TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Emmi Huhma

Eräs näkökulma euklidiseen tasogeometriaan ja affiiniin geometriaan

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Maaliskuu 2010

TAMPEREEN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HUHMA, EMMI: Eräs näkökulma euklidiseen tasogeometriaan ja affiiniin geometriaan
Pro gradu -tutkielma, 57 s.
Matematiikka
Maaliskuu 2010

Tässä tutkielmassa käsitellään euklidista tasogeometriaa ja affiinia geometriaa sekä niiden kuvauksia analyyttisestä näkökulmasta. Lisäksi tutustutaan kolmioihin ja niiden yhtenevyyslauseisiin.

Yhtenevyyskuvaukset ovat sellaisia kuvauksia, jotka säilyttävät pisteiden välisen etäisyyden. Kaksi kuviota ovat yhtenevät, kun on olemassa yhtenevyyskuvaus, joka kuvaa ensimmäisen kuvion toiseksi. Tällöin kuviot ovat ”samanmuotoiset ja -kokoiset”. Yhtenevyyskuvauksia ovat peilaus, kierto, siirto ja liukupeilaus, ja nämä voidaan esittää matriisien avulla.

Affiini kuvaus on sellainen kuvaus, joka on muotoa $T(X) = AX + b$, missä A on kääntyvä 2×2-matriisi ja b on vektori. Affiinit kuvaukset kuvaavat yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi. Affiineja kuvauksia ovat affiini peilaus, leikkuri sekä dilataatio. Kollineaatio on sellainen kuvaus, joka kuvaa kollineaariset pisteet kollineaarisiksi, eli se säilyttää samalla suoralla olevat pisteet samalla suoralla. Kollineaatiot ovat affiineja kuvauksia, ja affiinit kuvaukset kollineaatioita.

Yhdenmuotoisuuskuvaus on sellainen kuvaus, joka säilyttää kuvion muodon, mutta ei välttämättä kokoa. Se on yhdistelmä yhtenevyyskuvauksesta ja eräästä affiinista kuvauksesta, dilataatiosta, ja on näin ollen itsekin affiini kuvaus.

Euklidinen geometria tutkii tasoa $\mathbb{R}^2$ ja sellaisia tason ominaisuuksia, jotka säilyvät yhtenevyyskuvauksissa. Näitä ominaisuuksia ovat muun muassa etäisyys ja kulma. Affiini geometria sen sijaan keskittyy tasoon $\mathbb{R}^2$ sekä affiineissa kuvauksissa säilyviin ominaisuuksiin, kuten leikkautumisominaisuuksiin.

Asiasanat: geometria, euklidinen, affiini.

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan euklidista ja affiinia geometriaa ja kuvauksia analyyttisestä näkökulmasta.

Yhtenevyyskuvaukset ovat sellaisia kuvauksia, jotka säilyttävät pisteiden välisen etäisyyden. Näitä kuvauksia ovat muun muassa peilaus ja siirto. Kollineaatio on kuvaus, joka kuvaa kollineaariset eli samalla suoralla olevat pisteet kollineaarisiksi. Affiinin kuvauksen säilyvänä ominaisuutena taas on leikkaavuus: jos suorat leikkaavat toisensa, ne leikkaavat myös kuvauksen jälkeen. Affiineja kuvauksia ovat esimerkiksi leikkuri sekä dilataatio. Kuten tässä tutkielmassa tullaan osoittamaan, kollineaatio ja affiini kuvaus tarkoittavat samaa asiaa, ne ovat siis ekvivalentit. Yhdenmuotoisuuskuvaukset ovat sellaisia kuvauksia, jotka säilyttävät kuvioiden muodon, mutta eivät välttämättä kokoa. Yhtenevyyskuvaukset ovat yhdenmuotoisuuskuvauksia, ja molemmat edellä mainitut ovat taas affiineja kuvauksia. Euklidinen geometria tutkii tasoa $\mathbb{R}^2$ ja sellaisia tason ominaisuuksia, jotka säilyvät yhtenevyyskuvauksissa. Affiini geometria sen sijaan keskittyy tasoon $\mathbb{R}^2$ sekä affiineissa kuvauksissa säilyviin ominaisuuksiin.

Tämän tutkielman ensimmäisessä luvussa käydään läpi joitakin euklidisen tasogeometrian peruskäsitteitä. Toinen luku keskittyy yhtenevyyskuvauksiin, kolmannessa määritellään kollineaatio ja affiini kuvaus sekä käydään läpi niiden ominaisuuksia. Neljäs luku keskittyy erilaisiin affiineihin kuvauksiin ja viidennessä määritellään yhdenmuotoisuuskuvaukset. Viimeinen luku käsittelee kolmioita, luvun lopussa johdetaan tärkeät yhtenevyyslauseet sss ja sks.

Lukijan oletetaan tuntevan lineaarialgebraa, mm. vektorien laskutoimitukset, yksikkövektorit, normaali, pistetulo jne., matriisien laskutoimituksia sekä kuvauksiin liittyviä perusasioita.

Tärkein lähdeteos on Patrick J. Ryanin *Euclidean and non-euclidean geometry -an analytic approach*. Suomenkieliset termit noudattavat pääosin Erkki Rosenbergin teosta *Geometria*. Myös teokset David A. Brannan, Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray: *Geometry*, Marvin J. Greenberg: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, George E. Martin: *Transformation Geometry*, Judith N. Cederberg: *A Course in Modern Geometries* sekä John R. Silvester: *Geometry Ancient and Modern* ovat olleet apuna.

1 Euklidinen tasogeometria

Tässä luvussa käydään läpi euklidisen tasogeometrian peruskäsitteitä. Lauseiden todistuksia ei tässä luvussa ole esitetty, ne löytyvät lähdemateriaalista ([6, s. 8-18]) tai ovat hyvin suoraviivaisia.

Määritelmä 1.1. Jokainen järjestetty pari (p_1, p_2), missä $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, määrää yksikäsitteisen tason *pisteen* $P = (p_1, p_2)$. Pistettä $0 = (0, 0)$ kutsutaan origoksi. Paria (p_1, p_2) voidaan kutsua myös pisteen P *koordinaattivektoriksi.* Kaikkien vektorien (eli pisteiden) joukko on $\mathbb{R}^2$.

Määritelmä 1.2. Olkoot P ja Q tason pisteitä. Funktiota $d(P, Q) = |Q - P|$ sanotaan pisteiden P ja Q väliseksi *etäisyydeksi.* Merkintä $\mathbb{E}^2$ tarkoittaa joukkoa $\mathbb{R}^2$ varustettuna etäisyysfunktiolla d.

Seuraavassa lauseessa esitellään etäisyyden tärkeimpiä ominaisuuksia.

Lause 1.1. *Olkoot P, Q ja R tason $\mathbb{E}^2$ pisteitä. Tällöin*

1. $d(P, Q) \geq 0$,
2. $d(P, Q) = 0$, *jos ja vain jos* $P = Q$,
3. $d(P, Q) = d(Q, P)$,
4. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ *(kolmioepäyhtälö).*

Apulause 1.1. *(Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö) Olkoot x ja y vektoreita. Tällöin $|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|$. Yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos x ja y ovat lineaarisesti riippuvat.*

Edellisessä apulauseessa merkintä $\langle x, y\rangle$ tarkoittaa tavallista pistetuloa, ja merkintä $|x|$ vektorin x pituutta.

Määritelmä 1.3. *Suunta* on sellaisten vektoreiden joukko, jotka ovat lineaarisesti riippuvia annetun vektorin kanssa. Toisin sanoen, olkoon v vektori. Tällöin suunta $[v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Vektorit u ja v ovat ortogonaaliset, jos $\langle u, v\rangle = 0$. Merkitään tällöin $u = v^\perp$.

