TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Miika Aromaa

Korkomarkkinoiden mallintaminen arbitraasiteorian pohjalta

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Elokuu 2012

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

AROMAA, MIIKA: Korkomarkkinoiden mallintaminen arbitraasiteorian pohjalta

Pro gradu -tutkielma, 50 s.

Matematiikka

Elokuu 2012

Tiivistelmä

Tutkielmassa kerrotaan arbitraasittomuuden vaikutuksista johdannaisten hinnoitteluun. Aluksi tutustutaan ja käydään läpi vaadittavat tiedot stokastisista prosesseista ja tarkastellaan muun muassa Itôn kaavaa. Tämän jälkeen siirrytään diskreetteihin ja jatkuva-aikaisiin markkinamalleihin ottaen huomioon arbitraasittomuus. Viimeisessä luvussa tutkitaan jatkuva-aikaisia korkomarkkinamalleja arbitraasittomuuden luomien ehtojen pohjalta.

Teksti nojaa vahvasti Tomas Björkin kirjaan ”Arbitrage Theory in Continuous Time”, mutta myös muita teoksia on käytetty täydentämään sisältöä. Sisältö on melko teoreettista ja se pohjautuu ennen kaikkea matemaattisiin määritelmiin ja lauseisiin. Reaalimaailmasta poiketen markkinoille on jouduttu antamaan joitakin ehtoja, jotta teoria olisi pätevä. Lukijalta odotetaankin tuntemusta varsinkin matematiikasta, mutta myös rahoituksen ja tilastotieteen tiedot ovat lukijalle eduksi.

Tutkielmassakin esitettyjä malleja käytetään laajalti rahoituksessa, ja esimerkiksi Black-Scholes-malli on kansainvälisestikin hyvin tunnettu ja käyttökelpoinen työkalu rahoituksessa, kun taas lopun HJM-kehikko on vaikeammin sovitettavissa nykyisille korkomarkkinoille.

Avainsanat: arbitraasi, korkomarkkinat, johdannainen, hinnoittelu, Black-Scholes

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdytään johdannaisten hinnoitteluun arbitraasittomilla markkinoilla. Teksti perustuu vahvasti matemaattiseen teoriaan, ja reaalimaailmasta poiketen markkinoille on annettu joitain ehtoja, jotta teoria olisi pätevä. Toki tutkielmassa esitetyt tulokset ovat silti käyttökelpoisia myös reaalimaailmassa, kunhan huomioi tulosten puutteet.

Tutkielma alkaa stokastiikan esittelyllä, joka antaa tarpeelliset tiedot stokastisista prosesseista tutkielman loppuosaa varten. Tämän jälkeen annetaan perustiedot diskreeteistä markkinamalleista ja lopulta päädytään jatkuva-aikaisiin malleihin. Jatkuva-aikaisista malleista käsitellään sekä riskillisen kohteen markkinamallia (Black-Scholes-mallia) että korkomarkkinamallia.

Lukijalta odotetaan ennen kaikkea osaamista matemaatikan, tilastotieteen ja rahoitusteorian saralta. Rahoituksesta lukijan on hyvä tietää etukäteen yleisesti käytössä olevia käsitteitä kuten arbitraasi tai johdannainen. Tutkielmassa selvennetään kuitenkin näitäkin termejä, mutta joka tapauksessa jonkinlaiset pohjatiedot rahoituksesta olisi hyvä olla. Matemaattista osaamista lukijalta toivotaan erityisesti stokastiikasta, vaikka siitä onkin pitkänpuoleinen esittely tutkielman alussa.

Tutkielma on kirjoitettu Tomas Björkin kirjan Arbitrage Theory in Continuous Time [2] teoriaa mukaillen. Eniten on hyödynnetty kirjan kappaleita 2, 4, 6, 7, 10, 22, 23 ja 25. Tekstissä on käytetty myös muita lähteitä, ja täydellinen lähdeluettelo löytyy tutkielman lopusta. Korostan vielä sitä, että mikään tekstin tulos ei ole omani, vaan kunnia kuuluu alkuperäisille tekijöille, vaikka en erikseen jokaiseen lauseeseen lähdettä kirjoitakaan.

Omalta taustaltani olen matematiikan pääaineopiskelija. Sivuaineina olen lukenut tilastotiedettä, laskentatoimea/rahoitusta ja vakuutustiedettä, joten omalla kohdallani aihe oli minulle luonnollinen ja ennen kaikkea mielenkiintoinen valinta. Vaikka aihe sinällään oli minulle aluksi vieras, yleistuntemukseni rahoituksesta ja matematiikasta antoivat riittävät keinot tutkielman tekemiseen.

2 Stokastiset prosessit

Aloitetaan stokastisten prosessien käsittely. Kappaleen tavoitteena on tämänkin tutkielman kannalta keskeisen tuloksen eli Itôn kaavan määritteleminen. Määritelmät ja tulokset on kerrottu melko tiiviissä paketissa. Luvun tuloksista saa lisätietoja Björkin kirjan [2] ohella muun muassa Bernt Øksendalin kirjasta Stochastic Differential Equations [6].

2.1 Johdanto

Karkeasti ottaen stokastinen prosessi X on *diffuusioprosessi*, mikäli sitä kuvailee likimääräisesti differenssiyhtälö

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))Z(t). \tag{2.1}$$

Tässä $Z(t)$ on normaalijakautunut häiriötermi, joka on riippumaton aiemmin saamista arvoistaan. Yhtälön intuitiivinen tulkinta aikavälillä $[t, t+\Delta t]$ on se, että prosessia X ohjaa kaksi erillistä termiä $\mu(t, X(t))$ ja $\sigma(t, X(t))Z(t)$. Ensimmäinen näistä on hetkellisesti deterministinen nopeus ja jälkimmäinen normaalijakautunut häiriötermi, jonka kerroin on $\sigma(t, X(t))$. Funktiota μ kutsutaan prosessin *ajaumaksi* ja funktiota σ kutsutaan *diffuusiotermiksi*. Tutkitaan nyt tarkemmin prosessia $Z(t)$.

Määritelmä 2.1. Stokastista prosessia W kutsutaan *Wienerin prosessiksi*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa.

1. $W(0) = 0$
2. Prosessin W lisäykset ovat riippumattomia toisistaan. Toisin sanoen, jos $r < s \leq t < u$, niin $W(u) - W(t)$ ja $W(s) - W(r)$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia.
3. Kun $s < t$, satunnaismuuttuja $W(t) - W(s)$ on normaalijakautunut parametreilla $N(0, t-s)$.
4. W on jatkuva.

Huomautus 2.1. Joissain yhteyksissä prosessia W kutsutaan myös *Brownin liikkeeksi*. Tässä tutkielmassa käytetään kuitenkin ainoastaan Wienerin prosessi -termiä.

Nyt yhtälö (2.1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))\Delta W(t), \tag{2.2}$$

missä W on Wienerin prosessi ja $\Delta W(t)$ on

$$\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t).$$

Muokataan vielä kaavaa (2.2) antamalla luvun Δt lähestyä nollaa ja lisäämällä alkuehto. Saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = a. \end{cases} \tag{2.3}$$

Nämä yhtälöt voidaan tulkita lyhennetyksi merkinnäksi integraaliyhtälölle

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s). \tag{2.4}$$

Luonnollinen tulkinta vasemmanpuoleiselle integraalille on normaali Riemannin integraali. Jälkimmäisen integraalin määrittelemiseen tarvitaan uuden integraalikäsitteen esittämistä. Seuraavaksi aloitetaankin muotoa

$$\int_0^t g(s)dW(s) \tag{2.5}$$

olevien *Itôn integraalien* tarkempi tutkiminen.

2.2 Informaatio

Olkoon X stokastinen prosessi. Jatkossa on tärkeä tietää, mitä informaatiota on saatavilla prosessin edetessä. Tehdään seuraava yleisluontoinen määritelmä.

Määritelmä 2.2. Merkintä $\mathcal{F}_t^X$ tarkoittaa informaatiota, jonka X on tuottanut välillä $[0, t]$. Jos kuvaajan $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ perusteella voidaan sanoa, onko tapahtuma A tapahtunut vai ei, kirjoitetaan

$$A \in \mathcal{F}_t^X,$$

tai sanotaan, että "A on F_t^X-mitallinen". Jos satunnaismuuttujan Z arvo pystytään täysin määrittelemään annetun kuvaajan $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ perusteella, voidaan kirjoittaa

$$Z \in \mathcal{F}_t^X.$$

Jos Y on stokastinen prosessi ja

$$Y(t) \in \mathcal{F}_t^X$$

kaikilla $t \geq 0$, sanotaan että Y mukautuu suodatukseen $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$ tai että Y on $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$-mukautuva prosessi. Merkinnällisistä syistä kirjoitetaan usein jatkossa $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0} = \mathcal{F}_t^X$.

Käytännössä mukautuva prosessi on sellainen prosessi, jonka arvo pystytään määrittämään jokaisella ajanhetkellä. Yllä oleva määritelmä on asian intuitiivinen esitys, sillä se riittää tämän tutkielman tarkoituksiin. Täsmällinen määritelmä löytyy Björkin kirjan lopusta [2, s. 490-491]. Seuraavassa muutama esimerkki määritelmän käytöstä.

Esimerkki 2.1.

1. Olkoon tapahtuma $A = \{X(s) \leq 4, \quad \text{kaikilla } s \leq 7\}$. Nyt $A \in \mathcal{F}_7^X$. Oleellista ei siis ole se, onko A tosi vai ei, vaan tieto siitä.

2. Tapahtumalle $A = \{X(5) > 6\}$ pätee $A \in \mathcal{F}_5^X$. Sen sijaan $A \notin \mathcal{F}_4^X$, sillä ei voida vielä tietää, onko A tapahtunut tarkkailemalla kuvaajaa välillä $[0, 4]$.

3. Määritellään satunnaismuuttuja Z seuraavasti:

$$Z = \int_2^4 X(s)ds.$$

   Nyt pätee $Z \in \mathcal{F}_4^X$.

4. Jos W on Wienerin prosessi ja jos stokastinen prosessi X määritellään

$$X(t) = \sup_{s \leq t} W(s),$$

   niin X mukautuu F_t^W-suodatukseen.

5. Olkoon W edelleen Wienerin prosessi, mutta olkoon X määritelty nyt

$$X(t) = \sup_{s \leq t+1} W(s).$$

   Nyt X ei mukaudu F_t^W-suodatukseen.

2.3 Stokastiset integraalit

Olkoon g stokastinen prosessi. Jotta prosessilla olisi olemassa stokastinen integraali, täytyy sille antaa joitakin integroituvuusehtoja. Seuraava määritelmä antaa riittävät ehdot prosessille g.

Määritelmä 2.3. Olkoon W Wienerin prosessi ja g stokastinen prosessi.

(i) Sanotaan, että g kuuluu luokkaan $\mathcal{L}^2[a, b]$, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa.

- $\int_a^b E[g^2(s)]ds < \infty$.
- Prosessi g mukautuu $\mathcal{F}_t^W$-suodatukseen.

(ii) Sanotaan, että g kuuluu luokkaan $\mathcal{L}^2$, jos $g \in \mathcal{L}^2[0, t]$ kaikilla $t > 0$.

Huomaa, että jos prosessi $g \in \mathcal{L}^2[0, t]$, niin myös $g \in \mathcal{L}^2[a, b]$. Tavoitteena on nyt määritellä stokastinen integraali $\int_a^b g(s)dW(s)$ prosessille $g \in \mathcal{L}^2[a, b]$. Oletetaan ensin, että prosessi $g \in \mathcal{L}^2[a, b]$ on *yksinkertainen*, eli on olemassa sellaiset pisteet $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, joiden jokaisella osavälillä prosessi

g on vakio. Toisin sanoen oletetaan, että $g(s) = g(t_k)$ kun $s \in [t_k, t_{k+1})$. Määritellään nyt stokastinen integraali kaavalla

$$\int\limits_a^b g(s)dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)].$$

Huomautus 2.2. Huomaa, että yllä olevassa stokastisen integraalin määritelmässä otetaan etulisäykset Wienerin prosessista. Siis summan termissä $g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$ arvioidaan prosessia g välin $[t_k, t_{k+1}]$ vasemmassa reunassa pisteessä t_k.

Stokastisen integraalin määrittämiseksi yleiselle prosessille $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$, joka ei ole yksinkertainen, voidaan edetä seuraavalla tavalla.

1. Arvioidaan prosessia g sellaisella jonolla yksinkertaisia prosesseja g_n, että
$$\int\limits_a^b E\left[\{g_n(s) - g(s)\}^2\right] ds \to 0.$$
2. Jokaisella arvolla n integraali $\int_a^b g_n(s)dW(s)$ on hyvin määritelty satunnaismuuttuja Z_n. On myös olemassa sellainen satunnaismuuttuja Z, että $Z_n \xrightarrow{L^2} Z$, kun $n \to \infty$. Tässä merkintä $Z_n \xrightarrow{L^2} Z$ tarkoittaa keskineliövirhemielessä suppenemista, eli $E(Z_n - Z)^2 \to 0$, kun $n \to \infty$.
3. Määritellään nyt stokastinen integraali
$$\int\limits_a^b g(s)dW(s) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(s)dW(s).$$

Tällaisen stokastisen integraalin tärkeimmät ominaisuudet tulevat seuraavassa lauseessa. Erityisesti kohta (2.6) on hyödyllinen tulos jatkoa ajatellen.

