TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Antti Hautaniemi

Dirichlet'n ratkaisuista

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Elokuu 2010

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HAUTANIEMI, ANTTI: Dirichlet'n ratkaisuista

Pro gradu -tutkielma, 40 s., 4 liites.

Matematiikka

Elokuu 2010

Tiivistelmä

Euklidisen avaruuden alueella määriteltyä jatkuvaa, harmonista reaalifunktiota voidaan luonnehtia keskiarvo-ominaisuudella alueen pisteissä: funktio saa kussakin pisteessä arvokseen keskiarvon pisteen ympäri piirretyllä millä tahansa pallonpinnalla saamistaan arvoista. Matemaattisessa potentiaaliteoriassa keskeinen ensimmäinen reuna-arvotehtävä eli Dirichlet'n probleema kysyy harmonista funktiota, jonka raja-arvot alueen reunalla tunnetaan.

Käsillä olevassa tutkielmassa käydään aluksi lyhyesti läpi kompleksitason harmonisten funktioiden ominaisuuksia sekä näiden ja kompleksitason holomorfisten funktioiden yhtäläisyyksiä. Reuna-arvotehtävän tutkimuksessa 1800–1900-luvuilla kehitettyä teoreettista käsitteistöä ja saavutettuja tuloksia esitetään sen jälkeen yksityiskohtaisemmin – tehtävä ratkaistaan kompleksitasossa jatkuvilla ja oleellisesti jatkuvilla, resolutiivisilla reuna-arvoilla. Tämä esitys päättyy klassiseen Perron–Wiener–Brelot'n menetelmään, ratkaisufunktion määrittämiseen sen ala- tai yläarviofunktioiden ns. Perron-kehitelmänä. Tutkielman loppuosassa osoitetaan harmonisten ja kvasirajoitettujen funktioiden luokan yhtyvän reuna-arvotehtävän ratkaisujen luokkaan silloin, kun alue täyttää tietyt jatkuvuuden kriteerit.

Sisältö

Johdanto

Harmoniseksi kutsutaan euklidisen avaruuden tietyllä alueella määriteltyä kahdesti jatkuvasti derivoituvaa reaalifunktiota, joka toteuttaa erityisen *Laplacen yhtälön.* Tällaiset funktiot voidaan luonnehtia *keskiarvo-ominaisuuden* avulla: funktio saa missä hyvänsä alueen pisteessä arvokseen keskiarvon tämän pisteen ympäri piirretyllä millä tahansa avaruuden pallonpinnalla saavuttamistaan arvoista. *Dirichlet'n probleemalla* puolestaan tarkoitetaan harmonisen funktion määrittämisen ongelmaa alueella, kun funktion raja-arvot alueen reunapisteissä on annettu. Käsillä olevassa tutkielmassa rajoitutaan kaksiulotteiseen tapaukseen – reuna-arvotehtävään kompleksitason $\mathbb{C}$ alueilla. Laplacen yhtälö funktiolle u kirjoitetaan silloin $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Laplacen yhtälön toteuttavia funktioita tutkittiin ensimmäisenä 1700–1800-luvuilla fysiikan alalla painovoiman, lämmön johtumisen ja nesteen virtauksen luonteen selvittämiseksi. Ranskalaisen Laplacen maanmies Poisson puolestaan teki uraauurtavaa tutkimusta potentiaalien parissa selvittäen niiden avulla mm. sähköisen varauksen jakautumista pinnalla. 1800-luvun puoliväliin mennessä tämä *potentiaaliteoriaksi* nimetty tutkimusala siirtyi fysiikan piiristä osaksi matematiikkaa; tutkimusmenetelmät ja argumentaatio eivät kuitenkaan kaikilta osin vielä saavuttaneet matemaattista kypsyyttä. Englantilainen Thomson ja saksalainen Riemann esittivät toisistaan riippumatta samankaltaisen ratkaisun potentiaaliteoriassa keskeiseksi muodostuneeseen reuna-arvotehtävään. Riemann nimesi ongelman opettajansa Dirichlet'n mukaan Dirichlet'n probleemaksi ja käyttämänsä ratkaisumenetelmän *Dirichlet'n periaatteeksi.*[1]

Dirichlet'n periaatteen tuottaman ratkaisufunktion olemassaoloa ei varsinaisesti problematisoitu ennen saksalaisen Weierstrassin (v. 1870) huomautusta. Olemassaolosta tuli tällöin keskeinen kysymys potentiaaliteoriassa – Dirichlet'n periaate menetti samalla merkitystään probleeman tutkimusvälineenä. Ratkaisuja ja niihin liittyviä olemassaolotodistuksia esittivätkin vuosisadan lopulla eri tavoin rajoitetuissa tapauksissa omia menetelmiään käyttäen mm. saksalainen Schwarz ja ranskalainen Poincaré.[2] Mitta- ja integrointiteorian kehityksen myötä myös potentiaaliteorian kehitys kiihtyi jälleen 1900-luvun alkupuolella. Saksalainen Perron [9], yhdysvaltalainen Wiener [14] ja ranskalainen Brelot [1] kehittivät (v. 1923–1939) kukin osaltaan nimiään kantavaa uudenlaista reuna-arvotehtävän ratkaisumenetelmää, jonka avulla aluetta koskevista klassisten menetelmien asettamista rajoituksista voitiin kokonaan luopua.

Käsillä olevan tutkielman ensimmäisessä luvussa perehdytään Laplacen yhtälön määräämien funktioiden myöhempien tarkastelujen kannalta oleellisiin perusominaisuuksiin. Poissonin integraalin avulla määrätään suhteel-

[1] [4, pp. 522–231, 681–686]
[2] [4, pp. 686, 699–707]

lisen yksinkertaisesti reuna-arvotehtävän ratkaisu erikoistapauksessa, jossa alueena on yksikkökiekko. Lisäksi johdetaan jatkon kannalta olennaisia tuloksia harmonisille, epänegatiivisarvoisille funktioille. Seuraavassa luvussa määritellään osittaisen keskiarvo-ominaisuuden avulla harmonisia laajemmat sub- ja superharmonisten funktioiden luokat sekä tutkitaan näiden perusominaisuuksia kompleksitason alueissa. Vielä määritellään potentiaalin ja polaarisuuden käsitteet sekä ratkaistaan *Perron-kehitelmän* avulla reuna-arvotehtävä mielivaltaisella kompleksitason alueella, ensin jatkuvien ja sitten sellaisten funktioiden luokassa, joiden epäjatkuvuuspisteiden joukko on polaarinen. Viimeisessä luvussa määritellään japanilaista Nakaita [7] seuraten sellaisten kompleksitason alueiden kokoelma, joilla harmonisten funktioiden luokka yhtyy vastaavaan resolutiivisten funktioiden luokkaan (Perron–Wiener–Brelot'n mielessä). Tutkielman liitteeseen on koottu olennaisimpia funktioteoreettisia, topologisia ja mittateoreettisia käsitteitä ja esitietoja.

Relaatiolla $\subset$ tarkoitetaan jäljempänä aitoa osajoukkoa, relaatiolla $\subseteq$ myös epäaitoa. Epänegatiivisilla luvuilla tarkoitetaan joukon $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ alkioita, luonnollisilla luvuilla joukon $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq 1\}$ alkioita ja epänegatiivisilla tyypin $\mathcal{F}$ funktioilla luokan $\mathcal{F}^+(G) = \{f \in \mathcal{F}(G) \,|\, f \geq 0\}$ alkioita, kun $\mathcal{F}(G)$ on luokka reaaliarvoisia funktioita määrittelyjoukkonaan G. Lisäksi otetaan käyttöön laajennusmerkinnät $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \underline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ ja $\overline{\underline{\mathbb{R}}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sekä $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Kompleksitason piste $z = x + \mathrm{i}\, y$ samastetaan $\mathbb{R}^2$-tason vektoriin (x, y) – mm. kompleksimuuttujan funktion osittaisderivaatat reaali- ja imaginääriosan suhteen voidaan silloin tulkita mielekkäästi. Vielä tarkoitetaan $D(a, r)$:llä kompleksitason avointa, a-keskistä, r-säteistä kiekkoa ja $\overline{D}(a, r)$:llä vastaavaa suljettua kiekkoa. Erityisesti sanotaan kiekkoa $D(0, 1)$ *yksikkökiekoksi*. Funktiolle f käytetään merkintää $f \equiv c$ sen identtisyydestä vakiofunktion c kanssa, merkintää $f|_G$ sen rajoittumasta määrittelyjoukkoon G sekä lyhennysmerkintöjä $\sup_G f = \sup_{z \in G} f(z)$ ja $\inf_G f = \inf_{z \in G} f(z)$. Integraalin ja integroituvuuden sekä mitan ja mitallisuuden käsitteet tulkitaan tässä esityksessä Lebesguen mielessä, ellei muuta mainita.

1 Kompleksimuuttujan reaalifunktioita

1.1 Harmoniset funktiot

Tässä kappaleessa tarkastellaan harmonisten funktioiden olemusta kompleksimuuttujan reaaliarvoisina, tietyn osittaisdifferentiaaliyhtälön toteuttavina funktioina. Harmoniset funktiot osoittautuvat kiinnostavalla tavalla rinnakkaiseksi käsitteeksi kompleksimuuttujan kompleksiarvoisten, holomorfisten funktioiden kanssa. Siinä missä näiden käsitteellinen sisältö perustuu differentioituvuuteen, edellytetään harmonisilta funktioilta puolestaan toisen kertaluvun osittaisderivaattojen olemassaoloa.

Lisäksi esitetään kaksi harmonisten funktioiden yleisessä teoriassa – samoin kuin tässä esityksessä – keskeistä lausetta. Gaussin keskiarvolauseen mukaan harmonisen funktion arvo kussakin pisteessä on yhtä suuri kuin sen pisteen ympäri piirretyllä millä tahansa ympyrällä saavuttamien arvojen (niiden integraalin avulla määrätty) keskiarvo. Yleistetyn maksimiperiaatteen mukaan taas jonkin alueen reunalla, poislukien äärellisessä joukossa reunapisteitä, raja-arvoiltaan rajoitettu harmoninen funktio on rajoitettu tällä alueella.

Määritelmä 1 (Alue)**.** Avointa ja epätyhjää joukkoa $G \subseteq \mathbb{C}$ sanotaan *alueeksi* (saks. *Gebiet*), mikäli se on *yhtenäinen*, so. kaikilla $a, b \in G$ on olemassa nämä pisteet yhdistävä *murtoviiva* [8] $m \subseteq G$. Edelleen sanotaan avoimen joukon $G \subsetneq \mathbb{C}$ pisteiden kasautumispisteiden muodostamaa (suljettua) joukkoa $\overline{G} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ sen *sulkeumaksi* ja joukkoa $\partial G = \overline{G} \setminus G$ sen *reunaksi*. Alue on jokaisen pisteensä *ympäristö*. (Vrt. [8, s. 19].)

Määritelmä 2 (Harmoninen funktio)**.** Kun G on alue, funktiota $u : G \to \mathbb{R}$ sanotaan *harmoniseksi*, mikäli (kun merkitään $z = x + \mathrm{i}\, y$) osittaisderivaatat u_{xx}, u_{xy}, u_{yx} ja u_{yy} ovat olemassa ja jatkuvia sekä $u_{xx} + u_{yy} = 0$ kaikkialla G:ssä (*Laplacen yhtälö*). Sanotaan myös u:n olevan harmoninen pisteessä z_0, jos se on harmoninen jollakin z_0:n sisältävällä alueella G [5, s. 86], [8, s. 203]. Määrittelyjoukossa G harmonisten funktioiden luokkaa merkitään $\mathcal{H}(G)$:llä.

Lause 1. *Jos G on alue ja funktio $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfinen, so. differentioituva, on sen reaaliosa $\Re f$ harmoninen funktio. Kääntäen vastaa jokaista harmonista funktiota $u : G \to \mathbb{R}$ holomorfinen funktio $f : G \to \mathbb{C}$ reaaliosanaan $\Re f = u$.*

Todistus (vrt. [5, ss. 87–88])*.* Olkoon funktio $f = u + \mathrm{i}\, v : G \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Silloin f:llä on kaikkien kertalukujen derivaatat ja näin ollen ovat myös u:n ja v:n toisen kertaluvun osittaisderivaatat olemassa; lisäksi on Cauchy–Riemannin yhtälöiden mukaan $u_x = v_y, u_y = -v_x$. Siis $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, mistä Laplacen yhtälö seuraa.

Olkoon sitten funktio $u : G \to \mathbb{R}$ harmoninen ja piste $z_0 \in G$. Tällöin integraali $\int_{z_0}^{z} (u_x(\zeta) - \mathrm{i}\, u_y(\zeta))\, \mathrm{d}\, \zeta$ on olemassa ja hyvin määritelty aina, kun $z = x + \mathrm{i}\, y \in G$ ja integrointi suoritetaan mielivaltaista *paloittain säännöllistä* [5, s. 49] tietä $\gamma \subset G$. Merkitään $f(z)$:llä tätä integraalia lisättynä sellaisella vakiotermillä, että $f(z_0) = u(z_0)$. Koska u on harmoninen, on $u_{xx} = -u_{yy}$ ja $u_{xy} = u_{yx}$ ja funktio $u_x - \mathrm{i}\, u_y$ on näin ollen holomorfinen; siis myös f on. Toisaalta $\Re f = u$, sillä $(\Re f)(z_0) = u(z_0)$ ja

$$(\Re f)_x - \mathrm{i}(\Re f)_y = (\Re f)_x + \mathrm{i}(\Im f)_x = f_z = u_x - \mathrm{i}\, u_y \quad \text{ja siis} \quad (\Re f)_z = u_z. \square$$

Huomautus 1. Edellä esitetyn lauseen nojalla voidaan monista holomorfisten funktioiden ominaisuuksista johtaa vastaava ominaisuus harmonisille funktioille (ks. lause 2). Käsillä olevassa esityksessä holomorfisten funktioiden perusominaisuudet ja siten myös niitä vastaavat harmonisten funktioiden ominaisuudet oletetaan tunnetuiksi – niiden todistuksista kiinnostunutta lukijaa kehotetaan tutustumaan funktioteoreettiseen kirjallisuuteen, mm. Lehto [5], Nevanlinna–Paatero [8], Priestley [10].

Lause 2 (Gaussin keskiarvolause harmoniselle funktiolle)**.** *Kun G on alue ja funktio $u : G \to \mathbb{R}$ harmoninen, on*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi \quad \textit{aina, kun } \overline{D}(a,r) \subseteq G.$$

Todistus ([5, L. 1, s. 89], [8, n:o 11.10, s. 211])*.* Harmonista funktiota u vastaa sellainen alueella G holomorfinen funktio f, että $u = \Re f$. Edelleen on voimassa (holomorfisten funktioiden ominaisuuksien nojalla) $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi$, joten $u(a) = \Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi$ ja väite seuraa. □

Huomautus 2. Jatkuvan funktion u harmonisuus on itse asiassa yhtäpitävää em. keskiarvo-ominaisuuden kanssa; käänteisen tuloksen todistus (ks. [5, L. 1, s. 96]) seuraa helposti Poissonin integraalin $P_{D(a,r)}(u)$ harmonisuudesta kiekossa $D(a,r)$ (ks. huomautus 5).

Apulause 3. *Olkoon u ylhäältä rajoitettu harmoninen funktio alueella G ja olkoon $\sup_G u = M = u(a)$ jollakin $a \in G$. Tällöin u on vakio.*

Todistus (vrt. [5, L. 2, ss. 89–90], [8, n:o 9.12, s. 155])*.* Olkoon suljettu kiekko $\overline{D}(a,r) \subseteq G$. Silloin

$$0 = u(a) - M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi - M \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}\,\phi - M = 0$$

$$\text{joten } 0 = M - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (M - u(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}))\,\mathrm{d}\,\phi$$

Koska toisaalta on $M - u(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) \ge 0$ kaikilla muuttujan ϕ arvoilla, on $u(z) = M$ koko ympyrällä $\partial D(a,r)$ ja edelleen mielivaltaisessa kiekossa $D(a,r) \subseteq G$. Koska alue G on yhtenäinen, voidaan edelleen todeta, että $u(z) = M$ kaikissa G:n avoimissa joukoissa ja siis koko joukossa G. □

Lause 4 (Harmonisen funktion maksimiperiaate)**.** *Olkoon G alue, u harmoninen ja ylhäältä rajoitettu funktio joukossa G ja M sellainen reaaliluku, että $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \le M$ aina, kun $\zeta \in \partial G$. Silloin $u(z) \le M$ joukossa G.*

Todistus ([8, n:o 11.12, s. 213], vrt. [5, L. 3, s. 90])*.* Oletuksesta seuraa, että $\sup_G u$ on olemassa, samoin sellainen jono (z_n) kasautumispisteenään $z' \in \overline{G}$, että $\lim_{n\to\infty} u(z_n) = \sup_G u$. Edelleen jollakin jonon (z_n) osajonolla (z_{n_p}) on $\lim_{p\to\infty} z_{n_p} = z'$; lisäksi $\lim_{p\to\infty} u(z_{n_p}) = \sup_G u$. Jos nyt $z' \in G$, on $u(z') = \sup_G u$, so. u saavuttaa pienimmän ylärajansa alueen G sisällä. Täten u on apulauseen mukaan vakio, joten se on jatkuvuutensa sekä oletuksen nojalla kaikkialla $\le M$. Muuten $z' \in \partial G$ ja oletuksen mukaan siis $\sup_G u \le M$, joten $u(z) \le M$ kaikkialla. □

Lause 5 (Yleistetty harmonisen funktion maksimiperiaate)**.** *Olkoon G alue, u harmoninen ja ylhäältä rajoitettu funktio joukossa G ja M sellainen reaaliluku, että* $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq M$ *aina, kun* $\zeta \in \partial G \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\}$ $(\emptyset \neq \{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\} \subset \partial G)$. *Tällöin* $u(z) \leq M$ *joukossa* G.

Todistus ([5, L. 6, ss. 90–91], [8, n:o 11.13, ss. 214–215]).

- Mikäli joukolla G on ulkopiste, on olemassa konforminen kuvaus (ks. liite) $G \mapsto D(0,1)$; oletetaan yleisyyttä menettämättä, että $G = D(0,1)$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen ja funktio

$$v(z) = u(z) - \epsilon \sum_{n=1}^{l} \log \frac{2}{|z - \zeta_n|}.$$

Tällöin v on harmoninen ja $v(z) < u(z)$ kaikilla z, sillä $|z - \zeta_n| < 2$. Olkoot sitten piste $\zeta \in \partial G$ ja $\epsilon > 0$ mielivaltaiset. Jos $\zeta \notin \{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\}$, on $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq M$; muutoin on

$$\lim_{z\to\zeta_v} \epsilon \sum_{n=1}^{l} \log \frac{2}{|z - \zeta_n|} = \infty.$$

Siis kummassakin tapauksessa on $\limsup_{z\to\zeta} v(z) \leq M$ ja heikon maksimiperiaatteen mukaan $u(z) \leq M$ joukossa G. Täten

$$u(z) \leq M + \epsilon \sum_{n=1}^{l} \log \frac{2}{|z - \zeta_n|} \qquad \text{joukossa } G \text{ millä tahansa } \epsilon > 0,$$

mistä väite seuraa.

- Oletetaan sitten, että ulkopistettä ei (välttämättä) ole. Olkoot alueen G sisäpiste z_0 ja $\epsilon > 0$ mielivaltaiset. Koska u on harmonisena funktiona jatkuva, on olemassa suljettu kiekko $\overline{D}(z_0, \delta) \subseteq G$, jossa $u(z) \leq u(z_0) + \epsilon$. Piste z_0 on alueen $G \setminus \overline{D}(z_0, \delta)$ ulkopiste, $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\} \cap \partial(G \setminus \overline{D}(z_0, \delta))$ äärellinen joukko ja $u(z) \leq \max\{M, u(z_0) + \epsilon\}$ kaikkialla kiekon $\overline{D}(z_0, \delta)$ reunalla. Edellisen kohdan perusteella $u(z) \leq M$ alueella $G \setminus \overline{D}(z_0, \delta)$, joten koko joukossa G pätee $u(z) \leq \max\{M, u(z_0) + \epsilon\}$ jokaisella luvulla $\epsilon > 0$ ja edelleen $u(z) \leq \max\{M, u(z_0)\}$. Jos nyt olisi $u(z_0) > M$, saavuttaisi funktio u suurimman arvonsa $M' > M$ jossakin alueen G sisäpisteessä, jolloin apulauseen mukaan $u \equiv M'$ ja siten myös $\limsup_{z\to\zeta} u(z) = M' > M$ joukossa ∂G. Oletuksen mukaan on kuitenkin olemassa piste $\zeta \in \partial G$, jossa $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq M$. Siis $u(z_0) \leq M$ ja väite seuraa. $\square$

Huomautus 3.