1.1 Suorat

Määritelmä 1.4. Olkoon P tason $\mathbb{E}^2$ piste ja olkoon v vektori. Tällöin $l = \{X \mid X - P \in [v]\}$ on pisteen P kautta kulkeva *suora* suuntaan $[v]$. Tämä voidaan kirjoittaa myös $l = P + [v]$, missä vektoria v kutsutaan suoran l *suuntavektoriksi.*

Määritelmä 1.5. Jos l on suora, jonka suuntavektori on v, niin vektoria $v^\perp$ sanotaan suoran l *normaalivektoriksi.*

Lause 1.2. *Olkoot P piste ja $\{v, N\}$ ortonormaali pari. Silloin $P + [v] = \{X \mid \langle X - P, N\rangle = 0\}$ on suora pisteen P kautta vektorin v suuntaan.*

Edellisen lauseen suoran normaalivektori on siis N.

Lause 1.3. *Olkoon a, b ja c reaalilukuja. Tällöin $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$ on suora, jonka normaalivektori on (a, b), kun $a \neq 0$ tai $b \neq 0$. Jos $a = 0$, $b = 0$ ja $c \neq 0$, kyseessä on tyhjä joukko, ja jos $a = 0$, $b = 0$ ja $c = 0$, kyseessä on koko taso $\mathbb{R}^2$.*

Lause 1.4. *Olkoot P ja Q tason $\mathbb{E}^2$ kaksi eri pistettä. Silloin on olemassa yksikäsitteinen suora, joka sisältää molemmat pisteet.Merkitään tätä suoraa $\overleftrightarrow{PQ}$.*

Mielivaltainen piste X, joka on suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$, voidaan esittää parametrimuodossa:

$$X = \alpha(t) = P + t(Q - P) = (1 - t)P + tQ, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kun t saa arvot välillä $(-\infty, \infty)$, niin $\alpha(t)$ saa arvokseen jokaisen pisteen, joka on suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$. Kun $t = 0$, niin $X = P$ ja kun $t = 1$ niin $X = Q$.

Määritelmä 1.6. Jos $X = (1 - t)P + tQ$, missä $0 < t < 1$, niin sanotaan, että piste X on pisteiden P ja Q *välissä.*

Lause 1.5. *Olkoot P, Q ja X tason $\mathbb{E}^2$ eri pisteitä. Piste X on pisteiden P ja Q välissä, jos ja vain jos $d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$.*

Määritelmä 1.7. Olkoot P ja Q tason $\mathbb{E}^2$ eri pisteitä. Joukkoa, joka sisältää pisteet P ja Q ja kaikki niiden välissä olevat pisteet, kutsutaan *janaksi*, merkitään PQ. Pisteet P ja Q ovat janan *päätepisteet*, kaikki muut janan pisteet ovat *sisäpisteitä.*

Määritelmä 1.8. Jos piste M toteuttaa yhtälön $d(P, M) = d(M, Q) = \frac{1}{2}d(P, Q)$, niin pistettä M sanotaan janan PQ *keskipisteeksi.*

Jokaisella janalla PQ on yksikäsitteinen keskipiste $M = \frac{1}{2}(P + Q)$.

1.2 Suorien leikkautumisominaisuudet

Määritelmä 1.9. Jos l ja m ovat suoria, $l \neq m$, ja P sellainen piste, että $P \in l$ ja $P \in m$, sanotaan, että suorat l ja m leikkaavat pisteessä P, ja että piste P on suorien l ja m *leikkauspiste.*

Lause 1.6. *Kahdella eri suoralla on korkeintaan yksi leikkauspiste.*

Myöhemmin osoittautuu, että kahdella tason $\mathbb{E}^2$ suoralla ei ole välttämättä yhtään leikkauspistettä.

1.3 Suorien kohtisuoruus

Määritelmä 1.10. Kahden suoran m ja l sanotaan olevan *kohtisuorassa*, jos niillä on ortogonaaliset suuntavektorit. Tällöin merkitään $m \perp l$. Kaksi janaa ovat kohtisuorassa, jos suorat, joilla ne ovat, ovat kohtisuorassa.

Lause 1.7. *(Pythagoraan lause) Olkoot P, R ja Q kolme tason $\mathbb{E}^2$ eri pistettä. Silloin $|R-P|^2 = |Q-P|^2 + |R-Q|^2$, jos ja vain jos suorat $\overleftrightarrow{QP}$ ja $\overleftrightarrow{RQ}$ ovat kohtisuorassa.*

Lause 1.8. *Jos suorat l ja m ovat kohtisuorassa, niin niillä on yksi yhteinen piste.*

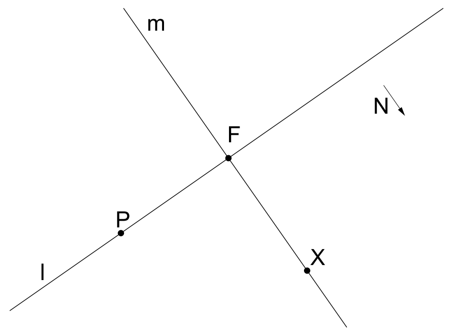
Lause 1.9. *Olkoot X piste ja l suora. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen suora m, joka kulkee pisteen X kautta ja on kohtisuorassa suoran l kanssa. Lisäksi*

1. *$m = X + [N]$, missä N on suoran l yksikkönormaalivektori,*
2. *suorat l ja m leikkaavat pisteessä $F = X - \langle X-P, N\rangle N$, missä P on mikä tahansa suoran l piste,*
3. *$d(X,F) = |\langle X-P, N\rangle|$.*

Lause 1.10. *Olkoon l mielivaltainen suora ja olkoon X piste, joka ei ole suoralla l. Olkoon piste F suoran l pisteen X kautta kulkevan normaalin ja suoran l leikkauspiste. Silloin piste F on suoran l pisteistä lähimpänä pistettä X.*

Määritelmä 1.11. Lukua $d(X,F)$ kutsutaan *pisteen X etäisyydeksi suorasta l*, merkitään $d(X,l)$.

Luku $d(X,l)$ on siis lyhin etäisyys pisteestä X suoralle l.



Kuva 1: Lause 1.9

Apulause 1.2. *Olkoon l suora ja olkoon N sen yksikkönormaalivektori. Olkoon X tason $\mathbb{R}^2$ piste. Jos piste P on suoralla l, niin $d(X, l) = |\langle X - P, N\rangle|$.*

Olkoon PQ jana. Suora, joka kulkee janan PQ keskipisteen M kautta ja joka on kohtisuorassa janan PQ kanssa, on janan PQ kohtisuora puolittaja. Tämä puolittaja koostuu kaikista niistä pisteistä X, joille $d(P, X) = d(X, Q)$.

1.4 Yhdensuuntaiset ja leikkaavat suorat

Määritelmä 1.12. Kahden eri suoran l ja m sanotaan olevan *yhdensuuntaiset*, jos niillä ei ole yhtään leikkauspistettä. Tällöin merkitään $l \,||\, m$.

Lause 1.11. *Kaksi eri suoraa l ja m ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niillä on sama suunta.*

Lause 1.12. *Olkoot l, m ja n suoria. Tällöin*

1. *jos $l \,||\, m$ ja $m \,||\, n$, niin $l = n$ tai $l \,||\, n$,*
2. *jos $l \,||\, m$ ja $m \perp n$, niin $l \perp n$,*
3. *jos $l \perp n$ ja $m \perp n$, niin $l \,||\, m$ tai $l = m$.*

Lause 1.13. *Olkoon $l \,||\, m$. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen luku $d(l, m)$, että kaikille suoran l pisteille X ja suoran m pisteille Y on voimassa: $d(X, m) = d(Y, l) = d(l, m)$. Jos N on suorien l ja m yksikkönormaalivektori, niin silloin on voimassa: $|\langle X - Y, N\rangle| = d(l, m)$.*

Siis kaksi yhdensuuntaista suoraa ovat koko ajan yhtä kaukana toisistaan.

Lause 1.14. *Olkoon l suora ja olkoon m sellainen suora, joka leikkaa suoran l pisteessä P. Olkoot v ja w suorien l ja m yksikkösuuntavektorit. Olkoon $\alpha(t) = P + tv$ suoran m parametriesitys. Silloin $d(m, l) = d(\alpha(t), l) = |t| \left|\left\langle w, v^{\perp}\right\rangle\right|$.*

Siis kun piste X ”kulkee” pitkin suoraa m, funktio $d(X, l)$ saa kaikki ei-negatiiviset reaalilukuarvot, jokaisen positiivisen arvon kaksi kertaa.