Lause 2.1. *Olkoon g sellainen prosessi, joka mukautuu $\mathcal{F}_t^W$-suodatukseen ja lisäksi se täyttää ehdon*
$$\int\limits_a^b E[g^2(s)]ds < \infty.$$
Nyt seuraavat yhtälöt ovat voimassa.

$$E\left[\int\limits_a^b g(s)dW(s)\right] = 0. \tag{2.6}$$

$$E\left[\left(\int\limits_a^b g(s)dW(s)\right)^2\right] = \int\limits_a^b E[g^2(s)]ds. \tag{2.7}$$

$$\int\limits_a^b g(s)dW(s) \text{ on } \mathcal{F}_b^W\text{-mitallinen.} \tag{2.8}$$

Todistus. Todistetaan kohta 2.6 siinä tapauksessa, että g on yksinkertainen. Nyt

$$E\left[\int_a^b g(s)dW(s)\right] = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} E[g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]].$$

Nyt koska g mukautuu F_t^W-suodatukseen, riippuu sen arvo hetkellä t_k ainoastaan Wienerin prosessista välillä $[0, t_k]$. Lisäksi Wienerin prosessilla W on määritelmänsä mukaan riippumattomat lisäykset, joten $[W(t_{k+1})-W(t_k)]$ on riippumaton termistä $g(t_k)$. Kun vielä tiedetään, että $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ on normaalijakautunut odotusarvolla 0, saadaan

$$E[g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]] = E[g(t_k)] \cdot E[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$
$$= E[g(t_k)] \cdot 0 = 0.$$

□

2.4 Martingaalit

Stokastisen integraaliteoria liittyy läheisesti myös teoriaan martingaaleista. Tässä kappaleessa tutustutaan pintapuoleisesti martingaaleihin, sillä aiheen tarkempi esittely vaatii mittateorian tuntemusta. Olkoon $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ suodatus ja tulkitaan $\mathcal{F}_t$ kaikkien tapahtumien tuottamana informaationa ajanhetkeen t mennessä. Olkoon nyt Y satunnaismuuttuja. Merkintä $E[Y|\mathcal{F}_t]$ tarkoittaa muuttujan Y odotusarvoa, kun otetaan huomioon hetkeen t mennessä saatu informaatio.

Lause 2.2. *Jos Y ja Z ovat satunnaismuuttujia, ja Z on lisäksi $\mathcal{F}_t$-mitallinen, niin*

$$E[Z \cdot Y|\mathcal{F}_t] = Z \cdot E[Y|\mathcal{F}_t].$$

Todistus. Lauseen tarkempi todistus sivuutetaan, mutta esitetään tässä sen perusperiaate. Relaatio $Z \in \mathcal{F}_t$ tarkoittaa sitä, että jos tiedetään informaatio $\mathcal{F}_t$, niin tiedetään muuttujan Z arvo. Tämähän on juuri lauseen oletuksessa, joten muuttujaa Z voidaan käsitellä vakiona, ja siirtää se odotusarvon eteen. □

Lause 2.3. *Jos Y on satunnaismuuttuja ja jos $s < t$, niin*

$$E[E[Y|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E[Y|\mathcal{F}_s].$$

Todistus. Katso [2, s. 498]. □

Määritellään nyt martingaalit.

Määritelmä 2.4. Stokastinen prosessi X on $\mathcal{F}_t$-martingaali, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa.

- X mukautuu suodatukseen $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.
- Kaikilla muuttujan t arvoilla pätee
$$E[|X(t)|] < \infty.$$
- Kaikilla s ja t, joilla $s \leq t$, on voimassa yhtälö
$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s).$$

Martingaalit ovat siis sellaisia prosesseja, joiden tulevaisuuden odotusarvo vastaa tämän päivän arvoa. Täten martingaaleilla ei ole ajaumaa.

Lause 2.4. *Jos prosessi $g \in \mathcal{L}^2[s,t]$, niin*

$$E\left[\int_s^t g(u)dW(u) \middle| \mathcal{F}_s^W\right] = 0.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Seuraus 2.5. *Olkoon $g \in \mathcal{L}^2$. Prosessi*

$$X(t) = \int_0^t g(s)dW(s)$$

on $\mathcal{F}_t^W$-martingaali.

Toisin sanoen jokainen stokastinen integraali (jolle pätee integroituvuusehto) on martingaali.

Todistus. Prosessi g täyttää selvästi kaksi ensimmäistä ehtoa martingaalin määritelmästä. Tarkastellaan täten kolmatta ehtoa. Olkoon s ja t kiinnitettyinä siten, että $s < t$. Nyt

$$\begin{aligned} E\left[X(t)|\mathcal{F}_s^W\right] &= E\left[\int_0^t g(\tau)dW(\tau) \middle| \mathcal{F}_s^W\right] \\ &= E\left[\int_0^s g(\tau)dW(\tau) \middle| \mathcal{F}_s^W\right] + E\left[\int_s^t g(\tau)dW(\tau) \middle| \mathcal{F}_s^W\right]. \end{aligned}$$

Vasemmanpuoleisen odotusarvon integraali on lauseen 2.1 kohdan (2.8) mukaan $\mathcal{F}_s^W$-mitallinen, joten lauseen 2.2 nojalla

$$E\left[\int_0^s g(\tau)dW(\tau)\middle|\mathcal{F}_s^W\right] = \int_0^s g(\tau)dW(\tau)E[1|\mathcal{F}_s^w]$$
$$= \int_0^s g(\tau)dW(\tau).$$

Lisäksi lauseen 2.4 perusteella $E\left[\int_s^t g(\tau)dW(\tau)|\mathcal{F}_s^W\right] = 0$, joten saadaan

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s^W] = \int_0^s g(\tau)dW(\tau) + 0 = X(s).$$

□

Apulause 2.6. *Oletetaan, että stokastinen prosessi X on $\mathcal{F}_t^W$-mukautuva, sillä on stokastinen differentiaali ja $E(X_t^2) < \infty$ kaikilla $t \geq 0$. Nyt X on martingaali jos ja vain jos sen stokastinen differentiaali on muotoa*

$$dX(t) = g(t)dW(t).$$

Eli prosessin differentiaalilla ei ole lainkaan dt-termiä.

Todistus. On jo osoitettu, että jos prosessin X differentioituvuusyhtälöllä ei ole dt-termiä, niin X on martingaali. Toinen suunta sivuutetaan. □

2.5 Itôn kaava

Olkoon X stokastinen prosessi ja oletetaan että on olemassa reaaliluku a ja kaksi $\mathcal{F}_t$-mukautuvaa prosessia μ ja σ, joille pätee

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) \tag{2.9}$$

kaikilla $t \geq 0$. Reaaliluku a on annettu ja W on Wienerin prosessi. Käytetään edellisestä yhtälöstä hieman yksinkertaisempaa muotoa

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \tag{2.10}$$
$$X(0) = a. \tag{2.11}$$

Nyt sanotaan, että stokastisella prosessilla X on kaavan (2.10) mukainen *stokastinen diffentiaali* ja sen *alkuehto* on (2.11). Huomaa, että kaavan differentiaalimuoto on vain lyhyempi versio kaavasta (2.9), mutta se voidaan tulkita niin, että pieni lisäys prosessissa $X(t)$ johtuu ajaumaosasta $\mu(t)dt$ ja siihen lisätystä diffuusiosta. Olkoon prosessilla X yllämainittu stokastinen differentiaali. Oletetaan lisäksi, että on olemassa $C^{1,2}$-funktio

$$f : R_+ \times R \to R$$

ja määritellään uusi prosessi Z yhtälöllä

$$Z(t) = f(t, X(t)).$$

Nyt myös prosessilla Z on stokastinen differentiaali, ja sen kaavan (2.10) mukainen muoto saadaan määritettyä Itôn kaavan avulla. Ennen Itôn kaavaa tarkastellaan vielä tarkemmin Wienerin prosessia.

Kiinnitetään nyt ajanhetket s ja t siten, että $s < t$. Olkoon W Wienerin prosessi. Käytetään nyt merkintöjä

$$\Delta t = t - s, \tag{2.12}$$

$$\Delta W(t) = W(t) - W(s). \tag{2.13}$$

Käyttämällä normaalijakauman ja Wienerin prosessin ominaisuuksia saadaan

$$E[\Delta W] = 0, \tag{2.14}$$

$$E\left[(\Delta W)^2\right] = \Delta t, \tag{2.15}$$

$$Var[\Delta W] = \Delta t, \tag{2.16}$$

$$Var\left[(\Delta W)^2\right] = 2(\Delta t)^2. \tag{2.17}$$

Havaitaan, että neliöidyn Wienerin lisäyksen $(\Delta W(t))^2$ odotusarvo on sama kuin ajan lisäys Δt. Tärkein havainto on kuitenkin kohta (2.17), jonka mukaan neliöidyn Wienerin lisäyksen varianssi on hyvin pieni verrattuna sen odotusarvoon (huomaa, että $\Delta t \to 0$). Toisin sanoen, kun Δt lähestyy nollaa, niin $(\Delta W)^2$ lähestyy myös nollaa, mutta sen varianssi lähestyy nollaa huomattavasti nopeammin kuin sen odotusarvo. Täten välin Δt pienentyessä alkaa $(\Delta W)^2$ muistuttaa enemmän determinististä ja voidaan kirjoittaa muodollinen yhtäsuuruus

$$[dW(t)]^2 = dt. \tag{2.18}$$

Edellä olevan yhtälön esittäminen ja todistaminen täsmällisin matemaattisin merkinnöin sivuutetaan, mutta esitetään tässä kuitenkin vielä seuraava esitys, joka tukee yhtälön (2.18) oikeellisuutta.

Olkoon t kiinteä ajanhetki, ja jaetaan väli $[0, t]$ n kappaleeseen yhtäsuuria osavälejä, jotka ovat muotoa $[k \cdot t/n, (k+1)t/n]$, missä $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Määritetään nyt Wienerin prosessin neliömuunnos edellä mainittujen osavälien summalle seuraavasti

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left[W\left(i\frac{t}{n}\right) - W\left((i-1)\frac{t}{n}\right) \right]^2.$$

Tarkastellaan yhtälön ominaisuuksia, kun osavälit pienenevät, eli kun $n \to \infty$. Nyt yhtälön (2.15) perusteella

$$\begin{aligned} E[S_n] &= \sum_{i=1}^{n} E\left[\left[W\left(i\frac{t}{n}\right) - W\left((i-1)\frac{t}{n}\right)\right]^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[i\frac{t}{n} - (i-1)\frac{t}{n}\right] = t. \end{aligned}$$

Ottaen huomioon sen, että prosessin W lisäykset ovat riippumattomia, ja käyttäen yhtälöä (2.17), saadaan

$$\begin{aligned} Var[S_n] &= \sum_{i=1}^{n} Var\left[\left[W\left(i\frac{t}{n}\right) - W\left((i-1)\frac{t}{n}\right)\right]^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2\left[\frac{t^2}{n^2}\right] = \frac{2t^2}{n}. \end{aligned}$$

Täten, kun $n \to \infty$, niin $E[S_n] = t$ ja $Var[S_n] \to 0$. Toisin sanoen, kun $n \to \infty$, niin S_n lähestyy determinististä rajaa t. Voidaan siis kirjoittaa

$$\int_0^t [dW]^2 = t,$$

tai yhtäpitävästi

$$[dW]^2 = dt.$$

Nyt esitetään tämän luvun päätulos eli Itôn kaava.

Lause 2.7 (Itôn kaava)**.** *Oletetaan, että prosessilla X on stokastinen differentiaali, joka on muotoa*

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \tag{2.19}$$

missä μ ja σ ovat mukautuvia prosesseja. Olkoon nyt f $C^{1,2}$-funktio ja määritellään prosessi Z yhtälöllä $Z(t) = f(t, X(t))$. Nyt prosessilla Z on stokastinen differentiaali muotoa

$$df(t, X(t)) = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\} dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW(t). \tag{2.20}$$

Huomautus 2.3. Luettavuuden vuoksi kaavasta on poistettu muutamia muuttujia näkyvistä. Esimerkiksi termi $\mu\frac{\partial f}{\partial x}$ on lyhennetty versio termistä

$$\mu(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)).$$

Todistus. Esitetään tässä todistuksen idea. Muodostamalla aluksi Taylorin sarjakehitelmä toiseen asteeseen asti funktiolle f saadaan

$$df(t, X(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}dtdX. \tag{2.21}$$

Määritelmän mukaan

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t),$$

joten

$$(dX)^2 = \mu^2(dt)^2 + 2\mu\sigma(dt)(dW) + \sigma^2(dW)^2.$$

Termit $(dt)^2$ ja $(dt)(dW)$ ovat merkityksettömän pieniä verrattuna termiin dt, joten ne voidaan käsitellä nollina. Lisäksi tiedetään yhtälön (2.18) perusteella, että $(dW)^2 = dt$. Nyt sijoittamalla nämä tiedot Taylorin sarjakehitelmään (2.21), saadaan haluttu tulos (2.20). □

Edellisen todistuksen pohjalta voidaan muokata Itôn kaava myös seuraavaan käyttökelpoiseen muotoon.

Lause 2.8. *Lauseen 2.7 oletuksilla voidaan df kirjoittaa muotoon*

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2, \tag{2.22}$$

missä käytetään kertolaskukaaviota

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0, \\ dt \cdot dW = 0, \\ (dW)^2 = dt. \end{cases}$$

Seuraavaksi käydään läpi kaksi esimerkkiä Itôn kaavan käytöstä.

Esimerkki 2.2. Lasketaan $E[W^4(t)]$. Merkitään $Z(t) = W^4(t)$. Nyt siis $Z(t) = f(t, X(t))$, missä $X = W$ ja $f(t, x) = x^4$. Täten prosessin X stokastinen differentiaali on $dX = dW$, joten kaavan (2.19) mukaan $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$. Lasketaan myös vaadittavat derivaatat, joista saadaan $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$. Nyt voidaan kirjoittaa prosessin Z stokastinen differentiaali Itôn kaavan avulla.

$$\begin{aligned} dZ(t) &= 6W^2(t)dt + 4W^3(t)dW(t), \\ Z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Integraalimuodossa tämä on

$$Z(t) = 0 + 6\int_0^t W^2(s)ds + 4\int_0^t W^3(s)dW(s).$$

Otetaan sitten odotusarvot yhtälöstä, ja lauseen 2.1 perusteella dW-integraali katoaa. Lisäksi voidaan siirtää ds-integraalin odotusarvo integraalin sisään, joten saadaan

$$E[Z(t)] = 6 \int_0^t E[W^2(s)]ds.$$

Tiedetään myös, että $E[W^2(s)] = s$, joten esimerkin vastaukseksi saadaan

$$E[W^4(t)] = E[Z(t)] = 6 \int_0^t s ds = 3t^2.$$

Esimerkki 2.3. Olkoon $Z(t) = X^2(t)$, missä prosessin X stokastinen differentiaali on muotoa

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t).$$

Lasketaan $dZ(t)$ lauseen 2.8 avulla.

$$\begin{aligned} dZ(t) &= 2X(t)dX(t) + \frac{1}{2} \cdot 2(dX(t))^2 \\ &= 2\alpha X^2(t)dt + 2\sigma X^2(t)dW(t) + \sigma^2 X^2(t)dt \\ &= Z(t)(2\alpha + \sigma^2)dt + Z(t) \cdot 2\sigma dW(t). \end{aligned}$$

Esitetään vielä jatkoa ajatellen stokastisista differentiaaliyhtälöistä erikoistapauksena *geometrinen Brownin liike*. Yleisesti ottaen stokastisille differentiaaliyhtälöille ei voida määrittää eksplisiittistä ratkaisua. Geometriselle Brownin liikkeelle tämä kuitenkin onnistuu.