- Vastaavasti voidaan todistaa *yleistetty minimiperiaate*: Harmoniselle, alhaalta rajoitetulle funktiolle $u : G \to \mathbb{R}$, jolle pätee $\liminf_{z\to\zeta} u(z) \geq m$ jokaisessa pisteessä $\zeta \in \partial G \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\} \neq \emptyset$, on koko alueella G voimassa $u \geq m$.

- Yleistetyn maksimi- ja minimiperiaatteen avulla voidaan oikeuttaa *yleistetty yksikäsitteisyysperiaate*: Jos $u(\zeta) = v(\zeta)$ joukossa $\partial G \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\}$ ($\emptyset \neq \{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\} \subset \partial G$), niin $u = v$.

1.2 Poissonin integraali

Seuraavassa ratkaistaan harmonisten funktioiden reuna-arvotehtävä eli *Dirichlet'n probleema* yksikkökiekossa (lause 9). Ongelmana on löytää harmoninen funktio, joka annetun alueen reunalla (tässä siis yksikköympyrällä) yhtyy tiettyyn reunafunktioon. Seuraavassa esitettävä *Poissonin integraali* osoitetaan tällaiseksi funktioksi; lisäksi osoitetaan ratkaisun yksikäsitteisyys.

Tämän kappaleen tarkastelut voitaisiin suorittaa verraten yksinkertaisin muutoksin mielivaltaisessa w-keskisessä ρ-säteisessä kiekossa (ks. [11, Chap. 1]). Koska konformisten kuvauksien (ks. liite) avulla on kuitenkin triviaalia yleistää saavutetut tulokset mihin tahansa tällaiseen kiekkoon, käsitellään tässä esityksessä seuraavat keskeiset tulokset yksinkertaisuuden vuoksi yksikkökiekon erikoistapauksessa.

Määritelmä 3 (Poissonin ydin)**.** Kun $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = z \in D(0,1)$ ja $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} = \zeta \in \partial D(0,1)$, merkitään

$$K(\zeta, z) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)} \left(= \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} = \Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z} \right)$$

ja sanotaan funktiota $K : \partial D(0,1) \times D(0,1) \to \mathbb{R}$ *Poissonin ytimeksi* (engl. *Poisson kernel*) (vrt. [5, s. 93], [8, n:o 11.16, s. 217], [11, Def. 1.2.3 (a), p. 8]).

Huomautus 4. Poissonin ydin on holomorfisen funktion $\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ reaaliosana harmoninen funktio muuttujan z suhteen määrittelyjoukossaan.

Lause 6. *Poissonin ytimelle K on voimassa (kun merkitään $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}$ ja $\zeta_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_0}$):*

(1) $K > 0$ koko määrittelyjoukossaan ja

(2) $\lim_{z\to\zeta_0} \sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} K(\zeta, z) = 0$, kun $\delta > 0$.

Todistus [11, p. 8]. Kohta

(1) seuraa määritelmästä, sillä $1 > |z|^2$.

(2) Olkoon $z \in D(0,1)$. Kun $|z-\zeta_0| < \delta$, on $\inf_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta}|\zeta - z| = \delta - |\zeta_0 - z|$; lisäksi $1-|z|^2 = (1+|z|)(1-|z|) \leq 2|z-\zeta_0|$. Mielivaltaisella $\epsilon > 0$ on siis

$$\begin{aligned}\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} K(\zeta,z) = \sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} &\leq \frac{1-|z|^2}{(\delta-|\zeta_0-z|)^2} \\ &\leq \frac{2|z-\zeta_0|}{(\delta-|\zeta_0-z|)^2} \leq \frac{2|z-\zeta_0|}{(\frac{\delta}{2})^2} < \epsilon,\end{aligned}$$

kun $|z-\zeta_0| < \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta^2\epsilon}{8}\}$. □

Määritelmä 4 (Poissonin integraali)**.** Kun funktio $f : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ on (Lebesgue-)integroituva, sanotaan sen *Poissonin integraaliksi* funktiota $P_{D(0,1)}(f) : D(0,1) \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}, z)\,\mathrm{d}\,\phi$$

$$\left(= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}\,\mathrm{d}\,\phi, \quad \text{kun } z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)$$

[11, Def. 1.2.3 (b), p. 8].

Huomautus 5.

- Kun funktio f oletetaan paloittain jatkuvaksi, voidaan määritelmä antaa ja siitä seuraavat tulokset johtaa myös Riemann-integraalin avulla, ks. Lehto [5].

- Poissonin integraali $P_{D(0,1)}(f)$ on harmoninen funktio, sillä

$$P_{D(0,1)}(f)(z) = \Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-z}\,\mathrm{d}\,\theta\right), \quad \text{kun } z \in D(0,1).$$

- Voidaan puhua mielekkäästi myös suljetussa kiekossa integroituvan funktion $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ Poissonin integraalista, kun merkitään $P_{D(0,1)}(f) = P_{D(0,1)}(f|_{\partial D(0,1)})$.

Lause 7 (Poissonin integraalikaava)**.** *Olkoon funktio u harmoninen suljetussa yksikkökiekossa $\overline{D}(0,1)$. Silloin vastaavassa avoimessa kiekossa on $u = P_{D(0,1)}(u)$, so. kun $z_0 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in D(0,1)$, on*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}\,\mathrm{d}\,\phi.$$

Todistus ([5, ss. 92–93], [8, n:o 11.15, s. 216]). Olkoon $\kappa : z \mapsto z'$ konforminen kuvaus yksikkökiekolta itselleen siten, että $z_0 \mapsto 0$ ja $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}$ (ks. huomautus 20); olkoon κ^{-1} sen käänteiskuvaus ja funktio $\overline{u} : z' \mapsto u(\kappa^{-1}(z'))$ $(= u(z))$. Tällöin Gaussin keskiarvolauseen (lause 2) mukaan $u(z_0) = \overline{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{u}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi})\,\mathrm{d}\,\psi$. Koska $\overline{u}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}) = u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})$, saadaan edelleen

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\frac{1-|z_0|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}-z_0|^2}\,\mathrm{d}\,\phi,$$

mistä väite seuraa. □

Huomautus 6. Edellisen lauseen nojalla on erityisesti voimassa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}, z)\,\mathrm{d}\,\phi \equiv 1.$$

Lause 8. *Jos integroituva funktio $f : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä ζ_0, niin*

$$(*) \qquad \lim_{z\to\zeta_0, z\in D(0,1)} P_{D(0,1)}(f)(z) = f(\zeta_0).$$

Todistus [11, Th. 1.2.4 (b), p. 8]. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Silloin on olemassa pisteen ζ_0 sisältävä avoin ympyrän kaari $T_1 \subseteq \partial D(0,1)$, jossa on voimassa $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| < \epsilon$; merkitään $T_2 = \partial D(0,1) \setminus T_1$. Kun $z \in D(0,1)$ on mielivaltainen, on lauseen 6 nojalla

$$\frac{1}{2\pi}\int_{T_1} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, z)|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) - f(\zeta_0)|\,\mathrm{d}\,\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\mathrm{e}^{i\theta}, z)\epsilon\,\mathrm{d}\,\theta = \epsilon.$$

Lauseen 6 nojalla on lisäksi $\sup_{\zeta\in T_2} K(\zeta, z) < \epsilon$ jonkin alueen $D(\zeta_0, \delta) \cap D(0,1)$ kussakin pisteessä z. Siis mielivaltaisella $z \in D(\zeta_0, \delta)$ on

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{T_2} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, z)|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) - f(\zeta_0)|\,\mathrm{d}\,\theta &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) - f(\zeta_0)|\,\mathrm{d}\,\theta \\ &\le \epsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta + |f(\zeta_0)|\right).\end{aligned}$$

Poissonin integraalikaavan (lause 7) ja kolmioepäyhtälön mukaan edelleen

$$\begin{aligned}|P_{D(0,1)}(f)(z) - f(\zeta_0)| &= |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, z)(f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) - f(\zeta_0))\,\mathrm{d}\,\theta| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, z)|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) - f(\zeta_0)|\,\mathrm{d}\,\theta \\ &\le \epsilon\left(1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta + |f(\zeta_0)|\right),\end{aligned}$$

ja väite seuraa, sillä f on rajoitettu. □

Seuraus 9 (Dirichlet'n probleeman ratkaisu yksikkökiekossa)**.** *Olkoon $f : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva ja rajoitettu funktio. Tällöin Poissonin integraali $P_{D(0,1)}$*

$$\left(= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \phi)} \,\mathrm{d}\,\theta, \text{ kun } z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} \in D(0,1) \right)$$

on harmoninen ja rajoitettu yksikkökiekossa sekä sellaisena ehdon

$$\lim_{z \to \zeta, |z|<1} u(z) = f(\zeta) \quad \text{jokaisessa } f\text{:n jatkuvuuspisteessä } \zeta$$

yksikäsitteinen ratkaisu u.

Todistus (vrt. [5, L. 2, ss. 94–96], [8, ss. 226–228]). Funktio $P_{D(0,1)}(f)$ on lauseen 8 nojalla reuna-arvotehtävän ratkaisu. Olkoot sitten funktiot $u_1, u_2 : D(0,1) \to \mathbb{R}$ ratkaisuja, so. $\lim_{z\to\zeta} u_1(z) = \lim_{z\to\zeta} u_2(z) = f(\zeta)$ jokaisessa funktion f jatkuvuuspisteessä ζ. Epäjatkuvuuspisteitä on äärellinen määrä, joten on voimassa $u_1 = u_2$ joukossa $D(0,1)$ (ks. yleistetty yksikäsitteisyysperiaate lauseen 5 yhteydessä). □

1.3 Epänegatiiviset harmoniset funktiot

Harmonisista funktioista sellaiset, joiden kuvajoukko sisältää yksinomaan epänegatiivisia arvoja, ovat eräissä suhteissa mielenkiintoisia. Tässä kappaleessa tutkitaan erityisesti epänegatiivisten harmonisten funktioiden jonon ala- ja ylärajoja Harnackin epäyhtälön avulla sekä harmonisten funktioiden jonon rajafunktion harmonisuutta Harnackin periaatteen avulla.

Lause 10 (Harnackin epäyhtälö)**.** *Olkoon h epänegatiivinen harmoninen funktio kiekossa $D(w,\rho)$, ts. $h \in \mathcal{H}^+(D(w,\rho))$, sekä $r \in (0,\rho), \phi \in [0,2\pi)$. Silloin*

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} h(w) \leq h(w + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(w).$$

Todistus [11, p. 13]. Kun $s \in (r,\rho)$ on mielivaltainen, on Poissonin integraalikaavan (lause 7 kiekossa $D(w,\rho)$) mukaan

$$h(w + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr\cos(\theta - \phi) + r^2} h(w + s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) \,\mathrm{d}\,\theta$$

ja koska selvästi $(s-r)^2 \leq s^2 - 2sr\cos(\theta - \phi) + r^2 \leq (s+r)^2$, on edelleen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s - r}{s + r} h(w + s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) \,\mathrm{d}\,\theta \leq h(w + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s + r}{s - r} h(w + s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) \,\mathrm{d}\,\theta.$$

Gaussin keskiarvolauseen (2) mukaan on nyt voimassa

$$\frac{s - r}{s + r} h(w) \leq h(w + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) \leq \frac{s + r}{s - r} h(w)$$

mielivaltaisella $s < \rho$, mistä väite seuraa. □

Huomautus 7.

- Joukossa $\mathbb{C}$ harmoninen, epänegatiivinen funktio h on vakio. Mielivaltaisessa kiekossa $D(0, \rho > |z|)$ on nimittäin

$$h(z) \leq \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|} h(0), \quad \text{joten } h(z) \leq h(0) \text{ joukossa } \mathbb{C}$$

  ja apulauseen 3 mukaan h on vakio.

- Kiekossa $D(w, \rho)$ harmoniset epänegatiiviset funktiot ovat itse asiassa erikoistapaus (jossa $\tau = \frac{\rho+r}{\rho-r}$) seuraavasta yleistyksestä:

Seuraus 11. *Olkoon $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ alue ja $z, w \in G$. Silloin on olemassa sellainen $\tau > 0$, että mielivaltaisella $h \in \mathcal{H}^+(G)$ on $\tau^{-1}h(w) \leq h(z) \leq \tau h(w)$.*

Todistus [11, Cor. 1.3.3, p. 14]. Olkoon $\sim \subseteq G \times G$ relaatio siten, että $z \sim w$, jos $\tau^{-1}h(w) \leq h(z) \leq \tau h(w)$ jollakin $\tau > 0$. Silloin $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Harnackin epäyhtälön mukaan väite pätee joukossa G sen avoimissa kiekoissa ja siis kaikissa avoimissa joukoissa, joten relaation $\sim$ ekvivalenssiluokat ovat täsmälleen joukon G erilliset avoimet osajoukot. Joukko G on kuitenkin alueena yhtenäinen joukko, joten $G/\sim = \{G\}$. □

Ransford [11] tekee seuraavan määritelmän kertoimien τ joukon suurimman alarajan sijaan sen pienimpänä lukuna. Pienimmän luvun olemassaolo mielivaltaisella alueella ei kuitenkaan ole itsestään selvää eikä olennaista tässä esitettävien myöhempien tulosten kannalta.

Määritelmä 5 (Harnackin matka)**.** Olkoon $G \subseteq \mathbb{C}$ alue ja $z, w \in G$. Tällöin on pisteiden z, w välinen *Harnackin matka* (engl. *Harnack distance*) $\tau_G(z, w)$ edellisen seurauslauseen (11) mukaisten kertoimien τ suurin alaraja, ts.

$$\tau_G(z, w) = \inf\{\tau \mid \tau^{-1}h(w) \leq h(z) \leq \tau h(w) \text{ kaikilla } h \in \mathcal{H}^+(G)\}$$

(vrt. [11, Def. 1.3.4, p. 14]).

Lause 12. *Kiekossa $D = D(w, \rho)$ on*

$$\tau_D(z, w) = \frac{\rho + |z - w|}{\rho - |z - w|}.$$

Todistus [11, Th. 1.3.5, p. 14]. Arvio ylöspäin on selvää Harnackin epäyhtälön (lause 10) nojalla. Olkoon sitten yksikköympyrän piste ζ mielivaltainen. Silloin funktiolle

$$h : z \mapsto K\Big(\zeta, \frac{z - w}{\rho}\Big) \left(= \Re \frac{\rho\zeta + (z - w)}{\rho\zeta - (z - w)}\right)$$

on voimassa $h \in \mathcal{H}^+(G)$ ja $h(w) = 1$. Siis $\tau_D(z, w) \geq \frac{\rho+|z-w|}{\rho-|z-w|}$, mistä väite seuraa. □

Lause 13 (Harnackin periaate)**.** *Olkoon G alue ja $(u_n : G \to \mathbb{R})$(kaikkialla joukossa G) nouseva jono harmonisia funktioita. Silloin jono (u_n) suppenee tasaisesti jokaisessa joukon G kompaktissa osajoukossa ja rajafunktio $\lim_{n\to\infty} u_n = u : G \to \overline{\mathbb{R}}$ on joko harmoninen tai identtisesti ∞.*

Todistus ([5, L. 3, ss. 101–102], vrt. [11, Th. 1.3.9, p. 16]). Olkoon suljettu kiekko $\overline{D}(a, r/2) \subset G$ ja piste z vastaavassa avoimessa kiekossa. Silloin on jokainen $u_{n+p} - u_n \in \mathcal{H}^+(G)$, kun $n, p \geq 1$ ja Harnackin epäyhtälön (lause 10) mukaan (vrt. [5, s. 102])

$$\frac{1}{3}(u_{n+p}(a) - u_n(a)) \leq u_{n+p}(z) - u_n(z) \leq 3(u_{n+p}(a) - u_n(a)),$$

joten jono (u_n) suppenee tasaisesti kiekossa $D(a, r/2)$ ja edelleen jokaisessa joukon G kompaktissa osajoukossa.

Olkoon $v_n = u_n - u_1$, silloin (v_n) on nouseva jono joukon $\mathcal{H}^+(G)$ funktioita. Olkoon lisäksi $a \in G$ mielivaltainen ja $\overline{D}(a, r/2) \subseteq G$. Kiekossa $D(a, r/2)$ on nyt voimassa

$$\frac{1}{3}v_n(a) \leq \frac{r - \frac{r}{2}}{r + \frac{r}{2}} v_n(a) \leq v_n(z) \leq \frac{r + \frac{r}{2}}{r - \frac{r}{2}} v_n(a) = 3v_n(a) \leq 3(u(a) - u_1(a)).$$

Jos nyt $u(a) < \infty$, on selvästi myös $u(z) < \infty$, joten funktion u arvot ovat äärellisiä avoimessa kiekossa $D(a, r/2)$ ja siten jossakin avoimessa joukossa $E \subseteq G$. Olkoon sitten $u(a) = \infty$. Koska silloin $\lim_{n\to\infty} v_n(a) = \infty$, on myös $\lim_{n\to\infty} v_n(z) = \infty$. Siis on $u = \infty$ kiekossa $D(a, r/2)$ ja siten jossakin avoimessa joukossa $F \subseteq G$. Koska $E \cup F = G$ ja G on yhtenäinen, on joko $E = G$ tai $F = G$.

Olkoon sitten rajafunktio u kaikkialla äärellinen. Silloin on missä tahansa kiekossa $D(a, r) \subseteq G$ (yleistetyn) Poissonin kaavan (lause 7) mukaan

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(\zeta) \frac{r^2 - |z - a|^2}{|\zeta - z|^2} \, \mathrm{d}\,\phi, \quad \text{kun } \zeta = a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}.$$

Edelleen

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{r^2 - |z - a|^2}{|\zeta - z|^2} \, \mathrm{d}\,\phi,$$

sillä $\lim_{n\to\infty} u_n(\zeta) = u(\zeta)$ tasaisesti ympyrällä $\partial D(a, r)$. Seurauslauseen 9 (yleistyksen) mukaan u on harmoninen kiekossa $D(a, r)$ ja edelleen koko joukossa G. □

2 Reuna-arvotehtävä ja alueen säännöllisyys

Tässä luvussa yleistetään edellä esitetty Dirichlet'n probleema ratkaisuineen mielivaltaiselle kompleksitason alueelle $G \subseteq \mathbb{C}$, mistä ratkaisu yleistyy konformisen kuvauksen avulla helposti alueelle $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Aluksi todistetaan subharmonisten funktioiden avulla eräitä luvun myöhemmissä tarkasteluissa olennaisia alustavia tuloksia. Seuraavaksi osoitetaan jollakin alueella jatkuvaan funktioon liittyvä Dirichlet'n probleema ratkeavaksi silloin, kun alue on ns. säännöllinen ja tämän toisaalta olevan jokaisen yhdesti yhtenäisen, kompleksitasosta $\mathbb{C}$ poikkeavan alueen ominaisuus. Tämän jälkeen yleistetään Dirichlet'n probleema polaarista joukkoa vaille kaikkialla jatkuvalle reuna-arvofunktiolle. Luvun lopussa tutkitaan lyhyesti harmonisen mitan käsitettä ja sen välitöntä teoreettista sisältöä.

2.1 Sub- ja superharmoniset funktiot

Sub- ja superharmoniset funktiot voidaan ajatella harmonisten ylhäältä ja alhaalta rajoittamina funktioina. Seuraavassa tutkitaan erityisesti subharmonisten funktioiden integroituvuutta ja kahden nollamittaista joukkoa vaille kaikkialla yhtenevän subharmonisen funktion välistä suhdetta. Ylhäältä puolijatkuvan funktion subharmonisuuden todetaan vielä olevan yhtäpitävää sen kanssa, että funktio on paikallisesti (so. jokaisessa määrittelyjoukkonsa suljetussa kiekossa) Poissonin integraalinsa minorantti (lause 15). Lisäksi todistetaan (lause 14) subharmoniselle funktiolle vastaava maksimiperiaate kuin on aikaisemmin esitetty harmoniselle (lause 4 apulauseineen). Vastaavat tulokset ovat luonnollisesti johdettavissa superharmonisille funktioille.

Määritelmä 6 (Sub- ja superharmoninen funktio)**.** Kun avoin joukko $G \subseteq \mathbb{C}$, sanotaan ylöspäin puolijatkuvaa funktiota $u : G \to \underline{\mathbb{R}}$ *subharmoniseksi*, mikäli mielivaltaisella pisteellä $w \in G$ on jossakin kiekossa $D(w, \rho) \subseteq G$ voimassa

$$u(w) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})\,\mathrm{d}\,\phi \text{ aina, kun } r \in [0, \rho).$$

Jos taas funktio $u : G \to \overline{\mathbb{R}}$ on alaspäin puolijatkuva ja käänteinen epäyhtälö on voimassa, sanotaan u:ta *superharmoniseksi* [11, p. 28].

