TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Sanna Kari

Modaalilogiikan ja predikaattilogiikan kaavojen vastaavuus

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Toukokuu 2002

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoitus on perehdyttää lukija modaalilogiikan ja predikaattilogiikan kaavojen vastaavuuteen. Modaalilogiikassa tutkitaan välttämättömyyksiä ja mahdollisuuksia mahdollisissa maailmoissa, kun taas predikaattilogiikka keskittyy tarkastelemaan kvanttoreiden avulla muodostettujen kaavojen totuuksia eri malleissa. Onkin kiinnostava seikka huomata, että näillä kahdella logiikalla on selkeä yhteys: todelle modaalilogiikan kaavalle voidaan löytää sitä vastaava predikaattilogiikan kaava. On kuitenkin huomattava, että tämä yhteys ei välttämättä aina päde, on siis olemassa modaalilogiikan kaavoja, joita ei voida ilmaista predikaattilogiikan avulla. Tässä työssä tarkastellaankin muun muassa sitä, milloin tämä vastaavuus on olemassa ja milloin ei.

Luvussa 2 on esitetty tarvittavia alustavia tarkasteluita ja matemaattisia tuloksia, joiden pohjalta on mahdollista ymmärtää tämän työn keskeiset tulokset. Luvussa 2 esitelläänkin muun muassa predikaattilogiikkaa, predikaattilogiikan malleja, relaatioita ja modaalista lauselogiikkaa sekä sen malleja ja kehyksiä. Modaalilogiikan kehyksien määritelmä on sinänsä merkittävä koko työn kannalta, koska modaalilogiikan ja predikaattilogiikan kaavojen vastaavuuksia tarkastellaan nimenomaan kehystasolla.

Luvussa 3 esitetään muunnoksen määritelmä, joka mahdollistaa modaalilogiikan ja predikaattilogiikan kaavojen vastaavuuksien tarkastelun. Muunnoksen avulla on mahdollista esittää modaalilogiikan kaavoja predikaattilogiikan kaavoina.

Luvussa 4 päädytään lopulta tarkastelemaan sitä, milloin modaalilogiikan kaava on mahdollista esittää predikaattilogiikan kaavan avulla. Tämän tarkastelun helpottamiseksi esitetäänkin uniformisuuden määritelmä, jonka avulla voidaan tehdä päätelmä modaalilogiikan ja predikaattilogiikan mahdollisesta vastaavuudesta. Luvussa 4 on kuitenkin ennen uniformisuutta esitetty monotonisuuden määritelmiä, joka on keskeisessä osassa uniformisuuden määritelmää.

Tämän tutkielman lukijalta edellytetään lauselogiikan perusteiden tuntemista, muuten kaikki tarvittava tieto on tässä työssä annettu.

2 Valmistelevia tarkasteluita

Tässä luvussa esitellään tämän työn päätuloksen ymmärtämisen kannalta keskeisiä aihekokonaisuuksia määritelmineen ja matemaattisin tuloksineen. Aihekokonaisuuksia on niin predikaattilogiikka ja sen mallit kuin modaalinen lauselogiikka sekä modaalilogiikan mallit ja kehykset. Lisäksi esitellään modaalilogiikan kaavoja tarkasteltaessa keskeiseksi asiaksi nouseva relaation käsite ja luvun lopuksi annateen myös kaavojen korvausta koskeva määritelmä.

2.1 Predikaattilogiikka

Propositiologiikassa lauseita muodostetaan propositiosymboleista p_i $(i = 1, \ldots, n)$ konnektiivien $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$ avulla. Predikaattilogiikassa hyödynnetään edellä mainittujen konnektiivien lisäksi kvanttoreita $\forall$ (kaikille) ja $\exists$ (jollekin), joiden avulla mahdollistuu sellaisten kaavojen tarkastelu, joissa on mielivaltainen määrä muuttujia.

Predikaattilogiikassa propositiosymboleita p_i $(i = 1, \ldots, n)$ vastaavat predikaattisymbolit P_i $(i = 1, \ldots, n)$ ja merkinnällä $P_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ halutaan korostaa sitä, että P_i on 1-paikkainen predikaattisymboli ja muuttujana on x. Symboli R_i $(i = 1, \ldots, n)$ on puolestaan 2-paikkainen predikaattisymboli, jolle käytetään merkintää $R_i(x, y)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tässä työssä muuttujille käytetään merkintöjä x, y, z ja muuttujien joukolle merkintää X.

Olkoon $L = \{P_1, \ldots, P_n, R_1, \ldots, R_m\}$ aakkosto. Tällöin kaavaa $P_i(x)$ sanotaan L-atomikaavaksi. L-kaavoja voidaan muodostaa määritelmässä 2.1 esitettyjen sääntöjen avulla (vrt.[3, s.74]).

Määritelmä 2.1 *Olkoon L aakkosto. L-kaavat saadaan seuraavilla säännöillä:*

1. *L-atomikaavat ovat L-kaavoja.*
2. *Jos A on L-kaava, niin $\neg A$ on L-kaava.*
3. *Jos A ja B ovat L-kaavoja, niin $(A \wedge B)$ on L-kaava.*
4. *Jos A on L-kaava ja $x \in X$, niin $\exists x(A)$ on L-kaava.*
5. *Jos A on L-kaava ja $x \in X$, niin $\forall x(A)$ on L-kaava.*
6. *Muita kaavoja ei ole.*

Edellisen määritelmän mukaan voidaankin nyt muodostaa erilaisia L-kaavoja.

Esimerkki 1 *Olkoon* $L = \{P_1, P_2, R_1\}$. *Tällöin seuraavat kaavat ovat L-kaavoja:*

$$\begin{aligned}
&P_1(x), \\
&R_1(x, y), \\
&\forall x(\exists y(P_1(x) \wedge P_2(y)) \Rightarrow R_1(x, y)) \textit{ ja} \\
&\exists x(P_1(x) \Rightarrow \forall y(R_1(x, y))).
\end{aligned}$$

2.2 Relaatiot

Relaatiot ovat keskeisessä osassa tarkasteltaessa modaalilogiikan kaavoja ja siksi seuraavaksi esitetään määritelmä relaatiolle.

Määritelmä 2.2 *Olkoon* X *ja* Y *epätyhjiä joukkoja. Jos* $R \subseteq X \times Y$, *niin* R *on relaatio joukosta* X *joukkoon* Y.

Merkinnällä $X \times Y$ tarkoitetaan joukkoa, jossa on alkioina joukkojen X ja Y alkioparit seuraavasti:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ ja } y \in Y\}.$$

Jos alkiot x ja y ovat relaatiossa keskenään, niin tässä työssä käytetään merkintää xRy. Vaihtoehtoisesti voitaisiin merkitä $(x, y) \in R$ tai $R(x, y)$. Vastaavasti merkinnällä $\neg xRy$ tarkoitetaan sitä, että alkiot x ja y eivät ole keskenään relaatiossa.

Tässä työssä tarkastellaan relaatioita R, jotka ovat relaatioita joukossa X eli $R \subseteq X \times X$.

Relaatiolle R on mahdollista asettaa erilaisia ehtoja, joita onkin esitelty määritelmässä 2.3.

Määritelmä 2.3 *Olkoon* R *joukossa* X *määritelty relaatio. Tällöin relaatio* R *on*

refleksiivinen, jos xRx *pätee jokaisella* $x \in X$,

irrefleksiivinen, jos $\neg xRx$ *pätee jokaisella* $x \in X$,

symmetrinen, jos $xRy \Rightarrow yRx$ *pätee jokaisella* $x, y \in X$,

antisymmetrinen, jos $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ *pätee jokaisella* $x, y \in X$,

transitiivinen, jos $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ *pätee jokaisella* $x, y, z \in X$,

vertailullinen, jos $xRy \vee yRx$ *pätee jokaisella* $x, y \in X$,

sarjallinen, jos jokaisella $x \in X$ *on olemassa* $y \in Y$, *jolle pätee* xRy *ja*

euklidinen, jos $xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz$ *pätee jokaisella* $x, y, x \in X$.

Seuraavaksi on esitetty kaksi esimerkkiä 2 ja 3 havainnollistamaan kuinka eritavalla määriteltyjen relaatioiden ominaisuukset eroavat toisistaan.

Esimerkki 2 Olkoon joukko X ja relaatio R määritelty seuraavasti:

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,3,4,5\} \text{ ja} \\ R &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}. \end{aligned}$$

Tällöin relaatio R on refleksiivinen, koska jokainen joukon X alkio on relaatiossa itsensä kanssa. Relaatio R on myös symmetrinen, koska jokaisella joukon X alkiolla on voimassa ehto: $xRy \Rightarrow yRx$. Mutta relaatio R ei ole transitiivinen, koska esimerkiksi $1R2$ ja $2R3$, mutta $\neg 1R3$.

Esimerkki 3 Olkoon joukko X ja relaatio R määritelty seuraavasti:

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,3,4\} \text{ ja} \\ R &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4)\}. \end{aligned}$$

Tällöin relaatio R on refleksiivinen, koska jokainen joukon X alkio on relaatiossa itsensä kanssa. Relaatio R on myös transitiivinen, koska jokaisilla joukon X alkioilla x, y ja z on voimassa ehto: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. Lisäksi relaatio R on sarjallinen, koska jokaista joukon X alkiota x kohti on olemassa sellainen joukon X alkio y, että xRy. Relaatio R ei ole symmetrinen, koska esimerkiksi $1R2$, mutta $\neg 2R1$, eikä vertailullinen, koska $\neg 3R4$ ja $\neg 4R3$.

2.3 Predikaattilogiikan malli

Predikaattilogiikan malli koostuu perusjoukosta W ja relaatioista $P_i^{\mathcal{A}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ja $R_j^{\mathcal{A}}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Merkitään tätä mallia symbolilla $\mathcal{A}$ eli

$$\mathcal{A} = \left\langle W, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_n^{\mathcal{A}}, P_1^{\mathcal{A}}, \ldots, P_m^{\mathcal{A}} \right\rangle.$$

Jotta olisi mahdollista määritellä kaavojen totuus predikaattilogiikan mallissa $\mathcal{A}$, niin sitä ennen täytyy määritellä mallin $\mathcal{A}$ tulkintafunktio m. (vrt.[3, s.76]).