2 Yhtenevyyskuvaukset

Tässä luvussa käydään läpi yhtenevyyskuvauksia. Yhtenevyyskuvauksille ominaista on pisteiden välisen etäisyyden säilyminen. Itse asiassa yhtenevyyskuvaukset määritellään juuri tämän ominaisuuden avulla. Etäisyyden säilyminen kuvauksessa aiheuttaa sen, että alkuperäinen ja kuvattu kuvio ovat saman kokoiset ja muotoiset, siis yhtenevät.

Tässä luvussa määritellään aluksi yhtenevyyskuvaus ja yhtenevyys. Sitten määritellään peilaus, minkä jälkeen muut yhtenevyyskuvaukset määritellään peilausten avulla. Lisäksi esitellään yhtenevyyskuvausten matriisiesitykset.

2.1 Yhtenevyys ja yhtenevyyskuvaukset

Määritelmä 2.1. Kuvausta $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ sanotaan *yhtenevyyskuvaukseksi* eli *isometriaksi* (isometry), jos kaikille tason $\mathbb{E}^2$ pisteille X ja Y on voimassa:

$$d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$$

.

Lause 2.1. *Jokainen yhtenevyyskuvaus T on bijektio.*

Määritelmä 2.2. Tason osajoukkoa sanotaan *kuvioksi*.

Määritelmä 2.3. Kuvioiden $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ sanotaan olevan *yhtenevät* (congruent), jos on olemassa sellainen yhtenevyyskuvaus T, että $T(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$. Tällöin merkitään $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$.

Siis pisteiden välinen etäisyys kuviossa on sama kuin toisessa, ensimmäisen kanssa yhtenevässä kuviossa. Tällöin kuvioilla on sama 'koko' ja 'muoto'.

Lause 2.2. *Seuraavat ominaisuudet ovat voimassa kaikille yhtenevyyskuvauksille:*

1. *jos S ja T ovat yhtenevyyskuvauksia, myös niiden yhdiste TS on yhtenevyyskuvaus,*
2. *jos T on yhtenevyyskuvaus, niin myöskin sen käänteiskuvaus T^{-1} on yhtenevyyskuvaus,*
3. *tason $\mathbb{E}^2$ identiteettikuvaus I on yhtenevyyskuvaus.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 21])

Todistetaan ensin kohta 1. Olkoot T ja S yhtenevyyskuvauksia. Tällöin $d(TS(X), TS(Y)) = d(S(X), S(Y)) = d(X, Y)$. Siispä TS on yhtenevyyskuvaus.

Todistetaan seuraavaksi kohta 2. Olkoon T yhtenevyyskuvaus. Käänteiskuvaus T^{-1} on olemassa, koska T on bijektio. Nyt $d(T^{-1}(X), T^{-1}(Y)) = d(TT^{-1}(X), TT^{-1}(Y)) = d(X, Y)$. Siispä T^{-1} on yhtenevyyskuvaus.

Todistetaan lopuksi kohta 3. Identiteettikuvaus I on yhtenevyyskuvaus, sillä $I(X) = X$ kaikilla X. Tällöin $d(I(X), I(Y)) = d(X, Y)$.

□

2.2 Peilaus

Määritelmä 2.4. Olkoon l suora, olkoon P suoran l piste ja olkoon N suoran l yksikkönormaalivektori. Kaksi pistettä X ja X' ovat *symmetriset suoran l suhteen*, jos janan XX' keskipiste on suoran l ja sen pisteen X kautta kulkevan normaalin leikkauspiste F.

Edellinen määritelmä siis kertoo, että pisteet X ja X' ovat symmetrisiä suoran l suhteen, jos $\frac{1}{2}(X + X') = F$. Tällöin lauseen 1.9 perusteella

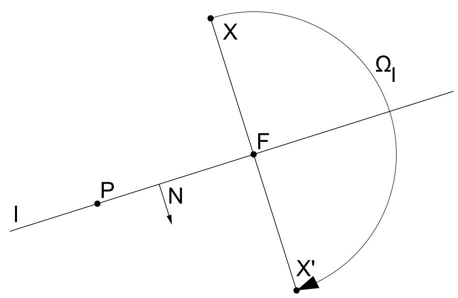
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X' &= X - \langle X - P, N\rangle N \\ \frac{1}{2}X' &= \frac{1}{2}X - \langle X - P, N\rangle N \\ X' &= X - 2\langle X - P, N\rangle N.\end{aligned}$$

Määritellään peilaus kuvaukseksi, joka kuvaa pisteen edellisen lausekkeen mukaisesti:

Määritelmä 2.5. *Peilaus* suoran l suhteen on kuvaus $\Omega_l : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$:

$$\Omega_l(X) = X - 2\langle X - P, N\rangle N,$$

missä N on suoran l yksikkönormaalivektori ja P on mikä tahansa suoran l piste.



Kuva 2: Peilaus

Jos F on sellainen kuvio, että $\Omega_l(F) = F$, sanotaan, että F on symmetrinen suoran l suhteen. Tällöin suoraa l kutsutaan kuvion F symmetria-akseliksi.

Lause 2.3. *Olkoon Ω_l peilaus ja olkoot X ja Y tason $\mathbb{E}^2$ pisteitä. Tällöin*

1. $d(\Omega_l(X), \Omega_l(Y)) = d(X, Y)$*, eli peilaus on yhtenevyyskuvaus,*
2. $\Omega_l\Omega_l(X) = X$*, eli peilauksen käänteiskuvaus on sama peilaus.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 19])

Todistetaan ensin kohta 1. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\Omega_l(X) - \Omega_l(Y) =& (X - 2\langle X - P, N\rangle N) - (Y - 2\langle Y - P, N\rangle N)\\ =& X - Y - 2\langle X - Y, N\rangle N,\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
d(\Omega_l(X), \Omega_l(Y)) &= |\Omega_l(X) - \Omega_l(Y)|^2 \\
&= |X - Y|^2 - 4(\langle X - Y, N\rangle)^2 + 4(\langle X - Y, N\rangle)^2 \langle N, N\rangle \\
&= |X - Y|^2 = d(X, Y)
\end{aligned}$$

Todistetaan sitten kohta 2. Merkitään $\lambda = \langle X - P, N\rangle$. Nyt

$$\begin{aligned}
\Omega_l\Omega_l(X) =&\Omega_l(X - 2\lambda N) \\
=&(X - 2\lambda N) - 2\langle (X - 2\lambda N) - P, N\rangle N \\
=&X - 2\lambda N - 2\langle X - P, N\rangle N + 4\lambda \langle N, N\rangle N \\
=&X - 2\lambda N - 2\lambda N + 4\lambda N \\
=&X
\end{aligned}$$

□

Lause 2.4. *Olkoot Ω_l ja Ω_m kaksi eri peilausta. $\Omega_l\Omega_m = \Omega_m\Omega_l$, jos ja vain jos $m \perp l$.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Oletetaan ensin, että $\Omega_l\Omega_m = \Omega_m\Omega_l$. Olkoot l ja m suoria ja olkoot P ja Q pisteitä näillä suorilla. Olkoon N suoran l yksikkönormaalivektori ja olkoon M suoran m yksikkönormaalivektori. Siispä

$$\begin{aligned}
\Omega_l\Omega_m(X) &= \Omega_m\Omega_l(X) \\
\Omega_l(X - 2\langle X - P, M\rangle M) &= \Omega_m(X - 2\langle X - Q, N\rangle N) \\
X - 2\langle X - P, M\rangle M - 2\langle X - 2\langle X - P, M\rangle M - Q, N\rangle N& \\
&= X - 2\langle X - Q, N\rangle N - 2\langle X - 2\langle X - Q, N\rangle N - P, M\rangle M \\
-2\langle X - P, M\rangle M - 2\langle X - Q, N\rangle N + 4\langle\langle X - P, M\rangle M, N\rangle N& \\
&= -2\langle X - Q, N\rangle N - 2\langle X - P, M\rangle M + 4\langle\langle X - Q, N\rangle N, M\rangle M \\
\langle\langle X - P, M\rangle M, N\rangle N &= \langle\langle X - Q, N\rangle N, M\rangle M \\
\langle X - P, M\rangle \langle M, N\rangle N &= \langle X - Q, N\rangle \langle N, M\rangle M
\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus toteutuu kaikilla $X \in \mathbb{E}^2$ vain, jos $\langle M, N\rangle = 0$. Siispä $l \perp m$.