(Lehto [5, s. 103] tekee tiukemmat vaatimukset funktion jatkuvuudesta ja joukon G yhtenäisyydestä. Näistä oletuksista voidaan kuitenkin luopua tulosten siitä heikkenemättä.)

Lause 14 (Subharmonisen funktion maksimiperiaate)**.** *Olkoon G alue ja funktio $u : G \to \underline{\mathbb{R}}$ subharmoninen.*

(1) Jos $u(z)$ saavuttaa suurimman arvonsa alueella G, niin u on vakio.

(2) Jos $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \le M$ aina, kun $\zeta \in \partial G$, niin $u \le M$ joukossa G.

Todistus ([11, Th. 2.3.1, p. 29], vrt. [5, L. 1–2, s. 104]).

- Olkoon $M = \max_{z\in G} u(z)$, $A = \{z \in G \,|\, u(z) < M\}$ ja $B = \{z \in G \,|\, u(z) = M\}$. Funktion u ylöspäin puolijatkuvuudesta seuraa, että joukko A on avoin. Jos nyt $u(w) = M$, on jossakin kiekossa $D(w, \rho)$ voimassa (mielivaltaisella $r \in [0, \rho)$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(w + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) - M)\,\mathrm{d}\,\phi \geq 0.$$

Toisaalta kukin $u(w+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) - M \leq 0$, joten $u = M$ ympyrällä $\partial D(w, r)$ ja edelleen kiekossa $D(w, \rho)$. Täten myös B on avoin. Koska toisaalta joukko $G = A \cup B$ on yhtenäinen ja oletuksen mukaan $B \neq \emptyset$, on $B = G$.

- Olkoon funktio $U : \overline{G} \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} u(z), & \text{kun } z \in G, \\ \limsup_{z_1 \to z} u(z_1) & \text{muuten.} \end{cases}$$

Nyt U on ylöspäin puolijatkuva kompaktissa joukossa $\overline{G}$, joten se saavuttaa suurimman arvon M_0 jossakin pisteessä $w \in \overline{G}$. Jos olisi $M_0 > M$, niin oletuksen mukaan $w \in G$ ja edellisen kohdan nojalla siis $u \equiv M_0$ ja siten myös $U \equiv M_0$. Tämä on kuitenkin ristiriitaista oletuksen kanssa, joten $u(z) \leq M_0 \leq M$ kaikkialla joukossa G. □

Lause 15 (Subharmonisuuden luonnehdinta). *Kun $G \subseteq \mathbb{C}$ on avoin joukko ja funktio $u : G \to \underline{\mathbb{R}}$ ylöspäin puolijatkuva, on u subharmoninen joukossa G täsmälleen silloin, kun mielivaltaisessa kiekossa D, jolle $\overline{D} \subset G$, on voimassa $u \leq P_D(u)$.*

Todistus [11, Th. 2.4.1, p. 35]. Ehdon riittävyys on selvää. Olkoon toisaalta $D = D(w, \rho), \overline{D} \subset G$. Silloin on funktion u puolijatkuvuuden nojalla olemassa (ks. huomautus 22) sellainen pisteittäin nouseva jono jatkuvia funktioita $u_n : \partial G \to \mathbb{R}$, että $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$ kussakin pisteessä $z \in \partial D$. Toisaalta kunkin funktion Poissonin integraali $P_D(u_n)$ on harmoninen funktio kiekossa D; samoin $\limsup_{z\to\zeta} P_D(u_n)(z) = u_n(\zeta)$ kussakin reunan ∂D pisteessä ζ, joten $\limsup_{z\to\zeta}(u - P_D(u_n))(z) \leq u(\zeta) - u_n(\zeta) \leq 0$ jokaisessa pisteessä ζ kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$.

Funktio $u - P_D(u_n)$ on siis subharmoninen alueella G, joten lauseen 14 mukaan $u \leq P_D(u_n)$ koko kiekossa D (kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$), so.

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(w + \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}, \frac{z - w}{\rho})\,\mathrm{d}\,\phi.$$

Silloin on voimassa myös $u \leq \lim_{n\to\infty} P_D(u_n) = P_D(u)$ (pisteittäin), mistä väitetyn ehdon välttämättömyys seuraa. □

Lause 16 (”Liimauslause”). *Olkoot joukot $U \subseteq \mathbb{C}, V \subseteq U$ avoimia, funktiot $u : U \to \underline{\mathbb{R}}, v : V \to \underline{\mathbb{R}}$ subharmonisia ja olkoon $\limsup_{z\to\zeta} v(z) \leq u(\zeta)$ kussakin pisteessä $\zeta \in U \cap \partial V$. Silloin funktio $\tilde{u} : U \to \underline{\mathbb{R}}$;*

$$z \mapsto \begin{cases} \max\{u(z), v(z)\} & \textit{joukossa } V, \\ u(z) & \textit{muuten} \end{cases}$$

on subharmoninen.

Todistus [11, Th. 2.4.5, p. 37]. Funktio $\tilde{u}$ on oletuksen nojalla ylöspäin puolijatkuva. Lisäksi se toteuttaa subharmonisten funktioiden maksimina määritelmän 6 epäyhtälön kussakin joukon V pisteessä ja edelleen joukossa U, sillä $\tilde{u} \geq u$ kaikkialla. $\square$

Lause 17. *Olkoon G alue ja funktio $u : G \to \underline{\mathbb{R}}$ subharmoninen siinä sekä $u \not\equiv -\infty$. Silloin*

(1) Funktio u on (paikallisesti) integroituva alueella G, so. kun joukko $K \subseteq G$ on kompakti, on integraali $\int_K |u| \,\mathrm{d}\, m < \infty$.

(2) Integraali pitkin kutakin ympyrää alueella G on $> -\infty$, so.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w+\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi > -\infty, \quad \textit{kun } \overline{D}(w,\rho) \subseteq G.$$

Todistus [11, pp. 39–41]. Jos pisteessä $w \in G$ pätee $(*)$: $\int_{D(w,\rho)} |u| \,\mathrm{d}\, m < \infty$ jollakin kiekolla $D(w,\rho) \subseteq G$, olkoon piste $z \in D(w,\rho)$ mielivaltainen ja $r = \rho - |z-w|$. Silloin $D(z,r) \subset D(w,\rho)$ ja siis $\int_{D(z,r)} |u| \,\mathrm{d}\, m < \infty$. Epäyhtälö $(*)$ on näin ollen tosi koko avoimessa kiekossa $D(w,\rho)$.

Jos sitten on pisteessä $w \in G$ voimassa $(\neg *)$: $\int_{D(w,\rho)} |u| \,\mathrm{d}\, m = \infty$ jokaisella kiekolla $D(w,\rho) \subseteq G$, olkoon suljettu kiekko $\overline{D}(w,2\rho) \subseteq G$ ja piste $z \in D(w,\rho)$ mielivaltainen sekä $r = \rho + |z-w|$. Silloin $D(w,\rho) \subset D(z,r)$ ja koska funktio u on ylhäältä rajoitettu kompaktissa joukossa $\overline{D}(z,r)$ (ks. liite), niin $\int_{D(z,r)} u \,\mathrm{d}\, m = -\infty$. Oletuksesta seuraa nyt

$$\begin{aligned}
u(z) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi, \quad \text{joten} \\
2\pi s u(z) &\leq s\int_0^{2\pi} u(z+s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi \quad (\text{mielivaltaisella } s \in [0,r]), \\
\int_0^r 2\pi s u(z)\,\mathrm{d}\, s &\leq \int_0^r s\int_0^{2\pi} u(z+s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi\,\mathrm{d}\, s \quad \text{ja edelleen} \\
\pi r^2 u(z) &\leq \int_{D(z,r)} u\,\mathrm{d}\, m = -\infty.
\end{aligned}$$

Siis koko kiekossa $D(w,\rho)$ on $u(z) = -\infty$ ja siis $(\neg *)$ pätee.

Edellä on osoitettu, että ehdon $(*)$ täyttävien ja ehdon $(\neg *)$ täyttävien pisteiden joukot ovat avoimet – niiden yhdiste on lisäksi alue G. Silloin on integraali $\int_{D(w,\rho)} |u| \,\mathrm{d}\, m$ (jollakin kiekolla $D(w,\rho) \subseteq G$) joko ääretön kaikkialla tai äärellinen kaikkialla; edellinen tapaus on vastoin oletusta. Siis on kullakin pisteellä $w \in G$ äärellinen integraali jossakin kiekossa $D(w,\rho)$ ja edelleen kunkin kompaktin joukon $K \subseteq G$ avoimessa (ja äärellisessä) peitteessä, mistä väite (1) seuraa.

Koska u on ylhäältä rajoitettu kompaktissa joukossa $\overline{D}(w,\rho) \subseteq G$, voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $u \le 0$ siinä. Koska lisäksi on edellä sanotun nojalla funktio $|u|$ integroituva yli joukon $\overline{D}(w,\rho)$, on olemassa piste $z \in D(w,\rho)$, jossa $u(z) > -\infty$. Lauseen 15 mukaan on silloin voimassa

$$\begin{aligned} -\infty < u(z) \le P_{D(w,\rho)}(u)(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w+\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})K(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, z)\,\mathrm{d}\,\phi \\ &\le \frac{\rho-|z-w|}{\rho+|z-w|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w+\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})\,\mathrm{d}\,\phi. \end{aligned}$$

Väite (2) seuraa nyt viimeisimmän lausekkeen äärellisyydestä. □

Seuraus 18. *Kun G on alue, funktio $u : G \to \mathbb{R}$ subharmoninen ja $u \not\equiv -\infty$, on Lebesguen mitta $m(\{z \in G \mid u(z) = -\infty\}) = 0$.*

Todistus [11, Cor. 2.5.3, p. 41]. Olkoon kompaktien joukkojen $K_n \subseteq G$ jono (K_n) sellainen, että $\bigcup_n K_n = G$. Silloin on edellisen lauseen mukaan kukin integraali $\int_{K_n} |u|\,\mathrm{d}\,m < \infty$. Kukin joukko $\{z \in K_n \mid u(z) = -\infty\}$ on siis nollamittainen, mistä väite seuraa. □

Huomautus 8. Kun G on alue, suljettu kiekko $\overline{D} \subseteq G$, funktio $u : G \to \mathbb{R}$ subharmoninen sekä $u \not\equiv \infty$, on funktio $u|_{\partial D}$ integroituva ja sillä on siis Poissonin integraali $P_D(u)$.

Lause 19 (Heikko yksikäsitteisyysperiaate)**.** *Kun joukko $G \subseteq \mathbb{C}$ on avoin ja funktiot $u, v : G \to \mathbb{R}$ subharmonisia sekä $u = v$ melkein kaikkialla, on $u = v$ kaikkialla joukossa G.*

Todistus [11, Th. 2.7.5, p. 50]. Sivuutetaan. □

2.2 Säännöllinen alue ja reuna-arvotehtävä

Seuraavassa määritellään myöhemmin Dirichlet'n probleeman yksikäsitteiseksi ratkaisuksi osoitettava Perron-kehitelmä. Lisäksi osoitetaan Poisson-muunnoksen avulla rajoitettuun funktioon f liittyvän Perron-kehitelmän ylärajaksi funktion f pienin yläraja. Vielä määritellään säännöllisen alueen käsite vaatimalla *esteen* olemassaoloa kussakin reunapisteessä ja yleistetään este Bouligandin lemman (apulause 23) avulla koko alueella subharmoniseksi funktioksi. Rajoitettuun ja jatkuvaan funktioon liittyvän Perron-kehitelmän todetaan puolestaan lähestyvän kussakin säännöllisen alueen reunapisteessä funktion itsensä arvoa.

Määritelmä 7 (Poisson-muunnos)**.** Olkoon G alue, suljettu kiekko $\overline{D} \subseteq G$, funktio $u : G \to \mathbb{R}$ subharmoninen sekä $u \not\equiv \infty$. Silloin määritellään funktion u *Poisson-muunnos* (engl. *Poisson modification*) $\tilde{u} : G \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$z \mapsto \begin{cases} P_D(u)(z), & \text{kun } z \in D, \\ u(z) & \text{muuten} \end{cases}$$

[5, s. 107], [11, p. 86].

Apulause 20. *Kun G on alue ja funktio $\tilde{u} : G \to \mathbb{R}$ Poisson-muunnos funktiolle u kiekon $\overline{D} \subseteq G$ suhteen, on $\tilde{u}$ harmoninen joukossa D sekä subharmoninen ja $\geq u$ joukossa G.*

Todistus (vrt. [11, p. 86], [5, s. 107]). Poissonin integraali $P_D(u)$ on harmoninen funktio kiekossa D ja lauseen 15 mukaan $P_D(u) \geq u$ joukossa D, siis $\tilde{u} \geq u$ joukossa G. Funktio $\tilde{u}$ on selvästi subharmoninen myös joukossa $G \setminus \overline{D}$. Olkoot sitten reunapiste $a \in \partial D$ ja kiekko $D' = D(a, r) \subseteq G$ mielivaltaiset sekä luvut $\phi_1 \in \mathbb{R}, \phi_2 \in (\phi_1, \phi_1 + 2\pi)$ sellaiset, että $(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) \in D \Leftrightarrow \phi \in (\phi_1, \phi_2)$. Silloin

$$\begin{aligned}\tilde{u}(a) = u(a) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2} P_D(u)(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi + \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_2}^{\phi_1+2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\mathrm{d}\,\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}).\end{aligned}$$

Siis $\tilde{u}$ on subharmoninen myös reunalla ∂D ja edelleen koko joukossa G. $\square$

Määritelmä 8 (Perronin funktiot)**.** Olkoon G alue ja funktio $f : \partial G \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Silloin sanotaan funktiota f vastaavaksi *Perronin minoranttifunktioksi* funktiota $\underline{H}_G(f) : G \to \mathbb{R} : z \mapsto \sup_{u \in \mathcal{U}(f)} u(z)$, missä $\mathcal{U}(f)$ on funktion f *subharmonisten reunaminoranttien* muodostama funktioperhe:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f) = \{u : G \to \mathbb{R} \mid\, & u \text{ on subharmoninen ja} \\ & \limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq f(\zeta) \text{ aina, kun } \zeta \in \partial G\}.\end{aligned}$$

Vastaavasti määrätään *Perronin majoranttifunktio* $\overline{H}_G(f) : G \to \mathbb{R} : z \mapsto \inf_{u \in -\mathcal{U}(-f)} u(z)$. (Vrt. [5, s. 110], [11, Def. 4.1.1, p. 86].)

Lause 21. *Olkoon G alue ja funktio $f : \partial G \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Silloin $\underline{H}_G(f) \leq -\underline{H}_G(-f)$ joukossa G.*

Todistus [11, L. 4.1.6, p. 89]. Mielivaltaisilla funktioilla $u \in \mathcal{U}(f), v \in \mathcal{U}(-f)$ on summa $u+v$ subharmoninen funktio joukossa G ja $\limsup_{z \to \zeta}(u+v)(z) \leq f(\zeta) - f(\zeta) = 0$ reunalla ∂G. Näin ollen alueella G on $u + v \leq 0$ ja edelleen $\sup_{u \in \mathcal{U}(f)} u(z) + \sup_{v \in \mathcal{U}(-f)} v(z) = \underline{H}_G(f) + \underline{H}_G(-f) \leq 0$, mistä väite seuraa. $\square$

Huomautus 9.

- Voidaan todeta, että

  $$\begin{aligned}-\mathcal{U}(-f) = \{u : G \to \mathbb{R} \mid\, & u \text{ on superharmoninen ja} \\ & \liminf_{z \to \zeta} u(z) \geq f(\zeta) \text{ aina, kun } \zeta \in \partial G\},\end{aligned}$$

  ja siis $\sup_{u \in \mathcal{U}(f)} u(z) = \underline{H}_G(f)(z) \leq \overline{H}_G(f)(z) = \inf_{u \in -\mathcal{U}(-f)} u(z)$.

- Rajoitetun funktion f Perronin minoranttifunktiosta voidaan puhua yksinkertaisesti *Perron-kehitelmänä*, jota merkitään $H_G(f) = \underline{H}_G(f)$. Luvussa 3 todetaan nimittäin, että *resolutiivisilla* (ks. määritelmä 15) funktioilla f ovat yllä esitetyt kaksi Perronin funktiota itse asiassa identtiset; lisäksi nähdään, että jokainen rajoitettu funktio f on resolutiivinen.

- Perronin funktiot voidaan itse asiassa määritellä myös rajoittamattomalle funktiolle f, kun arvojoukkona pidetään laajennusta $\overline{\mathbb{R}}$ ja tulkitaan supremum ja infimum sekä ylä- ja alaraja-arvot tässä laajennetussa joukossa (ks. esim. [3, pp. 156–157]). Seuraavassa luvussa määritelmä tehdäänkin juuri tällä tavoin.

Lause 22. *Olkoon G alue ja funktio $f : \partial G \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Silloin $H_G(f)$ on harmoninen funktio joukossa G ja $\sup_{z \in G}|H_G(f)(z)| \leq \sup_{\partial G}|f|$.*

Todistus [11, Th. 4.1.2, pp. 86–88]. Olkoot suljettu kiekko $\overline{D} \subseteq G$ ja vastaavan avoimen kiekon piste $z_0 \in D$ mielivaltaiset. Silloin on Perron-kehitelmän määritelmän mukaan olemassa funktion f subharmonisten reunaminoranttien (pisteittäin) nouseva jono (u_n), jolla $\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = H_G(f)(z_0)$. Olkoon kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$ vielä $\tilde{u_n}$ funktion u_n Poisson-muunnos kiekon D suhteen – silloin jono $(\tilde{u_n})$ on pisteittäin nouseva joukossa G ja rajafunktio $\tilde{u} = \lim_{n\to\infty} \tilde{u_n}$ on olemassa. Kukin Poisson-muunnos on harmoninen funktio kiekossa D, joten Harnackin periaatteen (lause 13) mukaan myös rajafunktio $\tilde{u}$ on harmoninen.

Nyt $\tilde{u_n} \geq u_n$, joten $\tilde{u}(z_0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u_n}(z_0) \geq \lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = H_G(f)(z_0)$. Kukin Poisson-muunnos $\tilde{u_n}$ on lisäksi subharmoninen funktio joukossa G ja siis $\limsup_{z\to\zeta} \tilde{u_n}(z) = \limsup_{z\to\zeta} u_n(z) \leq f(\zeta)$, kun reunapiste $\zeta \in \partial G$. Siis myös kukin $\tilde{u_n} \in \mathcal{U}(f)$, $\tilde{u_n} \leq H_G(f)$ ja edelleen $\tilde{u} \leq H_G(f)$ joukossa G. Yhtäsuuruus on näin ollen voimassa pisteessä z_0.

Olkoon sitten piste $z \in D$ mielivaltainen ja (v_n) nouseva jono funktion f subharmonisia reunaminorantteja siten, että $\lim_{n\to\infty} v_n(z) = H_G(f)(z)$. Yleisyyttä menettämättä voidaan lisäksi olettaa, että kukin $v_n \geq u_n$ joukossa G. Olkoon $\tilde{v_n}$ kunkin funktion v_n Poisson-muunnos kiekon D suhteen; silloin on olemassa rajafunktio $\tilde{v} : z \mapsto \limsup_{n\to\infty} \tilde{v_n}(z)$. Vastaavasti kuin edellä kullekin funktiolle $\tilde{u_n}$ voidaan nyt todeta, että kukin $\tilde{v_n}$ on harmoninen, $\leq H_G(f)$ joukossa G ja yhtäsuuruus on voimassa pisteessä z. Lisäksi on $\tilde{v} \geq \tilde{u}$ kaikkialla joukossa G; koska toisaalta $\tilde{v}(z_0) \leq \tilde{u}(z_0)$, saavuttaa harmoninen ja ylhäältä rajoitettu funktio $\tilde{u} - \tilde{v}$ suurimman arvonsa 0 sisäpisteessä $z_0 \in G$, joten apulauseen 3 mukaan $\tilde{u} - \tilde{v} = 0$ kiekossa D ja erityisesti on $\tilde{u}(z) = \tilde{v}(z) = H_G(f)(z)$.

Mielivaltaisessa kiekossa $D \subseteq G$, ja siten koko alueella G, on funktio $H_G(f) = \tilde{u}$ edellä sanotun perusteella harmoninen.