Määritelmä 2.4 *Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{A}$ predikaattilogiikan malli. Mallin $\mathcal{A}$ tulkintafunktioita ovat sellaiset funktiot m, joille $m(x) \in W$ jokaisella predikaattilogiikan muuttujalla $x \in X$.*

Tulkintafunktion m ja seuraavaksi esiteltävän apukäsitteen avulla voidaan lopulta määrittää kaavojen totuus mallissa $\mathcal{A}$.

Olkoon m mallin $\mathcal{A} = \langle W, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_n^{\mathcal{A}}, P_1^{\mathcal{A}}, \ldots, P_m^{\mathcal{A}} \rangle$ tulkintafunktio ja $a \in W$ sekä x predikaattilogiikan muuttuja. Tällöin

$$m\,[x/a]$$

on tulkintafunktio, joka on muuten sama kuin m, paitsi että se saa muuttujalla x arvon a, eli

$$m\,[x/a]\,(y) = \begin{cases} m(y) & \text{, jos } y \neq x \text{ ja} \\ a & \text{, jos } y = x. \end{cases}$$

Nyt on mahdollista määritellä kaavojen totuus mallissa $\mathcal{A}$.

Määritelmä 2.5 *Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{A}$ predikaattilogiikan malli. Lisäksi olkoon A, B ja C L-kaavoja ja m mallin $\mathcal{A}$ tulkintafunktio.*

(i) Jos A on $P_i(x)$, niin m toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos $m(x) \in P_i$.

(ii) Jos A on $\neg B$, niin m toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos m ei toteuta kaavaa B.

(iii) Jos A on $B \wedge C$, niin m toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos m toteuttaa kaavan B ja kaavan C mallissa $\mathcal{A}$.

(iv) Jos A on $\exists x(B)$, niin m toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos $m\,[x/a]$ toteuttaa kaavan B jollakin joukon W alkiolla a mallissa $\mathcal{A}$.

(v) Jos A on $\forall x(B)$, niin m toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos $m\,[x/a]$ toteuttaa kaavan B kaikilla joukon W alkiolla a mallissa $\mathcal{A}$.

Jos m toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{A}$, niin merkitään

$$\mathcal{A} \models_m A.$$

Vastaavasti jos m ei toteuta kaavaa A mallissa $\mathcal{A}$, niin merkitään

$$\mathcal{A} \not\models_m A.$$

Edellä esitettyä määritelmää on mahdollista soveltaa alla olevan esimerkin mukaisesti.

Esimerkki 4 Olkoon malli $\mathcal{A} = \langle W, R \rangle$ määritelty seuraavasti:

$$\begin{aligned} W &= \{1, 2, 3, 4\} \text{ ja} \\ R &= \{(1, 2), (2, 3), (4, 3)\}. \end{aligned}$$

Olkoon lisäksi kaava A muotoa $\exists y(xRy)$ ja m tulkintafunktio mallissa $\mathcal{A}$. Nyt

$$\mathcal{A} \models_m A$$

pätee, jos ja vain jos on olemassa sellainen $a \in W$, jolle

$$\mathcal{A} \models_{m[y/a]} xRy.$$

Eli edellinen kaava pätee, jos ja vain jos on olemassa sellainen $a \in W$, että

$$(m(x), a) \in R.$$

Helposti huomataan, että jos $m(x) = 1, 2$ tai 4, niin m toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{A}$.

On siis löydetty sellainen $a \in W$, että $\mathcal{A} \models_{m[y/a]} xRy$. Siis

$$\mathcal{A} \models_m A \Leftrightarrow m(x) \neq 3.$$

Jatkossa tässä työssä käytetään merkinnän $\mathcal{A} \models_{m[x/a]} \varphi$ sijasta merkintää

$$\mathcal{A} \models \varphi\,[x/a]\,.$$

Sekä lisäksi jatkossa hyödynnetään predikaattilogiikan malleja, joita merkitään seuraavasti:

$$\mathcal{M}^* = \langle W, R, P_1, \ldots, P_n \rangle\,.$$

2.4 Modaalinen lauselogiikka

Koska tässä työssä tarkastellaan modaalista lauselogiikkaa, eikä lukijalta edellytetä aiempaa modaalilogiikan tuntemusta, niin modaalilogiikkaa on hyvä lähestyä määrittelemällä modaalinen lauselogiikan kieli.

Modaalisen lauselogiikan peruskonnektiiveiksi valitaan tässä työssä negaatio ja konjunktio. Näiden ja lausemuuttujien lisäksi käytetään modaalioperaattoria $\Box$ (välttämättömyysoperaattori). Modaalisessa lauselogiikassa kaavanmuodostussäännöt ovat tällöin:

1. Lausemuuttujat $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ovat kaavoja.
2. Jos A on kaava, niin $\neg A$ ja $\Box A$ ovat kaavoja.
3. Jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \wedge B)$ on kaava.
4. Muita kaavoja ei ole.

Välttämättömyysoperaattorin $\Box$ avulla on mhdollista määritellä toinenkin modaalioperaattori $\Diamond$ (mahdollisuusoperaattori) (vrt.[2, s.16]).

Määritelmä 2.6 *Mahdollisuusoperaattori* $\Diamond$ *määritellään ehdolla*

$$\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A.$$

Modaalioperaattorien $\Box$ ja $\Diamond$ vaikutusala on niitä välittömästi seuraava kaava.

Lauselogiikassa käytetään usein vakioita $\bot$(*falsum*) ja $\top$(*verum*).

Määritelmä 2.7 *Looginen vakio* $\bot$ *on aina lauselogiikassa epätosi ja vastaavasti looginen vakio* $\top$ *on aina lauselogiikassa tosi.*

Seuraavassa esimerkissä on havainnollistettu loogisten vakioiden $\top$ ja $\bot$ käyttöä.

Esimerkki 5 Osoitetaan, että $p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$ ja $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \bot$. Muodostetaan vaadittavat totuustaulut.

p	$\vee$	$\neg$	p	$\Leftrightarrow$	$\top$
t	*t*	*e*	*t*	*t*	*t*
e	*t*	*t*	*e*	*t*	*t*

p	$\wedge$	$\neg$	p	$\Leftrightarrow$	$\bot$
t	*e*	*e*	*t*	*t*	*e*
e	*e*	*t*	*e*	*t*	*e*

Totuustaulujen toiseksi viimeiseltä sarakkeelta nähdään, että yhtäpitävyys on tosi kaikissa mahdollisissa tapauksissa, joten on osoitettu, että $p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$ ja $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \bot$. $\Box$

2.5 Kehykset ja modaalilogiikan mallit

Aiemmin tässä työssä tarkasteltiin predikaattilogiikan malleja, jotka olivat muotoa $\mathcal{M}^* = \langle W, R, P_1 \ldots, P_n \rangle$. Tässä luvussa lähdetään tarkastelemaan modaalilogiikan malleja. Modaalilogiikan malli $\mathcal{M}$ voidaan muodostaa predikaattilogiikan malleista suorittamalla muunnos, jossa jokaisen relaation P_i paikalle sijoitetaan kuvaus V eli $P_i = V(p_i)$. Näin saatu malli on siis muotoa

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle .$$

Määritelmässä 2.8 esitetään kehyksen määritelmä (vrt.[2, s.74]), johon voidaan liittää äsken esitetty modaalilogiikan malli.

Määritelmä 2.8 *Kehys $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ on stuktuuri, jossa W on epätyhjä joukko ja R on relaatio $R \subseteq W \times W$.*

Intuitiivisesti voidaan ajatella, että joukko W tulkitaan *mahdollisten maailmojen joukoksi* ja relaatio R näiden maailmojen vaihtoehtorelaatioksi. Siis tällä tarkoitetaan sitä, että joissakin mahdollisissa maailmoissa on mahdollista olla olemassa tiettyjä ominaisuuksia, jotka eivät enää välttämättä ole voimassa joissakin muissa maailmoissa. Relaatiot puolestaan liittävät näitä maailmoita yhteen määritelmässä 2.3 esiteltyjen ominaisuuksien mukaisesti.

Kehykseen $\mathcal{F}$ liittyvä modaalilogiikan malli $\mathcal{M}$ on stuktuuri $\langle \mathcal{F}, V \rangle = \langle W, R, V \rangle$, jossa $\langle W, R \rangle$ on kehys ja V on kuvaus, joka ilmaisee, missä maailmoissa lausemuuttuja p_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ on tosi. Eli V on kuvaus joukolta $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ joukkoon $\mathcal{P}(W)$.

Kaavan A totuudelle ja epätotuudelle mallin $\mathcal{M}$ mahdollisessa maailmassa w on olemassa merkintätapa, joka esitellään seuraavaksi:

Olkoon annettu malli $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$. Kun w on mahdollinen maailma ja A on kaava, niin merkinnällä

$$\mathcal{M}, w \models A$$

tarkoitetaan, että kaava A on tosi maailmassa w mallissa $\mathcal{M}$. Merkinnällä

$$\mathcal{M}, w \not\models A$$

tarkoitetaan, että kaava A on epätosi maailmassa w mallissa $\mathcal{M}$.

Modaalilogiikan kaavan totuudelle mahdollisessa maailmassa on olemassa määritelmä, joka esitellään seuraavaksi (vrt.[2, s.75]).

Määritelmä 2.9 *Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$. Tällöin kaavojen totuudet määräytyvät mahdollisissa maailmoissa seuraavasti:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, w \models p_i &\Leftrightarrow w \in V(p_i), \\
\mathcal{M}, w \models \neg A &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \not\models A, \\
\mathcal{M}, w \models A \wedge B &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models A \wedge \mathcal{M}, w \models B \textit{ ja} \\
\mathcal{M}, w \models \Box A &\Leftrightarrow \forall w' \in W(wRw' \Rightarrow \mathcal{M}, w' \models A).
\end{aligned}$$

Viimeinen ehto sanoo siis, että kaava $\Box A$ on tosi maailmasssa w, jos ja vain jos A on tosi kaikissa maailmoissa w', jotka ovat mahdollisia suhteessa tähän maailmaan w (eli jotka ovat vaihtoehtoisia maailmalle w).

Modaalioperaattorin $\Diamond$ määrittelystä $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$ seuraa (vrt.[2, s.75]), että

$$\mathcal{M}, w \models \Diamond A \Leftrightarrow \exists w' \in W(wRw' \wedge \mathcal{M}, w' \models A).$$

Tämä ehto puolestaan sanoo, että kaava $\Diamond A$ on tosi maailmassa w, jos ja vain jos A on tosi jossakin maailmalle w vaihtoehtoisessa maailmassa.