Oletetaan sitten, että $l \perp m$, eli että $\langle M, N\rangle = 0$. Sieventämällä lausekkeet $\Omega_l\Omega_m(X)$ ja $\Omega_m\Omega_l(X)$ sekä käyttämällä oletusta nähdään helposti, että $\Omega_l\Omega_m(X) = \Omega_m\Omega_l(X)$.

□

Johdetaan seuraavaksi peilaukselle matriisiesitys. Olkoon $l_0 = 0 + [v]$ suora, jonka yksikkösuuntavektori on v ja joka kulkee origon kautta. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen reaaliluku $\theta \in (-\pi, \pi]$, että $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Tällöin yksikkönormaalivektori $v^\perp$ voidaan kirjoittaa $v^\perp = N = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

Peilaus suoran l_0 yli voidaan nyt esittää muodossa:

$$\begin{aligned}
\Omega_{l_0}(X) &= X - 2\langle X - 0, N\rangle N, \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2(-x_1\sin\theta + x_2\cos\theta) \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1 - 2\sin^2\theta)x_1 + (2\sin\theta\cos\theta)x_2 \\ (2\sin\theta\cos\theta)x_1 + (1 - 2\cos^2\theta)x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Merkitään $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = ref\theta$. Kuvaus Ω_{l_0} voidaan siis suorittaa kertomalla peilattava vektori matriisilla $ref\theta$.

Tarkastellaan nyt peilausta sellaisen suoran yli, joka ei kulje origon kautta. Olkoon $l = P + [v]$ suora, jonka yksikkösuuntavektori on v, ja joka kulkee pisteen P kautta. Kuten aiemmin:

$$\begin{aligned}
\Omega_l(X) &= X - 2\langle X - P, N\rangle N, \quad \text{joten} \\
\Omega_l(X) - P &= X - P - 2\langle X - P, N\rangle N.
\end{aligned}$$

Olkoon l_0 kuten edellä, eli suora, joka kulkee origon kautta suuntanaan $[v]$. Silloin $\Omega_{l_0}(X) = X - 2\langle X, N\rangle N$.

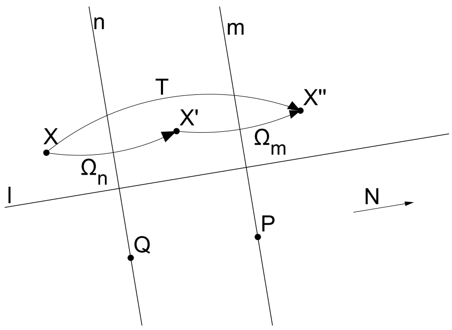
Sijoittamalla edelliseen X:n paikalle $(X - P)$ ja vertaamalla aiempaan saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\Omega_l(X) - P &= \Omega_{l_0}(X - P) \quad \text{eli} \\
\Omega_l(X) &= \Omega_{l_0}(X - P) + P.
\end{aligned}$$

Seuraavassa aliluvussa tullaan näkemään, että tällöin $\Omega_l = \tau_P \Omega_{l_0} \tau_{-P}$, missä τ on siirto.

2.3 Siirto

Määritelmä 2.6. Olkoot l suora sekä m ja n suoria, jotka ovat kohtisuorassa suoran l kanssa. Kuvausta $\Omega_m\Omega_n$ kutsutaan *siirroksi* pitkin suoraa l. Jos $m = n$, siirto on triviaali.



Kuva 3: Siirto

Siirto on siis kahden peilauksen yhdiste, kun peilausakselit ovat yhdensuuntaiset. Tarkastellaan kuvausta $\Omega_m\Omega_n(X)$. Olkoot m ja n yhdensuuntaisia suoria ja olkoon N suorien m ja n yksikkönormaalivektori. Olkoot $P \in m$ ja $Q \in n$ sellaisia pisteitä, että $P - Q \,||\, N$. Nyt

$$\begin{aligned}\Omega_m\Omega_n(X) &= \Omega_n(X) - 2\langle \Omega_n(X) - P, N\rangle N \\ &= X - 2\langle X - Q, N\rangle N - 2\langle X - P, N\rangle N + 4\langle X - Q, N\rangle \langle N, N\rangle N \\ &= X + 2\langle X - Q, N\rangle N - 2\langle X - P, N\rangle N \\ &= X + 2\langle P - Q, N\rangle N \\ &= X + 2(P - Q), \quad \text{sillä } P - Q \,||\, N.\end{aligned}$$

Euklidisessa tasossa siirto ei määrää suoraa yksikäsitteisesti, vaan se määrää joukon yhdensuuntaisia suoria.

Lause 2.5. *Olkoon T siirto pitkin suoraa l. Silloin, jos $l' \,||\, l$, niin T on myöskin siirto pitkin suoraa l'.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Olkoon T siirto pitkin suoraa l. Olkoon $l' \,||\, l$. Koska T on siirto pitkin suoraa l, on olemassa sellaiset suorat $m \perp l$ ja $n \perp l$, että $T = \Omega_m \Omega_n$. Nyt lauseen 1.12 mukaan $l' \perp m$ ja $l' \perp n$, eli määritelmän mukaan kuvaus $\Omega_m \Omega_n$ on siirto pitkin suoraa l'. □

Lause 2.6. *Olkoon T epätriviaali siirto pitkin suoraa l. Silloin suoralla l on sellainen suuntavektori v, että $T(x) = x + v$. Kääntäen, jos vektori $v \neq 0$ ja l on mikä tahansa suora, jonka suuntavektori on v, niin kuvaus $T(x) = x + v$ on siirto pitkin suoraa l. Merkitään tätä vektorin v määräämää siirtoa $T(x) = x + v = \tau_v(x)$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 23]) Olkoon T epätriviaali siirto pitkin suoraa l. Olkoon N suoran l yksikkösuuntavektori. Olkoon P tason $\mathbb{E}^2$ piste. Olkoot $\alpha \perp l$ ja $\beta \perp l$. Olkoot a ja b sellaiset yksikäsitteiset luvut, että $P + aN \in \alpha$ ja $P + bN \in \beta$. Nyt $T(x) = x + 2((P + aN) - (P + bN)) = x + 2(a - b)N$ (vrt. siirron määritelmä). Jos $T \neq I$, niin $a - b \neq 0$ ja siis $a \neq b$. Tällöin $2(a - b)N$ on kyseessä oleva suuntavektori.

Osoitetaan sitten 'jos' -suunta. Olkoon kuvaus $T_\lambda(x) = x + \lambda N$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Olkoot a ja b ovat sellaisia lukuja, että $\lambda = 2(a - b)$, ja olkoot suora $\alpha = P + aN + [N^\perp]$ ja suora $\beta = P + bN + [N^\perp]$. Nyt $T_\lambda = \Omega_\alpha \Omega_\beta$. □

Lause 2.7. *(Kolmen peilauksen lause) Olkoot α, β ja γ kolme yhdensuuntaista suoraa. Silloin on olemassa yksikäsitteinen samansuuntainen neljäs suora δ siten, että $\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\delta$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 24]) Olkoot α, β ja γ suoria, joilla on yhteinen normaali l. Olkoon N suoran l yksikkösuuntavektori. Samoin kuten lauseen 2.6 todistuksessa, olkoot $P + aN \in \alpha$, $P + bN \in \beta$ ja $P + cN \in \gamma$, jolloin $\Omega_\beta \Omega_\gamma(x) = x + 2(b - c)N = T_{2(b-c)}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma(x) =& \Omega_\alpha \circ T_{2(b-c)}(x) \\
=& \Omega_\alpha(x + 2(b - c)N) \\
=& \Omega_\alpha(x + \mu N), \quad \text{missä } \mu = 2(b - c) \\
=& x + \mu N - 2 \langle x + \mu N - P - aN, N \rangle N \\
=& x - 2 \langle x - P, N \rangle N + (2a - \mu)N \\
=& x - 2 \langle x - P, N \rangle N + 2(a - b + c)N \\
=& x - 2 \langle x - (P + 2(a - b + c)N), N \rangle N
\end{aligned}$$

Tämä on peilaus sellaisen suoran δ yli, jonka yksikkönormaalivektori on N ja piste $P + (a - b + c)N \in \delta$. □

Lause 2.8. *Olkoot* $T = \Omega_\alpha\Omega_\beta$ *siirto suoraa* l *pitkin. Jos* m *ja* n *ovat suoria, jotka ovat kohtisuorassa suoran* l *kanssa, niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset suorat* m' *ja* n'*, että* $T = \Omega_m\Omega_{m'} = \Omega_{n'}\Omega_n$.