Olkoon lopuksi $\mathcal{U}(f)$ funktion f subharmonisten reunaminoranttien muodostama funktioperhe. Silloin on funktiolla $|f|$ olemassa pienin yläraja M

reunalla ∂G ja $-M \in \mathcal{U}(f)$, joten $H_G(f) \geq -M$. Toisaalta mielivaltaisella funktiolla $u \in \mathcal{U}(f)$ on $u \leq M$ joukossa G, joten $H_G(f) \leq M$. Siis $\sup_G|H_G(f)| \leq \sup_{\partial G}|f|$. $\square$

Määritelmä 9 (Este)**.** Olkoon G alue. Silloin piste $\zeta_0 \in \partial G$ on *säännöllinen*, mikäli on olemassa *este* (engl. *barrier*) pisteessä ζ_0, so. subharmoninen, negatiivisarvoinen funktio $b : N_0 \cap G \to \underline{\mathbb{R}}$, jolle $\lim_{z\to\zeta_0} b(z) = 0$, missä N_0 on pisteen ζ_0 jokin avoin ympäristö. Jos jokainen reunapiste $\zeta \in \partial G$ on säännöllinen, sanotaan joukkoa G *säännölliseksi alueeksi.* ([11, p. 88], vrt. [5, ss. 110–111]).

Huomautus 10. Lehto [5, ss. 110–111] asettaa säännölliselle pisteelle vahvemman vaatimuksen esteen $b : G \to \underline{\mathbb{R}}$ olemassaolosta. Seuraavan apulauseen nojalla tämä ominaisuus kuitenkin on myös tässä esitetyn mukaisella säännöllisellä pisteellä. Jos nimittäin este on olemassa suhteessa johonkin ympäristöön N_0, voidaan se aina yleistää esteeksi koko alueella G.

Apulause 23 (Bouligandin lemma)**.** *Olkoon G alue ja piste $\zeta_0 \in \partial G$ säännöllinen. Silloin mielivaltaista lukua $\epsilon > 0$ ja pisteen ζ_0 avointa ympäristöä N_0 vastaa sellainen subharmoninen funktio $b_\epsilon : G \to \underline{\mathbb{R}}$, että $\liminf_{z\to\zeta_0} b_\epsilon(z) \geq -\epsilon$ ja*

$$b_\epsilon \begin{cases} < 0 & \text{joukossa } G, \\ \leq -1 & \text{joukossa } G \setminus N_0. \end{cases}$$

Todistus [11, L. 4.1.7, p. 89]. Oletuksen mukaan on olemassa pisteen ζ_0 ympäristö N ja este $b : N \cap G \to \underline{\mathbb{R}}$. Olkoon vielä suljettu kiekko $\overline{D} = \overline{D}(\zeta_0, r) \subseteq N \cap N_0$. Koska $m(\partial D) \in \mathbb{R}$, on Lebesguen mitta säännöllinen (ks. määritelmä 29) tässä joukossa ja on siis olemassa sellainen kompakti joukko $K \subseteq G \cap \partial D$, jolle erotuksen $L = G \cap \partial D \setminus K$ mitta $m(L) < \epsilon$. Koska joukko $L \subseteq \partial D$ on avoin, seuraa lauseesta 8, että $\lim_{z\to\zeta} P_D(\chi_L)(z) = 1$ kussakin reunapisteessä $\zeta \in L$, missä $\chi_L : \partial D \to \{0, 1\}$ on joukon L karakteristinen funktio.

Määritelmän mukaan on esteen b pienin yläraja negatiivinen ja $m = -\sup_K b > 0$. Silloin on pisteessä $\zeta \in G \cap \partial D$ voimassa

$$\limsup_{z\to\zeta} \frac{b(z)}{m} - P_D(\chi_L)(z) \leq \begin{cases} \frac{b(\zeta)}{m}(\leq -1), & \text{kun } \zeta \in K, \\ -1 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Olkoon sitten funktio $b_\epsilon : G \to \underline{\mathbb{R}}$;

$$z \mapsto \begin{cases} \max\{-1, \frac{b(z)}{m} - P_D(\chi_L)(z)\} & \text{joukossa } G \cap D, \\ -1 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Silloin b_ϵ on lauseen 16 mukaan subharmoninen ja toteuttaa selvästi väitteen epäyhtälöt. Lisäksi

$$\liminf_{z\to\zeta_0} b_\epsilon(z) \geq \lim_{z\to\zeta_0} \frac{b(z)}{m} - P_D(\chi_L)(z) = -P_D(\chi_L)(\zeta_0) > -\epsilon,$$

sillä $P_D(\chi_L)(\zeta_0) = m(L)$. $\square$

Lause 24. *Olkoon G alue, piste $\zeta_0 \in \partial G$ säännöllinen sekä funktio $f : \partial G \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja jatkuva pisteessä ζ_0. Silloin $\lim_{z \to \zeta_0} H_G(f)(z) = f(\zeta_0)$.*

Todistus ([11, pp. 90–91], vrt. [5, L. 2, ss. 111–112]). Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen, N_ϵ pisteen ζ_0 avoin ympäristö, jossa mielivaltaisella reunan ∂G pisteellä ζ on $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| < \epsilon$ sekä $M = \sup_{\partial G}|f|$. Bouligandin lemman mukaan on olemassa este b_ϵ siten, että $b_\epsilon \leq -1$ joukossa $G \setminus N_\epsilon$. Silloin funktio $u : G \to \mathbb{R}$; $z \mapsto (f(\zeta_0) + M)b_\epsilon + f(\zeta_0) - \epsilon$ on subharmoninen ja kussakin reunapisteessä ζ on $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq f(\zeta_0) - \epsilon \leq f(\zeta)$, sillä $b_\epsilon \leq 0$ ja $M + f(\zeta_0) \geq |f(\zeta_0)| + f(\zeta_0) \geq 0$. Siis $u \in \mathcal{U}(f)$, joten $u \leq H_G(f)$ kaikkialla ja edelleen

$$\liminf_{z \to \zeta_0} H_G(f)(z) \geq \liminf_{z \to \zeta_0} u(z) \geq -\epsilon(f(\zeta_0) + M) - \epsilon + f(\zeta_0),$$

mistä epäyhtälö $\liminf_{z \to \zeta_0} H_G(f)(z) \geq f(\zeta_0)$ seuraa. Vastaavasti on voimassa $\liminf_{z \to \zeta_0} H_G(-f)(z) \geq -f(\zeta_0)$ ja koska $H_G(-f) \leq -H_G(f)$ lauseen 21 nojalla, on myös $\limsup_{z \to \zeta_0} H_G(f)(z) \leq f(\zeta_0)$. □

Apulause 25. *Olkoon G alue, piste $\zeta_0 \in \partial G$ ja raja-arvo $\lim_{z \to \zeta_0} H_G(f)(z) = f(\zeta_0)$ jokaisella jatkuvalla funktiolla $f : \partial G \to \mathbb{R}$. Jos $\{\zeta_0\} \neq \partial G$, on ζ_0 säännöllinen piste.*

Todistus (vrt. [11, Ex. 1, p. 91]). Olkoon $\zeta_1 \in \partial G$, $\zeta_1 \neq \zeta_0$. Sopivan konformisen kuvauksen avulla voidaan yleisyyttä menettämättä olettaa lisäksi, että $\zeta_0, \zeta_1 \neq \infty$. Olkoon funktio $f : \zeta \mapsto -|\zeta - \zeta_0|$ ja $b = H_G(f)$. Silloin $\lim_{z \to \zeta_0} b(z) = f(\zeta_0) = 0$ ja $\limsup_{z \to \zeta} b(z) < 0$ kussakin reunapisteessä ζ. Kukin reunaminorantti $u \in \mathcal{U}(f)$ on ≤ 0 joukossa G lauseen 14 mukaan, joten 0 on harmonisen funktion $b : G \to \mathbb{R}$ yläraja alueella G. Kuitenkaan b ei ole vakio, sillä $\lim_{z \to \zeta_1} b(z) = -|\zeta_1 - \zeta_0| < 0$. Silloin lauseen 14 mukaan $b(z) < 0$ joukossa G ja näin ollen b on este. □

Lause 26 (Dirichlet'n probleeman ratkaisu jatkuvalle funktiolle)**.** *Alueen G säännöllisyys on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisella jatkuvalla funktiolla $f : \partial G \to \mathbb{R}$ on olemassa yksikäsitteinen ehdon*

$$\lim_{z \to \zeta} u(z) = f(\zeta) \quad \textit{kussakin pisteessä } \zeta \in \partial G$$

toteuttava harmoninen funktio $u : G \to \mathbb{R}$.

Todistus [11, Cor. 4.1.8, p. 91]. Jos jatkuvaan funktioon f liittyvä harmoninen ratkaisufunktio u on olemassa, on se yleistetyn yksikäsitteisyysperiaatteen (lauseen 5 yhteydessä) mukaan $= H_G(f)$, sillä funktio $H_G(f)$ on lauseen 22 mukaan harmoninen. Ratkaisun olemassaolo säännöllisellä alueella seuraa puolestaan lauseesta 24.

Olkoon sitten jokaisella jatkuvalla funktiolla f olemassa yksikäsitteinen ratkaisufunktio $u = H_G(f)$; jos nyt reunapisteiden joukko ∂G sisältäisi vähemmän kuin kaksi pistettä, olisi kullakin f:llä triviaalisti myös toinen harmoninen ratkaisufunktio $u' \neq u$. Siis reunapisteitä on vähintään kaksi. Toisaalta kussakin pisteessä $\zeta \in \partial G$ on $\lim_{z \to \zeta} u(z) = \lim_{z \to \zeta} H_G(f)(z) = f(\zeta)$; apulauseen 25 mukaan kukin ζ on siis säännöllinen. $\square$

Lause 27. *Jokainen yhdesti yhtenäinen alue $G \subset \mathbb{C}$ on säännöllinen.*

Todistus [11, Th. 4.2.1, p. 92]. Olkoot (yleisyyttä menettämättä) $0, \infty \in \partial G$. Silloin on olemassa funktioperheen $\log z$ alueella G holomorfinen haara f, sillä $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on yhdesti yhtenäinen. Olkoon funktio $b : D(0,1) \cap G \to \mathbb{R}; z \mapsto \Re \frac{1}{f(z)}$. Silloin on b selvästi este pisteessä 0; konformisen kuvauksen avulla voidaan muodostaa este mielivaltaiseen pisteeseen $\zeta_0 \in \partial G$. $\square$

Seuraus 28. *Jatkuvan reuna-arvofunktion Dirichlet'n probleemalla on yksikäsitteinen ratkaisu jokaisella $\mathbb{C}$:stä poikkeavalla yhdesti yhtenäisellä alueella.*

2.3 Polaarisuus ja yleistetty ratkaisu

Seuraavassa määritellään polaarisuuden käsite ja tutkitaan polaaristen joukkojen tiettyä ”sivuutettavuutta”: funktion käyttäytyminen muualla kuin polaarisessa määrittelyjoukkonsa osajoukossa ratkaisee tosiasiallisesti sen ominaisuudet. Kappaleessa yleistetään subharmonisten funktioiden maksimiperiaate tapaukseen, jossa funktion yläraja-arvot ovat ylhäältä rajoitettuja alueen reunalla, poislukien sen polaarisessa osajoukossa. Tämän jälkeen yleistetään reuna-arvotehtävä tapaukseen, jossa reuna-arvofunktio voi olla epäjatkuva polaarisessa joukossa. Samalla on lievennettävä vaatimuksia myös tehtävän ratkaisulle: funktion raja-arvojen on yhdyttävä reuna-arvofunktioon vain oleelliselta osaltaan – muualla kuin polaarisessa joukossa.

Määritelmä 10 (Kantaja ja potentiaali, [11, p. 209, pp. 53–55])**.** Borelin mitan $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ *kantajaksi* (engl. *support*) sanotaan joukkoa $\operatorname{supp} \mu = \{z \in \mathbb{C} \mid \mu(N) > 0$ aina, kun N on pisteen z avoin ympäristö$\}$. Kun $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ on äärellinen Borelin mitta ja sen kantaja kompakti joukko, sanotaan joukon $G \subseteq \mathbb{C}$ *potentiaaliksi* funktiota $p_G^\mu : G \to \mathbb{R}^+$;

$$z \mapsto \int_G \log|z - w| \, \mathrm{d}\, \mu(w).$$

Määritelmä 11 (Polaarisuus ja oleellinen voimassaolo)**.** Joukkoa $G \subseteq \mathbb{C}$ sanotaan *polaariseksi*, mikäli

$$\int_{\mathbb{C}} p_{\mathbb{C}}^\mu(z) \, \mathrm{d}\, \mu(z) = -\infty$$

jokaisella äärellisellä Borelin mitalla $\mu \not\equiv 0$, jonka kantaja on kompakti joukko G:ssä. Sanotaan myös tietyn ominaisuuden olevan voimassa *oleellisesti kaikkialla* (engl. *nearly everywhere*) joukossa G, mikäli se on voimassa joukossa $E \subseteq G$ ja joukko $G \setminus E$ on polaarinen [11, Def. 3.2.2, p. 56]. Vastaavasti puhutaan oleellisesti jatkuvasta, oleellisesti subharmonisesta jne. funktiosta.

Huomautus 11. Potentiaali p_G^μ on subharmoninen määrittelyjoukossaan ja harmoninen joukossa $G \setminus \operatorname{supp} \mu$; lisäksi on

$$\lim_{z \to \infty} p_G^\mu(z) - \mu(G) \log|z| = 0.$$

Jokainen polaarinen Borelin joukko on Lebesgue-nollamittainen (ks. [11, Cor. 3.2.4, pp. 56–57]). Annettu ominaisuus on siis voimassa m-melkein kaikkialla, mikäli se on voimassa oleellisesti kaikkialla. Käänteinen seuraussuhde sitä vastoin ei yleisesti ole voimassa – jälkimmäinen ominaisuus onkin edellistä vahvempi.

Lause 29 (Subharmoninen jatkaminen)**.** *Olkoon joukko $U \subseteq \mathbb{C}$ avoin, joukko E suljettu ja polaarinen, funktio $u : U \setminus E \to \underline{\mathbb{R}}$ subharmoninen ja ylhäältä rajoitettu kunkin pisteen $z \in U \cap E$ jonkin ympäristön N osajoukossa $N \setminus E$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen* subharmoninen jatko $v : U \to \underline{\mathbb{R}}$*, jolle $v|_{U \setminus E} = u$.*

Todistus [11, Th. 3.6.1, pp. 67–68]. Olkoon $v : z \mapsto \limsup_{z' \to z, z' \in U \setminus E} u(z')$. Silloin $v < \infty$ ja funktio v on ylöspäin puolijatkuva. Olkoon sitten G rajoitettu alue kompaktina sulkeumanaan $\overline{G} \subseteq U$ ja $h : G \to \mathbb{R}$ sellainen harmoninen funktio, että $\limsup_{z \to \zeta} v(z) - h(z) \leq 0$ kussakin reunapisteessä $\zeta \in \partial G$. Joukkoa E vastaa puolestaan subharmoninen funktio $w : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ siten, että $E \mapsto \{-\infty\}$ (ks. [11, Cor. 3.5.4, p. 67]). Mielivaltaisella $\epsilon > 0$ on myös funktio $v - h - \epsilon w$ selvästi subharmoninen joukossa $G \setminus E$; tämä funktio on lisäksi $\equiv -\infty$ joukossa E ja siis subharmoninen joukossa G.

Maksimiperiaatteen (lause 14) mukaan $v - h + \epsilon w \leq \sup_{\zeta \in \partial G} \epsilon w(\zeta)$, sillä $\limsup_{z \to \zeta_0} w(z) \leq \sup_{\partial G} w$ kussakin pisteessä $\zeta_0 \in \partial G$. Näin ollen $v - h \leq 0$ joukossa $G \setminus E$; funktio v on määritelmänsä mukaan $\leq h$ myös joukossa $G \cap E$ ja siis koko G:ssä. Kuten lauseen 15 todistuksessa, seuraa ylöspäin puolijatkuvan funktion v subharmonisuus tästä. Funktion yksikäsitteisyys on puolestaan selvää heikon yksikäsitteisyysperiaatteen (lause 19) perusteella, sillä polaarinen joukko on nollamittainen. $\square$

Lause 30 (Oleellisesti subharmonisen funktion Liouvillen lause)**.** *Kun joukko $E \subseteq \mathbb{C}$ on suljettu ja polaarinen, on jokainen ylhäältä rajoitettu subharmoninen funktio $u : \mathbb{C} \setminus E \to \underline{\mathbb{R}}$ vakiofunktio.*

Todistus [11, Th. 3.6.7, p. 70]. Lauseen 29 mukaan funktiolla u on subharmoninen jatko $v : \mathbb{C} \to \underline{\mathbb{R}}$. Silloin $v \leq \sup_{\mathbb{C} \setminus E} u$ kaikkialla lauseen 19 mukaan, so. $v : \mathbb{C} \to \underline{\mathbb{R}}$ on ylhäältä rajoitettu subharmoninen funktio – väite seuraa nyt tavanomaisesta Liouvillen lauseesta (ks. [11, Cor. 2.3.4, p. 31]). $\square$

Apulause 31. *Kun G on alue ja joukko E suljettu ja polaarinen, on joukko $G \setminus E$ yhtenäinen.*

Todistus [11, Th. 3.6.3, p. 68]. Olkoon $A \cup B = G \setminus E$, missä erilliset joukot A ja B ovat avoimia ja yhtenäisiä. Olkoon lisäksi funktio $u : G \setminus E \to \underline{\mathbb{R}}$;

$$z \mapsto \begin{cases} 0, & \text{kun } z \in A, \\ -\infty & \text{muuten.} \end{cases}$$

Silloin on lauseen 29 mukaan olemassa funktion u subharmoninen jatko $v : G \to \underline{\mathbb{R}}$. Jos nyt on $B \neq \emptyset$, on seurauslauseen 18 mukaan $v \equiv -\infty$, sillä $m(B) > 0$. Silloin on selvästi $A = \emptyset$, mistä väite seuraa. □

Lause 32 (Subharmonisen funktion yleistetty maksimiperiaate)**.** *Olkoon G alue ja funktio $u : G \to \underline{\mathbb{R}}$ subharmoninen ja oleellisesti ylhäältä rajoitettu.*

(1) Jos ∂G on polaarinen, niin u on vakio.

(2) Jos ∂G ei ole polaarinen ja $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq M$ *oleellisesti kaikilla $\zeta \in \partial G$, niin $u \leq M$ joukossa G.*

Todistus [11, Th. 3.6.9, p. 70].

(1) Joukko $E = \partial G \setminus \{\infty\}$ on suljettu ja polaarinen – sen komplementti $\mathbb{C} \setminus E$ on apulauseen nojalla siis yhtenäinen. Koska toisaalta alue G on joukon $\mathbb{C} \setminus E$ komponentti, on u ylhäältä rajoitettu alueella $\mathbb{C} \setminus E = G$ ja väite seuraa lauseesta 30.