Kaavan A totuutta voidaan laajentaa koskemaan yhden maailman sijasta koko annettua mallia $\mathcal{M}$ (vrt.[2, s.80]).

Määritelmä 2.10 *Kaava A on validi annetussa mallissa $\mathcal{M}$*

$$\mathcal{M} \models A,$$

jos $\mathcal{M}, w \models A$ pätee jokaisella $w \in W$.

Edelleen kaavan A totuutta annetussa mallissa voidaan laajentaa koskemaan yhden mallin sijasta koko kehystä $\mathcal{F}$.

Määritelmä 2.11 *Kaava A on validi annetussa kehyksessä $\mathcal{F}$*

$$\mathcal{F} \models A,$$

jos

$$\forall V(\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \models A).$$

Esimerkeissä 6 ja 7 esitetään kuinka kehyksen $\mathcal{F}$ relaatiot vaikuttavat modaalilogiikan kaavojen totuuteen eri maailmoissa.

Esimerkki 6 Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, jossa

$$\begin{aligned}
W &= \{1, 2, 3, 4\}, \\
R &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}, \\
V(p) &= \{2, 3\} \text{ ja} \\
V(q) &= \{1, 4\}.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, 2 \models \Box p,\ \ \mathcal{M}, 1 \not\models \Box p,\\
&\mathcal{M}, 3 \models \Box q,\ \ \mathcal{M}, 3 \not\models \Diamond q,\\
&\mathcal{M}, 1 \models \Diamond q \text{ ja } \mathcal{M}, 1 \not\models \Diamond\Diamond p \rightarrow \Box p.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7 Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, jossa

$$\begin{aligned}
W &= \{1,2,3,4\},\\
R &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4),(4,3),(4,4)\},\\
V(p) &= \{3,4\},\\
V(q) &= \{4\} \text{ ja}\\
V(r) &= \{1,2\}.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, 1 \models \Box\Diamond p,\ \ \mathcal{M}, 1 \not\models \Box\Diamond q,\\
&\mathcal{M}, 1 \models \Diamond\Diamond q \text{ ja } \mathcal{M}, 1 \not\models \Diamond\Diamond r.
\end{aligned}$$

2.6 Korvaus

Kaavassa A on mahdollista korvata siinä esiintyviä propositiosymboleita toisilla propositiosymboleilla tai kaavoilla. Seuraavassa määritelmässä 2.12 esitetäänkin korvauksen määritelmä (vrt.[2, s.10]). Lauseessa 2.1 puolestaan esitetään tulos, jonka perusteella validi kaava A säilyttää validisuutensa korvauksenkin jälkeen.

Määritelmä 2.12 *Olkoon A jokin kaava. Jos B on kaava, niin merkintä $A\,[p/B]$ tarkoittaa kaavaa, joka saadaan korvaamalla kaavassa A jokainen propositiosymbolin p esiintymä kaavalla B.*

Esimerkki 8 Olkoon $A = p \wedge \neg q$ ja $B = p \vee r$. Tällöin

$$\begin{aligned} A\,[q/p] &= p \wedge \neg p \text{ ja} \\ A\,[q/B] &= p \wedge (p \vee r). \end{aligned}$$

Lause 2.1 *Olkoot A ja $B_1, \ldots, B_k$ modaalilogiikan kaavoja ja $\mathcal{F}$ kehys. Nyt jos $\mathcal{F} \models A$, niin*

$$\mathcal{F} \models A\,[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]\,,$$

missä $q_1, \ldots, q_k$ ovat kaavassa A esiintyviä propositiosymboleita.

Todistus. Ks.[2, s.30].

3 Muunnos

Tässä luvussa esitetään muunnoksen määritelmä 3.1 (vrt.[1, s.84]), jonka avulla päästään tämän työn yhteen keskeiseen asiaan käsiksi eli miten modaalilogiikan kaavan validisuus voidaan esittää predikaattilogiikan kaavan avulla. Toisin sanoen tämän muunnoksen avulla mahdollistuu seuraavassa luvussa esitetty modaalilogiikan kaavojen ja predikaattilogiikan kaavojen vastaavuus.

Määritelmä 3.1 *Olkoon x predikaattilogiikan muuttuja. Muunnoksen (the Standard Translation) ST avulla voidaan modaalisia kaavoja kirjoittaa predikaattilogiikan kaavojen avulla seuraavasti:*

$$\begin{aligned} ST_x(p_i) &= P_i(x), \ \textit{kun } i = 1, \ldots, n, \\ ST_x(\bot) &\equiv x \neq x, \\ ST_x(\top) &\equiv x = x, \\ ST_x(\neg A) &= \neg ST_x(A), \\ ST_x(A \wedge B) &= ST_x(A) \wedge ST_x(B), \\ ST_x(\Box A) &= \forall y(xRy \rightarrow ST_y(A)) \ \textit{ja} \\ ST_x(\Diamond A) &= \exists y(xRy \wedge ST_y(A)). \end{aligned}$$

Määritelmän kahdella viimisellä rivillä on otettava huomioon, että $y \neq x$.

Seuraavissa kahdessa esimerkissä 9 ja 10 havainnollistetaan äsken esitetyn muunnoksen käyttötapoja (vrt.[1, s.84]).

Esimerkki 9 Tässä esimerkissä tarkastellaan modaalilogiikan kaavaa $\Diamond(\Box p \rightarrow q)$. Määritelmän 3.1 perusteella kaava voidaan kirjoittaa predikaattilogiikan kaavana.

$$\begin{aligned} ST_x(\Diamond(\Box p \rightarrow q)) &= \exists y(xRy \wedge ST_y(\Box p \rightarrow q)) \\ &= \exists y(xRy \wedge (ST_y(\Box p) \rightarrow ST_y(q))) \\ &= \exists y(xRy \wedge (\forall z(yRz \rightarrow ST_z(p)) \rightarrow Q(y))) \\ &= \exists y(xRy \wedge (\forall z(yRz \rightarrow P(z)) \rightarrow Q(y))). \end{aligned}$$

Esimerkki 10 Tässä esimerkissä tarkastellaan modaalilogiikan kaavaa $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$. Määritelmän 3.1 perusteella kaava voidaan kirjoittaa predikaattilogiikan kaavana.

$$\begin{aligned} ST_x(\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p) &= ST_x(\Diamond p) \rightarrow ST_x(\Box\Diamond p) \\ &= \exists y(xRy \wedge ST_y(p)) \rightarrow \forall z(xRz \rightarrow ST_z(\Diamond p)) \\ &= \exists y(xRy \wedge P(y)) \rightarrow \\ &\quad\ \forall z(xRz \rightarrow (\exists u(zRu \wedge ST_u(p)))) \\ &= \exists y(xRy \wedge P(y)) \rightarrow \forall z(xRz \rightarrow (\exists u(zRu \wedge P(u)))). \end{aligned}$$

Kaavan A validisuus mallissa $\mathcal{M}$ on yhtäpitävää kaavan A muunnoksen $ST_x(A)$ validisuudelle mallissa $\mathcal{M}^*$ (vrt.[1, s.85]).

Lause 3.1 *Olkoon A modaalilogiikan kaava.*

(1) Kaikilla modaalilogiikan malleilla $\mathcal{M}$ ja mallin $\mathcal{M}$ kaikilla maailmoilla w on voimassa seuraavaa:

$$\mathcal{M}, w \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}^* \models ST_x(A)[x/w].$$

(2) Kaikilla modaalilogiikan malleilla $\mathcal{M}$ on voimassa seuraavaa:

$$\mathcal{M} \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}^* \models \forall x ST_x(A).$$

Todistus.

(1) Todistetaan väite induktiolla kaavan A pituuden suhteen.

(i) Jos $A = P_i$, niin $ST_x(A) = P_i(x)$ ja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models A \quad &\Leftrightarrow \quad w \in V(p_i) \\ &\Leftrightarrow \quad w \in P_i \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models P_i(x)\,[x/w] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models ST_x(A)\,[x/w]\,. \end{aligned}$$

(i)' Jos $A = \bot$, niin $ST_x(A) \equiv x \neq x$ ja selvästi

$$\mathcal{M}, w \not\models A \text{ ja } \mathcal{M}^* \not\models ST_x(A)\,[x/w]\,.$$

Jos $A = \top$, niin $ST_x(A) \equiv x = x$ ja selvästi

$$\mathcal{M}, w \models A \text{ ja } \mathcal{M}^* \models ST_x(A)\,[x/w]\,.$$

Tehdään seuraavaksi induktio-oletus, jonka mukaan väite pätee kaavoille B ja C. **Huom.**Todistuksessa päätelmät, joiden perässä on $(*)$-merkintä, on tehty induktio-oletuksen perusteella.

(ii) Jos $A = \neg B$, niin $ST_x(A) = \neg ST_x(B)$ ja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models A \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, w \not\models B \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \not\models ST_x(B)\,[x/w] \ \ (*) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models \neg ST_x(B)\,[x/w] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models ST_x(\neg B)\,[x/w] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models ST_x(A)\,[x/w]\,. \end{aligned}$$

(iii) Jos $A = B \wedge C$, niin $ST_x(A) = ST_x(B) \wedge ST_x(C)$ ja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models A \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, w \models B \wedge \mathcal{M}, w \models C \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models ST_x(B)\,[x/w] \wedge \mathcal{M}^* \models ST_x(C)\,[x/w] \ \ (*) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models (ST_x(B) \wedge ST_x(C))\,[x/w] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models ST_x(B \wedge C)\,[x/w] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models ST_x(A)\,[x/w]\,. \end{aligned}$$

(iv) Jos $A = \Box B$, niin $ST_x(A) = \forall y(xRy \rightarrow ST_y(B))$ ja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models A \quad &\Leftrightarrow \quad \text{jokaisella } w' \in W \text{, jolla } wRw' \text{, pätee } \mathcal{M}, w' \models B \\ &\Leftrightarrow \quad \text{jokaisella } w' \in W \text{, jolla } wRw' \text{, pätee} \\ &\qquad\quad \mathcal{M}^* \models ST_y(B)\,[y/w'] \ \ (*) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{jokaisella } w' \in W \text{ pätee, jos } \mathcal{M}^* \models xRy\,[x/w, y/w']\,, \\ &\qquad\quad \text{niin } \mathcal{M}^* \models ST_y(B)\,[y/w'] \\ &\Leftrightarrow \quad \text{jokaisella } w' \in W \text{ pätee} \\ &\qquad\quad \mathcal{M}^* \models (xRy \rightarrow ST_y(B))\,[x/w, y/w'] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^* \models \forall y(xRy \rightarrow ST_y(B))\,[x/w]\,. \end{aligned}$$

Induktioväite on näin saatu osoitetuksi. Siis alkuperäinen väite on oikea.