Lause 2.9. *Ratkaisu yhtälölle*

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t, \tag{2.23}$$

$$X_0 = x_0, \tag{2.24}$$

missä α *ja* σ *ovat vakioita, on*

$$X(t) = x_0 \cdot \exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t)\right\}. \tag{2.25}$$

Todistus. Todistus on sovellus Itôn kaavasta. Katso esimerkiksi [2, s. 69] tai [6, s. 62]. □

3 Riskilliset markkinamallit

Tämän luvun aikana siirrytään yhden jakson mallista lopulta jatkuva-aikaiseen malliin. Esitellään vielä tässä yhteydessä tutkielmassa esimerkkinä usein käytettävä johdannaisinstrumentti.

Määritelmä 3.1. *Eurooppalainen osto-optio* on sopimus, jonka haltijalla on *toteutuspäivänä* T oikeus ostaa ennalta sovittu *kohde-etuus* S *toteutushintaan* K. Sopimuksen mukaan ostajalla ei ole velvollisuutta ostaa kohde-etuutta, mikäli hän ei niin halua.

Eurooppalainen osto-optio voidaan siis käyttää vain ennaltasovittuna ajanhetkenä T, kun taas amerikkalainen optio voidaan toteuttaa myös ennen eräpäivää T.

3.1 Diskreetit mallit

Tämän luvun tarkoituksena on toimia johdantona varsinaiseen aiheeseen ja esitellä muutamia tärkeitä määritelmiä ja lauseita, joiden avulla tulevissa luvuissa olevat tulokset ovat helpommin ymmärrettävissä. Diskreetit mallit esitetään melko tiiviissä paketissa, ja moni todistus on sivuutettu. Todistukset ovat kuitenkin helppoja, ja suurin osa niistä löytyy Björkin kirjasta [2, s. 5-38].

3.1.1 Yhden jakson malli

Keskitytään aluksi yhden aikavälin malliin.

Merkitään aikaa kirjaimella t, ja mallissa on siis vain kaksi ajanhetkeä: $t = 0$(”tänään”) ja $t = 1$(”huomenna”). Oletetaan, että mallissa on vain kaksi arvopaperia: velkakirja ja osake. Hetkellä t velkakirjan hinnasta käytetään merkintää B_t ja osakkeen hinnasta käytetään vastaavasti merkintää S_t. Velkakirjan hintaprosessi on deterministinen ja se noudattaa yhtälöitä

$$\begin{cases} B_0 & = 1, \\ B_1 & = 1 + R, \end{cases}$$

missä R on avistakorko aikavälille $[0, 1]$. Osakkeen hintaprosessi on stokastinen prosessi, joka käyttäytyy seuraavalla tavalla:

$$\begin{cases} S_0 = s, \\ S_1 = s \cdot Z, \end{cases}$$

missä Z on satunnaismuuttuja, joka määritellään yhtälöparilla

$$Z = \begin{cases} u, \text{todennäköisyydellä } p_u. \\ d, \text{todennäköisyydellä } p_d. \end{cases}$$

Oletetaan, että tiedetään s, u, d, p_u ja p_d. Olkoon lisäksi $d < u$ ja $p_u + p_d = 1$.

Tutkitaan nyt lyhyesti *arvopaperisalkkuja* eli *portfolioita*. Olkoon markkinat sellaiset, että ne koostuvat vain edellä mainituista hintaprosesseista B ja S. Olkoon portfolio $h = (x, y)$ vektori, missä x on portfolion velkakirjojen lukumäärä, ja y osakkeiden lukumäärä.

Tehdään seuraavat oletukset.

- Lyhyeksi myynti ja arvopapereiden osittainen omistus on mahdollista. Siis jokainen $h \in \mathbb{R}^2$ on sallittu portfolio.
- Markkinoilla ostohinta on sama kuin myyntihinta.
- Transaktiokustannuksia ei ole.
- Markkinat ovat likvidit. On siis mahdollista ostaa ja myydä loputon määrä sijoituskohteita.

Kiinnitetään x ja y portfoliossa $h = (x, y)$. Tällöin portfoliolla on deterministen arvo hetkellä $t = 0$ ja stokastinen arvo hetkellä $t = 1$.

Määritelmä 3.2. Portfolion h arvoprosessi on muotoa

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = 0, 1.$$

Tarkemmin

$$\begin{aligned} V_0^h &= x + ys, \\ V_1^h &= x(1 + R) + ysZ. \end{aligned}$$

Määritelmä 3.3. *Arbitraasiportfolio* on sellainen portfolio h, jolla on seuraavat ominaisuudet.

$$\begin{aligned} &V_0^h = 0, \\ &V_1^h > 0, \quad \text{todennäköisyydellä 1.} \end{aligned}$$

Arbitraasiportfolio on siis riskitön tapa tehdä rahaa tyhjästä.

Markkinoilla arbitraasimahdollisuus on esimerkiksi sellainen tilanne, että kahdessa eri paikassa on erihintaiset markkinat samalle arvopaperille. Tällöin ostetaan arvopaperia halvemmasta paikasta ja myydään samanaikaisesti kalliimmassa, ja saadaan täten (lähes) riskitön tuotto. Arbitraasimahdollisuus liitetään usein myös tehokkaiden markkinoiden käsitteeseen, jolloin oletetaan, että arbitraaseja ei markkinoilla ole. Arbitraasimahdollisuuksia pidetään yleisesti markkinoiden kannalta epätoivottavana tilanteena. Tämän tutkielmat kannalta arbitraasittomuus on merkittävä käsite, sillä tekstissä tarkastellaan ehdollisten vaateiden (määritelmä myöhemmin) hinnoittelua olettaen, että markkinat ovat arbitraasittomat.

Lause 3.1. *Yllä oleva malli on arbitraasiton, jos ja vain jos seuraava epäyhtälöketju on voimassa:*

$$d \leq (1 + R) \leq u.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Lauseen 3.1 perusteella on yhtäpitävää, että $1 + R$ voidaan kirjoittaa muuttujien u ja d konveksina kombinaationa. Siis

$$1 + R = q_u \cdot u + q_d \cdot d,$$

missä $q_u, q_d \geq 0$ ja $q_u + q_d = 1$. Huomataan, että voidaan tulkita lukuja q_u ja q_d uuden todennäköisyysmitan Q todennäköisyyksinä, joilla pätee $Q(Z = u) = q_u$ ja $Q(Z = d) = q_d$. Sovitaan, että merkintä E^Q tarkoittaa odotusarvoa käyttäen todennäköisyysmittaa Q. Nyt

$$\frac{1}{1+R} E^Q[S_1] = \frac{1}{1+R}[q_u su + q_d sd] = \frac{1}{1+R} \cdot s(1+R) = s.$$

Saatiin siis yhtälö

$$s = \frac{1}{1+R} E^Q[S_1], \tag{3.1}$$

jonka mukaan tämän päivän osakkeen arvo saadaan laskemalla huomisen arvon odotusarvo todennäköisyysmitan Q suhteen ja diskonttaamalla se. Tällaista yhtälöä kutsutaan *riskineutraaliksi* kaavaksi. Todennäköisyysmittaa, jolla pätee hinnoitteluyhtälö (3.1), kutsutaan *riskineutraaliksi mitaksi* tai *martingaalimitaksi*.

Määritelmä 3.4. Todennäköisyysmitta Q on *martingaalimitta*, jos ehto

$$S_0 = \frac{1}{1+R} E^Q[S_1]$$

on voimassa.

Lause 3.2. *Markkinamalli on arbitraasiton jos ja vain jos on olemassa martingaalimitta Q.*

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Lause 3.3. *Yhden aikavälin mallissa martingaalitodennäköisyydet ovat*

$$\begin{cases} q_u & = \frac{(1+R)-d}{u-d}, \\ q_d & = \frac{u-(1+R)}{u-d}. \end{cases}$$

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Määritelmä 3.5. *Ehdollinen vaade* on muotoa $X = \Phi(Z)$ oleva satunnaismuuttuja X, missä Z on (jo aiemmin tässä luvussu määritelty) osakkeen hinnan määräävä satunnaismuuttuja. Funktiota Φ kutsutaan *sopimusfunktioksi.*

Tulkitaan tässä luvussa muuttujaa X sopimuksena, joka antaa omistajalleen määrän X rahaa ajanhetkellä $T = 1$.

Esimerkki 3.1. Esimerkiksi eurooppalainen osto-optio on ehdollinen vaade. Olkoon tässä mallin mukaisesti toteutuspäivä $T = 1$. Olkoot lisäksi S ja Z kuten tämän luvun alussa. Jotta optio olisi mielekäs, olkoon $sd < K < su$, missä K on toteutushinta. Jos $K < S_1$, niin käytetään osto-optio, ja tuotto on tällöin $S_1 - K$. Jos taas $K > S_1$, niin jätetään optio käyttämättä. Täten

$$X = \begin{cases} su - K, & \text{jos } Z = u, \\ 0, & \text{jos } Z = d, \end{cases}$$

ja sopimusfunktio saa siis arvot

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= su - K, \\ \Phi(d) &= d. \end{aligned}$$

Halutaan nyt määritellä ”sopiva” hinta ehdolliselle vaateelle X, mikä tarkoittaa tässä tapauksessa sellaista arvoa, että markkinamalli on arbitraasiton. Käytetään vaateen X hinnasta ajanhetkellä t merkintää $\Pi(t; X)$. Jottei hetkellä $t = 1$ olisi arbitraasin mahdollisuutta, on selvästi oltava

$$\Pi(1; X) = X.$$

Selvitetään vielä $\Pi(0; X)$.

Määritelmä 3.6. Ehdollinen vaade X on *saavutettavissa*, mikäli on olemassa portfolio h, jolla

$$V_1^h = X, \quad \text{todennäköisyydellä } 1.$$

Tällöin portfoliota h kutsutaan *suojaavaksi* tai *jäljitteleväksi* portfolioksi. Jos kaikki vaateet markkinoilla ovat jäljiteltävissä, sanotaan, että markkinat ovat *täydelliset*.

Jos nyt X on jäljiteltävissä portfoliolla h, niin käytännössä ei ole väliä, omistaako portfolion h vai vaateen X, sillä molempien arvo hetkellä $t = 1$ tulee olemaan sama.

Lause 3.4. *Olkoon vaade X jäljiteltävissä portfoliolla h. Hetkellä $t = 0$ mikä tahansa muu hinta kuin V_0^h vaateelle X johtaa arbitraasimahdollisuuteen.*

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Lause 3.5. *Jos yhden aikavälin malli on arbitraasiton, niin se on myös täydellinen.*

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Annetaan lopuksi lause vaateen diskontatulle hinnalle.

Lause 3.6. *Jos yhden aikavälin malli on arbitraasiton, niin vaateen X hinta on*

$$\Pi(0;X) = \frac{1}{1+R} E^Q[X]. \tag{3.2}$$

Yllä oleva martingaalimitta Q on määritelty yksikäsitteisesti kaavalla

$$S_0 = \frac{1}{1+R} E^Q[S_1]. \tag{3.3}$$

Lauseesta 3.3 saadaan puolestaan tarkat arvot todennäköisyyksille q_u ja q_d. Lisäksi vaade voidaan jäljitellä portfoliolla

$$x = \frac{1}{1+R} \cdot \frac{y\Phi(d) - d\phi(u)}{u-d}, \tag{3.4}$$

$$y = \frac{1}{s} \cdot \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d}. \tag{3.5}$$

Todistus. Todistus sivuutetaan □

3.1.2 Useamman jakson malli

Useamman jakson diskreetissä mallissa pätevät liki samat lauseet ja määritelmät kuin luvussa 3.1.1, mutta sovellettuina useampaan peräkkäiseen jaksoon. Nyt siis t saa kokonaislukuarvoja välillä [0,T], missä T on kiinnitetty. Mallissa on jälleen ainoastaan kaksi sijoituskohdetta (velkakirja B ja osake S), joiden hintaprosessit on määritelty seuraavassa.

Velkakirjan hintaprosessi:

$$B_{n+1} = (1+R)B_n,$$
$$B_0 = 1.$$

Osakkeen hintaprosessi:

$$S_{n+1} = S_n \cdot Z_n,$$
$$S_0 = s.$$

Tässä $Z_0, \ldots, Z_{T-1}$ oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi satunnaismuuttujiksi, jotka saavat vain arvot u tai d todennäköisyyksillä

$$P(Z_n = u) = p_u,$$
$$P(Z_n = d) = p_d.$$

Määritelmä 3.7. *Portfoliostrategia* tai yleisemmin *portfolio* on sellainen stokastinen prosessi

$$\{h_t = (x_t, y_t); \quad t = 1, \ldots, T\},$$

että h_t on hintojen $S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$ funktio. Lisäksi sovitaan, että $h_0 = h_1$. *Arvoprosessi* portfoliolle h määritellään yhtälöllä

$$V_t^h = x_t(1+R) + y_t S_t.$$

Määritelmän tulkinta on seuraava: x_t on rahamäärä, mikä sijoitetaan pankkiin hetkellä $t-1$ ja pidetään siellä hetkeen t asti. Osakkeiden lukumäärä y_t tulkitaan vastaavasti. Portfolion ostamiseen hetkellä t voidaan käyttää tietoa osakkeen hinnan kehityksestä hetkeen t asti.