(2) Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $M = 0$. Olkoon luku $\epsilon > 0$ mielivaltainen ja joukko $E_\epsilon = \{\zeta \in \partial G \setminus \{\infty\} \mid \limsup_{z\to\zeta} u(z) \geq \epsilon\}$. Silloin $E_\epsilon \subseteq \mathbb{C}$ on suljettu ja polaarinen – funktio $v : \mathbb{C} \setminus E_\epsilon \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} \max\{u(z), \epsilon\}, & \text{kun } z \in G, \\ \epsilon & \text{muuten,} \end{cases}$$

on lauseen 16 mukaan subharmoninen joukossa $\mathbb{C} \setminus E_\epsilon$ ja selvästi ylhäältä rajoitettu. Lauseen 30 mukaan v on silloin vakio. Toisaalta se saa arvon ϵ jokaisessa pisteessä $\zeta \in \partial G \setminus E_\epsilon \cup \{\infty\}$ ($\neq \emptyset$, sillä oletuksen mukaan $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \geq \epsilon$ vain polaarisessa, ja siis aidossa ∂G:n osajoukossa). Näin ollen $u \leq v \equiv \epsilon$ kullakin luvulla $\epsilon > 0$, mistä väite seuraa. □

Apulause 33 (Kelloggin lause)**.** *Kun G on alue, on sen epäsäännöllisten reunapisteiden joukko suljettujen joukkojen äärellinen, polaarinen yhdiste.*

Todistus [11, Th. 4.2.5, p. 94]. Sivuutetaan. □

Lause 34 (Oleellisesti jatkuvan funktion Dirichlet'n probleema)**.** *Olkoon G alue, joukko ∂G ei-polaarinen ja funktio $f : \partial G \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja jatkuva oleellisesti kaikkialla joukossa ∂G. Silloin on olemassa yksikäsitteinen rajoitettu ja harmoninen funktio $u : G \to \mathbb{R}$, jolle $\lim_{z \to \zeta} u(z) = f(\zeta)$ oleellisesti kaikkialla joukossa ∂G.*

Todistus [11, Cor. 4.2.6, p. 95]. Funktio $H_G(f)$ on lauseen 22 mukaan harmoninen ja rajoitettu. Lisäksi on lauseen 24 mukaan $\lim_{z \to \zeta} H_G(f)(z) = f(\zeta)$ joukon $\partial G \setminus E_1 \cup E_2$ pisteissä, missä E_1 on alueen G epäsäännöllisten reunapisteiden ja E_2 funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko. Koska edellinen on polaarinen apulauseen 33 ja jälkimmäinen oletuksen nojalla ja koska kumpikin joukko on lisäksi Borelin joukko, on joukko $E_1 \cup E_2$ polaarinen, mistä väite seuraa funktiolle $u = H_G(f)$. Mikäli toisaalta u_1, u_2 ovat probleeman ratkaisuja, on $u_1 - u_2$ rajoitettu ja harmoninen sekä $\lim_{z \to \zeta} \pm(u_1 - u_2)(z) = 0$ oleellisesti kaikkialla joukossa ∂G. Silloin on lauseen 32 nojalla voimassa $\pm(u_1 - u_2) \leq 0$ joukossa G, so. $u_1 = u_2$. □

2.4 Harmoninen mitta ja Poissonin integraalin yleistys

Tässä kappaleessa esitetään lyhyesti määritelmä harmonisen mitan käsitteelle. Tällä mitalla on ainakin yksikkökiekossa yksinkertainen geometrinen tulkinta yksikköympyrän kaaren alueen sisäpisteen kautta piirtämän heijastuskaaren pituutena (ks. Nevanlinna [8]). Harmonista mittaa tutkitaan käsillä olevassa esityksessä kuitenkin varsin yleisluonteisesti mielivaltaisella kompleksitason alueella rajoittuen käsitteen teoreettisiin ominaisuuksiin, erityisesti Poissonin ytimen ja integraalin käsitteisiin. Kappaleen lopuksi yleistetään Poissonin integraali mille tahansa kompleksitason alueelle ja osoitetaan sen identtisyys rajoitettuun Borelin funktioon liittyvän Perron-kehitelmän kanssa silloin, kun alueen reuna on ei-polaarinen.

Määritelmä 12 (Harmoninen mitta, [11, Def. 4.3.1, p. 96])**.** Olkoon G alue. Silloin sanotaan *harmoniseksi mitaksi* funktiota $\omega_G : G \times \mathcal{B}(\partial G) \to [0,1]$, jolla

- Kun z_0 on mielivaltainen piste joukossa G, on kuvaus $B \mapsto \omega_G(z_0, B)$ Borelin todennäköisyysmitta (ks. määritelmä 29).
- Kun $f : \partial G \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, on sen *yleistetylle Poissonin integraalille* $P_G(f) : G \to \mathbb{R}$;

  $$z \mapsto \int_{\partial G} f(\zeta) \, \mathrm{d}\,\omega_G(z, \zeta)$$

  voimassa $H_G(f) = P_G(f)$.

Lause 35. *Kun $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ on alue ja joukko ∂G ei-polaarinen, on harmoninen mitta $\omega_G(z, \zeta)$ olemassa ja yksikäsitteinen.*

Todistus [11, Th. 4.3.2, pp. 96–97]. Olkoot funktiot $f_1, f_2 : \partial G \to \mathbb{R}$ jatkuvia ja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Silloin on lauseen 34 mukaan olemassa yksikäsitteinen Dirichlet'n ratkaisu $H_G(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 H_G(f_1) + \alpha_2 H_G(f_2)$. Lisäksi, mikäli $f(\zeta) \geq 0$ reunapisteissä $\zeta \in \partial G$, on $H_G(f) \geq 0$ alueella G; mikäli $f(\zeta) \equiv 1$, on myös $H_G(f) \equiv 1$. Kun piste $z \in G$ on kiinteä, on funktionaali $f \mapsto H_G(f)(z)$ näin ollen positiivinen ja lineaarinen reunalla ∂G jatkuvien funktioiden luokassa. Rieszin esityslauseen (ks. [11, Th. A.3.2, p. 211]) mukaan on silloin olemassa yksikäsitteinen Borelin todennäköisyysmitta μ_z, jolle

$$H_G(f)(z) = \int_{\partial G} f \,\mathrm{d}\,\mu_z, \quad \text{kun } f : \partial G \to \mathbb{R} \text{ on jatkuva funktio.}$$

Silloin yksikäsitteinen funktio $\omega_G : G \times \mathcal{B}(\partial G) \to [0,1]$; $(z, B) \mapsto \mu_z(B)$ on selvästi harmoninen mitta. □

Huomautus 12. Kiekossa $D = D(0,1)$ on $\mathrm{d}\,\omega_D(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} K(\zeta, z)|\mathrm{d}\,\zeta|$ ja

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega_D(z,\zeta) = \int_{\partial D} f(\zeta) \cdot \frac{1}{2\pi} K(\zeta, z)|\mathrm{d}\,\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}, z)\,\mathrm{d}\,\phi$$

$= P_D(f)$ (ks. määritelmä 4). Voidaan siis puhua funktiosta $P_G(f) : G \to \mathbb{R}; z \mapsto \int_{\partial G} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega_G(z,\zeta)$ Poissonin integraalin yleistyksenä mielivaltaiselle alueelle G.

Lisäksi sanotaan *yleistetyksi Poissonin ytimeksi* sitä (yksikäsitteistä) funktiota $K_G : \partial G \times G \to \mathbb{R}$, jolla kussakin pisteessä $z \in G$ ja reunapisteessä $\zeta \in \partial G$ on $\mathrm{d}\,\omega_G(z,\zeta) = K_G(\zeta, z)\,\mathrm{d}\,\omega_G(z_0, \zeta)$, missä piste $z_0 \in G$ on kiinteä.

Huomautus 13. Harmoniselle mitalle voidaan yksikkökiekossa käyttää merkintää $\omega(z, \phi_1, \phi_2) = \omega_{D(0,1)}(z, \Phi)$, missä $\Phi = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} \mid \phi \in (\phi_1, \phi_2)\}$. Silloin on voimassa mm.

- Kun $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$,

$$\lim_{z \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_0}} \omega(z, \phi_1, \phi_2) = \begin{cases} 1, \text{ kun } \phi_0 \in (\phi_1, \phi_2) \text{ ja} \\ 0, \text{ kun } \phi_0 \notin [\phi_1, \phi_2]. \end{cases}$$

- Kun $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, harmonisen mitan derivaatta integroimisylärajansa ϕ_2 suhteen on

$$\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\phi_2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\phi_2 - \theta)} = \frac{1}{2\pi} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_2}, z)$$

  ja merkintää vaihtaen siis

$$\mathrm{d}\,\omega(z, \alpha, \phi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\phi - \theta)}\,\mathrm{d}\,\phi = \frac{1}{2\pi} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}, z)\,\mathrm{d}\,\phi.$$

- Kun $z \in D(0,1)$, on $\int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\,\omega(z,0,\phi) = \omega(z,\phi_1,\phi_2)$.

Lause 36. *Kun $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ on alue, ∂G ei-polaarinen joukko ja $f : \partial G \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borelin funktio, on $H_G(f) = P_G(f)$.*

Todistus [11, Th. 4.3.3, pp. 97–99].

- Oletetaan, että f on ylöspäin puolijatkuva. Silloin on olemassa laskeva jono (f_n) jatkuvia funktioita $f_n : \partial G \to \mathbb{R}$ siten, että $\liminf_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ kaikkialla. Nyt kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$ on $P_G(f_n) = H_G(f_n)$ seurauslauseen 26 nojalla ja kukin $P_G(f_n)$ on siis harmoninen funktio joukossa G. Monotonisen konvergenssin lauseen (45) mukaan tällöin $\liminf_{n\to\infty} P_G(f_n)(z) = P_G(f)(z)$ kaikkialla joukossa G. Silloin $P_G(f)$ on Harnackin periaatteen (lause 13) mukaan harmoninen funktio joukossa G.

- Olkoot $w \in G$ ja $\epsilon > 0$ mielivaltaiset. Silloin on kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$ olemassa subharmoninen funktio $u_n : G \to \mathbb{R}$, jolla on voimassa (määritelmän 8 mukaan) $\limsup_{z\to\zeta} u_n(z) \leq f_n(\zeta)$ jokaisessa reunan ∂G pisteessä ζ sekä $u_n(w) > H_G(f_n) - \frac{\epsilon}{2^n}$. Olkoon sitten funktio $u = P_G(f) + \sum_n (u_n - H_G(f_n))$; koska $P_G(f)$ on harmoninen ja kukin $u_n - H_G(f_n) < 0$ subharmoninen, on u subharmoninen. Pisteessä $\zeta \in \partial G$ on siis (kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}\limsup_{z\to\zeta} u(z) &\leq \limsup_{z\to\zeta} (P_G(f) + u_n - H_G(f_n))(z) \\ &\leq \limsup_{z\to\zeta} u_n(z) \leq f_n(\zeta).\end{aligned}$$

  Täten $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq f(\zeta)$ reunalla ∂G ja $u \leq H_G(f)$. Erityisesti on voimassa

$$H_G(f)(w) \geq u(w) \geq P_G(f)(w) - \sum_n \frac{\epsilon}{2^n} = P_G(f)(w) - \epsilon$$

  mielivaltaisella $w \in G$ ja $\epsilon > 0$, joten $H_G(f) \geq P_G(f)$ koko joukossa G.

- Olkoot piste $w \in G$ ja luku $\epsilon > 0$ mielivaltaiset. Koska harmoninen mitta $B \mapsto \omega(w,B)$ on äärellinen ja siis säännöllinen, on Vitali–Carathéodoryn lauseen (47) mukaan olemassa ylhäältä puolijatkuva funktio $f'_- : \partial G \to \underline{\mathbb{R}}$ ja alhaalta puolijatkuva funktio $f'_+ : \partial G \to \overline{\mathbb{R}}$ siten, että $f'_- \leq f \leq f'_+$ ja

$$\int_{\partial G} (f'_+ - f'_-)(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega_G(w,\zeta) \leq \epsilon.$$

  Koska f on rajoitettu, pätee sama myös rajoitettuihin funktioihin $f_- = \max\{f'_-, -\sup_G|f'_-|\}$ ja $f_+ = \min\{f'_+, \sup_G|f'_+|\}$. Edellisen tarkastelun nojalla ovat epäyhtälöt $H_G(f_-) \geq P_G(f_-)$ ja (lause 21) $H_G(f_+) \leq$

$-H_G(-f_+) \leq -P_G(-f_+) = P_G(f_+)$ voimassa joukossa G. Silloin on edelleen (mielivaltaisella $\epsilon > 0$)

$$\begin{aligned} P_G(f) - \epsilon \leq P_G(f_+) - \epsilon \leq P_G(f_-) \leq H_G(f_-) \leq H_G(f) \\ \leq H_G(f_+) \leq P_G(f_+) \leq P_G(f_-) + \epsilon \leq P_G(f) + \epsilon, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

3 Harmoninen funktio Perron-kehitelmänä

Edellä on tutkittu ehtoja reuna-arvotehtävän ratkaisun olemassaololle. Tässä luvussa tutkitaan niitä määrittelyjoukkoon liittyviä ehtoja, joiden puitteissa jokainen *kvasirajoitettu* harmoninen funktio on itse asiassa Perron-kehitelmä. Aluksi määritellään käytettyjä käsitteitä ja todistetaan väitteen toinen puoli: jokainen Perron-kehitelmä eli Dirichlet'n ratkaisu on kvasirajoitettu.

Seuraavaksi esitetään erityiset osittain harmonisten ja osittain subharmonisten funktioiden luokat ja todistetaan vastaavien rajafunktioiden olemassaolo. Näiden luokkien avulla voidaan annettua mielivaltaista funktiota arvioida halutulla tarkkuudella: funktioon kompaktia osajoukkoa tai jäännösfunktioksi jäävää erotusta vaille yhtyvillä vahvemmat oletukset täyttävillä funktioilla.

Lopuksi osoitetaan *jatkuvalla alueella* harmonisten ja kvasirajoitettujen funktioiden sekä toisaalta tällä alueella määrättyjen Dirichlet'n ratkaisujen luokat samoiksi. Tätä pohjustetaan reuna-arvotehtävän paikallisella, kunkin reunapisteen ympäristössä määrätyllä Borelin funktioon liittyvällä ratkaisulla. Alueen jatkuvuus osoitetaan näin riittäväksi ehdoksi tällaisten Perron-luonnehdintojen olemassaololle; välttämättömän ja mahdollisesti väljemmän ehdon määrääminen jää lisätutkimuksen kohteeksi.

Tässä luvussa merkitään lyhyyden vuoksi harmonisen mitan differentiaalia funktiolla $\mathrm{d}\,\omega : \partial G \to \mathbb{R};\ \zeta \mapsto \mathrm{d}\,\omega_G(z_0, \zeta)$, missä piste $z_0 \in G$ on kiinteä.

3.1 Resolutiiviset ja kvasirajoitetut funktiot

Tämän kappaleen aluksi annetaan täydennyksenä liitteessä esitettyyn yleisluonteiseen aineistoon mm. nollamittaisen joukon ulkopuolella pätevän *olennaisen* ala- ja ylärajan määritelmä. Lisäksi käydään lyhyesti läpi reuna-arvotehtävän edellistä lukua yleisempi ratkaisu seuraten *Perron–Wiener–Brelot'n menetelmää* ([1], [3, pp. 156–157]). Tässä yhteydessä määritellään myös resolutiivisuuden käsite sekä ne harmonisten funktioiden luokat, joiden välisten suhteiden tutkimukseen käsillä olevan esityksen loppuosa keskittyy.

Määritelmä 13 (Olennainen ylä- ja alaraja)**.** Kun μ on mitta, G mitallinen joukko ja $f : G \to \mathbb{R}$ Borelin funktio, on $M \in \overline{\mathbb{R}}$ funktion f *olennainen yläraja* (engl. *essential upper bound*), mikäli $f(z) \le M$ mitallisessa joukossa $E \subseteq G$ ja $\mu(G \setminus E) = 0$. Määritellään lisäksi pienin olennainen yläraja $\operatorname{ess\,sup}_G^\mu f$ seuraavasti:

$$\operatorname{ess\,sup}_{z\in G}^\mu f(z) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{z \in G \mid f(z) > a\}) = 0\}.$$

Vastaavasti määritellään funktion *olennainen alaraja* ja suurin olennainen alaraja $\operatorname{ess\,inf}_G^\mu f$. Lyhyemmin voidaan merkitä $\operatorname{ess\,sup} f$ ja $\operatorname{ess\,inf} f$, kun G on funktion f määrittelyjoukko ja mitta μ selviää asiayhteydestä.

Määritellään vielä funktion f L^1-normi $\|f; L^1(G,\mu)\| = \|f\|_1 = \int_G |f| \,\mathrm{d}\,\mu$ ja sen L^∞-normi $\|f; L^\infty(G,\mu)\| = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{z\in G}^\mu |f(z)|$. Nämä määräävät edelleen *Banach-avaruudet* (ks. [11, Chap. 6.4]) $L^1(G,\mu) = \{f : G \to \mathbb{R} \mid \|f\|_1 < \infty\}$ ja $L^\infty(G,\mu) = \{f : G \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$.

Huomautus 14. *Olennainen* ylä- tai alaraja on tässä tulkittava rinnakkain melkein kaikkialla -voimassaolon kanssa: nollamittaisen joukon sivuutettavuuden kautta. Aiemmin määritelmässä 11 esitetyllä tavalla *oleellinen* ylä- tai alaraja liittyy puolestaan polaarisen joukon sivuutettavuuteen. Funktion jokainen oleellinen ylä-/alaraja on siis myös olennainen ylä-/alaraja. Jäljempänä puhutaan yksinomaan oleellisesti kaikkialla voimassaolevista ominaisuuksista (polaarisuuden mielessä), eikä termien samanmerkityksisyys luonnollisessa kielessä näin ollen muodostune ongelmaksi.

Määritelmä 14 (Majorantti ja minorantti)**.** Kun joukko $G \subseteq \mathbb{C}$, funktiot $f, g : G \to \mathbb{R}$ ja $f \le g$, sanotaan funktiota g funktion f *majorantiksi* ja g:tä f:n *minorantiksi* (joukossa G). Tämä *osittainen järjestys* määrää hilan normiavaruudessa $L^1(G,\mu)$, sillä mielivaltaisilla funktioilla $f, g \in L^1(G,\mu)$ on olemassa (pisteittäin) pienin majoranttifunktio $\max\{f, g\}$ ja suurin minoranttifunktio $\min\{f, g\}$.

Lisäksi käytetään funktioiden f, g pienimmästä harmonisesta majorantista merkintää $f \vee g$ ja suurimmasta harmonisesta minorantista merkintää $f \wedge g$.

Huomautus 15. Superharmonista funktiota suurimpana harmonisena minoranttinaan vakiofunktio 0 sanotaan tässä *jäännösfunktioksi.* Nakai [7, p. 118] käyttää englanninkielistä termiä *potential* viittaamatta kuitenkaan tavanomaiseen ja tässäkin tutkielmassa esitettyyn potentiaalin käsitteeseen (ks. määritelmä 10).

Määritelmä 15 (Resolutiivisuus)**.** Olkoon G rajoitettu alue ja $f : \partial G \to \mathbb{R}$. Silloin $\underline{H}_G(f) \le -\underline{H}_G(-f) = \overline{H}_G(f)$ (ks. lause 21) ja kumpikin funktio on harmoninen tai identtisesti $\pm\infty$. Mikäli yhtäsuuruus on voimassa joukossa G ja yhteinen funktio on harmoninen, sanotaan funktiota f *resolutiiviseksi* ja Perron-kehitelmää $H_G(f) = \underline{H}_G(f)$ (yleistetyksi) *Dirichlet'n ratkaisuksi* ([7, p. 118], vrt. [3, pp. 156–158]).

Määritelmä 16. Kun G on rajoitettu alue, määritellään siinä seuraavat funktioluokat [7, p. 116]:

- $\mathcal{H}_P(G)$ on sellaisten harmonisten funktioiden $u : G \to \mathbb{R}$ luokka, joiden itseisarvofunktiolla $|u|$ on harmoninen majorantti alueella G:

$$\mathcal{H}_P(G) = \{u : G \to \mathbb{R} \,|\, v \geq |u| \text{ jollakin harmonisella } v : G \to \mathbb{R}\}.$$

  (Itse asiassa $\mathcal{H}_P(G) = \{u - v \,|\, u, v \in \mathcal{H}^+(G)\}$. Kun nimittäin harmoninen funktio $v \geq |u|$, on selvästi $u = v - (v - u)$ ja $v, v - u \in \mathcal{H}^+(G)$. Kun toisaalta $u, v \in \mathcal{H}^+(G)$, on $u + v \geq |u - v|$ ja $u + v \in \mathcal{H}(G)$.)

- $\mathcal{H}_Q(G)$ on sellaisten funktioiden $u \in \mathcal{H}_P(G)$ luokka, joille

$$\limsup_{\lambda \to \infty} (u \wedge \lambda) \vee (-\lambda) = u$$

  melkein tasaisesti joukossa G (ks. määritelmä 31). Luokan $\mathcal{H}_Q(G)$ funktioita sanotaan *kvasirajoitetuiksi* (engl. *quasibounded*).

- $\mathcal{H}_B(G)$ on harmonisten ja rajoitettujen funktioiden luokka (selvästi $\mathcal{H}_B(G) \subseteq \mathcal{H}_Q(G)$).

- $\mathcal{H}_S(G)$ on sellaisten funktioiden $u \in \mathcal{H}_P(G)$ luokka, joilla $(u \wedge \lambda) \vee (-\lambda) \equiv 0$ mielivaltaisella $\lambda > 0$ (selvästi $\mathcal{H}_P(G) = \{q + s \,|\, q \in \mathcal{H}_Q(G), s \in \mathcal{H}_S(G)\}$).

- $\mathcal{H}_D(G)$ on Dirichlet'n ratkaisujen $H_G(f) : G \to \mathbb{R}$ (resolutiivisina funktioinaan $f : \partial G \to \mathbb{R}$) luokka.

Lause 37. *Olkoon G rajoitettu alue. Silloin*

(1) Funktio $f : \partial G \to \mathbb{R}$ on resolutiivinen täsmälleen silloin, kun se on integroituva harmonisen mitan suhteen, ts. $f \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$.

(2) Jos $f : \partial G \to \mathbb{R}$ on resolutiivinen, on $H_G(f)$ esitettävissä Perron-kehitelmänä $H_G(g)$ jollekin Borelin funktiolle $g : \partial G \to \mathbb{R}$, jolla lisäksi $|g| \leq \|f\|_\infty$ ja $f = g$ melkein kaikkialla.