Todistus. (Vrt. [6, s. 25]) Olkoon $T = \Omega_\alpha\Omega_\beta$ siirto suoran l suuntaan ja olkoot suorat $m, n \perp l$. Lauseen 2.7 nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen suora $m' \perp l$, että

$$\begin{aligned} \Omega_m\Omega_\alpha\Omega_\beta =& \Omega_{m'} \\ \Omega_m\Omega_m\Omega_\alpha\Omega_\beta =& \Omega_m\Omega_{m'} \\ T = \Omega_\alpha\Omega_\beta =& \Omega_m\Omega_{m'} \end{aligned}$$

Samoin on olemassa sellainen yksikäsitteinen suora $n' \perp l$, että $T = \Omega_\alpha\Omega_\beta = \Omega_{n'}\Omega_n$.

□

Lause 2.9. *Olkoon* τ_v *siirto. Tällöin*

1. $\tau_v\tau_w = \tau_{v+w}$ *(tässä vektorit voivat siis olla eri suuntaisia),*

2. $\tau_0 = I$,

3. $\tau_{-v} = (\tau_v)^{-1}$.

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Todistetaan ensimmäinen kohta. $\tau_v\tau_w(x) = \tau_v(x + w) = x + v + w = \tau_{v+w}(x)$.

Todistetaan sitten kohta 2. $\tau_0(x) = x + 0 = x = I(x)$.

Todistetaan lopuksi kohta 3. $\tau_{-v}\tau_v(x) = \tau_{v+(-v)} = \tau_0(x) = I(x)$, joten $\tau_{-v} = (\tau_v)^{-1}$.

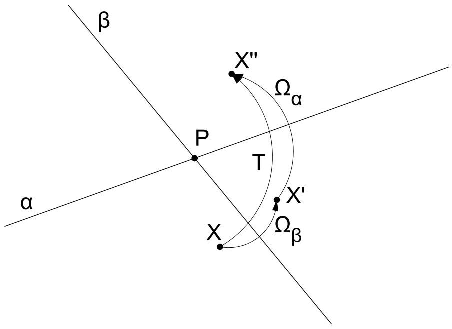
□

Samoin kuin peilauskin, myös siirto voidaan esittää matriisimuodossa

$$\tau_v(x) = x + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

2.4 Kierto

Määritelmä 2.7. Jos α ja β ovat suoria jotka leikkaavat pisteessä P, niin yhtenevyyskuvaus $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ on *kierto* pisteen P ympäri. Jos $\alpha = \beta$, niin kyseessä on identiteettikuvaus, kierto minkä tahansa pisteen P ympäri. Jos kierto ei ole identiteettikuvaus, se on epätriviaali. Jos $\alpha \perp \beta$, niin kierto $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ on puolikierto suorien α ja β leikkauspisteen ympäri.



Kuva 4: Kierto

Tarkastellaan seuraavaksi kahden peilauksen yhdistettä, kun peilaussuorat leikkaavat toisensa origossa. Olkoot m_0 ja l_0 suoria, jotka kulkevat origon kautta. Olkoot suoran m_0 suuntavektori $(\cos\phi, \sin\phi)$ ja suoran l_0 suuntavektori $(\cos\theta, \sin\theta)$. Olkoon peilauksen Ω_{m_0} matriisiesitys

$$ref\phi = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}$$

ja olkoon $ref\theta$ peilauksen Ω_{l_0} matriisiesitys, eli

$$ref\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$ref\theta ref\phi = \begin{bmatrix} \cos 2(\theta-\phi) & -\sin 2(\theta-\phi) \\ \sin 2(\theta-\phi) & \cos 2(\theta-\phi) \end{bmatrix}.$$

Merkitään

$$2(\theta-\phi) = \varphi \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = rot\varphi.$$

Kun kantavektori $\epsilon_1 = (1,0)$ kerrotaan tällä matriisilla, saadaan vektori $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, ja kun kantavektori $\epsilon_2 = (0,1)$ kerrotaan, saadaan vektori

$v = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Kuvaus, jossa kerrotaan matriisilla $rot\varphi$, on siis "kierto origon ympäri φ:n verran +-suuntaan". Kierto mielivaltaisen pisteen P ympäri saadaan kuten peilauskin, siirtämällä kierron keskus origoon, suorittamalla kierto ja siirtämällä takaisin. Tällöin siis kierto $\rho_P = \tau_P rot\varphi \tau_{-P}$.

Lause 2.10. *Kierroille ja peilauksille pätevät seuraavat ominaisuudet:*

1. $ref\theta rot\phi = ref(\theta - \frac{\phi}{2})$,
2. $rot\theta ref\phi = ref(\theta + \frac{\phi}{2})$,
3. $ref\theta ref\phi ref\psi = ref(\theta - \phi + \psi)$.

Todistus. (Vrt. [6, s. 27]) Todistetaan ensin kohta 1.

$$
\begin{aligned}
ref\theta rot\phi &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\theta \cos\phi + \sin 2\theta \sin\phi & -\cos 2\theta \sin\phi + \sin 2\theta \cos\phi \\ \sin 2\theta \cos\phi - \cos 2\theta \sin\phi & -\sin 2\theta \sin\phi - \cos 2\theta \cos\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(2\theta - \phi) & \sin(2\theta - \phi) \\ \sin(2\theta - \phi) & -\cos(2\theta - \phi) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2(\theta - \frac{\phi}{2}) & \sin 2(\theta - \frac{\phi}{2}) \\ \sin 2(\theta - \frac{\phi}{2}) & -\cos 2(\theta - \frac{\phi}{2}) \end{bmatrix} \\
&= ref(\theta - \frac{\phi}{2})
\end{aligned}
$$

Todistetaan seuraavaksi kohta 2.

$$
\begin{aligned}
rot\theta ref\phi &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta + 2\phi) & \sin(\theta + 2\phi) \\ \sin(\theta + 2\phi) & -\cos(\theta + 2\phi) \end{bmatrix} \\
&= ref(\phi + \frac{\theta}{2})
\end{aligned}
$$

Todistetaan lopuksi kohta 3.

$$
\begin{aligned}
ref\theta ref\phi ref\psi &= ref\theta rot(2(\phi - \psi)) \\
&= ref\Big(\theta - \frac{(2(\phi - \psi))}{2}\Big) \\
&= ref(\theta - \phi + \psi).
\end{aligned}
$$

Ensimmäisessä askeleessa käytetään rot:in määritelmää, seuraavassa saman lauseen kohtaa 1.