(2) Määritelmän 2.10 mukaan kaavan A validisuus maailmassa w voidaan laajentaa koskemaan koko mallia $\mathcal{M}$, joten jos kaava A on validi mallissa $\mathcal{M}$, niin

$$\mathcal{M}, w \models A \tag{$*$}$$

on voimassa jokaisella maailmalla w. Tällöin edellisen kohdan (1) mukaan rivin $(*)$ kanssa on yhtäpitävää, että

$$\mathcal{M}^* \models ST_x(A)\,[x/w]$$

on voimassa maailmalla w, joten

$$\mathcal{M}^* \models \forall x ST_x(A).$$

Siis lauseen kohta (2) on saatu osoitetuksi oikeaksi. □

Kaavan A validisuus kehyksessä $\mathcal{F}$ on yhtäpitävää sen kanssa, että tietty monadisen toisen kertaluvun kaava on tosi kehyksessä $\mathcal{F}$.

Lause 3.2 *Olkoon A modaalilogiikan kaava. Tällöin kaikille kehyksille $\mathcal{F}$ on voimassa seuraava:*

$$\mathcal{F} \models A \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(A),$$

jossa predikaattisymbolit P_i $(i = 1, \ldots, n)$ vastaavat kaavassa A esiintyviä propositiosymboleita p_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Todistus (vrt.[1, s.135]). Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ mielivaltainen kehys. Tällöin, jos modaalilogiikan kaava A on validi kehykseen $\mathcal{F}$ liittyvässä mallissa $\mathcal{M}$ eli

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle \models A, \tag{$*$}$$

niin kaavan A validisuus säilyy tarkasteltaessa mitä tahansa valuaatiota V. Näin ollen lauseen 3.1 kohdan (2) kanssa on yhtäpitävää, että

$$\mathcal{M}^* = \left\langle \mathcal{F}, P_1^{\mathcal{M}^*}, \ldots, P_n^{\mathcal{M}^*} \right\rangle \models \forall x ST_x(A)$$

kaikilla relaatioilla $P_1^{\mathcal{M}^*}, \ldots, P_n^{\mathcal{M}^*}$. Eli

$$\mathcal{F} = \langle W, R \rangle \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(A).$$

Näin ollen lause on saatu osoitettua oikeaksi. □

4 Modaalilogiikan ja predikaattilogiikan kaavojen vastaavuus

Modaalilogiikan kaavan sanotaan vastaavan predikaattilogiikan kaavaa, jos kaavan A validisuuden kanssa on yhtäpitävää jokin predikaattilogiikan kaava φ_A.

Tämän luvun sisältöön kuuluuvat muun muassa esimerkit, joissa tarkastellaan modaalilogiikan kaavojen vastaavuutta predikaattilogiikan kaavoihin. Ennen näitä esimerkkejä on kuitenkin esimerkkien ymmärtämisen takia esitettävä muutama alustava tulos koskien monotonisuutta.

Alaluvussa 4.4 esitetään tämän tutkielman viimeinen tulos: uniformisuus. Uniformisuuden mukaan voidaan todeta onko modaalilogiikan kaava mahdollista esittää predikaattilogiikan kaavan avulla.

4.1 Monotonisuus

Positiivisuudelle ja negatiivisuudelle on mahdollista asettaa määritelmä, joka on pohjana myöhemmin tässä työssä esitettäville monotonisuuden määritelmille (vrt.[1, s.151]).

Määritelmä 4.1

(i) *Propositiosymbolin p esiintymän sanotaan olevan positiivinen kaavassa A, jos siihen vaikuttavia negaatioita on parillinen määrä.*

(ii) *Propositiosymbolin p esiintymän sanotaan olevan negatiivinen kaavassa A, jos siihen vaikuttavia negaatioita on pariton määrä.*

(iii) *Modaalilogiikan kaavan A sanotaan olevan p-positiivinen, jos kaavassa A propositiosymbolin p kaikki esiintymät ovat positiivisia.*

(iv) *Modaalilogiikan kaavan A sanotaan olevan p-negatiivinen, jos kaavassa A propositiosymbolin p kaikki esiintymät ovat negatiivisia.*

Kun tarkastellaan propositiosymbolien sijasta predikaattisymboleita, niin voidaan muodostaa vastaavanlaiset määritelmät positiivisuudelle ja negatiivisuudelle kuin edellä. Eli predikaattisymboli P voi olla kaavassa A positiivinen tai negatiivinen ja kaavan A muunnos $ST_x(A)$ voi olla myös P-positiivinen tai P-negatiivinen.

Edellä esitettyjä määritelmiä sovellettaessa on otettava huomioon, että kaavan A tulee olla sellaisessa muodossa, jossa on käytetty vain konnektiiveja

$\neg, \vee, \wedge, \Box$ ja $\Diamond$. Sitä, minkä takia näin tulee menetellä, havainnollistetaan seuraavassa esimerkissä 11.

Esimerkki 11 Tarkastellaan kaavaa $A = p \to p$. Kaavan A molemmat propositiosymbolin p esiintymät näyttäisivät olevan positiivisia ja siksi myös määritelmän 4.1 kohdan (*iii*) mukaan kaava A näyttäisi olevan p-positiivinen. Mutta jos kaava A kirjoitetaan muotoon, jossa ei ole käytetty implikaatiota eli $A = \neg p \vee p$, niin nähdään selvästi, että molemmat propositiosymbolin p esiintymät eivät ole positiivisia (eikä negatiivisia) ja siksi määritelmän 4.1 kohdan (*iii*) mukaan kaava A ei ole p-positiivinen (eikä p-negatiivinen).

Yksi hyvin ilmeinen ominaisuus kaavan A p-positiivisuudelle ja p-negatiivisuudelle on se, että jos kaava A on p-positiivinen (p-negatiivinen), niin $\neg A$ on p-negatiivinen (p-positiivinen).

Esimerkki 12 Tässä esimerkissä tarkastellaan propositioiden ja kaavojen positiivisuutta (negatiivisuutta).

(a) Propositiosymboli p on positiivinen kaavassa $\neg(\neg p \vee \neg\neg q)$.

(b) Propositiosymboli q on negatiivinen kaavassa $\neg(\neg p \vee \neg\neg q)$.

(c) Kaava $\neg p \vee ((\neg p \wedge q) \wedge \neg\neg q)$ on p-negatiivinen, koska molemmat kaavassa olevat propositiosymbolin p esiintymät ovat negatiivisia. Kaava on lisäksi q-positiivinen, koska molemmat kaavassa olevat propositiosymbolin q esiintymät ovat positiivisia.

(d) Kaava $\neg(p \wedge \neg p)$ ei ole p-positiivinen eikä p-negatiivinen, koska propositiosymbolin p esiintymiin vaikuttavien negaatioiden määrä on toisen esiintymän kohdalla parillinen ja toisen pariton.

Lauseessa 4.1 esitetty tulos on oleellinen tutkittaessa monotonisuutta (vrt.[1, s.152]).

Lause 4.1 *Olkoon A modaalilogiikan kaava. Kaava A on p-positiivinen, jos ja vain jos $ST_x(A)$ on propositiosymbolia p vastaavalla muuttujalla P P-positiivinen.*

Todistus. Väite todistetaan induktiolla kaavan A pituuden suhteen.

(i) Olkoon kaava A p-positiivinen. Jos $A = P_i$, niin $ST_x(A) = P_i(x)$ ja tällöin selvästi $ST_x(A)$ on propositiosymbolia p vastaavalla muuttujalla P P-positiivinen.

Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan väite pätee kaavoille B ja C.

(ii) Olkoon kaava A p-positiivinen. Jos $A = \neg B$, niin $ST_x(A) = \neg ST_x(B)$. Nyt koska kaava A on p-positiivinen ja $A = \neg B$, niin kaavan B on oltava p-negatiivinen, jolloin induktio-oletuksen mukaan $ST_x(B)$ on P-negatiivinen ja edelleen $\neg ST_x(B)$ on P-positiivinen. Näin ollen koska $ST_x(A) = \neg ST_x(B)$, niin $ST_x(A)$ on propositiosymbolia p vastaavalla muuttujalla P P-positiivinen.

(iii) Olkoon kaava A p-positiivinen. Jos $A = B \wedge C$, niin $ST_x(A) = ST_x(B \wedge C) = ST_x(B) \wedge ST_x(C)$. Nyt koska kaava A on p-positiivinen ja $A = B \wedge C$, niin kaavojen B ja C on oltava p-positiivisia, jolloin $ST_x(B)$ ja $ST_x(C)$ ovat induktio-oletuksen mukaan P-positiivisia ja edelleen $ST_x(B \wedge C)$ on P-positiivinen. Näin ollen koska $ST_x(A) = ST_x(B \wedge C)$, niin $ST_x(A)$ on propositiosymbolia p vastaavalla muuttujalla P P-positiivinen.

(iv) Olkoon kaava A p-positiivinen. Jos $A = \Box B$, niin $ST_x(A) = \forall y(xRy \rightarrow ST_y(B))$ ja edelleen $ST_x(A) = \forall y(\neg xRy \vee ST_y(B))$. Nyt koska kaava A on p-positiivinen ja $A = \Box B$, niin kaavan B on oltava p-positiivinen, jolloin $ST_y(B)$ on induktio-oletuksen mukaan P-positiivinen. Näin ollen koska $ST_x(A) = \forall y(\neg xRy \vee ST_y(B))$, niin $ST_x(A)$ on propositiosymbolia p vastaavalla muuttujalla P P-positiivinen. $\square$

Määritelmissä 4.2 ja 4.3 esitetään määritelmä monotonisesti kasvamiselle ja monotonisesti vähenemiselle (vrt.[1, s.152]).

Määritelmä 4.2 *Modaalilogiikan kaava A on p-monotonisesti kasvava, jos kaava A säilyttää totuutensa laajennettaessa propositiosymbolin p tulkintaa. Toisin sanoen, kaava A on p-monotonisesti kasvava, jos jokaisessa mallissa $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ ja mallin $\mathcal{M}$ jokaisessa maailmassa $w \in W$ ja jokaisella kuvauksella V', jolle on voimassa $V(p) \subseteq V'(p)$, ja kaikilla propositiosymboleilla $q \neq p$, $V(q) = V'(q)$, on voimassa seuraava:*

$$\langle W, R, V \rangle, w \models A \Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models A.$$

Vastaavasti voidaan määritellä p-monotonisesti vähenevyys.