Usein mielenkiinnon kohteena ovat *omarahoitteiset* portfoliot eli sellaiset portfoliot, joihin ei sijoiteta rahaa ja joista ei nosteta rahaa.

Määritelmä 3.8. Sanotaan, että portfoliostrategia h on *omarahoitteinen*, mikäli ehto

$$x_t(1+R) + y_t S_t = x_{t+1} + y_{t+1} S_t$$

on voimassa kaikilla $t = 0, \ldots, T-1$.

3.2 Jatkuva-aikainen malli

Tässä kappaleessa käsitellään markkinamalleja jatkuva-aikasessa ympäristössä, eli $t \in \mathbb{R}_+$. Siirrytään myös pois kahden sijoituskohteen maailmasta äärellisen monen kohteen maailmaan.

3.2.1 Portfoliot

Aloitetaan tutustuminen portfolioihin jatkuva-aikaisessa ympäristössä seuraavilla määritelmillä.

Määritelmä 3.9.

- N = Eri tyyppiä olevien osakkeiden määrä.
- $S_i(t)$ = Tyyppiä i olevan osakkeen hinta hetkellä t.
- $h_i(t)$ = Tyyppiä i olevien osakkeiden lukumäärä hetkellä t.
- $h(t)$ = Portfolio $[h_1(t), \ldots, h_N(t)]$ hetkellä t.
- $V^h(t)$ = Portfolion h arvo hetkellä t.

Edellä $i = 1, \ldots, N$.

Määritelmä 3.10. Olkoon $\{S(t); t \geq 0\}$ N-ulotteinen hintaprosessi.

1. *Portfoliostrategia* (tai pelkkä portfolio) on mikä tahansa $\mathcal{F}_t^S$-mukautuva N-ulotteinen prosessi, joka on muotoa $\{h(t); t \geq 0\}$.
2. Portfolion h sanotaan olevan *Markovin portfolio*, jos se on muotoa

   $$h(t) = h(t, S(t)),$$

   jollain funktiolla $h : R_+ \times R^N \to R^N$.

3. Portfolion h *arvoprosessi* V^h on muotoa

$$V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) S_i(t).$$

4. Portfolion sanotaan olevan *omarahoitteinen*, mikäli arvoprosessi V^h toteuttaa ehdon

$$dV^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) dS_i(t). \tag{3.6}$$

Markovin portfolio tarkoittaa siis sitä, että portfolion arvo hetkellä t riippuu ainoastaan ajasta t ja sijoituskohteen arvosta $S(t)$. Eli se ei ota huomioon menneisyyttä (eikä tulevaisuutta). Viimeinen kohta puolestaan tarkoittaa sitä, että omarahoitteisen portfolion arvo muuttuu ainoastaan siinä olevien sijoituskohteiden hintojen heilahteluilla.

Määritelmä 3.11. *Arbitraasimahdollisuus* (tai pelkkä *arbitraasi*) on sellainen omarahoitteinen portfolio h, jolla pätee

$$\begin{aligned} V^h(0) &= 0, \\ P(V^h(T) \geq 0) &= 1, \\ P(V^h(T) > 0) &> 0. \end{aligned}$$

Sanotaan, että markkinamalli on *arbitraasiton*, mikäli arbitraasimahdollisuuksia ei ole.

Arbitraasimahdollisuuden voi siis ajatella olevan tapa tehdä rahaa tyhjästä ilman riskiä. Tämän tutkielman teorian kannalta on tärkeää, että markkinat ovat tehokkaat, jolloin arbitraasimahdollisuuksia ei ole.

Määritelmä 3.12. Olkoon h jokin portfolio. *Suhteellinen portfolio* u saadaan kaavalla

$$u_i(t) = \frac{h_i(t) S_i(t)}{V^h(t)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.7}$$

missä

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1.$$

Portfolio u siis kertoo nimensä mukaisesti eri sijoituskohteiden suhteellisen osuuden portfoliossa h. Nyt yhtälö (3.6) voidaan lausua uudella tavalla.

Apulause 3.7. *Portfolio h on omarahoitteinen jos ja vain jos*

$$dV^h(t) = V^h(t) \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}. \tag{3.8}$$

Todistus. Todistus seuraa helposti edellisistä määritelmistä. □

3.2.2 Arbitraasihinnoittelu

Tässä luvussa perehdytään ehdollisiin vaateisiin ja niiden hinnoitteluun. Tutkitaan miten ehto markkinoiden arbitraasittomuudesta vaikuttaa hinnoitteluun. Aloitetaan määrittämällä riskitön arvopaperi.

Määritelmä 3.13. Hintaprosessi B on riskitön sijoituskohde, jos se on muotoa

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \tag{3.9}$$

missä r on $\mathcal{F}_t$-mukautuva prosessi.

Voidaan kirjoittaa yhtälö (3.9) muotoon

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t),$$

joten differentiaalilaskennan tiedoilla (ks. esimerkiksi Haukkasen luentomoniste [4, s. 9]) saadaan

$$B(t) = B(0) \exp \int_0^t r(s)ds.$$

Riskittömällä sijoituskohteella ei siis ole lainkaan satunnaisuutta aiheuttavaa dW-termiä. Riskitöntä sijoituskohdetta voidaan ajatella pankkina, jolla on *lyhyt korko* r. Korko r saattaa olla stokastinen prosessi, tai se voi olla erikoistapauksessa myös vakio, jolloin prosessia B voidaan pitää kiinteäkorkoisena velkakirjana.

Lause 3.8. *Olkoon h sellainen omarahoitteinen portfolio, jonka arvoprosessi V^h toteuttaa yhtälön*

$$dV^h(t) = k(t)V^h(t)dt, \tag{3.10}$$

missä k on $\mathcal{F}_t$-mukautuva prosessi. Nyt on oltava $k(t) = r(t)$ kaikilla luvun t arvoilla, tai on olemassa arbitraasimahdollisuus.

Todistus. Todistus sivuutetaan, mutta esitetään tässä lyhyesti lauseen idea. Olkoon k ja r ovat vakioita. Jos olisi $k > r$, niin lainataan rahaa pankista korolla r, ja sijoitetaan tämä raha välittömästi portfolioon h, jossa sen korko on k. Tällöin hetkellä t nettosijoitus on nolla, mutta kun $t > 0$, niin varat ovat positiiviset. On siis olemassa arbitraasimahdollisuus. Tapaus $k < r$ ja stokastisten muuttujien tapaus osoitetaan vastaavasti. □

Jos portfolion arvoprosessissa ei ole Wienerin prosessia, niin sitä kutsutaan *hetkellisesti riskittömäksi portfolioksi*, jonka tuottoprosentin täytyy olla sama kuin lyhyt korko.

Olkoon osakkeen hintaprosessi S muotoa

$$dS(t) = S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t), \tag{3.11}$$

missä W on Wienerin prosessi ja α ja σ ovat annettuja deterministisiä funktioita. Funktio α on osakkeen hinnan S *hetkellinen keskimääräinen tuotto* ja funktio σ prosessin S *volatiliteetti*. Oletetaan tässä ja myös jatkossa, ettei osakkeesta makseta osinkoja.

Määritelmä 3.14. Olkoon S jonkin sijoituskohteen hintaprosessi. *Ehdollinen vaade* eli *johdannainen*, jonka *eräpäivä* on T, on mikä tahansa stokastinen muuttuja $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_T^S$. Ehdollinen vaade $\mathcal{X}$ on *yksinkertainen*, mikäli se on muotoa $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$. Funktiota Φ kutsutaan *sopimusfunktioksi*.

Ehdollista vaadetta, jonka eräpäivä on T, voidaan kutsua myös T-vaateeksi. Käytännössä ehdollinen vaade on sopimus, joka antaa omistajalleen tuoton $\mathcal{X}$ (positiivisen tai negatiivisen) eräpäivänä T. Ehto $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_T^S$ tarkoittaa, että eräpäivänä pystytään määrittelemään vaateesta saatava rahamäärä. Käytetään vielä vaateen $\mathcal{X}$ hintaprosessista ajanhetkellä t merkintää $\Pi(t; \mathcal{X})$ (tai joskus pelkkää $\Pi(t)$).

Esimerkki 3.2. Tutkitaan eurooppalaisen osto-option hintaa ajanhetkellä T. Olkoon K option toteutushinta, S osake ja $\Pi(t)$ siihen perustuva osto-option hintaprosessi.

- Jos $S(T) > K$, niin käytetään osto-optio ja ostetaan osake S hintaan K. Tämän jälkeen myydään osake välittömästi markkinoilla hintaan $S(T)$. Täten saatu tuotto on $S(T) - K$.
- Jos $S(T) \leq K$, niin osto-optio on hyödytön.

Täten eurooppalaisen osto-option ainut järkevä (arbitraasiton) hinta hetkellä T on

$$\Pi(T) = \max(S(T) - K, 0) = (S(T) - K)^+.$$

Yleiselle ehdolliselle vaateelle saadaan hinta vastaavalla tavalla. Eräpäivänä T johdannaisen hintaprosessin arvon on oltava $\mathcal{X}$, toisin sanoen yhtälön

$$\Pi(T; \mathcal{X}) = \mathcal{X}$$

on oltava voimassa, tai muuten markkinoilla olisi arbitraasimahdollisuus. Sen sijaan vaikeampaa on määritellä ”sopiva” hinta vaateelle satunnaisella hetkellä $t < T$. Sopivalla hinnalla tarkoitetaan sellaista hintaa, ettei siitä synny arbitraasimahdollisuutta.

Oletetaan, että annettu markkinamalli koostuu kahdesta sijoituskohteesta: $B(t)$ ja $S(t)$, joiden differentiaalit ovat muotoa

$$dB(t) = rB(t)dt, \tag{3.12}$$
$$dS(t) = S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t), \tag{3.13}$$

ja missä lyhyt korko r on deterministinen vakio. Olkoon nyt olemassa yksinkertainen ehdollinen vaade

$$\mathcal{X} = \Phi(S(T)), \tag{3.14}$$

jonka hintaprosessi on muotoa

$$\Pi(t) = F(t, S(t)), \tag{3.15}$$

missä F on kahden muuttujan sileä funktio. Oletetaan siis, että ehdollisen vaateen hintaan vaikuttaa ajanhetken lisäksi kohde-etuuden hinta kyseisellä hetkellä. Ei siis yritetä selvittää tarkkaa arvoa vaateen hinnalle, vaan saadaan sen suhteellinen hinta kohde-etuuteen hintaan nähden.

Halutaan selvittää, millaisen sijoituskohteista $S(t)$, $B(t)$ ja $\Pi(t)$ koostuvan markkinamallin täytyy olla, jotta arbitraasimahdollisuuksia ei ole. Saadaan seuraava lause.

Lause 3.9 (Black-Scholes-yhtälö)**.** *Oletetaan, että markkinoiden perustana on prosessit* (3.12)-(3.13)*. Olkoon $\mathcal{X}$ yhtälön* (3.14) *mukainen ehdollinen vaade, jonka hintaprosessi on muotoa* (3.15)*. Nyt markkinat ovat arbitraasittomat jos ja vain jos funktio F toteuttaa yhtälöt*

$$F_t(t,s) + rsF_s(t,s) + \frac{1}{2}s^2\sigma^2(t,s)F_{ss}(t,s) - rF(t,s) = 0, \tag{3.16}$$

$$F(T,s) = \Phi(s), \tag{3.17}$$

missä alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattaa. Tässä $t \in [0,T]$ ja $s \in \mathbb{R}_+$.

Todistus. Olkoot markkinat arbitraasittomat. Oletetaan, että osakkeen hintaprosessi noudattaa differentiaalia (3.13), ja lasketaan Itôn kaavan avulla vaateen $\mathcal{X}$ hintaprosessin $F(t, S(t))$ differentiaali. Saadaan

$$dF(t,S(t)) = \alpha_F(t)F(t,S(t))dt + \sigma_F(t)F(t,S(t))dW(t), \tag{3.18}$$

missä prosessit α_F ja σ_F määritellään kaavoilla

$$\alpha_F(t) = \frac{F_t + \alpha SF_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}}{F}, \tag{3.19}$$

$$\sigma_F(t) = \frac{\sigma SF_s}{F}. \tag{3.20}$$

Tässä prosessin F alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattaa ja käytetään lisäksi lyhennettyä merkintätapaa. Esimerkiksi yhtälö (3.20) lyhennettiin seuraavalla tavalla

$$\frac{\sigma SF_s}{F} = \frac{\sigma(t,S(t))S(t)F_s(t,S(t))}{F(t,S(t))}.$$

Muodostetaan nyt suhteellinen portfolio osakkeesta ja siihen pohjautuvasta vaateesta. Merkitään tätä portfoliota (u_s, u_F) ja saadaan sen arvoprosessille V differentiaali apulauseen 3.7 avulla muotoon

$$dV = V\left[u_s[\alpha dt + \sigma dW] + u_F[\alpha_F dt + \sigma_F dW]\right] \tag{3.21}$$

$$= V[u_s\alpha + u_F\alpha_F]dt + V[u_s\sigma + u_F\sigma_F]dW. \tag{3.22}$$

Suhteelliselle portfoliolle pätee ainoastaan ehto $u_s + u_F = 1$, joten voidaan määritellä sille toinenkin ehto, jonka avulla päästään eroon dW-termistä. Olkoon siis

$$u_s + u_F = 1, \tag{3.23}$$

$$u_s\sigma + u_F\sigma_F = 0. \tag{3.24}$$

Nyt jäljellä on ainoastaan hetkellisesti riskitön portfolio $dV = V[u_s\alpha + u_F\alpha_F]dt$, joten lauseen 3.8 mukaan on oltava

$$u_s\alpha + u_F\alpha_F = r. \tag{3.25}$$

Havaitaan, että yhtälöparilla (3.23)-(3.24) on ratkaisu

$$u_s = \frac{\sigma_F}{\sigma_F - \sigma}, \tag{3.26}$$

$$u_F = \frac{-\sigma}{\sigma_F - \sigma}, \tag{3.27}$$

joihin sijoittamalla σ_F yhtälön (3.20) mukaan saadaan sama tarkemmin kirjoitettuna

$$u_s(t) = \frac{S(t)F_s(t, S(t))}{S(t)F_s(t, S(t)) - F(t, S(t))}, \tag{3.28}$$

$$u_F(t) = \frac{-F(t, S(t))}{S(t)F_s(t, S(t)) - F(t, S(t))}. \tag{3.29}$$

Nyt sijoittamalla (3.19), (3.28) ja (3.29) yhtälöön (3.25), saadaan lopulta

$$F_t(t, S(t)) + rS(t)F_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S(t))S^2(t)F_{ss}(t, S(t)) - rF(t, S(t)) = 0.$$

Tiedetään myös, että $F(T, S(T)) = \Pi(T) = \Phi(S(T))$. Lisäksi voidaan osoittaa, että $S(t)$ voi saada mitä tahansa positiivisia reaalilukuarvoja, joten voidaan merkitä $S(t) = s$, ja sijoittamalla tämä yllä olevaan yhtälöön saadaan haluttu tulos. □

Saatiin siis sellainen hinnoittelumalli vaateelle $\mathcal{X}$, joka pohjautuu ajanhetkeen t ja kohde-etuuteen $S(t)$. Täten, jotta voidaan käyttää Black-Scholes-yhtälöä, tarvitaan ensin tieto hintaprosessin $S(t)$ käyttäytymisestä. Huomataan, että hinnoittelumallissa ei ole lainkaan osakkeen ajaumatermiä, ja tämä korostaa ehdollisen vaateen suhteellista hinnoitteluperiaatetta. Toisaalta osakkeen ajauma vaikuttaa välillisesti vaateen hintaan osakkeen hinnan kautta.