□

Lause 2.11. *(Kolmen peilauksen lause) Olkoon α, β ja γ kolme suoraa, jotka kulkevat pisteen P kautta. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen suora δ, joka kulkee pisteen P kautta, ja $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma = \Omega_\delta$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 28]) Olkoot α, β ja γ suoria, P näiden suorien yhteinen piste. Olkoot $\Omega_\alpha = \tau_P(ref\theta)\tau_{-P}$, $\Omega_\beta = \tau_P(ref\phi)\tau_{-P}$ ja $\Omega_\gamma = \tau_P(ref\psi)\tau_{-P}$.

$$\begin{aligned}\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma &= \tau_P(ref\theta)\tau_{-P}\tau_P(ref\phi)\tau_{-P}\tau_P(ref\psi)\tau_{-P}\\ &= \tau_P(ref\theta)(ref\phi)(ref\psi)\tau_{-P}\\ &= \tau_P ref(\theta-\phi+\psi)\tau_{-P}\end{aligned}$$

Viimeisessä askeleessa käytettiin lauseen 2.10 kohtaa 3. Tämä on peilaus Ω_δ sellaisen suoran δ suhteen, joka kulkee pisteen P kautta ja sen suuntavektori on $(\cos(\theta-\phi+\psi), \sin(\theta-\phi+\psi))$. □

Lause 2.12. *Olkoon kuvaus $T = \Omega_\alpha\Omega_\beta$ kierto pisteen P ympäri ja olkoon l suora, joka kulkee pisteen P kautta. Silloin on olemassa yksikäsitteiset suorat m ja m', jotka kulkevat pisteen P kautta, ja $T = \Omega_l\Omega_m = \Omega_{m'}\Omega_l$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 29]) Olkoon $T = \Omega_\alpha\Omega_\beta$ kierto pisteen P ympäri, olkoon l suora ja $P \in l$. Lauseen 2.11 perusteella on olemassa sellainen suora m, että $P \in m$ ja

$$\begin{aligned}\Omega_l\Omega_\alpha\Omega_\beta =&\Omega_m\\ \Omega_l\Omega_l\Omega_\alpha\Omega_\beta =&\Omega_l\Omega_m\\ \Omega_\alpha\Omega_\beta =&\Omega_l\Omega_m.\end{aligned}$$

Samoin $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_l = \Omega_{m'}$, josta seuraa $\Omega_\alpha\Omega_\beta = \Omega_{m'}\Omega_l$. □

Lause 2.13. *Olkoon P piste. Puolikierto pisteen P ympäri on $H_P(X) = -X + 2P$.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Puolikierron määritelmän mukaan $H_P(X) = \Omega_l\Omega_m$, kun $l \perp m$ ja $l \cap m = P$. Olkoon M suoran m yksikkönormaalivektori ja olkoon N suoran l yksikkönormaalivektori. Nyt

$$\begin{aligned}H_P(X) =&\Omega_l\Omega_m(X)\\ =&\Omega_l(X - 2\langle X-P, M\rangle M)\\ =&X - 2\langle X-P, M\rangle M - 2\langle X - 2\langle X-P,M\rangle M - P, N\rangle N\\ =&X - 2\langle X-P, M\rangle M - 2\langle X-P, N\rangle N + 4\langle\langle X-P, M\rangle M, N\rangle N.\end{aligned}$$

Nyt $4\langle\langle X-P,M\rangle M,N\rangle N=0$, sillä $M\perp N$. Koska $\{N,M\}$ on kanta, niin $X-P=\langle X-P,M\rangle M+\langle X-P,N\rangle N$. Siispä

$$\begin{aligned}H_P(X)=&X-2\langle X-P,M\rangle M-2\langle X-P,N\rangle N+4\langle\langle X-P,M\rangle M,N\rangle N\\=&X-2\langle X-P,M\rangle M-2\langle X-P,N\rangle N\\=&X-2(X-P)\\=&-X+2P.\end{aligned}$$

□

Lause 2.14. *Kahden eri puolikierron yhdiste on siirto pitkin suoraa, joka yhdistää kiertojen keskukset.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Olkoot H_Q ja H_P puolikierrot. Nyt

$$\begin{aligned}H_PH_Q(X)=&H_P(-X+2Q)\\=&-(-X+2Q)+2P\\=&X+2(P-Q).\end{aligned}$$

Siispä kuvaus H_PH_Q on siirto vektorin 2(P-Q) verran, eli siirto pitkin suoraa $\overleftrightarrow{PQ}$. □

Lause 2.15. *Jos PQ ja $P'Q'$ ovat kollineaariset samanpituiset janat, niin joko (1) $\tau_{P'-P}$ tai (2) $H'_P\tau_{P'-P}$ kuvaa janan PQ janaksi $P'Q'$.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Olkoot PQ ja $P'Q'$ ovat kollineaariset janat ja olkoon $d(P,Q)=d(P',Q')$. Nyt $Q=\tau_{Q-P}(P)=P+(Q-P)$. Koska janat ovat samanpituiset, niin joko $Q'=P'+(Q-P)$ tai $Q'=P'-(Q-P)$.

Tarkastellaan tapausta (1): $\tau_{P'-P}(P)=P+(P'-P)=P'$ ja $\tau_{P'-P}(Q)=Q+P'-P=P'+(Q-P)=Q'$.

Tarkastellaan sitten tapausta (2): $H'_P\tau_{P'-P}(P)=H'_P(P')=P'$ ja $H'_P\tau_{P'-P}(Q)=H'_P(Q+P'-P)\overset{L.2.13}{=}-(Q+P'-P)+2P'=P'-(Q-P)=Q'$.

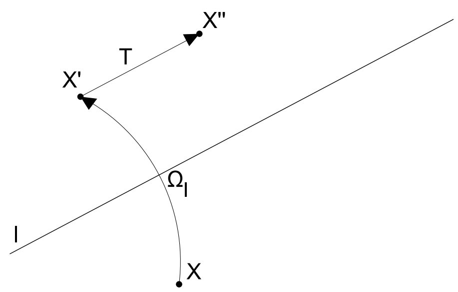
□

2.5 Liukupeilaus

Tähän mennessä on esitelty kolme erityyppistä yhtenevyyskuvausta: peilaus, siirto ja kierto. Neljäs tyyppi on nimeltään liukupeilaus ja se koostuu peilauksesta ja sitä seuraavasta siirrosta peilausakselia pitkin.

Myöhemmin todetaan että jokainen yhtenevyyskuvaus on jokin näistä neljästä perustyypistä.

Määritelmä 2.8. Olkoon Ω_l peilaus, jonka akseli on suora l. Olkoon T siirto pitkin suoraa l. Kuvausta $T\Omega_l$ sanotaan *liukupeilaukseksi* (glide reflection).



Kuva 5: Liukupeilaus

Jos $T = I$, on liukupeilaus tavallinen peilaus. Tällaista liukupeilausta sanotaan triviaaliksi.

Lause 2.16. *Olkoon $\tau_v\Omega_l$ liukupeilaus. Tällöin $\tau_v\Omega_l = \Omega_l\tau_v$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 29]) Olkoon l suora, olkoon v sen suuntainen vektori ja olkoon N sen yksikkönormaalivektori. Nyt

$$\tau_v\Omega_l(x) = \tau_v(x - 2\langle x - P, N\rangle N) = x - 2\langle x - P, N\rangle N + v$$

ja

$$\Omega_l\tau_v(x) = \Omega_l(x + v) = x + v - 2\langle x + v - P, N\rangle N = x + v - 2\langle x - P, N\rangle N,$$

sillä $v \perp N$. Siispä $\tau_v\Omega_l(x) = \Omega_l\tau_v(x)$.

□

Lause 2.17. *Olkoot α, β ja γ kolme eri suoraa, jotka eivät kaikki leikkaa samassa pisteessä eivätkä kaikki ole yhdensuuntaisia. Silloin $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma$ on epätriviaali liukupeilaus.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 30]) Olkoot α, β ja γ kolme suoraa, jotka eivät kaikki leikkaa samassa pisteessä, ja jotka eivät kaikki ole yhdensuuntaisia.

Koska suorat eivät kaikki ole yhdensuuntaisia, ainakin kaksi niistä leikkaavat toisensa. Oletetaan, että α ja β leikkaavat pisteessä P. Olkoon l sellainen suora, että $P \in l$ ja $l \perp \gamma$. Olkoon suorien l ja γ leikkauspiste F. Nyt lauseen 2.12 perusteella on olemassa sellainen suora m, että $P \in m$ ja $\Omega_\alpha\Omega_\beta = \Omega_m\Omega_l$. Tällöin $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma = \Omega_m\Omega_l\Omega_\gamma$.