Määritelmä 4.3 *Modaalilogiikan kaava A on p-monotonisesti vähenevä, jos kaava A säilyttää totuutensa supistettaessa propositiosymbolin p tulkintaa. Toisin sanoen, kaava A on p-monotonisesti vähenevä, jos jokaisessa mallissa $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ ja mallin $\mathcal{M}$ jokaisessa maailmassa $w \in W$ ja jokaisella kuvauksella V', jolle on voimassa $V'(p) \subseteq V(p)$, ja kaikilla propositiosymboleilla $q \neq p$, $V(q) = V'(q)$, on voimassa seuraava:*

$$\langle W, R, V \rangle, w \models A \Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models A.$$

Seuraavassa lauseessa 4.2 osoitetaan, että jos kaava A on p-positiivinen (p-negatiivinen), niin se on p-monotonisesti kasvava (p-monotonisesti vähenevä) (vrt.[1, s.152]).

Lause 4.2 *Olkoon A modaalilogiikan kaava.*

(i) Jos kaava A on p-positiivinen, niin se on p-monotonisesti kasvava.

(ii) Jos kaava A on p-negatiivinen, niin se on p-monotonisesti vähenevä.

Todistus. Todistetaan lause induktiolla kaavan A pituuden suhteen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ mielivaltainen malli ja V' sellainen kuvaus, jolle on voimassa $V(p) \subseteq V'(p)$, sekä lisäksi kaikilla propositiosymboleilla pätee jos $q \neq p$, niin $V(q) = V'(q)$.

(i) Olkoon kaava $A = p_i$. Tällöin kaava A on p-positiivinen ja

$$\begin{aligned} \langle W, R, V \rangle, w \models A &\Rightarrow w \in V(p_i) \\ &\Rightarrow w \in V'(p_i) \\ &\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models A. \end{aligned}$$

Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan väite pätee kaavoille B ja C. **Huom.** Todistuksessa päätelmät, joiden perässä on $(*)$-merkintä, on tehty induktio-oletuksen perusteella.

(ii) Olkoon kaava A p-positiivinen ja $A = \neg B$. Tällöin siis kaavan B on oltava p-negatiivinen. Nyt

$$\begin{aligned} \langle W, R, V \rangle, w \models A &\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \not\models B \\ &\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \not\models B \text{ (*)} \\ &\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models \neg B \\ &\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models A. \end{aligned}$$

(ii)' Olkoon kaava A p-negatiivinen ja $A = \neg B$. Tällöin siis kaavan B on oltava p-positiivinen. Nyt

$$\begin{aligned} \langle W, R, V' \rangle, w \models A &\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \not\models B \\ &\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \not\models B \text{ (*)} \\ &\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models \neg B \\ &\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models A. \end{aligned}$$

(iii) Olkoon kaava A p-positiivinen ja $A = B \wedge C$. Tällöin siis kaavojen B ja C on oltava p-positiivisia. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle W, R, V \rangle, w \models A &\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models B \wedge C \\
&\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models B \wedge \langle W, R, V \rangle, w \models C \\
&\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models B \wedge \langle W, R, V' \rangle, w \models C \text{ (*)} \\
&\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models B \wedge C \\
&\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models A.
\end{aligned}$$

(iii)' Olkoon kaava A p-negatiivinen ja $A = B \wedge C$. Tällöin siis kaavojen B ja C on oltava p-negatiivisia. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle W, R, V' \rangle, w \models A &\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models B \wedge C \\
&\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models B \wedge \langle W, R, V' \rangle, w \models C \\
&\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models B \wedge \langle W, R, V \rangle, w \models C \text{ (*)} \\
&\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models B \wedge C \\
&\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models A.
\end{aligned}$$

(iv) Olkoon kaava A p-positiivinen ja $A = \Box B$, joten kaava B on p-positiivinen. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle W, R, V \rangle, w \models A &\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models \Box B \\
&\Rightarrow \text{jokaisella } w' \in W \text{, jolla } wRw', \\
& \text{ pätee } \langle W, R, V \rangle, w' \models B \\
&\Rightarrow \text{jokaisella } w' \in W \text{, jolla } wRw', \\
& \text{ pätee } \langle W, R, V' \rangle, w' \models B \text{ (*)} \\
&\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models \Box B \\
&\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models A.
\end{aligned}$$

(iv)' Olkoon kaava A p-negatiivinen ja $A = \Box B$, joten kaava B on p-negatiivinen. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle W, R, V' \rangle, w \models A &\Rightarrow \langle W, R, V' \rangle, w \models \Box B \\
&\Rightarrow \text{jokaisella } w' \in W \text{, jolla } wRw', \\
& \text{ pätee } \langle W, R, V' \rangle, w' \models B \\
&\Rightarrow \text{jokaisella } w' \in W \text{, jolla } wRw', \\
& \text{ pätee } \langle W, R, V \rangle, w' \models B \text{ (*)} \\
&\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models \Box B \\
&\Rightarrow \langle W, R, V \rangle, w \models A.
\end{aligned}$$

Näin induktioväite on saatu osoitettua oikeaksi. Siis alkuperäinen väite on oikea. $\square$

4.2 Vastaavuus

Modaalilogiikan kaavojen ja predikaattilogiikan kaavojen yhteyttä on hyvä tarkastella erilaisten esimerkkien avulla.

Esimerkki 13 Tässä esimerkissä osoitetaan, että modaalilogiikan kaavan $\Diamond\Box p$ validisuus kehyksessä $\mathcal{F}$ on yhtäpitävä predikaattilogiikan kaavan kanssa (vrt.[1, s.153]).
Oletetaan, että

$$\mathcal{F} \models \Diamond\Box p.$$

Kun tarkastellaan mitä tahansa kehyksen $\mathcal{F}$ maailmaa w ja kuvauksen V ollessa myös mikä tahansa, niin kaava $\Diamond\Box p$ on tosi maailmassa w. Näin ollen kuvaukseksi voidaan valita sellainen minimaalinen kuvaus V_m, että $V_m(p) = \emptyset$. Tällöin, koska $w \models \Diamond\Box p$, niin maailmalle w täytyy olla olemassa sellainen vaihtoehtoinen maailma v, että $v \models \Box p$. Mutta kuvauksen V määrittelystä johtuen maailmalle v ei tällöin voi olla vaihtoehtoisia maailmoja. Siis

$$\mathcal{F} \models \forall x(\exists y(xRy \land \neg\exists z(yRz))).$$

Nyt ollaan siis osoitettu, että

$$\mathcal{F} \models \Diamond\Box p \Rightarrow \mathcal{F} \models \forall x(\exists y(xRy \land \neg\exists z(yRz))). \tag{$*$}$$

Osoitettaessa implikaatiota toiseen suuntaan, niin oletataan, että kaikilla kehyksen $\mathcal{F}$ mahdollisilla maailmoilla on olemassa sellainen vaihtoehtoinen maailmalla, jolla ei ole yhtään vaihtoehtoisia maailmoja.

Osoitetaan nyt, että kaava $\Diamond\Box p$ on tosi kehyksessä $\mathcal{F}$. Valitaan kuvaukseksi minimaalinen kuvaus V_m ja lisäksi valitaan mielivaltainen kehyksen $\mathcal{F}$ maailma w. Nyt siis $\langle \mathcal{F}, V_m \rangle, w \models \Diamond\Box p$. Koska kaava $\Diamond\Box p$ on p-positiivinen, niin lauseen 4.2 mukaan kaava $\Diamond\Box p$ on p-monotonisesti kasvava. Näin ollen $\langle \mathcal{F}, V \rangle, w \models \Diamond\Box p$. Nyt ollaan siis osoitettu, että

$$\mathcal{F} \models \forall x(\exists y(xRy \land \neg\exists z(yRz))) \Rightarrow \mathcal{F} \models \Diamond\Box p. \tag{$**$}$$

Nyt kohtien $(*)$ ja $(**)$ mukaan ollaan osoitettu, että modaalilogiikan kaavan $\Diamond\Box p$ validisuus kehyksessä $\mathcal{F}$ on yhtäpitävä predikaattilogiikan kaavan $\forall x(\exists y(xRy \land \neg\exists z(yRz)))$ kanssa. $\square$

Huomautus. Edellisen esimerkin todistus voitaisiin itseasiassa sivuuttaa toteamalla, että kaava $\Diamond\Box p$ ei ole validi missään kehyksessä $\mathcal{F}$. Nimittäin, jotta $\Diamond\Box p$ olisi voimassa jossakin maailmassa, niin on tälle maailmalle oltava olemassa vaihtoehtoinen maailma, jossa $\Box p$ on voimassa. Nyt, jotta $\Box p$ olisi voimassa tässä maailmassa, niin tälle maailmalle ei saa olla vaihtoehtoisia maailmoja. Mutta toisaalta jokaisessa maailmassa on oltava edelleen voimassa $\Diamond\Box p$, joten erityisesti edellä mainitulle maailmalle, jossa on voimassa $\Box p$ on oltava vaihtoehtoisia maailmoja. Tällöin on päädytty mahdottomaan tilanteeseen, joten huomataan, että kaava $\Diamond\Box p$ ei voi olla validi missään kehyksessä $\mathcal{F}$. Näin ollen kaavaa $\Diamond\Box p$ vastaa predikaattilogiikan kaava, joka on aina epätosi.

Seuraavassa lauseessa esitetään lisää modaalilogiikan ja predikaattilogiikan vastaavuuksia.

Lause 4.3 *Olkoon* $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$. *Tällöin*

(i) $\mathcal{F} \models \Box A \to A \Leftrightarrow R$ *on refleksiivinen,*

(ii) $\mathcal{F} \models A \to \Box\Diamond A \Leftrightarrow R$ *on symmetrinen,*

(iii) $\mathcal{F} \models \Box A \to \Box\Box A \Leftrightarrow R$ *on transitiivinen ja*

(iv) $\mathcal{F} \models \Diamond A \to \Box\Diamond A \Leftrightarrow R$ *on euklidinen.*

Todistus (vrt.[2, s.98]). Osoitetaan väite (i). Oletetaan, että R on refleksiivinen. Nyt on siis osoitettava, että $\mathcal{F} \models \Box A \to A$. Olkoon maailma w mallin $\mathcal{M}$ sellainen mielivaltainen maailma, jossa $\mathcal{M}, w \models \Box A$. Refleksiivisyyden perusteella wRw ja lisäksi koska $\mathcal{M}, w \models \Box A$, niin $\mathcal{M} \models A$. Siis jokaisessa maailmassa w pätee, että $\mathcal{M}, w \models \Box A \to A$.