Tästä eteenpäin tekstissä käytetään seuraavia merkintätapoja.

- Odotusarvoa E käytetään, kun lasketaan odotusarvo todennäköisyysmitan P vallitessa. Odotusarvo E^Q tarkoittaa odotusarvoa Q-mitan vallitessa.

- Merkintä W tarkoittaa Wienerin prosessia mitan P vallitessa, kun taas $\bar{W}$ tarkoittaa Wienerin prosessia mitan Q vallitessa.

Seuraavaksi Black-Scholes-yhtälöstä halutaan ratkaista termin $F(t,s)$ arvo, joten esitetään seuraava lause.

Lause 3.10 (Riskineutraali hinnoittelu)**.** *Olkoot markkinat abitraasittomat. Vaateen* $\Phi(S(T))$ *hinta* $\Pi(t;\Phi) = F(t,S(t))$ *saadaan yhtälöstä*

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}[\Phi(S(T))], \tag{3.30}$$

missä todennäköisyysmitta Q *ja alaindeksit* t *ja* s *tarkoittavat, että osakkeen hintaprosessi toteuttaa yhtälöt*

$$dS(t) = rS(t)dt + S(t)\sigma(t,S(t))d\bar{W}(t), \tag{3.31}$$

$$S(t) = s. \tag{3.32}$$

Todistus. Olkoon hintaprosessin S differentiaali muotoa (3.31) mitan Q vallitessa. Sovelletaan Itôn kaavaa prosessiin $F(u,S(u))$, ja saadaan

$$\begin{aligned} dF(u,S(u)) &= \left[F_u + rS(u)F_s + \frac{1}{2}S^2(u)\sigma^2(u,S(u))F_{ss}\right]du \\ &\quad + S(u)\sigma(u,S(u))F_s d\bar{W}(u) \\ &= rFdu + S(u)\sigma(u,S(u))F_s d\bar{W}(u). \end{aligned}$$

Edellä olevasta yhtälöketjusta on lyhennetty selkeyden vuoksi pois funktion F argumentit u ja $S(u)$. Tarkastellaan nyt funktiota

$$g(u,x) = e^{-r(u-t)}x.$$

Lasketaan aluksi funktion g osittaisderivaatat, jotta siihen voidaan hyödyntää Itôn kaavaa. Osittaisderivaatat ovat:

$$\begin{aligned} g_u &= -re^{-r(u-t)}x, \\ g_x &= e^{-r(u-t)}, \\ g_{xx} &= 0. \end{aligned}$$

Soveltamalla Itôn kaavaa funktioon $g(u,F(u,S(u)))$, saadaan

$$\begin{aligned} dg &= \left[-re^{-r(u-t)}F + rFe^{-r(u-t)} + 0\right]du \\ &\quad + S(u)\sigma(u,S(u))Fe^{-r(u-t)}d\bar{W}(u). \end{aligned}$$

Huomataan, että du-termi katoaa kokonaan, joten g on martingaali. Nyt

$$\begin{aligned} F(t,s) = g(t, F(t,s)) &= E^Q_{t,s} g\left(T, F(T, S(T))\right) \\ &= E^Q_{t,s}\left[e^{-r(T-t)} F(T, S(T))\right] \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s} \Phi(S(T)). \end{aligned}$$

□

Ehdollisen vaateen arbitraasitona hinta saadaan siis diskonttaamalla toteutuspäivän sopimusfunktion odotusarvo, mutta on huomioitava, että odotusarvo lasketaan todennäköisyysmitan Q vallitessa.

Määritelmä 3.15. *Black-Scholes-mallissa* on kaksi sijoituskohdetta, jotka toteuttavat yhtälöt

$$dB(t) = rB(t), \tag{3.33}$$

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \tag{3.34}$$

missä r, α ja σ ovat deterministisiä vakioita.

Perinteinen Black-Scholes-malli eroaa siis aiemmin käsiteltävästä mallista siten, että α ja σ ovat vakioita.

Seuraus 3.11. *Olkoon markkinamallina Black-Scholes-malli ja olkoon $\mathcal{X}$ jokin T-vaade, joka on muotoa $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$. Käytetään tämän vaateen arbitraasittomasta hintaprosessista merkintää $\Pi(t)$. Nyt prosessin $\Pi(t)$ differentiaali on muotoa*

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt + g(t)d\bar{W}(t), \tag{3.35}$$

todennäköisyysmitan Q vallitessa.

Todistus. Todistus on sama kuin lauseen 3.10 todistuksen ensimmäinen yhtälöketju. Käytetään siis hyväksi prosessin $S(t)$ differentiaalia mitan Q vallitessa ja sitä, että F toteuttaa Black-Scholes-yhtälön. Täten $g(t) = S(t)\sigma F_s$. □

Lause 3.12. *Olkoon markkinamallina Black-Scholes-malli ja olkoon $\Pi(t)$ mikä tahansa osakkeen tai johdannaisen hintaprosessi. Nyt* normalisoitu *hintaprosessi*

$$Z(t) = \frac{\Pi(t)}{B(t)} \tag{3.36}$$

on martingaali todennäköisyysmitan Q vallitessa.

Todistus. Hyödyntämällä seurauslausetta 3.11, saadaan Itôn kaavasta

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \frac{1}{B(t)}(d\Pi(t)) - \frac{\Pi(t)}{B^2(t)}(dB(t)) + 0 \\ &= \frac{1}{B(t)}(r\Pi(t)dt + \sigma_\Pi d\bar{W}(t)) - \frac{\Pi(t)}{B^2(t)}(rB(t)dt) \\ &= \frac{\sigma_\Pi}{B(t)} d\bar{W}(t), \quad \text{missä (johdannaisen) } \sigma_\Pi = S(t)\sigma F_s. \end{aligned}$$

□

Täten riskineutraalin mitan Q vallitessa on jokaisen riskillisen sijoituskohteen ajauma sama kuin riskitön korko.

Määritellään nyt martingaalimitta. Tätä varten tarvitaan ensin *numeräärin* ja *ekvivalentin todennäköisyysmitan* käsitteet.

Määritelmä 3.16. *Numerääri* on mukautuva arvon mittari, eli sellainen arvo, johon muita arvoja verrataan ja ilmaistaan sen suhteen.

Määritelmässä 3.16 on käytetty Alvarezin ja Koskisen [1] kirjoittamaa määritelmää apuna. Teosta on muutenkin hyödynnetty tässä tutkielmassa suomenkielisten termien määrittelyssä.

Määritelmä 3.17. Kaksi todennäköisyysmittaa P ja Q ovat *ekvivalentit todennäköisyysmitat*, jos ja vain jos

$$P(A) = 1 \Leftrightarrow Q(A) = 1, \quad \text{kaikilla } A \in \mathcal{F}.$$

Olkoon markkinamalli sellainen, että se koostuu riskillisistä hintaprosesseista $(S_1(t), \ldots, S_N(t))$. Olkoon lisäksi olemassa riskitön sijoituskohde $S_0(t)$, joka valitaan numerääriksi. Oletetaan näiden olevan voimassa, ja määritellään nyt martingaalimitta.

Määritelmä 3.18. Todennäköisyysmittaa Q kutsutaan *martingaalimitaksi* äärellisellä aikavälillä $[0, T]$, jos se täyttää seuraavat ehdot.

- Q on ekvivalentti mitan P kanssa.
- Kaikki hintaprosessit

$$\frac{S_0(t)}{S_0(t)}, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \ldots, \frac{S_N(t)}{S_0(t)}$$

  ovat martingaaleja mitan Q vallitessa, aikavälillä $[0, T]$.

Esitetään vielä kaksi merkittävää tulosta, joiden todistaminen ei ole tarkoituksenmukaista tässä yhteydessä.

Lause 3.13 (Rahoitusteorian ensimmäinen päälause). *Markkinamalli on arbitraasiton, jos ja vain jos on olemassa martingaalimitta $Q \sim P$.*

Todistus. Lauseen todistus on pitkä ja vaikea, eikä sen esittäminen tässä yhteydessä ole mielekästä. Todistuksen idea on esitetty Björkin kirjassa [2, s. 141-143]. □

Määritelmä 3.19. Sanotaan, että ehdollinen vaade $\mathcal{X}$ on *jäljiteltävissä*, mikäli on olemassa oma-rahoitteinen portfolio h, jolla pätee

$$V^h(T) = \mathcal{X}, \quad \text{(melkein varmasti).} \tag{3.37}$$

Jos jokainen ehdollinen vaade on jäljiteltävissä, niin sanotaan että markkinat ovat *täydelliset.*

Markkinamallien täydellisyyden osoittaminen saattaa usein olla vaikeakin tehtävä. Epätäsmällisenä sääntönä voidaan pitää seuraavaa: Jos markkinoiden kaikki epävarmuus johtuu Wienerin prosesseista, niin markkinoilla täytyy olla vähintään sama määrä sijoituskohteita (poislukien riskitön sijoituskohde) kuin Wienerin prosesseja, jotta markkinat olisivat täydelliset. Jos taas riskillisiä sijoituskohteita on korkeintaan yhtä paljon kuin Wienerin prosesseja, ovat markkinat arbitraasittomat.

Lause 3.14 (Rahoitusteorian toinen päälause). *Olkoon markkinat arbitraasittomat ja olkoon numerääri S_0 kiinnitetty. Nyt markkinamalli on täydellinen, jos ja vain jos martingaalimitta Q on yksikäsitteinen.*

Todistus. Todistus on Björkin kirjan kappaleessa 10 [2, s. 151]. □

Esimerkki 3.3. Black-Scholes-mallin martingaalimitta on yksikäsitteinen, joten malli on myös täydellinen.

Aiemmin todistettiin riskineutraali hinnoittelukaava yksinkertaiselle ehdolliselle vaateelle. Tarkastellaan nyt eurooppalaista osto-optiota, ja ratkaistaan sille riskineutraali hinnoittelukaava. Tarkastellaan aluksi Black-Scholes-mallia tarkemmin. Mallin hintaprosessit ovat siis muotoa

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t), \\ dS(t) &= \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \end{aligned}$$

missä r, α ja σ ovat vakioita. Tiedetään lisäksi aiemman perusteella, että arbitraasiton hinta yksinkertaiselle ehdolliselle vaateelle saadaan yhtälöstä

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}[\Phi(S(T))],$$

missä prosessi S käyttäytyy mitan Q vallitessa yhtälön

$$dS(u) = rS(u)du + \sigma S(u)d\bar{W}(u), \tag{3.38}$$

$$S(t) = s \tag{3.39}$$

mukaisesti. Huomataan, että tämä on geometrisen Brownin liikkeen differentiaaliyhtälö, joten lauseen 2.9 nojalla tiedetään, että

$$S(T) = s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(\bar{W}(T) - \bar{W}(t))\right\}.$$

Lisäksi tiedetään, että $\bar{W}(T) - \bar{W}(t) \sim N(0, T-t)$, joten voidaan kirjoittaa yllä oleva muotoon

$$S(T) = s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y\right\},$$

missä $Y \sim N(0,1)$. Koska tarkastelleen eurooppalaista osto-optiota, tiedetään että $\Phi(S(T)) = (S(T) - K)^+$. Täten

$$\begin{aligned} F(t,s) &= e^{-r(T-t)} E^Q \left(s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y\right\} - K\right)^+ \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x\right\} - K\right)^+ \\ &\qquad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ratkaistaan x yhtälöstä

$$\left(s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x\right\} - K\right) \geq 0,$$

ja saadaan

$$x \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right).$$

Käytetään yllä olevanepäyhtälön oikeasta puolesta merkintää T_1. Nyt yhtälö (3.40) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} F(t,s) = e^{-r(T-t)} \int_{T_1}^{\infty} &\left(s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x\right\} - K\right) \\ &\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Tätä sieventämällä ja tekemällä muuttujanvaihto $y = x - \sigma\sqrt{T-t}$ saadaan

$$\begin{aligned} F(t,s) &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{T_1 - \sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - Ke^{-r(T-t)}(1 - N(T_1)) \\ &= s(1 - N(T_1 - \sigma\sqrt{T-t})) - Ke^{-r(T-t)}(1 - N(T_1)), \end{aligned} \tag{3.41}$$

missä

$$N(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio. Nyt

$$T_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(-ln\left(\frac{s}{K}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right),$$

ja käyttämällä hyväksi sitä, että $N(x) + N(-x) = 1$, saadaan

$$\begin{aligned} 1 - N(T_1 - \sigma\sqrt{T-t}) &= N(-(T_1 - \sigma\sqrt{T-t})) \\ &= N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right)\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Vastaavasti saadaan

$$1 - N(T_1) = N(-T_1) = N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right)\right). \tag{3.43}$$

Lopulta sijoittamalla yhtälöt (3.42) ja (3.43) yhtälöön (3.41), saadaan haluttu hinnoitteluyhtälö. Muotoillaan tämä vielä lauseeksi.