(3) Kun f on resolutiivinen, on $H_G(f) \in \mathcal{H}_P(G)$.

Todistus [7, §2, pp. 118–119].

(1) Kun käytetään lyhennysmerkintää $\mathrm{d}\,\omega(\zeta) = \mathrm{d}\,\omega_G(z_0, \zeta)$ (ks. luvun johdanto), on yleistetylle Poissonin ytimelle $K_G(\zeta, z)$ (millä tahansa $z \in G$) voimassa $\operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \partial G} |K_G(\zeta, z)| < \infty$, ts. joukko $\{\zeta \in \partial G \,|\, |K_G(\zeta, z)| = \infty\}$ on nollamittainen. Edelleen on $\mathrm{d}\,\omega_G(z, \zeta) = K_G(\zeta, z)\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta)$ kussakin pisteessä $\zeta \in \partial G$.

Kullakin jatkuvalla funktiolla f on toisaalta

$$H_G(f)(z) = \int_{\partial G} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega_G(z,\zeta) = \int_{\partial G} f(\zeta) K_G(\zeta, z)\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta)$$

alueella G (ks. määritelmä 12).

Näin ollen $\|f\|_1 = \int_{\partial G} |f(\zeta)|\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta) < \infty$ täsmälleen silloin, kun funktio $f : \partial G \to \mathbb{R}$ on resolutiivinen, ts. $|H_G(f)| < \infty$.

(2) Kun funktion $f : \partial G \to \mathbb{R}$ Perronin minorantti- (tai majorantti-) funktio $\underline{H}_G(f)$ (tai $\overline{H}_G(f)$) on harmoninen ja siis rajoitettu, seuraa määritelmästä 8 sellaisen Borelin funktion $g : \partial G \to \mathbb{R}$ olemassaolo, että $f \geq g \geq -\operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$ (tai $f \leq g \leq \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$). Silloin $\underline{H}_G(f) = H_G(g)$ (tai $\overline{H}_G(f) = H_G(g)$). Mikäli f on resolutiivinen, on siis $|g| \leq \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$ kaikkialla joukossa ∂G, $g = f$ melkein kaikkialla ja $H_G(f) = H_G(g)$.

(3) Kuvaus $f \mapsto H_G(f)$ on epänegatiivinen lineaarioperaattori, joten $f + g \mapsto H_G(f) + H_G(g)$ ja $H_G(f) \geq 0$ kaikkialla, kun $f \geq 0$ kaikkialla. Näin ollen, kun reuna-arvofunktiot $f, g : \partial G \to \mathbb{R}$ ovat resolutiivisia, on $H_G(f) \wedge H_G(g) = H_G(\min\{f, g\})$ ja $H_G(f) \vee H_G(g) = H_G(\max\{f, g\})$. Erityisesti $H_G(f) = H_G(\max\{f, 0\}) - H_G(\max\{-f, 0\})$, mistä (3) seuraa. $\square$

Lause 38. *Kun G on alue, $f : \partial G \to \mathbb{R}$ funktio ja $\underline{H}_G(f), \overline{H}_G(f)$ harmonisia funktioita, on $\mathrm{d}\,\omega$-melkein kaikkialla joukossa ∂G voimassa*

$$\liminf_{z \to \zeta} \underline{H}_G(f)(z) \leq f(\zeta) \leq \limsup_{z \to \zeta} \overline{H}_G(f)(z).$$

Todistus [7, Prop. 2.1, p. 119]. Oletuksen mukaan $\underline{H}_G(f)$ on rajoitettu. Silloin on olemassa superharmoninen funktio $s : G \to \overline{\mathbb{R}}^+$ siten, että millä tahansa luvulla $\epsilon > 0$ on $\underline{H}_G(f) - \epsilon s$ funktion f subharmoninen reunaminorantti (ks. [2, S. 21]). Olkoon lisäksi F niiden pisteiden $\zeta \in \partial G$ joukko, joissa alaraja-arvo $\liminf_{z \to \zeta} s(z) = \infty$. Silloin kukin funktio ϵs on karakteristisen funktion $\chi_F : \partial G \to \{0, 1\}$ superharmoninen reunamajorantti. Lisäksi on joukon F harmoninen mitta $\omega_G(z_0, F) = 0$ (riippumatta pisteestä $z_0 \in G$), sillä $\int_{\partial G} \chi_F(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta) \leq \int_{\partial G} \epsilon s(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta)$ ja funktio s on ylhäältä rajoitettu.

Mielivaltaisessa pisteessä $\zeta \in \partial G \setminus F$ on puolestaan (millä tahansa luvulla $\epsilon > 0$)

$$f(\zeta) \geq \limsup_{z \to \zeta} (\underline{H}_G(f)(z) - \epsilon s(z)) \geq \liminf_{z \to \zeta} \underline{H}_G(f)(z) - \epsilon \limsup_{z \to \zeta} s(z).$$

Toisaalta myös $\liminf_{z \to \zeta} s(z)$ on epänegatiivinen ja äärellinen, joten $f(\zeta) \geq \liminf_{z \to \zeta} \underline{H}_G(f)(z)$.

Koska funktio $\underline{H}_G(f)$ on harmoninen, on funktio $-\overline{H}_G(f) = \underline{H}_G(-f)$ samoin. Edellä sanotun nojalla on silloin pisteessä $\zeta \in \partial G \setminus F$ voimassa

$-f(\zeta) \geq \liminf_{z\to\zeta} -\overline{H}_G(f)(z)$. Väite seuraa nyt joukon $F \subseteq \partial G$ nollamittaisuudesta. $\square$

Huomautus 16. Resolutiivisten funktioiden luokka $L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$ ja Perron-kehitelmien luokka $\mathcal{H}_D(G)$ ovat lauseen 38 nojalla vektorihiloina isomorfiset: kuvaukselle $J : f \mapsto H_G(f)$ on voimassa $J(\max\{f_1, f_2\}) = J(f_1) \vee J(f_2)$ ja $J(\min\{f_1, f_2\}) = J(f_1) \wedge J(f_2)$ aina, kun $f_1, f_2 \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$.

Lause 39. *Luokka $\mathcal{H}_D(G) \subseteq \mathcal{H}_Q(G)$, ts. jokainen Dirichlet'n ratkaisu on kvasirajoitettu.*

Todistus [7, §3, pp. 119–120]. Olkoon jälleen funktio $\mathrm{d}\,\omega(\zeta) = \mathrm{d}\,\omega_G(z_0, \zeta)$ ja $K_G(\zeta, z)$ yleistetty Poissonin ydin (pisteen z_0 suhteen); olkoon lisäksi $H_G(f) \in \mathcal{H}_D(G)$, ts. $f \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$. Silloin (millä tahansa vakiofunktiolla λ) on $H_G(\lambda) \equiv \lambda$ ja

$$\begin{aligned}
((H_G(f) \wedge \lambda) \vee (-\lambda))(z) &= ((H_G(f) \wedge H_G(\lambda)) \vee H_G(-\lambda))(z) \\
&= (H_G(\min\{f, \lambda\}) \vee H_G(-\lambda))(z) \\
&= H_G(\max\{\min\{f, \lambda\}, -\lambda\})(z) \\
&= \int_{\partial G} \max\{\min\{f(\zeta), \lambda\}, -\lambda\} K_G(\zeta, z)\, \mathrm{d}\,\omega(\zeta).
\end{aligned}$$

Edelleen on tarpeeksi suurilla λ:n arvoilla $|\max\{\min\{f, \lambda\}, -\lambda\}| = |f|$; lisäksi $\lim_{\lambda\to\infty} \max\{\min\{f, \lambda\}, -\lambda\} = f$ kaikkialla. Dominoidun konvergenssin lauseen (46) mukaan joukossa G on näin ollen $\lim_{\lambda\to\infty}((H_G(f) \wedge \lambda) \vee (-\lambda))(z)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\partial G} \max\{\min\{f(\zeta), \lambda\}, -\lambda\} K_G(\zeta, z)\, \mathrm{d}\,\omega(\zeta) \\
&= \int_{\partial G} f(\zeta) K_G(\zeta, z)\, \mathrm{d}\,\omega(\zeta) = H_G(f)(z).
\end{aligned}$$

Täten $H_G(f) \in \mathcal{H}_Q(G)$. $\square$

Huomautus 17. Edellisen lauseen mukainen osajoukkorelaatio on aito esimerkiksi alueen $G = D(0, 1) \setminus [0, 1)$ tapauksessa. Kun kiekon puolikas $A = \{z \in D(0, 1) \mid \Im z > 0\}$ ja suljettu väli $B = [0, 1]$, voidaan nimittäin karakteristisen funktion $\chi_B : \partial A \to \{0, 1\}$ Perron-kehitelmä $H_A(\chi_B)$ laajentaa alueella G harmoniseksi funktioksi, joka on kvasirajoitettu, muttei esitettävissä Dirichlet'n ratkaisuna (ks. [7, p. 120]). Käsillä olevan tutkielman loppuosassa pyritäänkin määräämään alueeseen kohdistuva (riittävä) ehto luokkien $\mathcal{H}_D(G)$ ja $\mathcal{H}_Q(G)$ samuudelle.

3.2 Harmonisaatio ja subharmoninen jatkaminen

Seuraavassa tarkastellaan eri tavoin "osittain harmonisia" funktioita. Perustavana käsitteenä toimii *lakaisu*, superharmonisen funktion ala-arvio oleellisesti kaikkialla kompaktissa joukossa siihen yhtyvänä funktiona. Harmonisaation avulla voidaan puolestaan jatkuvaa funktiota arvioida mielivaltaisella tarkkuudella harmonisena funktiona. Wiener- ja Dirichlet-jatkon avulla voidaan vielä arvioida epänegatiivisen funktion harmonisaatiota ja Perron-kehitelmää halutun ympäristön ulkopuolella häviävällä subharmonisella funktiolla, erotuksen jäädessä jäännösfunktioksi.

Määritelmä 17 (Lakaisu)**.** Olkoon G on rajoitettu alue, $K \subseteq G$ Borel-joukko ja $f : G \to \mathbb{R}$ epänegatiivinen, superharmoninen funktio. Silloin sanotaan f:n pienintä superharmonista majoranttia, joka $= f$ oleellisesti kaikkialla joukossa K, funktion f *lakaisuksi* (ransk. *balayage*) $b_G^K(f) : G \to \mathbb{R}$ yli joukon K (vrt. [3, pp. 158–159]. Helms vaatii itse asiassa joukon K kompaktisuutta. Koska yhtenevyys oleellisesti kaikkialla rajoitetussa Borel-joukossa kuitenkin takaa yhtenevyyden oleellisesti kaikkialla vastaavassa sulkeumassa, voidaan vaatimusta tältä osin lieventää.)

Huomautus 18. Vakiofunktion 1 lakaisu yli joukon K vastaa K:n harmonista mittaa sen ulkopuolella: $b_G^K(1)(z) = \omega(z, K)$ kussakin pisteessä $z \in G \setminus K$.

Määritelmä 18 (Harmonisoituvuus)**.** Olkoon G rajoitettu alue ja $f : G \to \mathbb{R}$ funktio. Silloin määritellään funktio $\overline{h}_G(f) : z \mapsto \inf_{w \in \mathcal{W}_G(f)} w(z)$, missä $\mathcal{W}_G(f)$ on funktion f *superharmonisten osittaismajoranttien* muodostama funktioperhe:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_G(f) = \{s : G \to \mathbb{R} \mid\, & s \text{ on superharmoninen ja } s \geq f \text{ joukossa } G \setminus K \\ & \text{jollakin kompaktilla } K \subseteq G\}.\end{aligned}$$

Lisäksi merkitään $\underline{h}_G(f) = -\overline{h}_G(-f)$. Funktiota f sanotaan *harmonisoituvaksi* (engl. *harmonizable*) alueella G, mikäli $\underline{h}_G(f) = \overline{h}_G(f)$ ja kumpikin funktio on harmoninen. Yhteistä funktiota sanotaan silloin funktion f *harmonisaatioksi* ja merkitään $h_G(f) = \overline{h}_G(f)$. Jokaisella alueen G osa-alueella harmonisoituvien, jatkuvien ja rajoitettujen funktioiden luokkaa merkitään $\mathcal{N}(G)$:llä [7, §5, p. 122].

Huomautus 19. Luokka $\mathcal{N}(G)$ on Banach-algebra ja siis (Cauchy-)täydellinen: kukin sen Cauchy-jono normin $\|f\| = \sup_G |f|$ mielessä (so. jono (f_n), jolle $\lim_{n_1, n_2 \geq n_0 \to \infty} \|f_{n_1} - f_{n_2}\| = 0$) suppenee tämän normin mielessä kohti rajafunktiota joukossa $\mathcal{N}(G)$. Lisäksi se on vektorihila ja sellaisena homomorfinen luokan $\mathcal{H}_B(G)$ kanssa homomorfisminaan $f \mapsto h_G(f)$; mm. $\max\{f, g\} = h_G(f) \wedge h_G(g)$. (Todistuksista ks. esim. [13, pp. 223–227].)

Lause 40. *Olkoon G rajoitettu alue. Silloin jokainen jatkuva ja rajoitettu funktio f on harmonisoituva jokaisella G:n osa-alueella, $f \in \mathcal{N}(G)$.*

Todistus [7, §5, pp. 122–123].

- Olkoon funktio $s : G \to \mathbb{R}$ superharmoninen, rajoitettu ja jatkuva sekä $G' \subseteq G$ alue, säännöllisten alueiden (ks. kappale 2.2) jono (G_n)

alueen G' tyhjennys (so. $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$ kullakin n:llä ja $\lim_{n\to\infty} G_n = G'$) ja u funktion s suurin harmoninen minorantti. Silloin funktio $u = \liminf_{n\to\infty} b_G^{G'\setminus G_n}(s)$. Koska kukin lakaisu $b_{G'}^{G'\setminus G_n}(s) \in \mathcal{W}_{G'}(s|_{G'})$ (ks. määritelmä 18), on alueella G' voimassa $b_{G'}^{G'\setminus G_n}(s) \geq \overline{h}_G(s) \geq \underline{h}_G(s) \geq u$, joten $\overline{h}_G(s) = \underline{h}_G(s) = u$ joukossa G'. Täten $s \in \mathcal{N}(G)$.

- Olkoon sitten G' alue, $G \supset \overline{G'}$ ja funktio $f : G \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu. Silloin on $f(z) = H_{G'}(f|_{\partial G'})(z)$ joukossa G' ja määritelmän 8 mukaan on siis olemassa jatkuvat, rajoitetut ja superharmoniset funktiot $r_n, r_n' : G' \to \mathbb{R}$, jotka voidaan edelleen laajentaa samat ehdot täyttäviksi funktioiksi $s_n, s_n' : G \to \mathbb{R}$ siten, että jono $(s_n - s_n')$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f sulkeumassa $\overline{G'}$. Tämä jono on silloin Cauchy-jono; toisaalta edellisen kohdan nojalla kukin s_n ja s_n' ja siten myös $s_n - s_n' \in \mathcal{N}(G)$. Koska $\mathcal{N}(G)$ on Cauchy-täydellinen, on myös $f \in \mathcal{N}(G)$. □

Määritelmä 19 (Wiener-jatko)**.** Olkoon G rajoitettu alue, piste $\zeta_0 \in \partial G$, $Z_0 \subseteq \mathbb{C}$ pisteen ζ_0 sellainen ympäristö, että $Z_0 \cap G$ on alue ja funktio $v \in \mathcal{N}^+(G)$ sekä $v = 0$ joukossa $G \setminus Z$, missä $Z \subset Z_0$ ja $Z \cap G$ on alue. Silloin määritellään funktioon v liittyvän harmonisaation $h_{Z_0\cap G}(v)$ *Wiener-jatko* (engl. *Wiener extremization*) funktiona $h(v) : G \to \mathbb{R}^+$;

$$z \mapsto \begin{cases} h_{Z_0\cap G}(v)(z), & \text{kun } z \in Z_0 \cap G, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Lause 41. *Wiener-jatko $h(v) : G \to \mathbb{R}^+$ (missä G, ζ_0, Z_0, v ja Z ovat yo. määritelmän mukaiset) on jatkuva ja subharmoninen funktio, sen raja-arvo $\lim_{z\to\zeta} h(v)(z) = 0$ kussakin pisteessä $\zeta \in \partial G \setminus Z_0$ ja $h_G(v) - h(v)$ on jäännösfunktio G:ssä.*

Todistus [7, L. 6.1, pp. 123–125]. Olkoon $t : Z_0 \cap G \to \mathbb{R}$ vakiofunktion 1 lakaisu yli joukon $\overline{Z} \cap G$, ts. pienin superharmoninen funktio ≥ 1, joka $=$ 1 oleellisesti kaikkialla joukossa $\overline{Z} \cap G$. Silloin $t(z) = \omega(z, \overline{Z} \cap G)$ joukon $Z_0 \cap G \setminus \overline{Z}$ pisteissä. Toisaalta kukin piste $\zeta \in \partial Z_0 \cap G = \partial(Z_0 \cap G) \setminus Z_0$ on säännöllinen lauseen 27 mukaan, sillä $Z_0 \cap G$ on rajoitettu alue, joten $\lim_{z\to\zeta} t(z) = 0$ kussakin pisteessä ζ. Olkoon sitten $M_G = \sup_G v$; silloin $M_G t \in \mathcal{W}_{Z_0\cap G}(v)$ ja siis $0 \leq h_{Z_0\cap G}(v) \leq M_G t$, joten $\lim_{z\to\zeta} h_{Z_0\cap G}(v)(z) = 0$ reunapisteiden joukossa $\partial Z_0 \cap G$. Funktio $h(v)$ on siis jatkuva; se on selvästi myös subharmoninen ja $\lim_{z\to\zeta} h(v)(z) = 0$ pisteissä $\zeta \in \partial G \setminus Z_0$.

Kun piste $z_0 \in Z_0 \cap G$, on määritelmän 18 mukaan olemassa sellainen jono $(u_n \in \mathcal{W}_{Z_0\cap G}(v))$ että $u_n(z_0) - h(v)(z_0) < 2^{-n}$ kullakin n:llä. Lisäksi kukin superharmoninen funktio $u_n - h(v) \geq 0$ kaikkialla, joten kuvaus $q : z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n - h(v))(z)$ on superharmoninen, epänegatiivinen kaikkialla ja ≤ 1 pisteessä z_0. Lisäksi on sen lakaisu $u = b_{Z_0\cap G}^{\overline{Z}\cap G}(q) \geq 0$. Koska $\lim_{z\to\zeta} u(z) = 0$

pisteissä $\zeta \in \partial Z_0 \cap \overline{G}$, on olemassa (pisteen ζ_0 ympäristö) Z_1: $Z \subset Z_1 \subset Z_0$ siten, että u on ylhäältä rajoitettu joukossa $\partial Z_1 \cap G$.