Nyt ollaan siis osoitettu, että

$$\text{R on refleksiivinen } \Rightarrow \mathcal{F} \models \Box A \to A. \qquad (*)$$

Oletetaan nyt, että R ei ole refleksiivinen. On siis olemassa sellainen maailma w, että $\neg wRw$. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ sellainen malli, että $V(p) = W - \{w\}$. Tällöin siis $\mathcal{M}, w \not\models p$. Lisäksi, koska $\neg wRw$, niin $\mathcal{M}, w \models \Box p$. Näin ollen

$$\mathcal{M}, w \not\models \Box p \to p.$$

Nyt on siis osoitettu

$$\mathcal{F} \models \Box A \rightarrow A \Rightarrow \text{R on refleksiivinen.} \tag{$**$}$$

Kohtien $(*)$ ja $(**)$ perusteella väite (i) on todistettu.

Osoitetaan seuraavaksi väite (ii). Oletetaan, että R on symmetrinen. Olkoon maailma w mallin $\mathcal{M}$ mielivaltainen maailma. Oletetaan, että $\mathcal{M}, w \models A$. Jos ei ole olemassa sellaista $w' \in W$, että wRw', niin triviaalisti $\mathcal{M}, w \models \Box\Diamond A$. Tarkastellaan tapausta, jossa maailmalle w on olemassa vaihtoehtoisia maailmoja. Olkoon $w' \in W$ mielivaltainen sellainen maailma, että wRw'. Koska R on symmetrinen, niin $w'Rw$. Koska $\mathcal{M}, w \models A$ ja $w'Rw$, niin $\mathcal{M}, w' \models \Diamond A$. Koska siis $\mathcal{M}, w' \models \Diamond A$ aina, kun wRw', niin $\mathcal{M}, w \models \Box\Diamond A$. Siis jokaisessa maailmassa w pätee, että $\mathcal{M}, w \models A \rightarrow \Box\Diamond A$.

Näin ollaan osoitettu, että

$$\text{R on symmetrinen } \Rightarrow \mathcal{F} \models A \rightarrow \Box\Diamond A. \tag{$*$}$$

Oletetaan nyt, että R ei ole symmetrinen. Tällöin on siis olemassa sellaiset maailmat w ja w', että wRw' ja $\neg w'Rw$. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ sellainen malli, että $V(p) = \{w\}$. Tällöin siis $\mathcal{M}, w \models p$. Koska ei ole olemassa sellaista maailmaa w'', että $w'Rw''$ ja $\mathcal{M}, w'' \models p$, niin $\mathcal{M}, w' \not\models \Diamond p$. Koska wRw', niin $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond p$. Siis

$$\mathcal{M}, w \not\models p \rightarrow \Box\Diamond p.$$

Näin ollen on osoitettu, että

$$\mathcal{F} \models A \to \Box\Diamond A \Rightarrow \text{R on symmetrinen.} \tag{$**$}$$

Kohtien $(*)$ ja $(**)$ perusteella väite (ii) on todistettu.

Osoitetaan väite (iii). Oletetaan, että R on transitiivinen. Olkoon maailma w mallin $\mathcal{M}$ mielivaltainen maailma. Oletetaan, että $\mathcal{M}, w \models \Box A$. Olkoon w' sellainen mallin $\mathcal{M}$ maailma, että wRw'. Olkoon lisäksi w'' sellainen mallin $\mathcal{M}$ maailma, että $w'Rw''$. Koska relaatio R on transitiivinen, niin wRw''. Nyt koska $\mathcal{M}, w \models \Box A$ ja wRw'', niin $\mathcal{M}, w'' \models A$. Siis jokaisella w'', jolla $w'Rw''$ pätee $\mathcal{M}, w'' \models A$, joten $\mathcal{M}, w' \models \Box A$. Edelleen jokaisella w', jolla wRw' pätee $\mathcal{M}, w' \models \Box A$, joten $\mathcal{M}, w \models \Box\Box A$. Näin ollen jokaisessa maailmassa w pätee, että $\mathcal{M}, w \models \Box A \to \Box\Box A$.

On siis osoitettu, että

$$\text{R on transitiivinen } \Rightarrow \mathcal{F} \models \Box A \to \Box\Box A. \tag{$*$}$$

Toiseen suuntaan osoitettaessa oletetaan, että R ei ole transitiivinen. Tällöin on siis olemassa sellaiset maailmat $w, w', w'' \in W$, että wRw' ja $w'Rw''$, mutta $\neg wRw''$. Olkoon lisäksi voimassa $\mathcal{M}, w'' \not\models p$ ja $\mathcal{M}, w^* \models p$, jokaisella sellaisella w^*, jolla wRw^*. Tällöin on voimassa erityisesti $\mathcal{M}, w' \models p$. Koska $\mathcal{M}, w'' \not\models p$ ja $w'Rw''$, niin $\mathcal{M}, w' \not\models \Box p$. Lisäksi koska $\mathcal{M}, w^* \models p$ jokaisella wRw^*, niin $\mathcal{M}, w \models \Box p$. Edelleen, koska $\mathcal{M}, w' \not\models \Box p$ ja wRw', niin $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Box p$. Siis

$$\mathcal{M}, w \not\models \Box p \to \Box\Box p.$$

Näin ollen on osoitettu, että

$$\mathcal{F} \models \Box A \to \Box\Box A \Rightarrow \text{R on transitiivinen.} \qquad (**)$$

Kohtien $(*)$ ja $(**)$ perusteella väite (iii) on todistettu.

Osoitetaan vielä väite (iv). Oletetaan, että R on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ ja $w \in W$. Oletetaan, että $\mathcal{M}, w \models \Diamond A$. Olkoon w' sellainen maailma, että wRw'. Koska $\mathcal{M}, w \models \Diamond A$, niin $\exists w'' \in W(wRw''$ ja $\mathcal{M}, w'' \models A)$. Koska R on euklidinen, niin $w'Rw''$. Siis, koska $\mathcal{M}, w'' \models A$ ja $w'Rw''$, niin $\mathcal{M}, w' \models \Diamond A$. Koska w' on mielivaltainen sellainen maailma, jolla wRw', niin $\mathcal{M}, w \models \Box\Diamond A$. Siis jokaisessa maailmassa w pätee, että $\mathcal{M}, w \models \Diamond A \to \Box\Diamond A$.

Nyt on siis osoitettu, että

$$\text{R on euklidinen } \Rightarrow \mathcal{F} \models \Diamond A \to \Box\Diamond A. \qquad (*)$$

Oletetaan sitten, että R ei ole euklidinen. On siis olemassa sellaiset maailmat w, w' ja w'', että wRw' ja wRw'', mutta $\neg w'Rw''$. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ sellainen malli, jossa $V(p) = \{w''\}$. Koska wRw'', niin tällöin $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$. Mutta, koska $\neg w'Rw''$, niin $\mathcal{M}, w' \not\models \Diamond p$. Joten, koska $\mathcal{M}, w' \not\models \Diamond p$ ja wRw', niin $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond p$. Tällöin

$$\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p \to \Box\Diamond p.$$

Näin ollen on osoitettu, että

$$\mathcal{F} \models \Diamond A \to \Box\Diamond A \Rightarrow \text{R on euklidinen.} \qquad (**)$$

Kohtien $(*)$ ja $(**)$ perusteella väite (iv) on todistettu. $\Box$

Seuraavissa kahdessa esimerkissä esitetään vielä kaksi tapausta, joissa on löydetty yhteys modaalilogiikan ja predikaattilogiikan kaavoille (vrt.[2, s.112]).

Esimerkki 14 Osoitetaan, että

$$\langle W, R\rangle \models \Diamond\top \Leftrightarrow \text{ R toteuttaa ehdon } \forall x(\exists y(xRy)).$$

Todistus. Käytetään tämän esimerkin todistamiseen määritelmässä 3.1 esitettyä muunnosta. Eli

$$\begin{aligned} ST_x(\Diamond\top) &= \exists y(xRy \wedge ST_y(\top)) \\ &= \exists y(xRy \wedge y = y) \\ &\Leftrightarrow \exists y(xRy). \end{aligned}$$

Nyt ollaan siis saatu, että

$$\langle W, R\rangle \models \Diamond\top \Leftrightarrow \text{ R toteuttaa ehdon } \forall x(\exists y(xRy)),$$

mikä pitikin osoittaa. $\Box$

Esimerkki 15 Osoitetaan, että

$$\begin{aligned} &\langle W, R\rangle \models \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A \Leftrightarrow \text{ R toteuttaa ehdon} \\ &\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge xRz \to \exists u(yRu \wedge zRu)). \end{aligned}$$

Todistus. Oletetaan, että relaatio R toteuttaa annetun ehdon. Olkoon maailma x mallin $\mathcal{M}$ mielivaltainen maailma. Oletetaan nyt, että $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Box A$. Olkoon y sellainen mielivaltainen maailma, että xRy. Koska $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Box A$, niin on oltava olemassa sellainen maailma z, että xRz ja $\mathcal{M}, z \models \Box A$. Relaation R ehdon perusteella on olemassa sellainen maailma u, että yRu ja zRu. Nyt koska zRu ja $\mathcal{M}, z \models \Box A$, niin $\mathcal{M}, u \models A$. Edelleen koska yRu ja $\mathcal{M}, u \models A$, niin $\mathcal{M}, y \models \Diamond A$. Koska y on sellainen mielivaltainen maailma, että xRy, niin $\mathcal{M}, x \models \Box\Diamond A$. Siis jokaisessa maailmassa x, pätee $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$.