Olkoon n suora, olkoon piste $F \in n$, $m \perp n$ ja olkoon n' suora, $F \in n'$, $n \perp n'$. Nyt $\Omega_l\Omega_\gamma = \Omega_{n'}\Omega_n = H_F$, eli puolikierto pisteen F ympäri. Tällöin $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma = \Omega_m\Omega_l\Omega_\gamma = \Omega_m\Omega_{n'}\Omega_n$. Koska $m \,||\, n'$ ja $m, n' \perp n$, niin $\Omega_m\Omega_{n'}$ on siirto pitkin suoraa n. Koska $F \in n'$ mutta $F \notin m$, niin $n' \neq m$ ja liukupeilaus $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma$ on epätriviaali.

□

Lause 2.18. *Olkoot T liukupeilaus ja Ω_α mikä tahansa peilaus. Silloin $\Omega_\alpha T$ on siirto tai kierto.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 30]) Olkoon T liukupeilaus ja olkoon Ω_α peilaus. Olkoon suora l liukupeilauksen T akseli. Tällöin joko (1) suora l leikkaa suoran α tai (2) $l \,||\, \alpha$.

1. Olkoon P suorien l ja α leikkauspiste. Lauseen 2.8 mukaan voidaan kirjoittaa $T = \Omega_l\Omega_a\Omega_b$, missä $P \in a$ ja $a, b \perp l$. Tällöin kertomalla puolittain Ω_α:lla saadaan $\Omega_\alpha T = \Omega_\alpha\Omega_l\Omega_a\Omega_b$, missä α, a ja l leikkaavat pisteessä P. Siispä lauseen 2.11 nojalla on olemassa sellainen peilaus Ω_c, että $\Omega_\alpha\Omega_l\Omega_a = \Omega_c$ ja $P \in c$. Nyt $\Omega_\alpha T = \Omega_c\Omega_b$, jolloin $\Omega_\alpha T$ on joko siirto tai kierto.

2. Olkoot a, b kuten edellä. Nyt $\Omega_\alpha T = \Omega_\alpha\Omega_l\Omega_a\Omega_b = \Omega_\alpha\Omega_a\Omega_l\Omega_b$, koska $a, b \perp l, \alpha$ (lause 2.4). Nyt $\Omega_\alpha\Omega_a$ ja $\Omega_l\Omega_b$ ovat eri puolikierrot, joten lauseen 2.14 perusteella $\Omega_\alpha T$ on siirto.

□

Myös liukupeilaus voidaan esittää matriisimuodossa kuten muutkin yhtenevyyskuvaukset. Koska liukupeilaus itsessään koostuu peilauksesta ja siirrosta, myös matriisiesitys koostuu näiden molempien kuvausten matriisiesityksistä. Kun peilausakseli kulkee origon kautta, matriisiesitys on:

$$\Omega_l\tau_v(x) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Jos peilausakseli ei kulje origon kautta, esityksestä tulee hieman monimutkaisempi. Peilausakseli siirretään origoon ja sitten takaisin paikalleen, $\tau\Omega_l = \tau(\tau_P\Omega_{l_0}\tau_{-P})$.

2.6 Yhtenevyyskuvauksista

Tässä aliluvussa osoitetaan, että jokainen yhtenevyyskuvaus voidaan esittää enintään kolmen sopivasti valitun peilauksen yhdisteenä. Tätä varten tarvitaan muutama apulause.

Apulause 2.1. *Kaikille vektoreille x ja $y \in \mathbb{R}^2$ on voimassa:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2) \quad \textit{(Polarisaatioidentiteetti).}$$

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.)

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - (((\langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle) - (\langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle))) \\
&= \frac{1}{2}(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle) \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

□

Apulause 2.2. *Jos T on sellainen yhtenevyyskuvaus, että $T(0) = 0$, niin*

1. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$,
2. $T = rot\theta$ *tai* $T = ref\theta$ *jollakin* θ.

Todistus. (Vrt. [6, s. 32]) Olkoon T sellainen yhtenevyyskuvaus, että $T(0) = 0$.

Todistetaan ensin kohta 1. Apuauseen 2.1 perusteella

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2)$$

ja

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \frac{1}{2}(|T(x)|^2 + |T(y)|^2 - |T(x) - T(y)|^2).$$

Nyt $|T(x)| = d(0, T(x)) = d(T(0), T(x)) = d(0, x) = |x|$.
Samoin $|T(y)| = |y|$.

Myös $|T(x) - T(y)| = d(T(x), T(y)) = d(x, y) = |x - y|$.
Siispä

$$\begin{aligned}\langle T(x), T(y)\rangle =& \frac{1}{2}(|T(x)|^2 + |T(y)|^2 - |T(x) - T(y)|^2)\\ =& \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2)\\ =& \langle x, y\rangle .\end{aligned}$$

Todistetaan sitten kohta 2. Olkoot $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ tason $\mathbb{E}^2$ ortonormaali kanta, missä $\epsilon_1 = (1, 0)$ ja $\epsilon_2 = (0, 1)$. Tällöin myös $\{T(\epsilon_1), T(\epsilon_2)\}$ muodostaa tason $\mathbb{E}^2$ ortonormaalin kannan (kohdan 1 ja yhtenevyyskuvauksen määritelmän perusteella). Olkoon $x = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2$, missä $x_1 = \langle x, \epsilon_1\rangle$ ja $x_2 = \langle x, \epsilon_2\rangle$ $(*)$. Koska $\{T(\epsilon_1), T(\epsilon_2)\}$ on kanta, niin tason vektori voidaan esittää muodossa $T(x) = \langle T(x), T(\epsilon_1)\rangle\, T(\epsilon_1) + \langle T(x), T(\epsilon_2)\rangle\, T(\epsilon_2)$. Kohdan (1) ja lausekkeiden $(*)$ perusteella

$$T(x) = \langle x, \epsilon_1\rangle\, T(\epsilon_1) + \langle x, \epsilon_2\rangle\, T(\epsilon_2) = x_1T(\epsilon_1) + x_2T(\epsilon_2).$$

Olkoon

$$T(\epsilon_1) = \langle T(\epsilon_1), \epsilon_1\rangle\, \epsilon_1 + \langle T(\epsilon_1), \epsilon_2\rangle\, \epsilon_2 = \lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2.$$

Koska $T(\epsilon_1)$ on yksikkövektori, niin Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön perusteella $|\lambda_1| = |\langle T(\epsilon_1), \epsilon_1\rangle| \leq |T(\epsilon_1)|\,|\epsilon_1| = 1$. Samoin $|\lambda_2| \leq 1$, ja pistetulon laskusääntöjä käyttämällä saadaan $|T(\epsilon_1)|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Koska $T(\epsilon_1)$ on yksikkövektori, niin edelleen $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. Nyt on olemassa sellainen yksikäsitteinen luku $\theta \in (-\pi, \pi]$, että $\lambda_1 = \cos\theta$ ja $\lambda_2 = \sin\theta$. Tällöin $\langle T(\epsilon_1), T(\epsilon_2)\rangle = \langle\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = 0$, joten $T(\epsilon_2) = \pm(T(\epsilon_1))^{\perp}$. Siis $T(\epsilon_2) = \pm((-\sin\theta)\epsilon_1 + (\cos\theta)\epsilon_2)$.
Edelleen matriisimuodossa $T(x) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = (rot\theta)x$
tai $T(x) = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = (ref\frac{\theta}{2})x$.

□

Lause 2.19. *Jokainen tason $\mathbb{E}^2$ yhtenevyyskuvaus on enintään kolmen sopivasti valitun peilauksen yhdiste.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 31]) Olkoon T yhtenevyyskuvaus. Tällöin on kolme vaihtoehtoa:

1. $T(0) = 0$. Tällöin edellisen lauseen perusteella $T = rot\theta$ tai $T = ref\theta$ jollain luvulla θ. Koska $rot\theta = ref\alpha ref\beta$ joillain α, β, niin T on korkeintaan kahden peilauksen yhdiste.