Lause 3.15 (Black-Scholes-kaava)**.** *Olkoon $\mathcal{X}$ eurooppalainen osto-optio, jonka toteutumishinta on K ja toteutumispäivä T. Nyt osto-option hintaprosessi on muotoa $\Pi(t) = F(t, S(t))$, missä*

$$F(t,s) = sN[d_1(t,s)] - e^{-r(T-t)}KN[d_2(t,s)]. \tag{3.44}$$

Tässä N on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio ja

$$d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right\}, \tag{3.45}$$

$$d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{3.46}$$

Esimerkki 3.4. Olkoon osakkeen S tämänhetkinen hinta 10 euroa, ja halutaan hankkia eurooppalainen osto-optio, joka oikeuttaa ostamaan osakkeen toteutuspäivänä hintaan $9,5$ euroa. Olkoon option toteutuspäivä kuuden kuukauden kuluttua. Olkoon kohde-etuuden S volatiliteetti 40 % vuodessa ja olkoon markkinoiden riskitön korko 2 % vuodessa. Halutaan tietää osto-option arbitraasiton hinta nykyhetkellä, eli kun $t = 0$. Nyt sijoittamalla kaikki tiedot Black-Scholes-kaavaan, saadaan option hinnaksi $F(0, 10) = 1,41$.

4 Jatkuva-aikaiset korkomarkkinamallit

4.1 Johdanto

Tässä luvussa tiputetaan markkinamallistamme riskillinen kohde pois, ja käytetään pohjana ainoastaan riskitöntä sijoituskohdetta. Huomioitavaa kuitenkin on se, että vaikka puhutaan riskittömästä kohteesta, niin se viittaa ainoastaan siihen, että prosessilta puuttuu satunnaisuutta aiheuttava volatiliteetti. Riskittömän prosessin ajaumatermillä $r(t)$ saattaa kuitenkin olla differentiaalissaan Wienerin prosessi.

4.1.1 Nollakuponkilaina

Määritelmä 4.1. *Nollakuponkilaina* eli *T-laina*, jonka eräpäivä on T, on sellainen sopimus, joka takaa lainan haltijalle yhden euron ajanhetkenä T. Tällaisen lainan hintaa ajanhetkenä t merkitään $p(t, T)$.

Jatkossa tutkitaan juuri T-lainoihin liittyvää teoriaa ja sen sovelluksia. Tutkielman teoriassa olisi voitu käyttää myös sellaista lainaa, jonka arvo eräpäivänä olisi jokin muu kuin yksi euro. Laskennallisista syistä tarkastellaan kuitenkin ainoastaan yllä olevan määritelmän mukaista velkakirjaa. Tämän luvun mielenkiinnon kohteena on kyseisen lainan hinnan määrittäminen ennen eräpäiväänsä. Tehdään seuraavassa muutama oletus lainamarkkinoista.

- On olemassa kitkattomat markkinat jokaiselle eräpäivälle T.
- $p(t, t) = 1$ jokaisella arvolla t.
- Jokaisella kiinteällä arvolla t T-lainan hinta $p(t, T)$ on derivoituva eräpäivän T suhteen.

Aiemmasta poiketen markkinamallissa on ääretön määrä sijoituskohteita, sillä T-lainoja on ääretön määrä ($T \in \mathbb{R}_+$). Tämän seikan pohjalta halutaan selvittää, miten eri maturiteetin T-lainojen hintaprosessit käyttäytyvät suhteessa toisiinsa, jos oletetaan markkinoiden arbitraasittomuus. Tästä eteenpäin velkakirjoista puhuttaessa tarkoitetaan edellä määriteltyjä nollakuponkilainoja.

4.1.2 Termiinikorot

Seuraavaksi esitetään perusperiaatteet tulevaisuudessa käytäville lainakaupoille. Oletetaan nyt, että $t < S < T$, missä t on nykyhetki. Tavoitteena on sopia ajanhetkenä t, että hetkellä S tehdään yhden euron sijoitus ja saadaan sille deterministinen tuotto välillä $[S, T]$. Tämä saavutetaan seuraavia askelia noudattaen.

1. Ajanhetkenä t myydään yksi S-laina. Saadaan tästä $p(t, S)$ euroa.

2. Ostetaan saaduilla rahoilla $p(t,S)/p(t,T)$ T-lainaa. Täten hetken t nettosijoitus on 0.
3. Ajanhetkenä S S-laina erääntyy, joten maksetaan siitä yksi euro.
4. Hetkenä T T-laina erääntyy, joten saadaan siitä $p(t,S)/p(t,T)$ euroa.

Täten on saatu riskitön korkotuotto ajanhetkenä t sovitulle sijoitukselle tulevaisuuden välille $[S,T]$. Tällaista korkokantaa kutsutaan termiinikoroksi.

Termiinikorko voidaan määritellä kahdella tavalla: Yksinkertainen termiinikorko (tai LIBOR-korko) L on ratkaisu yhtälölle

$$1 + (T-S)L = \frac{p(t,S)}{p(t,T)},$$

kun taas jatkuva-aikainen termiinikorko R on ratkaisu yhtälölle

$$e^{R(T-S)} = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}.$$

Yksinkertaista termiinikorkoa käytetään usein korkomarkkinoilla, kun taas jatkuva-aikainen termiinikorko on enemmän teoreettinen käsite. Jatkuva-aikainen tarkoittaa tässä sitä, että korko lisätään pääomaan jokaisena ajanhetkenä (ns. korkoa korolle). Annetaan vielä täsmälliset määritelmät eri termiini- ja avistakoroille, jotka voidaan johtaa edellisistä yhtälöistä.

Määritelmä 4.2.

1. *Yksinkertainen termiinikorko* välille $[S,T]$, joka on sovittu hetkenä t, on
$$L(t;S,T) = -\frac{p(t,T)-p(t,S)}{(T-S)p(t,T)}.$$
2. *Yksinkertainen avistakorko* välille $[S,T]$ on
$$L(S,T) = -\frac{p(S,T)-1}{(T-S)p(S,T)}.$$
3. *Jatkuva-aikainen termiinikorko* välille $[S,T]$, joka on sovittu hetkenä t, on
$$R(t;S,T) = -\frac{\log p(t,T) - \log p(t,S)}{T-S}.$$
4. *Jatkuva-aikainen avistakorko* välille $[S,T]$ on
$$R(S,T) = -\frac{\log p(S,T)}{T-S}.$$

5. *(Välitön) termiinikorko* eräpäivälle T, joka on sovittu hetkenä t, on

$$f(t,T) = -\frac{\partial \log p(t,T)}{\partial T}.$$

6. *(Välitön) lyhyt korko* hetkellä t on

$$r(t) = f(t,t).$$

Huomataan, että avistakorot ovat sellaisia termiinikorkoja, joissa sopimuksen tekohetki on sama kuin sopimuksen aloitushetki, eli $t = S$. Välitön termiinikorko on jatkuva-aikaisen termiinikoron raja-arvo, kun $S \to T$. Se on siis riskitön korkokanta, joka sovitaan hetkellä t ja se on voimassa infinitesimaalilla välillä $[T, T + dT]$. Näistä määritelmistä tärkeimmät tämän tutkielman kannalta ovat välitön termiinikorko sekä lyhyt korko. Määritellään seuraavaksi rahatiliprosessi B.

Määritelmä 4.3. Rahatiliprosessi määritellään kaavalla

$$B_t = \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}.$$

Toisin sanoen

$$\begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt, \\ B(0) = 1. \end{cases}$$

Rahatiliä voidaan ajatella pankkina, jolla on stokastinen lyhyt korko.

Apulause 4.1. *Olkoon $t \leq s \leq T$. Nyt*

$$p(t,T) = p(t,s) \cdot \exp\left\{-\int_s^T f(t,u)du\right\},$$

ja erityisesti

$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\}.$$

Todistus. Tulos saadaan välittömän termiinikoron määritelmästä ratkaisemalla termi $p(t,T)$. □

Velkakirjamarkkinamallin luomiseksi voidaan käyttää useaa eri lähtökohtaa. Voidaan esimerkiksi määrittää lyhyen koron stokastinen differentiaali, ja sen avulla määrittää velkakirjojen hinnat käyttäen arbitraasittomuutta apuna. Toisaalta voidaan yrittää määrittää stokastiset differentiaalit kaikille mahdollisille termiinikoroille ja käyttää hyväksi apulausetta 4.1. Seuraavassa kappaleessa tutkitaan edellä mainittujen differentiaalien yhteyksiä toisiinsa nähden.

4.2 Velkakirjamarkkinoiden markkinamalli

Aloitetaan luku muotoilemalla kolme differentiaalia.

Lyhyen koron stokastinen differentiaali:

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t). \tag{4.1}$$

Velkakirjan hinnan stokastinen differentiaali:

$$dp(t,T) = p(t,T)m(t,T)dt + p(t,T)v(t,T)dW(t). \tag{4.2}$$

Termiinikoron stokastinen differentiaali:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t). \tag{4.3}$$

Yllä olevissa yhtälöissä W on tuttuun tapaan Wienerin prosessi. Prosessit $a(t)$ ja $b(t)$ ovat $\mathcal{F}_t$-mukautuvia prosesseja, kun taas prosessit $m(t,T)$, $v(t,T)$, $\alpha(t,T)$ ja $\sigma(t,T)$ ovat $\mathcal{F}_t$-mukautuvia prosesseja, joissa eräpäivä T on kiinnitetty. Tehdään vielä seuraavat oletukset ennen tarkempaa perehtymistä annettuihin stokastisiin differentiaaleihin.

1. Jokaisella kiinteällä arvolla t prosessit $m(t,T)$, $v(t,T)$, $\alpha(t,T)$ ja $\sigma(t,T)$ oletetaan jatkuvasti derivoituviksi muuttujan T suhteen. Tästä muuttujan T osittaisderivaatasta käytetään merkintää $m_T(t,T)$ (muut vastaavasti).

2. Kaikki prosessit oletetaan riittävän säännöllisiksi, jotta ne voidaan derivoida integraalin alla ja integroimisen järjestystä voidaan vaihtaa.

Tarkastellaan nyt edellä määriteltyjen differentiaaliyhtälöiden välisiä riippuvuuksia. Seuraavat tulokset pitävät paikkaansa riippumatta siitä, mitä todennäköisyysmittaa käytetään. Erityisesti ei siis oleteta, että markkinat olisivat arbitraasittomat.

Lause 4.2. *Jos hintaprosessi $p(t,T)$ käyttäytyy yhtälön (4.2) mukaisesti, niin termiinikoron differentiaali noudattaa yhtälöä*

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t),$$

missä α ja σ ovat muotoa

$$\begin{cases} \alpha(t,T) = v_T(t,T) \cdot v(t,T) - m_T(t,T), \\ \sigma(t,T) = -v_T(t,T). \end{cases} \tag{4.4}$$

Todistus. Välittömän termiinikoron määritelmästä tiedetään, että $f(t,T) = -\frac{\partial \ln p(t,T)}{\partial T}$, joten aloitetaan todistus tutkimalla termiä $ln(p(t,T))$. Soveltamalla siihen lausetta 2.8 saadaan

$$\begin{aligned} dln(p(t,T)) &= \frac{1}{p(t,T)} dp(t,T) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{(p(t,T))^2} \right) (dp(t,T))^2 \\ &= m(t,T)dt + v(t,T)dW(t) - \frac{1}{2} \left(v(t,T)^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan tämä integraalimuodossa:

$$\begin{aligned} ln(p(t,T)) = ln(p(0,T)) &+ \int_0^t m(s,T)ds \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t (v(s,T))^2 \, ds + \int_0^t v(s,T)dW(s). \end{aligned}$$

Täten välittömän termiinikoron määritelmän perusteella

$$\begin{aligned} f(t,T) = -\frac{\partial ln(p(0,T))}{\partial T} &- \int_0^t \frac{\partial m(s,T)}{\partial T} ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial (v(s,T))^2}{\partial T} ds - \int_0^t \frac{\partial v(s,T)}{\partial T} dW(s). \end{aligned}$$

Lopuksi muutetaan tämä yhtälö vielä takaisin differentiaalimuotoon

$$df(t,T) = [v_T(t,T)v(t,T) - m_T(t,T)]dt - v_T(t,T)dW(t),$$

mikä on haluttu tulos. □

Lause 4.3. *Jos termiinikorko on yhtälön* (4.3) *mukainen, niin lyhyen koron differentiaali on muotoa*

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t),$$

missä

$$\begin{cases} a(t) = f_T(t,t) + \alpha(t,t), \\ b(t) = \sigma(t,t). \end{cases} \tag{4.5}$$

Todistus. Valitsemalla eräpäiväksi t ja kirjoittamalla termiinikoron differentiaali integraalimuodossa saadaan

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s). \tag{4.6}$$

Nythän

$$\alpha(s,t) = \alpha(s,s) + \int\limits_s^t \alpha_T(s,u)du,$$
$$\sigma(s,t) = \sigma(s,s) + \int\limits_s^t \sigma_T(s,u)du,$$

joten yhtälö (4.6) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} r(t) &= f(0,t) + \int\limits_0^t \alpha(s,s)ds + \int\limits_0^t \int\limits_s^t \alpha_T(s,u)duds \\ &\quad + \int\limits_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int\limits_0^t \int\limits_s^t \sigma_T(s,u)dudW(s) \\ &= f(0,t) + \int\limits_0^t \alpha(s,s)ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^u \alpha_T(s,u)dsdu \\ &\quad + \int\limits_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int\limits_0^t \int\limits_0^u \sigma_T(s,u)dsdW(u). \end{aligned}$$

Nyt differentioimalla saadaan

$$\begin{aligned} dr(t) = f_T(0,t)dt &+ \int\limits_0^t \alpha_T(s,t)dsdt + \int\limits_0^t \sigma_T(s,t)dW(s)dt \\ &+ \alpha(t,t)dt + \sigma(t,t)dW(t), \\ &= f_T(t,t)dt + \alpha(t,t)dt + \sigma(t,t)dW(t), \end{aligned}$$

mikä on haluttu tulos. □

Lause 4.4. *Jos termiinikoron $f(t,T)$ differentiaali on muotoa* (4.3)*, niin hintaprosessille $p(t,T)$ pätee*

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}dt + p(t,T)S(t,T)dW(t),$$

missä $\|\cdot\|$ tarkoittaa Euklideen normia, ja

$$\begin{cases} A(t,T) &= -\int_t^T \alpha(t,s)ds, \\ S(t,T) &= -\int_t^T \sigma(t,s)ds. \end{cases} \tag{4.7}$$

Todistus. Todistus on esitetty pääpiirteittäin Björkin kirjassa [2, s. 355-356]. Täsmällinen todistus on Heathin, Jarrow'n ja Mortonin Econometricassa olevassa kirjoituksessa [5, s. 99-100]. □

4.3 Lyhyen koron mallit

Aloitetaan luku muutamalla oletuksella.