Nyt on siis osoitettu, että

$$\begin{aligned} &\text{R toteuttaa ehdon } \forall x \forall y \forall z(xRy \wedge xRz \rightarrow \exists u(yRu \wedge zRu)) \\ &\quad \Rightarrow \langle W, R\rangle \models \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A. \end{aligned} \qquad (*)$$

Toiseen suuntaan osoitettaessa oletetaan, että relaatio R ei toteuta annettua ehtoa. Siis tällöin relaatio R toteuttaa seuraavanlaisen ehdon

$$\exists x \exists y \exists z((xRy \wedge xRz) \wedge \forall u(\neg yRu \vee \neg zRu)).$$

Nyt siis vastaoletuksen mukaisen relaation R ehdon perusteella voidaan valita sellaiset maailmat x, y ja z, joilla xRy ja xRz. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ sellainen malli, että $V(p) = \{u|yRu\}$. Nyt relaation R ehdon mukaan kaikille maailmoille u on voimassa $\neg yRu$ tai $\neg zRu$, joten $V(p) \cap \{u|zRu\} = \emptyset$. Näin ollen $\mathcal{M}, z \not\models \Diamond p$. Koska xRz ja $\mathcal{M}, z \not\models \Diamond p$, niin $\mathcal{M}, x \not\models \Box\Diamond p$. Toisaalta koska xRy ja kuvauksen V määrittelyn mukaan $\mathcal{M}, y \models \Box p$, niin $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Box p$. Nyt on siis voimassa $\mathcal{M}, x \models \Diamond\Box p$ ja $\mathcal{M}, x \not\models \Box\Diamond p$, joten

$$\mathcal{M}, x \not\models \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p.$$

Näin ollen on osoitettu, että

$$\begin{aligned} &\langle W, R\rangle \models \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A \\ &\Rightarrow \text{R toteuttaa ehdon } \forall x \forall y \forall z(xRy \wedge xRz \rightarrow \exists u(yRu \wedge zRu)). \end{aligned} \qquad (**)$$

Kohtien $(*)$ ja $(**)$ perusteella väite on saatu osoitettua. $\square$

Seuraavassa esimerkissä 16 esitellään yksi tapaus, jossa vastaavuus ei ole voimassa eli modaalilogiikan kaavan validisuutta ei voida esittää predikaattilogiikan kaavan avulla. Sitä ennen esitetään yksi relaatiota R koskeva määritelmä 4.4, jota tarvitaan esimerkin 16 todistamisessa (vrt.[1, s.130]).

Määritelmä 4.4 *Relaation R sanotaan olevan hyvin perustettu, jos ei ole olemassa ääretöntä ketjua*

$$\ldots Rw_2Rw_1Rw_0.$$

Relaation R sanotaan olevan käänteisesti hyvin perustettu, jos ja vain jos ei mistään mahdollisesta maailmasta w ole olemassa ääretöntä ketjua

$$w_0Rw_1Rw_2R\ldots.$$

Esimerkki 16 Osoitetaan, että modaalilogiikan kaavaa $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ ei voida ilmaista predikaattilogiikan kaavan avulla (vrt.[1, s.130]). Tämä saadaan osoitetuksi, kun todistetaan seuraava ekvivalenssi:

$$\begin{aligned}&\text{Relaatio R on transitiivinen ja käänteisesti hyvin perustettu}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{F} \models \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p.\end{aligned}$$

(Huom. Ehtoa, jonka mukaan relaatio R on käänteisesti hyvin perustettu, ei voida ilmaista predikaattilogiikan avulla.)

Oletetaan, että $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ sellainen kehys, että relaatio R on transitiivinen ja käänteisesti hyvin perustettu. Tällöin väitetään, että $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan

$$\mathcal{F} \not\models \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p.$$

Vastaoletuksen perusteella on olemassa sellainen mallin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ maailma w, jossa $\mathcal{M}, w \not\models \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$. Siis $\mathcal{M}, w \models \Box(\Box p \rightarrow p)$, mutta $\mathcal{M}, w \not\models \Box p$. Tällöin maailmalla w on oltava sellainen vaihtoehtoinen maailma w_1, että $\mathcal{M}, w_1 \not\models p$. Koska $\mathcal{M}, w \models \Box(\Box p \rightarrow p)$ ja wRw_1, niin $\mathcal{M}, w_1 \models \Box p \rightarrow p$. Näin ollen, koska $\mathcal{M}, w_1 \not\models p$, niin on oltava, että $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Box p$.

Koska $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Box p$, niin maailmalla w_1 on oltava vaihtoehtoinen maailma w_2, jossa $\mathcal{M}, w_2 \not\models p$. Koska relaatio R on transitiivinen, niin wRw_2. Nyt voidaan edelleen osoittaa, että maailmalla w_2 on oltava vaihtoehtoinen maailma w_3, jossa p on epätosi, ja että maailmalle w_3 on oltava vaihtoehtoinen maailma w_4, jossa p on epätosi, jne. Tällöin on itse asiassa osoitettu, että on löydetty ääretön ketju $wRw_1Rw_2Rw_3R\ldots$. Näin ollen on päädytty ristiriitaan oletuksen kanssa ja näin ollen vastaoletus on väärä ja väitös oikea. Siis on osoitettu, että

Relaatio R on transitiivinen ja käänteisesti hyvin perustettu.
$\Rightarrow \mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p.$

Toiseen suuntaan osoitettaessa oletetaan, että $\mathcal{F} \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ ja tehdään vastaoletus, jonka mukaan relaatio R ei ole joko transitiivinen tai käänteisesti hyvin perustettu. Oletetaan ensin, että relaatio R ei ole käänteisesti hyvin perustettu. Toisin sanoen on olemassa ääretön ketju $w_0Rw_1Rw_2R\ldots$. Määritellään kuvaus V seuraavasti

$V(p) = W - \{x \in W|$ maailmasta x on olemassa ääretön ketju $xRx_1Rx_2R\ldots\}$.

Kun kuvaus V on määritelty näin, niin kaava $\Box(\Box p \to p)$ on tosi jokaisessa mahdollisessa maailmassa. Tämä pätee, koska ensinnäkin kuvauksen V mukaan kaikissa maailmoissa w, joista lähtee ääretön ketju, pätee $\mathcal{M}, w \not\models p$. Toisaalta kuvauksen V mukaan niissä maailmoissa w', joista ei lähde ääretöntä ketjua, pätee $\mathcal{M}, w' \models p$. Siis selvästi $\mathcal{M}, w \not\models \Box p$ ja näin ollen $\mathcal{M}, w \models \Box p \to p$ ja edelleen $\mathcal{M}, w \models \Box(\Box p \to p)$. Siis $\mathcal{M}, w' \models \Box p \to p$ ja edelleen selvästi $\mathcal{M}, w' \models \Box(\Box p \to p)$. Lisäksi voidaan helposti nähdä, että $\mathcal{M}, w_0 \not\models \Box p$. Nyt on saatu osoitettua, että

$$\mathcal{M}, w_0 \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p,$$

joten

$$\mathcal{F} \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p.$$

Näin ollen on päästy ristiriitaan oletuksen kanssa. Oletetaan sitten, että R ei ole transitiivinen. On siis olemassa sellaiset maailmat x, y ja z, että xRy ja yRz, mutta $\neg xRz$. Olkoon $V(p) = \{u | xRu \wedge u \neq y\}$. Koska xRy, niin kuvauksen V mukaan $\mathcal{M}, y \not\models p$, joten $\mathcal{M}, x \not\models \Box p$. Edelleen kuvauksen V mukaan jokaisella maailmalla u, jolla $u \neq y$ ja xRu, pätee $\mathcal{M}, u \models p$, joten $\mathcal{M}, u \models \Box p \to p$. Toisaalta kuvauksen V mukaan maailmalle z pätee $\mathcal{M}, z \not\models p$ ja koska yRz, niin $\mathcal{M}, y \not\models \Box p$. Tällöin siis $\mathcal{M}, y \not\models \Box p$, joten $\mathcal{M}, y \models \Box p \to p$. Nyt on siis osoitettu, että kaikissa maailman x vaihtoehtoisissa maailmoissa on voimassa $\Box p \to p$, joten $\mathcal{M}, x \models \Box(\Box p \to p)$.

Nyt koska $\mathcal{M}, x \not\models \Box p$ ja $\mathcal{M}, x \models \Box(\Box p \to p)$, niin on osoitettu, että

$$\mathcal{M}, x \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p,$$

joten

$$\mathcal{F} \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p.$$

Näin ollen on päästy ristiriitaan oletuksen kanssa. Koska molemmissa tapauksissa päädyttiin ristiriitaan, niin vastaoletus voidaan todeta vääräksi ja väite oikeaksi. Näin on saatu todistuksen toinenkin suunta osoitetuksi oikeaksi, joten on siis todistettu, että modaalilogiikan kaavan $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ validisuutta ei voida ilmaista predikaattilogiikan kaavan avulla. $\Box$

4.3 Suljettu kaava

Ennen kuin mennään tarkastelemaan seuraavassa alaluvussa esitettävää uniformisuutta, niin tarkastellaan modaalilogiikan kaavoja, joista on helppo havaita, että ne vastaavat predikaattilogiikan kaavoja. Tällaisia modaalilogiikan kaavoja ovat ne, joissa ei ole ollenkaan propositiosymboleita.

Esimerkki 17 (vrt.[1, s.150]) Lähdetään tarkastelemaan kaavaa B, joka on saatu modaalilogiikan kaavasta A korvaamalla jokainen siinä esiintyvä propositiosymboli p_i $(i = 1, \ldots, n)$ loogisella vakiolla $\top$ eli

$$B = A(p_1/\top, \ldots, p_n/\top).$$

Nyt kaavaa B vastaa predikaattilogiikan kaava. Tämän todistaminen aloitetaan tarkastelemalla lauseen 3.2 tulosta, jonka mukaan

$$\mathcal{F} \models B \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \forall P_1, \ldots \forall P_n \forall x ST_x(B),$$

missä predikaattisymbolit $P_1, \ldots, P_n$ vastaavat propositiosymboleiden $p_1, \ldots, p_n$ esiintymiä kaavassa B. Mutta, koska kaavassa B ei ole ollenkaan propositiosymboleita, niin kaavassa $ST_x(B)$ ei ole myöskään predikaattisymboleja. Ja siksi on voimassa

$$\mathcal{F} \models B \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \forall x ST_x(B).$$

Koska $\forall x ST_x(B)$ voidaan ilmaista myös muodossa $\forall x(\exists y(xRy \wedge y = y))$, mikä on puolestaan yhtäpitävää muodon $\forall x(\exists y(yRx))$ kanssa, niin todistus on saatu päätökseen.

