ei ole määritelty pisteessä $t = 0$ ei haittaa tässä).

Kirjallisuutta

[1] C. B. Boyer: *Tieteiden kuningatar, osat I ja II.* Art House, Juva 1995. Suomentanut Kimmo Pietiläinen.

[2] A. Browder: *Mathematical Analysis.* Springer-Verlag New York Inc., New York 1996.

[3] J. H. Dshalalow: *Real Analysis: An Introduction to the Theory of Real Functions and Integration.* CRC Press LLC, 2001.

[4] A. Friedman: *Foundations of Modern Analysis.* Holt, Rinehart and Winston Inc, 1970.

[5] R. F. Gariepy ja W. P. Ziemer: *Modern Real Analysis*, PWS Publishing Company, 1994.

[6] O. Lehto: *Reaalifunktioiden teoria.* Limes ry, Helsinki, 1975.

[7] H. L. Royden: *Real Analysis: Second Edition.* The Macmillan Company, Collier-Macmillan Canada Ltd., Toronto, Ontario, 1970.