Oletetaan, että on olemassa hetkellisesti riskitön sijoituskohde. Tämän kohteen hintaprosessi B(t) noudattaa yhtälöä

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \tag{4.8}$$

missä ennalta määritelty lyhyt korko r puolestaan noudattaa yhtälöä

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \tag{4.9}$$

objektiivisen todennäköisyysmitan P vallitessa. Oletetaan lisäksi, että jokaiselle nollakuponkilainalle on arbitraasittomat markkinat kaikilla eräpäivillä T.

Markkinoilla on siis ääretön määrä velkakirjoja ja yksi riskitön sijoituskohde. Huomioitavaa kuitenkin on, että riskitön sijoituskohde on ainut mallin ulkopuolelta määritelty sijoituskohde (vrt. Black-Scholes-mallin riskitön ja riskillinen sijoituskohde). Muiden sijoituskohteiden eli velkakirjojen ajatellaan olevan johdannaisia, jotka perustuvat lyhyeen korkoon. Koska tässä mallissa on vain yksi annettu sijoituskohde eli riskitön sijoituskohde, ei voida muodostaa portfoliota, joka vastaisi ehdollisen vaateen hintaa. Tämän vuoksi ei voida myöskään määrittää absoluuttista hintaa vaateelle, vaan tavoitteena on tutkia eri eräpäivien velkakirjojen hintojen välisiä suhteita arbitraasittomilla markkinoilla.

Olkoon T-lainan hinta muotoa

$$p(t, T) = F(t, r(t); T) \tag{4.10}$$

kaikilla eräpäivillä T, missä F on kolmen muuttujan sileä funktio, eli sen jokaisen kertaluvun derivaatat ovat jatkuvia.

Usein käsitellään hintaprosessia $F(t, r(t); T)$ niin, että kiinnitetään eräpäivä T. Tällöin voidaan kirjoittaa $F^T(t, r)$. Selvästi $F(T, r; T) = 1$ arbitraasittomilla markkinoilla. Lähdetään nyt selvittämään kahden eri eräpäivän velkakirjan hintaa vertailemalla niitä toisiinsa. Olkoot nämä eräpäivät S ja T. Nyt Itôn kaavaa käyttämällä saadaan T-lainan stokastinen differentiaali muotoon

$$dF^T = F^T \alpha_T dt + F^T \sigma_T dW, \tag{4.11}$$

missä

$$\alpha_T = \frac{F_t^T + \mu F_r^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T}{F^T}, \tag{4.12}$$

$$\sigma_T = \frac{\sigma F_r^T}{F^T}. \tag{4.13}$$

Tässä alaindeksit r ja t tarkoittavat osittaisderivaattaa. Eräpäivälle S saadaan samat yhtälöt. Muodostetaan nyt omarahoitteinen portfolio, ja käytetään vastaavalle suhteelliselle portfoliolle merkintää (u_S, u_T). Nyt apulauseen 3.7 nojalla saadaan arvoprosessi

$$dV = V\left\{u_T \frac{dF^T}{F^T} + u_S \frac{dF^S}{F^S}\right\}. \tag{4.14}$$

Sijoittamalla differentiaalit (4.11) yllä olevaan yhtälöön ja järjestämällä termit saadaan

$$dV = V \cdot \{u_T\alpha_T + u_S\alpha_S\}dt + V \cdot \{u_T\sigma_T + u_S\sigma_S\}dW. \tag{4.15}$$

Nyt molempien aaltosulkeiden sisällä olevat termit ovat lineaarisia u_T ja u_S suhteen. Määritellään nyt portfolio seuraavilla yhtälöillä:

$$u_T + u_S = 1, \tag{4.16}$$

$$u_T\sigma_T + u_S\sigma_S = 0. \tag{4.17}$$

Tällöin dW-termi katoaa yhtälöstä, ja arvoprosessiksi saadaan

$$dV = V \cdot \{u_T\alpha_T + u_S\alpha_S\}dt. \tag{4.18}$$

Yhtälöparin (4.16)-(4.17) ratkaisu on

$$u_T = -\frac{\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S}, \tag{4.19}$$

$$u_S = \frac{\sigma_T}{\sigma_T - \sigma_S}. \tag{4.20}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (4.18) saadaan

$$dV = V \cdot \left\{\frac{\alpha_S\sigma_T - \alpha_T\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S}\right\} dt. \tag{4.21}$$

Koska oletettiin markkinoiden arbitraasittomuus, lauseen 3.8 nojalla saadaan yhtälö

$$\frac{\alpha_S\sigma_T - \alpha_T\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S} = r(t), \tag{4.22}$$

joka kirjoitettuna eri muodossa on

$$\frac{\alpha_S(t) - r(t)}{\sigma_S(t)} = \frac{\alpha_T(t) - r(t)}{\sigma_T(t)}. \tag{4.23}$$

Yhtälöstä (4.23) nähdään, että eräpäivän S valinta ei vaikuta oikeaan puoleen, eikä vastaavasti eräpäivän T valinta vaikuta yhtälön vasempaan puoleen. Saatu tulos ei siis riipu lainkaan eräpäivien valinnasta, joten on todistettu seuraava lause.

Lause 4.5. *Oletetaan, että korkomarkkinat ovat arbitraasittomat. Nyt on olemassa sellainen prosessi* λ, *että yhtälö*

$$\frac{\alpha_T(t) - r(t)}{\sigma_T(t)} = \lambda(t) \tag{4.24}$$

pätee jokaisena ajanhetkenä t *ja kaikilla eräpäivillä* T.

Prosessi λ on siis riippumaton eräpäivän T valinnasta. Tarkastellaan yhtälön (4.24) vasenta puolta. Osoittajassa $\alpha_T(t)$ on hetkellinen tuottoprosentti T-lainalle, kun taas $r(t)$ on riskittömän sijoituskohteen tuottoprosentti. Näiden erotusta kutsutaan T-lainan *riskipreemioksi*. Nimittäjässä on T-lainan hetkellinen volatiliteetti. Nyt jakolasku voidaan tulkita T-lainan riskipreemion suhteeksi sen volatiliteettiin nähden. Tällaista prosessia λ kutsutaan *riskin markkinahinnaksi*. Lauseen 4.5 perusteella arbitraasittomilla markkinoilla kaikilla velkakirjoilla on eräpäivästään riippumatta sama riskin markkinahinta.

Vastaavalla tekniikalla, millä johdettiin yhtälö (4.24), voidaan todistaa seuraava lause. Huomaa kuitenkin, että tämä on yleisempi tulos markkinamalleille eikä ainoastaan tässä luvussa käsitellylle mallille. Lausetta hyödynnetäänkin vasta seuraavassa luvussa.

Seuraus 4.6. *Olkoot markkinat arbitraasittomat. Tällöin on olemassa riskin markkinahintaprosessi* $\lambda(t)$, *joka on yhteinen jokaiselle sijoituskohteelle. Tarkemmin sanottuna olkoon* $\Pi(t)$ *mikä tahansa markkinoiden hintaprosessi, jonka stokastinen differentiaali on muotoa*

$$d\Pi(t) = \Pi(t)\alpha_\Pi(t)dt + \Pi(t)\sigma_\Pi(t)dW(t) \tag{4.25}$$

todennäköisyysmitan P *vallitessa. Silloin seuraava yhtälö on voimassa kaikilla arvoilla* t*:*

$$\alpha_\Pi(t) - r = \sigma_\Pi(t)\lambda(t). \tag{4.26}$$

[2, s. 224]

Palataan takaisin tutkimaan yhtälöä (4.24). Sijoittamalla α_T ja σ_T yhtälöistä (4.12)-(4.13) saadaan yhtälö (4.24) vielä tarkempaan muotoon. Siirtämällä kaikki termit vasemmalle ja käyttämällä hyväksi yhtäsuuruutta $F^T(T, r) = 1$ saadaan seuraava lause.

Lause 4.7 (Aikarakenneyhtälö)**.** *Olkoon markkinamalli arbitraasiton. Tällöin* F^T *toteuttaa yhtälöt*

$$\begin{cases} F_t^T + (\mu - \lambda\sigma)F_r^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T - rF^T &= 0, \\ F^T(T, r) &= 1, \quad \textit{kaikilla } r. \end{cases} \tag{4.27}$$

Ongelmana on, että riskin markkinahintaa λ ei voida määritellä mallin sisällä, vaan sen arvo täytyy antaa termien μ ja σ tapaan mallin ulkopuolelta (markkinoilta). Tästä huolimatta voidaan johtaa seuraava lause.

Lause 4.8 (Riskineutraali hinnoittelu)**.** *Velkakirjojen hinnat määräytyvät kaavasta $p(t,T) = F(t, r(t); T)$, missä*

$$F(t,r;T) = E^Q_{t,r}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]. \tag{4.28}$$

Tässä martingaalimitta Q ja alaindeksit t ja r tarkoittavat, että lyhyt korko toteuttaa yhtälöt

$$dr(s) = (\mu - \lambda\sigma)ds + \sigma d\bar{W}(s), \tag{4.29}$$

$$r(t) = r. \tag{4.30}$$

Todistus. Oletetaan, että lyhyen koron differentiaali martingaalimitan Q vallitessa on muotoa

$$dr(s) = (\mu - \lambda\sigma)ds + \sigma d\bar{W}(s).$$

Tutkitaan nyt prosessin $F^T(s, r(s))$ differentiaalimuotoa Itôn kaavan avulla. Seuraavassa yhtälössä on lyhennetty prosessin F^T muuttujat s ja $r(s)$ pois, ja alaindeksi tarkoittaa muuttujaa, jonka suhteen funktio on derivoitu. Lisäksi hyödynnetään lauseen 4.7 tulosta. Saadaan

$$\begin{aligned} dF^T &= \left(F^T_s + (\mu - \lambda\sigma)F^T_r + \frac{1}{2}\sigma^2 F^T_{rr}\right)ds + \sigma F^T_r d\bar{W}(s) \\ &= r(s)F^T ds + \sigma F^T_r d\bar{W}(s). \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota

$$g(s,x) = e^{-\int_t^s r(u)du}x.$$

Lasketaan funktion g osittaisderivaatat Itôn kaavan käyttöä varten. Saadaan seuraavat tulokset:

$$\begin{aligned} g_s(s,x) &= e^{-\int_t^s r(u)du}(-r(s))x, \\ g_x(s,x) &= e^{-\int_t^s r(u)du}, \\ g_{xx}(s,x) &= 0. \end{aligned}$$

Soveltamalla nyt Itôn kaavaa funktioon $g(s, F^T(s,r))$ saadaan

$$\begin{aligned} dg\left(s, F^T(s,r)\right) = &\left(-e^{-\int_t^s r(u)du}r(s)F^T + r(s)F^T e^{-\int_t^s r(u)du} + 0\right)ds \\ &+ \sigma F^T_r e^{-\int_t^s r(u)du}d\bar{W}(s). \end{aligned}$$

Nähdään, että ds-termi katoaa kokonaan, joten martingaalin määritelmän mukaan funktio $g(s, F^T(s,r))$ on martingaali. Hyödyntämällä funktion g martingaaliutta ja sitä, että $r(t) = r$, saadaan funktion F^T arvoksi

$$\begin{aligned} F^T(t, r(t)) = F^T(t,r) = g(t, F^T(t,r)) &= E^Q_{t,r} g(T, F^T(T,r)|\mathcal{F}_t) \\ &= E^Q_{t,r}\left[e^{-\int_t^T r(u)du}\right]. \end{aligned}$$

□

Diskontataan siis eräpäivän arvo (= 1) hetkeen t. Odotusarvo ei kuitenkaan ole laskettu objektiivisen todennäköisyysmitan P vallitessa, vaan käyttäen martingaalimittaa Q. Huomataan, että martingaalimitta riippuu riskin markkinahinnan λ valinnasta, joten mallissa on useita eri martingaalimittoja. Myös lause 3.14 vahvistaa tämän, sillä tässä käsitelty velkakirjamarkkinamalli ei ole täydellinen, joten todennäköisyysmitta Q ei ole yksikäsitteinen.

Velkakirjojen hintoihin ei vaikuta ainoastaan lyhyen koron stokastinen differentiaali todennäköisyysmitan P vallitessa, vaan myös markkinavoimat. Markkinavoimilla tarkoitetaan kysynnän ja tarjonnan lakiin perustuvaa hintaa velkakirjoille. Toisaalta, jos voidaan määrittää yhden T-lainan stokastinen differentiaali, voidaan yhtälön (4.24) perusteella määrittää λ ja täten kaikki muutkin velkakirjojen hintaprosessit. Voidaan siis määrittää lyhyen koron stokastinen differentiaali todennäköisyysmitan Q vallitessa, jonka avulla saadaan kaikkien velkakirjojen hintaprosessit. Tällöin muiden velkakirjojen hintaprosessit määräytyvät lyhyen koron ja T-lainan perusteella.