Edellisen esimerkin tulosta voidaan myös laajentaa, siksi seuraavassa määritelmässä 4.5 (vrt.[1, s.151]) ja lauseessa 4.4 onkin esitetty yleistyksiä esimerkin 17 tapaukselle.

Määritelmä 4.5 *Modaalilogiikan kaava A on suljettu, jos ja vain jos se ei sisällä propositiosymboleita. (Näin ollen suljettu kaava on muodostettu konnektiivien $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Box, \Diamond)$ avulla symboleista $\top$ ja $\bot$.)*

Lause 4.4 *Olkoon A suljettu kaava. Tällöin kaavaa A vastaa predikaattilogiikan kaava $\varphi_A = \forall x ST_x(A)$.*

Todistus (vrt.[1, s.151]). Kun lauseessa 3.2 esitettyyn tulokseen yhdistetään tieto, että kaava A ei sisällä propositiosymboleita, niin voidaan päätellä, että

$$\mathcal{F} \models A \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \forall x ST_x(A).$$

Nyt on siis osoitettu, että predikaattilogiikan kaava $\forall x ST_x(A)$ vastaa kaavaa A. $\Box$

4.4 Uniformisuus

Propositiosymboleiden esiintymien positiivisuus ja negatiivisuus ovat ominaisuuksia, joiden avulla pystytään määrittelemään modaalilogiikan kaavan uniformisuus. Määritelmässä 4.6 esitetäänkin propositiosymboleiden ja modaalilogiikan kaavojen uniformisuus (vrt.[1, s.153]). Käyttäen tätä määritelmää hyväksi voidaan johtaa lause 4.5, jonka avulla on mahdollista sanoa voidaanko joku modaalilogiikan kaava esittää predikaattilogiikan kaavana (vrt.[1, s.153]). Ennen tätä lausetta on tässä luvussa kuitenkin esitetty yksi apulause, joka on keskeisessä osassa lauseen 4.5 todistamisessa.

Määritelmä 4.6

(i) Propositiosymboli p on uniforminen modaalilogiikan kaavassa A, jos sen esiintymä on vain joko positiivinen tai negatiivinen kaavassa A.

(ii) Modaalilogiikan kaava A on uniforminen, jos kaavan A kaikki propositiosymbolit ovat uniformisia.

Apulause. *Olkoon A modaalilogiikan kaava.*

(i) Jos kaava A on p-positiivinen, niin jokaisessa kehyksessä $\mathcal{F}$ on voimassa seuraava:

$$\mathcal{F} \models A \Leftrightarrow \mathcal{F} \models A\,[p/\bot]\,.$$

(ii) Jos kaava A on p-negatiivinen, niin jokaisessa kehyksessä $\mathcal{F}$ on voimassa seuraava:

$$\mathcal{F} \models A \Leftrightarrow \mathcal{F} \models A\,[p/\top]\,.$$

Todistus. Todistetaan ensin kohta (i). Jos $\mathcal{F} \models A$, niin lauseen 2.1 mukaan $\mathcal{F} \models A\,[p/\bot]$. Oletetaan sitten, että $\mathcal{F} \models A\,[p/\bot]$. Nyt koska kaava A on p-positiivinen, niin lauseen 4.2 mukaan se on p-monotonisesti kasvava. Olkoon kuvaus V määritelty siten, että $V(p) = \emptyset$. Tällöin

$$\langle \mathcal{F}, V \rangle \models A,$$

sillä $\|\bot\| = \emptyset$.

Koska kaava A on p-monotonisesti kasvava, niin kuvausta V voidaan laajentaa, niin että saadaan mikä tahansa kuvaus V', jolle $V(p) \subseteq V'(p)$ ja kaava A on validi mallissa $\langle \mathcal{F}, V' \rangle$. Siis $\mathcal{F} \models A$.

Kohdan (ii) todistaminen onnistuu vastaavanlaisella menettelyllä. Kuvaukseksi V tulee vain valita $V(p) = W$ ja p-monotonisesti kasvamisen sijasta hyödynnetään p-monotonisesti vähenevyyttä. $\square$

Lause 4.5 *Jos A on uniforminen modaalilogiikan kaava, niin kaavaa A vastaa predikaattilogiikan kaava φ_A.*

Todistus. Suoritetaan kaavalle A korvaus, jossa jokainen propositosymboli p korvataan joko symbolilla $\bot$ tai $\top$ ja merkitään näin saatua kaavaa symbolilla A^*. Siis

$$A^* = A\,[p_1/B_1, \ldots p_n/B_n]\,,\ \text{missä}$$

$$B_i = \begin{cases} \bot & \text{, jos kaava } A \text{ on } p_i\text{-positiivinen,} \\ \top & \text{, jos kaava } A \text{ on } p_i\text{-negatiivinen.} \end{cases}$$

Näin saatu kaava A^* on määritelmän 4.5 mukaan suljettu kaava ja edelleen lauseen 4.4 mukaan kaavaa A^* vastaa jokin predikaattilogiikan kaava eli

$$\mathcal{F} \models A^* \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \forall x ST_x(A^*).$$

Nyt on vielä osoitettava, että

$$\mathcal{F} \models A^* \Leftrightarrow \mathcal{F} \models A.$$

Merkitään, että $A = A_0$ ja

$$A_{i+1} = A_i \left[p_{i+1}/B_{i+1}\right], i = 0, \ldots, n-1.$$

Tällöin $A^* = A_n$. Nyt riittää osoittaa, että

$$\mathcal{F} \models A_i \Leftrightarrow \mathcal{F} \models A_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1.$$

Mutta tämä seuraa itseasiassa suoraan edellisestä apulauseesta. Siis on osoitettu, että kaavaa A vastaa predikaattilogiikan kaava φ_A kehyksessä $\mathcal{F}$. □

Tämän työn lopuksi on esimerkissä 18 esitelty lauseen 4.5 hyödyntämismahdollisuus tarkasteltaessa modaalilogiikan kaavojen vastaavuutta predikaattilogiikan kaavoihin.

Esimerkki 18 Osoitetaan, että modaalilogiikan kaava

$$A = \Box(q \to p) \to \Diamond(p \to \Box q)$$

voidaan esittää predikaattilogiikan kaavan avulla ja näytetään myös miten tämä predikaattilogiikan kaava saadaan muodostettua.

Tarkastellaan ensin propositiosymboleiden p ja q esiintymien positiivisuutta ja negatiivisuutta. Jotta tämä onnistuisi on kaavaa A hieman muokattava.

$$\begin{aligned}
\Box(q \to p) \to \Diamond(p \to \Box q) &\Leftrightarrow \Box(\neg q \vee p) \to \Diamond(\neg p \vee \Box q) \\
&\Leftrightarrow \neg(\Box(\neg q \vee p)) \vee \Diamond(\neg p \vee \Box q) \\
&\Leftrightarrow \Diamond\neg(\neg q \vee p) \vee \Diamond(\neg p \vee \Box q) \\
&\Leftrightarrow \Diamond(q \wedge \neg p) \vee \Diamond(\neg p \vee \Box q).
\end{aligned}$$

Nyt kaavasta on helppo nähdä, että molemmat propositiosymbolin p esiintymät ovat negatiivisia, joten määritelmän 4.6 mukaan propositiosymboli p on uniforminen kaavassa A. Lisäksi koska molemmat propositiosymbolin q esiintymät ovat positiivisia, niin määritelmän 4.6 mukaan propositiosymboli q on uniforminen kaavassa A. Koska näin ollen kaikki kaavassa A olevat propositiosymbolit ovat uniformisia, niin määritelmän 4.6 mukaan kaava A on uniforminen. Tällöin lauseen 4.5 mukaan modaalilogiikan kaavaa A vastaa predikaattilogiikan kaava φ_A.

Lähdettäessä muodostamaan tätä kaavaa, tehdään ensin korvaus, jossa jokainen p-negatiivinen propositiosymboli p korvataan symbolilla $\top$ ja jokainen p-positiivinen propositiosymboli q korvataan symbolilla $\bot$. Näin ollen saadaan kaava

$$\Diamond(\bot \wedge \neg\top) \vee \Diamond(\neg\top \vee \Box\bot). \tag{$*$}$$

Suoritetaan sitten kaavalle $(*)$ muunnos ST.

$$\begin{array}{ll}
& ST_x(\Diamond(\bot \wedge \neg\top) \vee \Diamond(\neg\top \vee \Box\bot)) \\
= & ST_x(\Diamond(\bot \wedge \neg\top)) \vee ST_x(\Diamond(\neg\top \vee \Box\bot)) \\
= & \exists y(xRy \wedge ST_y(\bot \wedge \neg\top)) \vee \exists z(xRz \wedge ST_z(\neg\top \vee \Box\bot)) \\
= & \exists y(xRy \wedge (ST_y(\bot) \wedge ST_y(\neg\top))) \vee \exists z(xRz \wedge (ST_z(\neg\top) \vee ST_z(\Box\bot))) \\
= & \exists y(xRy \wedge (ST_y(\bot) \wedge \neg ST_y(\top))) \\
& \vee\exists z(xRz \wedge (\neg ST_z(\top) \vee \forall u(zRu \rightarrow ST_u(\bot)))) \\
= & \exists y(xRy \wedge (y \neq y \wedge \neg(y = y))) \\
& \vee\exists z(xRz \wedge (\neg(z = z) \vee \forall u(zRu \rightarrow u \neq u))) \\
\Leftrightarrow & \exists y(xRy \wedge (y \neq y)) \vee \exists z(xRz \wedge (z \neq z \vee \forall u(zRu \rightarrow u \neq u)))
\end{array}$$

Näin ollen on saatu muodostettu predikaattilogiikan kaava

$$\exists y(xRy \wedge (y \neq y)) \vee \exists z(xRz \wedge (z \neq z \vee \forall u(zRu \rightarrow u \neq u))),$$

joka on edelleen yhtäpitävää muodon

$$\exists z(xRz \wedge \neg\exists u(zRu))$$

kanssa. Nyt siis näin muodostettu predikaattilogiikan kaava vastaa modaalilogiikan kaavaa A.

Viitteet

[1] Blacburn, P., Rijke, M. ja Venema, Y. : Modal Logic. Cambridge University Press, United Kigdom 2001.

[2] Rantala, V. ja Virtanen, A. : Johdatus modaalilogiikkaan, Matemaattinen näkökulma. Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto, Tampere 2000.

[3] Salminen, H. ja Väänänen, J. : Johdatus logiikkaan. Oy Gaudeamus Ab, Jyväskylä 1992.