Kun funktio $w = b_G^{\overline{Z_1} \cap G}(1)$, vastaa se joukon $\overline{Z_1} \cap G$ harmonista mittaa alueen $G \setminus \overline{Z_1}$ pisteissä, joten se on jatkuva, superharmoninen ja epänegatiivinen joukossa G ja harmoninen joukossa $G \setminus \overline{Z_1}$; lisäksi se on $= 1$ joukossa $\overline{Z_1} \cap G$. Koska alue G on rajoitettu, on olemassa kiekko $D \supset \overline{G}$; silloin lakaisulle $w' = b_D^{\overline{Z_1}}$ on $w' < 1$ joukossa ∂Z_0. Lisäksi on joukossa G selvästi $0 < w \leq w'$, joten $\sup_{\partial Z_0 \cap G} w < 1$. Edellä on todettu, että on vielä voimassa (jollakin $M' > 0$)

$$\sup_{\partial Z_0 \cap G} w < 1 - \frac{1}{M'} \sup_{\partial Z_1 \cap G} u.$$

Koska $u(z) = 0$ joukossa $\partial Z_0 \cap G$, on siellä myös (jollakin $M > 0$)

$$M' \sup_{\partial Z_0 \cap G} w < M = u(z) + M \quad \text{ja edelleen } u(z) + M > M'w.$$

Koska toisaalta $w(z) = 1$ joukossa $\partial Z_1 \cap G$, on siellä myös

$$\sup_{\partial Z_1 \cap G} u + M < M' = M'w(z) \quad \text{ja edelleen } u(z) + M < M'w.$$

Edellä sanotun nojalla funktio $p : G \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} u + M, & \text{kun } z \in Z_1 \cap G, \\ \min\{u + M, M'w\}, & \text{kun } z \in (Z_0 \setminus Z_1) \cap G, \\ M'w & \text{muuten} \end{cases}$$

on epänegatiivinen ja superharmoninen. Kun $\{K_n\}_{1 \leq n \leq m}$ on kokoelma kompakteja joukkoja siten, että kullakin n:llä on $u_n \geq v$ joukossa $Z_0 \cap G \setminus K_n$, on yhdiste $K = \bigcup_n K_n$ kompakti ja

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} u_n \geq v \quad \text{joukossa } Z_0 \cap G \setminus K.$$

Edelleen on joukossa $Z \cap G \setminus K$ voimassa

$$\begin{aligned} h(v) + \frac{1}{m}p = h(v) + \frac{1}{m}(u + M) > h(v) + \frac{1}{m}q& \\ > h(v) + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (u_n - h(v)) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} u_n \geq v& \end{aligned}$$

ja siten koko joukossa $Z_0 \cap G \setminus K$ on $h(v) + (1/m)p \geq v$, sillä $v = 0$ joukossa $Z_0 \cap G \setminus K$. Näin ollen Wiener-jatkolla $h(v)$ ja epänegatiivisella, subharmonisella funktiolla p on

$$h(v) + \frac{1}{m}p \in \mathcal{W}_{Z_0 \cap G}(v) \quad \text{jokaisella luonnollisella luvulla } m.$$

Kun funktio $u \in \mathcal{W}_G(v)$ on mielivaltainen, on $u \geq v$ johonkin kompaktiin joukkoon $K' \subseteq G$ liittyvässä erotuksessa $G \setminus K'$ ja lisäksi joukossa $Z_0 \cap G \setminus K' \cap \overline{Z_1}$, sillä $v = 0$ joukossa $G \setminus Z$. Näin ollen $u|_{Z_0 \cap G} \in \mathcal{W}_{Z_0 \cap G}(v)$ ja edelleen $u \geq h(v)$ joukossa $Z_0 \cap G$, siis koko alueella G, joten funktio $h_G(v)$ on $h(v)$:n harmoninen majorantti. Toisaalta on edellisen kohdan mukaan olemassa kompakti joukko K siten, että $h(v) + (1/m)p \geq v$ joukossa $Z_0 \cap G \setminus K$ (ja selvästi myös joukossa $G \setminus Z_0 \cap G$), joten joukossa $G \setminus K$ on (mielivaltaisella $m \in \mathbb{N}$)

$$u + \frac{1}{m}p \geq h(v) + \frac{1}{m}p \geq v.$$

Silloin kukin $u + \frac{1}{m}p \in \mathcal{W}_G(v)$ ja siis $\geq h_G(v)$ kaikkialla. Koska jokaisessa pisteessä $z \in G$ on

$$\inf\{\limsup_{m\to\infty} u(z) + \frac{1}{m}p(z) \,|\, u \text{ on funktion } h(v) \text{ harmoninen majorantti}\}$$

$\geq h_G(v)(z)$, on harmonisaatio $h_G(v)$ funktion $h(v)$ pienin harmoninen majorantti, mistä väite seuraa. □

Määritelmä 20 (Dirichlet-jatko)**.** Olkoon G rajoitettu alue, $Z_0 \subseteq \mathbb{C}$ pisteen $\zeta_0 \in \partial G$ sellainen ympäristö, että $Z_0 \cap G$ on alue ja funktio $f : G \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja epänegatiivinen Borelin funktio joukossa $\overline{Z_0} \cap \partial G$, $= 0$ muualla sekä jatkuva joukon $\partial Z_0 \cap \partial G$ pisteissä. Silloin määritellään funktioon f liittyvän Perronin funktion $H_{Z_0 \cap G}(f)$ *Dirichlet-jatko* (engl. *Dirichlet extremization*) funktiona $H(f) : G \to \mathbb{R}^+$;

$$z \mapsto \begin{cases} H_{Z_0 \cap G}(f)(z), & \text{kun } z \in Z_0 \cap G, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Lause 42. *Dirichlet-jatko $H(f) : G \to \mathbb{R}^+$ (missä G, ζ_0, Z_0 ja f ovat yo. määritelmän mukaiset) on subharmoninen ja $H_G(f) - H(f)$ jäännösfunktio G:ssä.*

Todistus [7, L. 7.1, pp. 125–126]. Lauseen 27 mukaan kukin reunapiste joukossa $\partial Z_0 \cap \overline{G}$ on säännöllinen. Koska $f = 0$ joukossa $\partial Z_0 \cap G = \partial(Z_0 \cap G) \setminus \overline{Z_0} \cap \partial G$, on myös $\lim_{z\to\zeta} H_{Z_0 \cap G}(f)(z) = 0$ pisteissä $\zeta \in \partial Z_0 \cap G$. Näin ollen Dirichlet-jatko $H(f)$ on jatkuva ja edelleen subharmoninen joukossa G.

Olkoon funktio $f' : \partial(Z_0 \cap G) \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} H_G(f)(z), & \text{kun } z \in \partial Z_0 \cap G, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Mielivaltaisella funktion f subharmonisella reunaminorantilla s on silloin voimassa $s \leq H_G(f)$ joukon $Z_0 \cap G \subseteq G$ pisteissä, joten $s \in \mathcal{U}_{Z_0 \cap G}(f + f')$ ja edelleen $H_G(f)(z) \leq H_{Z_0 \cap G}(f + f')(z)$ pisteissä $z \in Z_0 \cap G$. Samoin voidaan osoittaa, että $H_G(f)(z) \geq H_{Z_0 \cap G}(f + f')(z)$, joten joukossa $Z_0 \cap G$ on

$$H_G(f)(z) = H_{Z_0 \cap G}(f)(z) + H_{Z_0 \cap G}(f')(z).$$

Olkoon sitten funktio $H' : G \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} H_{Z_0 \cap G}(f')(z), & \text{kun } z \in Z_0 \cap G, \\ H_G(f)(z) & \text{muuten.} \end{cases}$$

Koska kukin reunapiste $\zeta \in \partial Z_0 \cap G$ on säännöllinen, on H' jatkuva funktio. Lisäksi $0 \leq H' \leq H_G(f)$ ja $\lim_{z \to \zeta} f(z) = f(\zeta) = 0$ kussakin pisteessä $\zeta \in \partial Z_0 \cap \partial G$, joten H' on superharmoninen joukossa G, toisaalta $\lim_{z \to \zeta} H'(z) = 0$ alueen G säännöllisissä reunapisteissä ja siis ainakin yhdessä pisteessä – lisäksi H' on selvästi rajoitettu funktio. Funktio $H' = H_G(f) - H(f)$ on siis jäännösfunktio. $\square$

3.3 Jatkuva alue ja Perron-luonnehdinta

Seuraavassa esitettävä määritelmä alueen käyristyvälle reunapisteelle vastaa ajatusta alueen rajaamisesta tämän pisteen jossakin ympäristössä jatkuvalla käyrällä. Nakai [7] esittää määritelmän euklidisessa $\mathbb{R}^n$-avaruudessa $(n-1) \times 1$-ulotteisen sylinterin tai pallon sektorinosan avulla; seuraavassa rajoitutaan johdonmukaisuuden vuoksi kompleksitasoon ja jatkuviin käyriin sen suorakulmioissa ja sektorinosissa. Lisäksi osoitetaan, että jatkuvan alueen jonkin reunapisteen ympäristössä epänegatiivinen, rajoitettu ja harmoninen funktio voidaan esittää reuna-arvot määräävän Borelin funktion Perron-kehitelmänä. Lopuksi todistetaan yleisempi väite minkä tahansa kvasirajoitetun, harmonisen funktion identtisyydestä jonkin Perron-kehitelmän kanssa.

Määritelmä 21 (Käyristyvä piste, vrt. [7, §4, pp. 120–121])**.** Olkoon G alue ja ζ sen reunapiste. Silloin

- Olkoon olemassa jokin sellainen (ζ:sta riippuva) koordinaattimuunnos (so. origon ympäri kääntämisen ja yhdensuuntaissiirron muodostama kuvaus) $G \mapsto G'$, jossa $\zeta \mapsto \mathrm{i}\,y$, $y \in \mathbb{R}^+$; pisteen ζ *karteesinen käyräympäristö* (engl. *admissible neighbourhood*) $Z \mapsto Z' = \{z \,|\, \Re z \in (-a, a), \Im z \in (y - b, y + b)\}(a, b > 0)$ ja jatkuva funktio $f : (-a, a) \to (y - b, y + b)$, että $G \cap Z$ on yhtenäinen sekä kunkin pisteen $z \in G' \cap Z'$ imaginääriosa $\Im z < f(\Re z)$ ja yhtäsuuruus on voimassa reunapisteissä $z \in \partial G' \cap Z'$. Silloin sanotaan pistettä ζ *karteesisesti käyristyväksi* pisteeksi (engl. *Cartesian graphic point*).

- Olkoon sitten olemassa jokin sellainen (samoin ζ:sta riippuva) koordinaattimuunnos $G \mapsto G'$, jossa $\zeta \mapsto x \in \mathbb{R}^+$; pisteen ζ *napainen käyräympäristö* $Z \mapsto Z' = \{z \,|\, |z| \in (x-b, x+b), \arg z \in (-a,a)\} (a \in (0,\pi), b \in (0,x))$ ja jatkuva funktio $\phi : (-a,a) \to (x-b, x+b)$, että $G \cap Z$ on yhtenäinen sekä kunkin pisteen $z \in G' \cap Z'$ itseisarvo $|z| < \phi(\arg z)$ ja yhtäsuuruus on voimassa reunapisteissä $z \in \partial G' \cap Z'$. Silloin sanotaan pistettä ζ *napaisesti käyristyväksi* pisteeksi (engl. *polar graphic point*).

- Rajoitettua aluetta G kutsutaan *jatkuvaksi*, mikäli sen jokainen reunapiste $\zeta \in \partial G$ on (karteesisesti tai napaisesti) käyristyvä.

- Jokaisella jatkuvalla alueella $G \subseteq \mathbb{C}$ on olemassa sulkeuman $\overline{G}$ *käyräpeite* (engl. *admissible covering*): avoin (ja äärellinen, sillä $\overline{G}$ on kompakti) peite $\{U_n\}_{0 \le n \le l}$, missä $U_0 \subseteq G$ ja kukin U_n $(n \ge 1)$ on pisteen $\zeta_n \in \partial G$ käyräympäristö.

Lause 43. *Olkoon G jatkuva alue, ζ_0 sen käyristyvä reunapiste, sitä vastaava käyräympäristö Z sekä funktio $v : Z \cap G \to \mathbb{R}$ epänegatiivinen, rajoitettu ja harmoninen funktio raja-arvoinaan 0 joukossa $\partial Z \cap G$. Silloin on olemassa rajoitettu Borelin funktio $f : \partial(Z \cap G) \to \mathbb{R}^+$, joka on jatkuva, $= 0$ joukossa $\partial Z \cap G$ sekä määrää funktion v reuna-arvot: $v = H_{Z \cap G}(f)$.*

Todistus [7, L. 8.1, p. 126].

(1) Todistus voidaan suorittaa käyräympäristöön Z liittyvässä koordinaattimuunnoksesssa $Z \mapsto Z'$; jäljempänä merkitään Z:lla, G:lla ja v:llä vastaavia muunnoksiaan. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan lisäksi olettaa, että $v \in [0,1]$. Kun piste $z_0 \in Z \cap G$ on kiinteä ja merkitään $\mathrm{d}\,\omega(\zeta) = \mathrm{d}\,\omega_G(\zeta, z_0)$, on yleistetyllä Poissonin ytimellä $K_G(z,\zeta)$ voimassa $\mathrm{d}\,\omega_G(\zeta, z) = K_G(z,\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta)$. Mikäli ζ_0 on karteesisesti käyristyvä, olkoot kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$ joukko $V_n = \{z + \frac{\mathrm{i}}{n} \,|\, z \in Z \cap G\}$ ja funktio $v_n : \overline{Z \cap G} \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} v(z - \frac{\mathrm{i}}{n}), & \text{kun } z \in V_n \cap G, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Mikäli taas ζ_0 on napaisesti käyristyvä, olkoot kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$ joukko $V_n = \{(1 + \frac{1}{n})z \,|\, z \in Z \cap G\}$ ja funktio $v_n : \overline{Z \cap G} \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} v(\frac{z}{1+\frac{1}{n}}), & \text{kun } z \in V_n \cap G, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Kummassakin tapauksessa on kullakin luvulla n voimassa $V_{n+1} \setminus Z \subseteq V_n \setminus Z$; lisäksi voidaan yleisyyttä menettämättä olettaa, että jollakin luvulla $n_0 \in \mathbb{N}$ on $V_{n_0} \subseteq Z$. Silloin kukin v_n, $n \ge n_0$ on harmoninen joukossa $V_n \cap G$ ja jatkuva joukossa $\overline{Z \cap G}$. Edelleen on funktio $f_n = v_n|_{\partial(Z\cap G)}$ jatkuva ja $0 \le f_n \le 1$; olkoon vielä w_n vastaava Perron-kehitelmä: $w_n = H_{Z\cap G}(f_n)$.

(2) Olkoot $\epsilon > 0$ ja $z \in Z \cap G$ mielivaltaiset. Silloin on jollakin luvulla $n \ge n_0$ voimassa $z \in V_n \cap G$ ja siis

$$v_n(z) - v(z) = \begin{cases} v(z - \frac{\mathrm{i}}{n}) - v(z), & \text{kun } \zeta_0 \text{ on karteesisesti käyristyvä,} \\ v(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} z) - v(z), & \text{kun } \zeta_0 \text{ on napaisesti käyristyvä.} \end{cases}$$

Täten $\lim_{n\to\infty}(v_n(z) - v(z)) = 0$, sillä v on jatkuva funktio, joten jollakin luvulla $n_1 \ge n_0$ on $|v_n(z) - v(z)| < \epsilon/3$ aina, kun $n \ge n_1$.

(3) Olkoon sitten Perron-kehitelmä $w = H_{Z\cap G}(\chi_{\partial G})$; silloin

$$\lim_{z\to\zeta} w(z) = \begin{cases} 0, & \text{kun } \zeta \in \partial Z \cap G, \\ 1, & \text{kun piste } \zeta \in Z \cap \partial G \text{ on säännöllinen} \end{cases}$$

ja lisäksi on selvästi $0 \le w \le 1$. Olkoon kiekko $D \supseteq \overline{G}$ ja harmoninen epänegatiivinen funktio $q : D \setminus Z \cap \partial G \to \mathbb{R}^+$, jolle $\lim_{z\to\zeta} q(z) = 0$ ympyrällä ∂D ja $= \infty$ reunan $Z \cap \partial G$ epäsäännöllisissä pisteissä. Alueella $Z \cap G$ on lisäksi voimassa $w + \delta q \ge w_n$ mielivaltaisella $\delta > 0$ ja siis $w \ge w_n$ kullakin luvulla $n \ge n_0$; erityisesti on $0 \le w_n \le \sup_{\overline{Z}\cap\overline{G}\setminus V_n} w$ alueella $\overline{Z} \cap \overline{G} \setminus V_n$ kullakin n:llä. Vastaavasti on harmoninen funktio $w_n - v_n - \delta q - \sup_{\overline{Z}\cap\overline{G}\setminus V_n} w \le 0$ alueella $V_n \cap G$ ja näin ollen myös alueella $Z \cap G$ (mielivaltaisella $\delta > 0$). Siis $0 \le w_n - v_n \le \sup_{\overline{Z}\cap\overline{G}\setminus V_n} w$ alueella $Z \cap G$. Koska $\lim_{n\to\infty} \sup_{\overline{Z}\cap\overline{G}\setminus V_n} w = 0$, on jollakin luvulla $n_2 \ge n_0$ voimassa $|w_n(z) - v_n(z)| < \epsilon/3$ aina, kun $n \ge n_2$.

(4) Olkoon B funktioavaruuden $L^\infty(\partial(Z \cap G), \mathrm{d}\,\omega)$ suljettu yksikkökiekko, so. $B = \{b : \partial(Z \cap G) \to \mathbb{R} \mid \|b\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|b| \le 1\}$. Silloin on Banach–Alaoglun lauseen (ks. [12, pp. 66–68]) mukaan jokaisella funktiojonolla joukossa B kasautumispiste (funktio) tässä joukossa, erityisesti on jonolla $(f_n)_{n\ge n_0}$ kasautumispiste $f' : \partial(Z \cap G) \to \mathbb{R}$, $\operatorname{ess\,sup}|f'| \le 1$. Nyt on olemassa luku $n_3 > \max\{n_1, n_2\}$ siten, että

$$\left|\int_{\partial(Z\cap G)} K_{Z\cap G}(\zeta, z) f_{n_3}(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta) - \int_{\partial(Z\cap G)} K_{Z\cap G}(\zeta, z) f'(\zeta)\,\mathrm{d}\,\omega(\zeta)\right| \le \epsilon/3,$$

so. $|w_{n_3}(z) - H_{Z\cap G}(f')(z)| < \epsilon/3$. Nyt on kohtien 2 ja 3 sekä kolmioepäyhtälön mukaan $|v(z) - H_{Z\cap G}(f')(z)| < \epsilon$ (pisteittäin, mielivaltaisella luvulla $\epsilon > 0$). Siis $v = H_{Z\cap G}(f')$.

(5) Koska funktio f' on resolutiivinen, on lauseen 37 nojalla olemassa sellainen Borelin funktio $f'' : \partial(Z \cap G) \to \mathbb{R}$, että $0 \le f'' \le 1$ ja $v = H_{Z\cap G}(f') = H_{Z\cap G}(f'')$. Olkoon vielä funktio $f''' : \partial(Z \cap G) \to \mathbb{R}$;

$$z \mapsto \begin{cases} f''(z), & \text{kun } z \in \overline{Z} \cap \partial G, \\ 0 & \text{muuten;} \end{cases}$$

silloin f''' on myös rajoitettu Borelin funktio, sillä $\overline{Z} \cap \partial G$ on Borelin joukko, $f''' = 0$ joukossa $\partial Z \cap G$ ja $(v =) H_{Z\cap G}(f'') = H_{Z\cap G}(f''')$. Olkoon lisäksi kuvaus $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(\overline{Z \cap G})$;

$$t \mapsto \{z \in \overline{Z \cap G} \,|\, \partial Z \cap \partial G \cap D(z,t) \neq \emptyset\}.$$

Koska $\lim_{z\to\zeta} v(z) = v(\zeta) = 0$ kussakin pisteessä $\zeta \in \partial Z \cap \partial G$, on olemassa sellainen aidosti laskeva jono $(t_n > 0)$, että $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, missä kukin $s_n = \sup_{\beta(t_n)\cap\partial(Z\cap G)} v$.

(6) Lauseen 38 nojalla $0 \leq f''' \leq s_n$ $\mathrm{d}\,\omega$-melkein kaikkialla joukossa $\beta(t_n) \cap \partial(Z \cap G)$ ja siis myös melkein kaikkialla joukossa $(\beta(t_n) \setminus \beta(t_{n+1})) \cap \partial(Z \cap G)$ (kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$), sillä $v = H_{Z\cap G}(f''')$. Olkoon sitten funktiojono $(f'''_n : \partial(Z \cap G) \to \mathbb{R})$;

$$z \mapsto \begin{cases} \max\{f'''(z), s_n\}, & \text{kun } z \in (\beta(t_n) \setminus \beta(t_{n+1})) \cap \partial(Z \cap G), \\ 0, & \text{kun } z \in \partial Z \cap \partial G, \\ f'''(z) & \text{muuten, so. kun } z \in \partial(Z \cap G) \setminus \beta(t_1). \end{cases}$$

Silloin summa $f = \sum_n f'''_n$ on rajoitettu ja epänegatiivinen Borelin funktio, $H_{Z\cap G}(f) = H_{Z\cap G}(f''') = v$ sekä $\lim_{z\to\zeta} f(z) = f(\zeta) = 0$ kussakin reunapisteessä $\zeta \in \partial Z \cap \overline{G}$. $\square$

Lause 44. *Olkoon G jatkuva alue. Silloin $\mathcal{H}_Q(G) \subsetneq \mathcal{H}_D(G)$, so. jokainen harmoninen ja kvasirajoitettu funktio $u : G \to \mathbb{R}$ voidaan esittää yleistettynä Dirichlet'n ratkaisuna $H_G(f)$, missä $f \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$.*

Todistus [7, pp. 129–130]. Olkoon $\{U_n\}_{0\leq n\leq l}$ joukon $\overline{G}$ käyräpeite, $\{\phi_n\}_{0\leq n\leq l}$ siihen liittyvä yksikön ositus (ks. liite) ja $V_n = U_n \cap G$ kullakin n:llä. Silloin

(1) Olkoon funktio $u : G \to (0,1)$ harmoninen. Lauseen 40 mukaan $u, \phi_n \in \mathcal{N}(G)$ kullakin n:llä; olkoon $u_n = u\phi_n \in \mathcal{N}(G)$. Koska $\sum_{n=0}^{l} \phi_n \equiv 1$, on $u = \sum_{n=0}^{l} u_n$. Koska toisaalta harmonisaatio $h_G(u_0) \equiv 0$, on

$$u = h_G(u) = \sum_{n=1}^{l} h_G(u_n) = \sum_{n=1}^{l} h_{U_n\cap G}(u_n) + \sum_{n=1}^{l} (h_G(u_n) - h_{U_n\cap G}(u_n)).$$

Toisaalta kukin $h_n : G \to \mathbb{R}$, missä $z \mapsto h_{U_n\cap G}(u_n)(z)$, kun $z \in U_n \cap G$ ja $z \mapsto 0$ muuten, on jatkuva, epänegatiivinen ja subharmoninen funktio, joten lauseen 41 mukaan kukin $h_G(u_n) - h_n \quad (n \geq 1)$ on jäännösfunktio. Silloin myös $P = \sum_{n=1}^{l} (h_G(u_n) - h_n)$ on jäännösfunktio ja $u \equiv \sum_{n=1}^{l} h_n + P$.