Yllä olevat tulokset on saatu erikoistapaukselle eli nollakuponkilainoille, jonka arvo eräpäivänään on 1 euro. Poiketaan tämän luvun lopuksi aiemmasta linjauksesta, ja kootaan samat tulokset vielä yleiselle muotoa $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$ olevalle T-vaateelle, missä Φ on reaaliarvoja saava funktio.

Lause 4.9 (Yleinen aikarakenneyhtälö)**.** *Olkoon $\mathcal{X}$ ehdollinen T-vaade, joka on muotoa $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$. Arbitraasittomilla markkinoilla hintaprosessi $\Pi(t;\Phi)$ on*

$$\Pi(t;\Phi) = F(t, r(t)), \tag{4.31}$$

missä F on ratkaisu reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} F_t + (\mu - \lambda\sigma)F_r + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr} - rF &= 0, \\ F(T,r) &= \Phi(r). \end{cases} \tag{4.32}$$

Lisäksi funktiolla F on stokastinen esitys

$$F(t,r;T) = E^Q_{t,r}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\} \times \Phi(r(T))\right], \tag{4.33}$$

missä martingaalimitta Q ja alaindeksit t ja r tarkoittavat, että lyhyt korko toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} dr(s) &= (\mu - \lambda\sigma)ds + \sigma d\bar{W}(s), \\ r(t) &= r. \end{cases} \tag{4.34}$$

Todistus. Todistus kuten lauseen 4.8 tapauksessa. □

Lause 4.10. *Olkoon lyhyen koron prosessi todennäköisyysmitan P vallitessa*

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

ja lisäksi T-vaade muotoa $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$. Nyt T-vaateen hintaprosessi martingaalimitan Q vallitessa on muotoa

$$d\Pi(t) = r(t)\Pi(t)dt + \sigma_\Pi \Pi(t)d\bar{W}(t),$$

missä

$$\sigma_\Pi = \frac{\sigma \Pi_r(t)}{\Pi(t)}.$$

Todistus. Tiedetään, että lyhyen koron prosessi mitan Q vallitessa on muotoa

$$dr(t) = (\mu(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t)))\, dt + \sigma(t, r(t))d\bar{W}(t).$$

Nyt soveltamalla Itôn kaavaa hintaprosessiin $\Pi(t; \Phi) = F(t, r(t))$ saadaan

$$\begin{aligned} dF(t, r(t)) &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial r}dr(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(dr(t))^2 \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial r}\left[(\mu - \lambda\sigma)dt + \sigma d\bar{W}(t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\sigma^2 dt \\ &= rFdt + \frac{\partial F}{\partial r}\sigma d\bar{W}(t). \end{aligned}$$

□

Seuraava looginen vaihe lyhyen koron malleissa olisi tutkia tarkemmin lyhyttä korkoa $r(t)$ todennäköisyysmitan Q vallitessa, ja miten valittaisiin λ konkreettisissa tapauksissa. Tätä varten on kehitetty useita malleja, joihin voi tutustua Björkin kirjan kappaleessa 24.[2, s. 374-387]

4.4 Heath-Jarrow-Morton -kehikko

Luvussa 4.3 tarkasteltiin velkakirjamarkkimallia, missä ainut annettu mallin ulkopuolinen tieto oli lyhyen koron r stokastinen differentiaali. Tässä luvussa oletetaan, että termiinikorot on määritelty jokaiselle eräpäivälle $T \in \mathbb{R}_+$. Tässä luvussa seurataan edelleen melko tiiviisti Björkin kirjaa [2, s. 388-393], mutta tekstiä on täydennetty myös esimerkiksi Paul Glassermanin kirjasta Monte Carlo Methods in Financial Engineering [3, s. 149-154].

Aloitetaan mallin tarkempi määrittely seuraavalla oletuksella. Toimitaan aluksi objektiivisen todennäköisyysmitan P vallitessa. Olkoon $T > 0$ ja olkoon termiinikorolla $f(\cdot, T)$ stokastinen differentiaali, joka on muotoa

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t), \tag{4.35}$$

$$f(0,T) = f^*(0,T), \tag{4.36}$$

missä W on Wienerin prosessi todennäköisyysmitan P vallitessa, ja $\alpha(\cdot, T)$ sekä $\sigma(\cdot, T)$ ovat $\mathcal{F}_t$-mukautuvia prosesseja. Wienerin prosessi voi olla d-ulotteinen, jolloin $dW(t)$ on pystyvektori ja σ vaakavektori. Koska eräpäivän T arvo kiinnitetään, on (4.35) stokastinen differentiaali muuttujan t suhteen. Eräpäivän T rooli yhtälössä on käytännössä vain ilmoittaa, mitä eräpäivää tarkastellaan. Huomataan myös, että alkuehtona käytetään (markkinoilta) havaittua termiinikorkoa.

Myös tässä luvussa käsitellään ainoastaan nollakuponkilainoja velkakirjoista puhuttaessa, eli lainojen arvo eräpäivänään on 1 euro. Oletetaan nyt, että tiedetään α, σ ja $\{f^*(0,T); T \geq 0\}$. On siis määritelty termiinikoron differentiaali, ja siten yhtälön

$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\} \tag{4.37}$$

nojalla on määritelty myös velkakirjojen koko hintarakenne $\{p(t,T); T > 0, 0 \leq t \leq T\}$. Mallissa on siis d kappaletta satunnaisia termejä, ja ääretön määrä velkakirjoja (yksi velkakirja jokaista eräpäivää T kohden). Nyt koska (4.35) on määritelty mitan P vallitessa, saattaa markkinoilla olla arbitraasimahdollisuus. Seuraava lause liittää termit α ja σ toisiinsa siten, että arbitraasimahdollisuuksia ei ole.

Lause 4.11 (HJM-ajaumaehto)**.** *Oletetaan, että termiinikorot käyttäytyvät yhtälöiden* (4.35)-(4.36) *mukaisesti ja velkakirjamarkkinat ovat arbitraasittomat. Tällöin on olemassa d-ulotteinen pystyvektoriprosessi*

$$\lambda(t) = [\lambda_1(t), \ldots, \lambda_d(t)]',$$

jolla pätee

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)'ds - \sigma(t,T)\lambda(t), \tag{4.38}$$

kaikilla arvoilla $T \geq 0$ ja $t \leq T$. Merkintä $'$ tarkoittaa transpoosia.

Todistus. Lauseen 4.4 mukaan hintaprosessi toteuttaa yhtälön

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}dt + p(t,T)S(t,T)dW(t),$$

missä

$$\begin{cases} A(t,T) & = -\int_t^T \alpha(t,s)ds, \\ S(t,T) & = -\int_t^T \sigma(t,s)ds. \end{cases} \tag{4.39}$$

T-lainan riskipreemio on siis $A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2$, joten seurauslauseen 4.6 mukaan on olemassa d-ulotteinen pystymatriisi λ, joka toteuttaa yhtälön

$$A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2 = \sum_{i=1}^{d} S_i(t,T)\lambda_i(t).$$

Derivoimalla tämä eräpäivän T suhteen, saadaan haluttu tulos. $\square$

Täten termiinikorkojen ajaumatermiä ei tarvitse tietää, vaan se saadaan hajontatermin avulla. Vastaava havainto tehtiin aiemmin Black-Scholes-yhtälölle.

4.4.1 HJM-kehikko martingaalimitan vallitessa

Tarkastellaan nyt yhtälöitä

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)d\bar{W}(t), \tag{4.40}$$

$$f(0,T) = f^*(0,T), \tag{4.41}$$

missä $\bar{W}$ on d-ulotteinen Q-Wienerin prosessi. Koska lauseen 3.13 mukaan martingaalimitta tuottaa suoraan arbitraasittomat hinnat, voidaan ongelma arbitraasimahdollisuudesta unohtaa. Nyt velkakirjojen hinnalle tiedetään kuitenkin yhtälöt

$$p(0,T) = \exp\left\{-\int_0^T f(0,s)ds\right\} \quad \text{ja}$$

$$p(0,T) = E^Q\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds\right\}\right],$$

missä lyhyen koron ja termiinikoron yhteys on $r(t) = f(t,t)$. Jotta nämä kaksi yhtälöä olisivat yhtä aikaa voimassa, on määriteltävä yhteys termien α ja σ välille.

Lause 4.12 (HJM-ajaumaehto)**.** *Martingaalimitan Q vallitessa prosessit α ja σ toteuttavat yhtälön*

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)'ds \tag{4.42}$$

kaikilla arvoilla t ja jokaisella $T \geq t$.

Todistus. Lauseen 4.4 perusteella tiedetään, että hintaprosessi käyttäytyy yhtälön

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}dt + p(t,T)S(t,T)d\bar{W}(t)$$

mukaan. Tiedetään myös, että martingaalimitan vallitessa hetkellisen tuottoprosentin täytyy olla sama kuin lyhyt korko r. Täten saadaan yhtälö

$$r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2 = r(t),$$

mistä väite seuraa. □

Lauseen 4.12 idea on siinä, että kun määritellään termiinikoron volatiliteetti (mitan Q vallitessa), niin saadaan ajaumatermi automaattisesti. HJM-mallia voidaan siis hyödyntää seuraavia vaiheita noudattamalla.

1. Valitaan volatiliteetit $\sigma(t,T)$.
2. Saadaan ajaumatermit yhtälöstä
$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)'ds.$$
3. Katsotaan markkinoilta tämän päivän termiinikoron rakenne
$$\{f^*(0,T); T \geq 0\}.$$
4. Saadaan termiinikorot integroimalla
$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)d\bar{W}(s).$$
5. Lasketaan velkakirjojen hinnat kaavalla
$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\}.$$
6. Käytetään saatuja tuloksia laskettaessa johdannaisten hintoja.

Annetaan nyt kaksi yksinkertaista esimerkkiä HJM-kehikon käytöstä.

Esimerkki 4.1. Olkoot prosessi σ deterministinen vakio ja Wienerin prosessi yksiulotteinen eli $d = 1$. Käytetään luettavuuden kannalta merkintää $\sigma(t,T) \equiv \sigma$, missä $\sigma > 0$. Lauseen 4.12 mukaan ajaumatermi on

$$\alpha(t,T) = \sigma \int_t^T \sigma ds = \sigma^2(T-t).$$

Nyt

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \sigma^2(T-s)ds + \int_0^t \sigma d\bar{W}(s),$$

joten saadaan

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \sigma^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma\bar{W}(t).$$

Tästä yhtälöstä saadaan myös lyhyt korko:

$$r(t) = f(t,t) = f^*(0,t) + \sigma^2\frac{t^2}{2} + \sigma\bar{W}(t).$$

Täten lyhyen koron stokastinen differentiaali tässä tapauksessa on

$$dr(t) = [f_T(0,t) + \sigma^2 t]dt + \sigma d\bar{W}(t).$$

Esimerkki 4.2. Olkoon diffuusiotermi muotoa $\sigma(t,T) = \sigma \cdot \exp(-a(T-t))$, missä σ ja a ovat vakioita. Täten ajaumatermi on

$$\alpha(t,T) = \sigma^2 e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{-a(T-u)}du = \frac{\sigma^2}{a}\left(e^{-2a(T-t)} - e^{-a(T-t)}\right).$$

Nähdään, että mitä lyhyempi aikaväli $[t,T]$ on, sitä suurempi on ajaumatermin arvo.

4.4.2 Musielan parametrisointi

Musielan parametrisoinnissa tarkastellaan termiinikorkoja eri näkökulmasta kuin aiemmin tässä tutkielmassa. Parametrisoinnissa käytetään toisena muuttujana eräpäivän sijasta aikaa eräpäivään. Jos siis t on aiempaan tapaan sopimuksen tekohetki, T eräpäivä, niin olkoon nyt $x = T - t$.

Määritelmä 4.4. Kaikilla $t > 0$ termiinikorot $r(t,x)$ määritellään relaatiolla

$$r(t,x) = f(t,t+x). \tag{4.43}$$

Olkoon nyt perinteiseen tapaan määritellyt termiinikorot mitan Q vallitessa muotoa

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)d\bar{W}(t). \tag{4.44}$$

Halutaan selvittää $dr(t,x)$ todennäköisyysmitan Q vallitessa, ja saadaan seuraava lause.

Lause 4.13 (Musielan yhtälö)**.** *Olkoon termiinikoron stokastinen differentiaali määritelty yhtälön* (4.44) *mukaisesti. Tällöin*

$$dr(t,x) = [\mathbf{F}r(t,x) + D(t,x)]dt + \sigma_0(t,x)d\bar{W}(t), \tag{4.45}$$

missä

$$\begin{aligned}
\sigma_0(t,x) &= \sigma(t,t+x), \\
D(t,x) &= \sigma_0(t,x)\int_0^x \sigma_0(t,s)'ds, \\
\mathbf{F} &= \frac{\delta}{\delta x}.
\end{aligned}$$

Todistus. Käyttämällä muunnosta Itôn yhtälöstä saadaan

$$dr(t,x) = df(t,t+x) + \frac{\delta f}{\delta T}(t,t+x)dt,$$

missä differentiaali $df(t,t+x)$ koskee vain ensimmäistä muuttujaa t. Täten termiinikorkojen määritelmistä saadaan

$$dr(t,x) = \alpha(t,t+x)dt + \sigma(t,t+x)d\bar{W}(t) + \frac{\delta}{\delta x}r(t,x)dt.$$

Soveltamalla tähän yhtälöön HJM-ajaumaehtoa saadaan haluttu tulos. □

Viitteet

[1] Luis Alvarez, Lasse Koskinen. *Rahoituksen teoriaa ja sovelluksia aktuaareille*. Moniste. Vakuutusvalvontavirasto, 2007.

[2] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 2009.

[3] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2004.

[4] Pentti Haukkanen. *Differentiaali- ja differenssiyhtälöt*. Luentomoniste, 2000.

[5] David Heath, Robert Jarrow, Andrew Morton. *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. Econometrica, Vol. 60, s. 77-105*. The Econometric Society, 1992.

[6] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. 5th ed. New York: Springer, 2002.