(2) Koska kukin $h_{U_n\cap G}(u_n)$ on harmoninen ja saa lauseen 41 mukaan reunapisteiden joukossa $\partial U_n \cap G$ arvokseen nollan, on lauseen 43 mukaan olemassa Borelin funktio $g_n : \partial(U_n \cap G) \to [0,1]$, joka on reunalla $\partial U_n \cap G$ jatkuva ja $= 0$ sekä toteuttaa reuna-arvoehdon $h_{U_n\cap G}(u_n) =$

$H_{U_n\cap G}(g_n)$. Olkoon sitten kullakin n:llä funktio $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $z \mapsto g_n(z)$, kun $z \in \partial G \cap U_n$ ja $z \mapsto 0$ muuten. Silloin kukin f_n on Borelin funktio arvojoukkonaan $[0,1]$ ja $h_n = H_n$, missä $H_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $z \mapsto U_n \cap G(f_n)(z)$, kun $z \in \partial U_n \cap G$ ja $z \mapsto 0$ muuten. Olkoon sitten $f = \sum_{n=1}^{l} f_n$, jolloin rajoittuma $f|_{\partial G}$ on rajoitettu ja epänegatiivinen Borelin funktio. Joukossa G on siis voimassa

$$\sum_{n=1}^{l} h_n = \sum_{n=1}^{l} H_n = \sum_{n=1}^{l} H_G(f_n) - \sum_{n=1}^{l}(H_G(f_n) - H_n)$$
$$= H_G(\sum_{n=1}^{l} f_n) - \sum_{n=1}^{l}(H_G(f_n) - H_n) = H_G(f) - \sum_{n=1}^{l}(H_G(f_n) - H_n).$$

Koska lisäksi kukin $H_G(f_n) - H_n \quad (n \geq 1)$ on jäännösfunktio lauseen 42 nojalla, on funktio $Q = \sum_{n=1}^{l}(H_G(f_n) - H_n)$ samoin ja edelleen on voimassa $\sum_{n=1}^{l} h_n = H_G(f) - Q$.

(3) Kohtien (1) ja (2) mukaan $u = H - G(f) + P - Q$, missä P, Q ovat potentiaaleja. Silloin on kolmioepäyhtälön nojalla epänegatiivinen ja subharmoninen funktio $|u - H_G(f)| \leq P + Q$ joukossa G; toisaalta $P+Q$ on jäännösfunktio, joten $|u - H_G(f)|$ on myös. Väite on siis voimassa mielivaltaisella harmonisella funktiolla, jonka arvot ovat välillä $(0,1)$.

(4) Mielivaltaisella funktiolla $u \in \mathcal{H}_B^+(G)$ on voimassa $0 \leq cu \leq 1$ joukossa G jollakin vakiolla $c > 0$. Kohdan (3) mukaan $cu = H_G(f)$ jollakin funktiolla $f \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$, jolloin $u = H_G(c^{-1}f)$ ja väite on siis voimassa luokassa $\mathcal{H}_B^+(G)$.

(5) Olkoon sitten funktio $u \in \mathcal{H}_Q^+$ ja olkoot $u_n = u \wedge n \left(\in \mathcal{H}_B^+(G)\right)$ kullakin luvulla $n \in \mathbb{N}$, jolloin $\limsup_{n\to\infty} u_n = u$ ja kohdan (4) mukaan kukin $u_n = H_G(f_n)$ jollekin funktiolle $f_n \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$. Silloin apulauseen 38 nojalla $0 \leq f_n \leq n$ ja $f_n \leq f_{n+1}$, so. (f_n) on nouseva jono; silloin on olemassa $\mathrm{d}\,\omega$-mitallinen funktio $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Lisäksi

$$0 \leq \int_{\partial G} f_n \,\mathrm{d}\,\omega = u_n(z_0) \leq u(z_0), \quad \text{missä } \mathrm{d}\,\omega = \mathrm{d}\,\omega_G(\,\cdot\,, z_0),$$

ja edelleen

$$0 \leq \int_{\partial G} f \,\mathrm{d}\,\omega = \liminf_{n\to\infty} \int_{\partial G} f_n \,\mathrm{d}\,\omega \leq u(z_0), \quad \text{joten } f \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega).$$

On siis voimassa $\liminf_{n\to\infty} H_G(f_n) = H_G(f), \liminf_{n\to\infty} u_n = u$ ja koska toisaalta kukin $H_G(f_n) = u_n$, on väite voimassa luokassa $\mathcal{H}_Q^+(G)$.

(6) Olkoon sitten funktio $u \in \mathcal{H}_Q(G)$ mielivaltainen. Koska $\mathcal{H}_Q(G)$ on vektorihila, on $u = u^+ - u^-$, missä $u^+ = u \vee 0, u^- = -u \wedge 0 \in \mathcal{H}_Q^+$. Silloin on kohdan (5) mukaan olemassa epänegatiiviset funktiot $f^\pm \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$, joilla $u^\pm = H_G(f^\pm)$. Funktio $f = f^+ - f^- \in L^1(\partial G, \mathrm{d}\,\omega)$ on nyt väitetty reuna-arvofunktio: $u = H_G(f)$. $\square$

Liite

Määritelmä 22 (Konforminen kuvaus)**.** Pisteen z_0 (jossakin) ympäristössä jatkuvaa kuvausta $\kappa : A \to \mathbb{C}$ sanotaan *konformiseksi* z_0:ssa, mikäli [5, s. 15]

- Millä tahansa säteellä ϕ on olemassa raja-arvo
$$\lim_{z \to z_0, \arg(z - z_0) = \phi} \frac{|\kappa(z) - \kappa(z_0)|}{|z - z_0|} \neq 0.$$
- Jokaista sädettä vastaavan pistejoukon $\{z \in A \mid \arg(z - z_0) = \phi\}$ kuvalla on tangentti pisteessä $\kappa(z_0)$.
- Kun mielivaltaisia säteitä ϕ, ψ edellisen kohdan mukaan vastaavia tangentteja merkitään ϕ_κ, ψ_κ, on voimassa $\arg \psi_\kappa - \arg \phi_\kappa = \arg \psi - \arg \phi$.

Huomautus 20.

- Konforminen kuvaus $z \mapsto \zeta$ yksikkökiekolta $D(0, 1)$ itselleen siten, että $z_0 \mapsto 0$ kiinteälle pisteelle $z_0 \in D(0, 1)$, on muotoa $(z - z_0)/(1 - \overline{z_0} z) = \lambda \zeta$. Kun asetetaan ehto $|z| = 1$ jos ja vain jos $|\zeta| = 1$, saadaan $|\lambda| = 1$, so. $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$. Kun $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ ja $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}$, on siis
$$\frac{1 - |z_0|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} - z_0|^2} \,\mathrm{d}\,\phi = \mathrm{d}\,\psi$$
(vrt. [8, ss. 215–216]).
- Kun $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ ovat alueita, sisältää kummankin reuna vähintään kaksi pistettä ja ne voidaan siis kuvata konformisesti yksikkökiekolle [8, s. 337] ja edelleen toisilleen.

Määritelmä 23 (Peite ja kompaktisuus)**.** Joukon $G \subseteq \mathbb{C}$ *peite* on sellainen joukkojen kokoelma $\mathcal{S}$, että mielivaltaisella pisteellä $z \in G$ on $z \in S$ jollakin joukolla $S \in \mathcal{S}$. Mikäli jokaisen G:n avoimen, so. avointen joukkojen muodostaman peitteen jokin äärellinen osajoukko on myös joukon G peite (*Heine–Borelin ominaisuus*), sanotaan joukkoa G *kompaktiksi* [6, p. 30].

Huomautus 21. Joukon $G \subseteq \mathbb{C}$ seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä: Heine–Borelin ominaisuus, so. kompaktisuus; *Bolzano–Weierstrassin ominaisuus*: jokaisella G:n äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste joukossa G [6, pp. 30–31]; G on suljettu ja rajoitettu joukko.

Määritelmä 24 (Yksikön ositus)**.** Kun $G \subseteq \mathbb{C}$ on joukko ja $\{U_n\}_n$ sen avoin peite, on kokoelma $\{f_n : G \to [0, 1]\}_n$ (tähän peitteeseen liittyvä) *yksikön ositus* (engl. *partition of unity*), mikäli kukin f_n on sileä, so. äärettömästi differentioituva, $\sum_n f_n(z) = 1$ kussakin pisteessä $z \in G$ ja kukin $f_n \equiv 0$ joukossa $G \setminus U_n$.

Määritelmä 25 (Borelin sigma-algebra)**.**

- Joukon $\mathbb{C}$ osajoukkojen kokoelmaa $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$ sanotaan *sigma-algebraksi* (myös σ-algebra), mikäli se on (*täydellisesti*) *additiivinen* [6, p. 60], so.

$$\emptyset \in \Sigma, \quad S \in \Sigma \Rightarrow (\mathbb{C} \setminus S) \in \Sigma \quad \text{ja} \quad S_k \in \Sigma \ \forall k \in K \Rightarrow \bigcup_{k \in K} S_k \in \Sigma.$$

- Joukon $G \subseteq \mathbb{C}$ avointen osajoukkojen kokoelman virittämää (so. pienintä tämän kokoelman sisältävää) sigma-algebraa

$$\mathcal{B}(G) = \bigcap \{S \,|\, E \subseteq S \text{ jokaisella avoimella joukolla } E \subseteq G\}$$

  sanotaan *Borelin sigma-algebraksi* ja sen joukkoja (G:n) *Borelin joukoiksi* [6, p. 66]. Merkitään lisäksi $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

- Kun joukko $G \subseteq \mathbb{C}$, sanotaan funktiota $f : G \to \mathbb{R}$ *Borelin funktioksi*, mikäli jokaisella luvulla $\alpha \in \mathbb{R}$ on $\{z \in G \,|\, f(z) \geq \alpha\}$ Borelin joukko.

Määritelmä 26 (Puolijatkuvuudet)**.** Kun joukko $G \subseteq \mathbb{C}$ on avoin, sanotaan funktiota $f : G \to \mathbb{R}$ *ylöspäin puolijatkuvaksi*, mikäli jokaisella luvulla $\alpha \in \mathbb{R}$ on $\{z \in G \,|\, f(z) < \alpha\}$ avoin joukko ja *alaspäin puolijatkuvaksi* käänteisen epäyhtälön määräämällä vastaavalla ehdolla [11, Def. 2.1.1, p. 25].

Huomautus 22.

- Ylöspäin puolijatkuvuus voidaan karakterisoida myös seuraavan paikallisen yläraja-arvoehdon avulla: $\limsup_{z \to z_0} f(z) \leq f(z_0)$ kussakin pisteessä $z_0 \in G$ [11, p. 25].

- Kompaktissa joukossa K ylöspäin puolijatkuva funktio on ylhäältä rajoitettu ja saavuttaa pienimmän ylärajansa joukossa K [11, p. 25].

- Kun funktio f on ylöspäin puolijatkuva ja ylhäältä rajoitettu, on olemassa sellainen jatkuvien funktioiden pisteittäin nouseva jono (f_n), että $\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)$ kussakin funktion f määrittelyjoukon pisteessä z [11, Th. 2.1.3, p. 26].

Määritelmä 27 (Mitta)**.** Olkoon kokoelma $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$ suljettu yhdisteen suhteen, ts. kokoelma, joka sisältää alkiona joukkojensa kaikki yhdisteet. Silloin sanotaan funktiota $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *mitaksi*, mikäli se on *additiivinen*: $\mu(\emptyset) = 0$ ja $\mu(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$ aina, kun joukot $E_n \in \mathcal{E}$ ovat erilliset. Joukko $\mathcal{E}$ on silloin mitan μ suhteen *mitallisten joukkojen* kokoelma [6, pp. 83–87]. Annetun ominaisuuden sanotaan olevan voimassa (μ-)*melkein kaikkialla* joukossa G, mikäli se on voimassa joukossa $E \subseteq G$ ja $\mu(G \setminus E) = 0$ [6, p. 153].

Määritelmä 28 (Lebesguen mitta)**.** Olkoon $G \subseteq \mathbb{C}$ ja olkoon $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$;

$$G \mapsto \inf\{\sum_n \tau(D_n) \,|\, \{D_n\}_n \text{ on avoimista kiekoista koostuva joukon } G \text{ peite}\},$$

missä $\tau(D(a,r)) = \pi r^2$ on kiekon $D(a,r)$ pinta-ala, milloin em. peite on olemassa ja muuten $G \mapsto \infty$. Olkoon lisäksi kokoelma

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{C} \,|\, m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E), \text{ kun } A \subseteq \mathbb{C} \text{ ja } m^*(A) < \infty\}.$$

Silloin sanotaan mittaa $m = m^* |_{\mathcal{M}}$ *Lebesguen mitaksi* ja kokoelman $\mathcal{M}$ joukkoja *Lebesgue-mitallisiksi* (vrt. [6, p. 93]).

Funktiota $f : G \to \mathbb{R}$ sanotaan Lebesgue-mitalliseksi, mikäli kunkin avoimen joukon $E \subseteq \mathbb{R}$ alkukuva $\{z \in G \,|\, f(z) \in E\}$ on Lebesgue-mitallinen [6, p. 145].

Määritelmä 29 (Borelin mitta)**.** Borelin sigma-algebrassa $\mathcal{B}(G)$ (jollakin $G \subseteq \mathbb{C}$) määriteltyä epänegatiivista mittaa sanotaan *Borelin mitaksi.*

Jos $\mu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}$ on Borelin mitta ja $G \mapsto 1$, sanotaan mittaa μ *Borelin todennäköisyysmitaksi.*

Mikäli kullakin joukolla $B \in \mathcal{B}$ ja luvulla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen avoin joukko $U \supseteq B$ ja suljettu joukko $F \subseteq B$, että $\mu(U \setminus F) < \epsilon$, sanotaan Borelin mittaa μ *säännölliseksi* (engl. *regular measure*) [11, Def. A.2.1, p. 210].

Huomautus 23. Koska $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ (ks. [6, Cor. 13.2.1, p. 104]), on Lebesguen mitan rajoittuma $m|_{\mathcal{B}}$ Borelin mitta. Toisinaan Borelin mitta määritelläänkin juuri tällaisena rajoittumana – kyseessä on edellä esitetyn määritelmän näkökulmasta kuitenkin vain yksi erikoistapaus.

Jokainen äärellinen Borelin mitta on säännöllinen.

Määritelmä 30 (Lebesgue-integroituvuus)**.** Lebesgue-mitallista funktiota $f : G \to \mathbb{R}$ sanotaan *Lebesgue-integroituvaksi* joukossa $E \subseteq G$, jos integraalit $\int_E |f^-| \,\mathrm{d}\, m, \int_E |f^+| \,\mathrm{d}\, m < \infty$, missä m on Lebesguen mitta joukossa G ja $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \max\{-f, 0\}$ [6, pp. 171–172].

Huomautus 24. Lebesguen integraali $\int_E f \,\mathrm{d}\, m$ määritellään *yksinkertaisten funktioiden* ja niille määritettyjen integraalien rajaprosessin avulla (ks. [6, pp. 166–171]); yksityiskohdat sivuutetaan tässä.

Määritelmä 31 (Melkein tasainen suppeneminen)**.** Funktiojonon $(f_n : G \to \mathbb{R})$ sanotaan suppenevan (μ-)*melkein tasaisesti* kohti funktiota f, mikäli jokaisella luvulla $\epsilon > 0$ on olemassa mitallinen joukko $E \subseteq G$, jossa $f_n|_E \to f|_E$ tasaisesti ja $\mu(G \setminus E) < \epsilon$ [6, p. 220].

Määritelmä 32 (Suppeneminen mitassa)**.** Funktiojonon $(f_n : G \to \mathbb{R})$ sanotaan suppenevan *mitassa* kohti funktiota f, mikäli kullakin luvulla $\epsilon > 0$ on $\lim_{n\to\infty} \mu(\{z \in G \,|\, |f_n(z) - f(z)| \geq \epsilon\}) = 0$ [6, p. 223].

Lause 45 (Monotonisen konvergenssin lause [6, pp. 186–187]). *Olkoon* $(f_n : G \to \mathbb{R})$ *epänegatiivisten, integroituvien funktioiden pisteittäin nouseva jono ja* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *pisteittäin melkein kaikkialla. Funktio* f *on integroituva täsmälleen silloin, kun*

$$\lim_{n\to\infty} \int_G f_n \,\mathrm{d}\,\mu = I < \infty; \quad \textit{silloin on lisäksi} \quad \int_G f \,\mathrm{d}\,\mu = I.$$

.

Lause 46 (Dominoidun konvergenssin lause [6, pp. 233–234]). *Olkoon mitallisten funktioiden jono* $(f_n : G \to \mathbb{R})$ *mitassa suppeneva kohti funktiota* f *ja olkoon olemassa mitallinen funktio* $g : G \to \mathbb{R}$*, jonka itseisarvofunktio* $|g|$ *on integroituva sekä kukin* $|f_n| \leq |g|$ *melkein kaikkialla. Silloin itseisarvofunktio* $|f|$ *on integroituva ja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_G |f_n(z) - f(z)| \,\mathrm{d}\,\mu = 0.$$

Lause 47 (Vitali–Carathéodoryn lause [11, p. 210]). *Kun* μ *on säännöllinen Borelin mitta joukossa* $G \subseteq \mathbb{C}$ *ja funktio* $f : G \to \mathbb{R}$ *integroituva, on kullakin luvulla* $\epsilon > 0$ *olemassa ylöspäin puolijatkuva funktio* $f_- : G \to \underline{\mathbb{R}}$ *ja alaspäin puolijatkuva funktio* $f_+ : G \to \overline{\mathbb{R}}$ *siten, että* $f_- \leq f \leq f_+$ *ja*

$$\int_G (f_+ - f_-) \,\mathrm{d}\,\mu < \epsilon.$$

Viitteet

[1] Brelot, M., Familles de Perron et problème de Dirichlet. *Acta Sci. Math. Szeged.*, 9 (1939), 133–153.

[2] Constantinescu, C. – Cornea, A., *Ideale Ränder Riemannscher Flächen.* Springer, Berlin, 1963.

[3] Helms, L. L., *Introduction to Potential Theory.* Wiley–Interscience, New York, 1969.

[4] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, New York, 1972.

[5] Lehto, O., *Funktioteoria I–II.* Limes r.y., Helsinki, 1985.

[6] Munroe, M. E., *Introduction to Measure and Integration.* Addison–Wesley Publishing Co., Reading, 1953.

[7] Nakai, M., Harmonic functions expressible as Dirichlet solutions. *Kodai Math. J.*, 22 (1999), 116–130.
`http://projecteuclid.org/euclid.kmj/1138043992`

[8] Nevanlinna, R. – Paatero, V., *Funktioteoria.* Otava, Helsinki, 1963.

[9] Perron, O., Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgaben für $\Delta u = 0$. *Math. Zeits.*, 18 (1923), 42–54.

[10] Priestley, H. A., *Complex Analysis.* 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 2003.

[11] Ransford, T., *Potential Theory in the Complex Plane.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] Rudin, W., *Functional Analysis.* 2nd ed., McGraw–Hill, Boston, 1991.

[13] Sario, L. – Nakai, M., *Classification Theory of Riemann Surfaces.* Springer, Berlin, 1970.

[14] Wiener, N., Certain notions in potential theory. *J. Math. Phys.*, 3 (1924), 24–51.