2. $T(P) = P$ jollain pisteellä P. Tällöin $\tau_{-P}T\tau_P(0) = 0$. Nyt kohdan (1) perusteella joko $\tau_{-P}T\tau_P = rot\theta$ tai $\tau_{-P}T\tau_P = ref\theta$. Siispä T on joko $\tau_P rot\theta\tau_{-P}$ tai $\tau_P ref\theta\tau_{-P}$. Koska siirto τ on aina kahden peilauksen yhdiste, käyttämällä joitakin lauseista 2.17, 2.18, 2.7 ja 2.11 saadaan peilausten määrä vähennettyä korkeintaan kolmeen.

3. $T(P) \neq P$ kaikilla pisteillä P. Olkoon $P = T(0)$. Silloin $\tau_{-P}T(0) = 0$, jolloin $\tau_{-P}T = rot\theta$ tai $\tau_{-P}T = ref\theta$. Tällöin $T = \tau_P rot\theta$ tai $T = \tau_P ref\theta$, jolloin taas kuten edellisessä kohdassa, käyttämällä joitakin lauseista 2.17, 2.18, 2.7 ja 2.11 saadaan peilausten määrä vähennettyä korkeintaan kolmeen.

□

Kuten edellisestä todistuksesta käy ilmi, kaikki yhtenevyyskuvaukset ovat jotain neljästä perustyypistä: peilaus, siirto, kierto tai liukupeilaus ja kaikki ovat siis esitettävissä korkeintaan kolmen peilauksen yhdisteenä.

2.7 Yhtenevyyskuvausten kiintopisteet ja kiintosuorat

Määritelmä 2.9. *Kiintopisteeksi* sanotaan sellaista pistettä X, joka toteuttaa ehdon $T(X) = X$. Suoraa, jonka kaikki pisteet ovat kiintopisteitä, sanotaan *kiintopistesuoraksi.* Suora, joka kuvautuu itselleen, mutta ei välttämättä pisteittäin, on *kiintosuora.*

Peilauksen kiintopisteitä ovat symmetria-akselilla olevat pisteet, akseli on siis kiintopistesuora:

Lause 2.20. $\Omega_l(X) = X$*, jos ja vain jos* $X \in l$

Todistus. (Vrt. [6, s. 20]) Olkoon l suora, olkoon N sen yksikkönormaalivektori ja piste $P \in l$. Tällöin $\Omega_l(X) = X$
$\Leftrightarrow X - 2\langle X - P, N\rangle N = X$
$\Leftrightarrow 2\langle X - P, N\rangle N = 0$
$\Leftrightarrow \langle X - P, N\rangle N = 0$, mikä lauseen 1.2 nojalla on yhtäpitävää sen kanssa, että piste X on suoralla l. □

Lause 2.21. *Yhtenevyyskuvauksille ja niiden kiintopisteille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Epätriviaalilla siirrolla ei ole kiintopisteitä.*

2. *Epätriviaalilla liukupeilauksella ei ole kiintopisteitä.*

3. Epätriviaalilla kierrolla on täsmälleen yksi kiintopiste, kierron keskus (center of rotation).

4. Peilauksen kiintopisteet muodostavat suoran, peilausakselin.

5. Identiteettikuvauksen kiintopisteet muodostavat koko tason.

Todistus. (Vrt. [6, s. 33])

Todistetaan ensin kohdat 1 ja 2. Olkoon T yhtenevyyskuvaus, jolla ei ole kiintopisteitä. Tällöin lauseen 2.19 todistuksen kohdan 3 mukaisesti joko $T = \tau_P rot\theta$ tai $T = \tau_P ref\theta$ joillain $P \in \mathbb{E}^2$ ja $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Oletetaan ensin, että $T(x) = \tau_P rot\theta(x) = (rot\theta)x + P$, joten $T(x) = x$ ainoastaan silloin, kun $(I - rot\theta)x = P \iff X = (I - rot\theta)^{-1}P$. Koska kuvauksella T ei ole kiintopisteitä, on matriisin $(I - rot\theta)$ oltava kääntymätön, eli $det(I - rot\theta) = 0$. Nyt

$$\begin{aligned} det(I - rot\theta) &= (1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \\ &= 2 - 2\cos\theta \\ &= 4\sin^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

ja $\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$, kun $\theta = 0$. Tällöin $rot\theta = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. Siispä $T = \tau_P rot\theta = \tau_P$ eli kuvaus T on siirto. Oletetaan sitten, että T on siirto. Olkoon $T = \tau_P$. Nyt $\tau_P(X) = X$ ainoastaan silloin, kun $P = 0$, mutta tällöinhän kyseessä olisi triviaali siirto. Siispä ei-triviaalilla siirrolla ei ole kiintopisteitä.

Oletetaan sitten, että $T = \tau_P ref\theta$. Nyt T on kolmen peilauksen yhdiste, joten lauseen 2.17 perusteella T on ei-triviaali liukupeilaus. Oletetaan sitten, että T on liukupeilaus. Olkoon $T = \Omega_l \tau_v$, missä $l = P + [v]$. Nyt

$$\begin{aligned} T(x) &= \Omega_l(x + v) \\ &= x + v - 2\langle x + v - P, N\rangle N \\ &= x + v - 2\langle x - P, N\rangle N - 2\langle v, N\rangle N. \end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että tällä kuvauksella on kiintopiste x. Siispä

$$\begin{aligned} T(x) &= x \\ x + v - 2\langle x - P, N\rangle N &= x \\ v &= 2\langle x - P, N\rangle N. \end{aligned}$$

Nyt $\langle v, v\rangle = \langle v, 2\langle x - P, N\rangle N\rangle = 2\langle x - P, N\rangle \langle v, N\rangle N = 0$, eli $|v| = 0$, joten liukupeilaus on triviaali. Siispä ei-triviaalilla liukupeilauksella ei ole kiintopisteitä.

Todistetaan sitten kohta 3. Olkoon T yhtenevyyskuvaus, jolla on yksi kiintopiste P. Tällöin lauseen 2.19 mukaan T on kierto pisteen P ympäri, tai peilaus suoran l, $P \in l$, yli. Lauseen 2.20 mukaan peilauksen kiintopisteiden joukko koostuu peilausakselin pisteistä, joten kuvauksen T on oltava kierto. Oletetaan sitten, että T on ei-triviaali kierto, eli $T = \tau_P rot\theta \tau_{-P}$. Piste X on kuvauksen kiintopiste, jos $T(X) = X$, eli

$$\begin{aligned}
\tau_P rot\theta \tau_{-P}(X) &= X \\
P + rot\theta(X - P) &= X \\
I(X - P) - rot\theta(X - P) &= 0 \\
(I - rot\theta)(X - P) &= 0.
\end{aligned}$$

Koska kierto oli ei-triviaali, niin$(I - rot\theta) \neq 0$, jolloin on oltava $X - P = 0$, eli $X = P$. Siis ei-triviaalilla kierrolla on yksi kiintopiste, kierron keskus.

Kohdan 4 todistus on esitetty jo aiemmin, ks. lause 2.20.

Kohta 5 on triviaalisti tosi.

□

Yhtenevyyskuvauksen kiintopisteiden joukko on siis aina jokin seuraavista: piste (kierto), suora (peilaus), tyhjä joukko (siirto tai liukupeilaus) tai koko taso $\mathbb{E}^2$ (identiteettikuvaus).

Lause 2.22. *Yhtenevyyskuvauksille ja niiden kiintosuorille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Epätriviaalilla siirrolla pitkin suoraa l on kiintosuorinaan kaikki suoran l suuntaiset suorat.*
2. *Puolikierrolla pisteen C ympäri on kiintosuorinaan kaikki pisteen C kautta kulkevat suorat. Epätriviaalilla kierrolla, joka ei ole puolikierto, ei ole kiintosuoria.*
3. *Peilauksen Ω_m kiintosuoria ovat suora m ja sen kanssa kohtisuorassa olevat suorat.*
4. *Identiteettikuvauksen kiintosuoria ovat tason kaikki suorat.*

Tämän lauseen todistus esitetään myöhemmin (katso luku 3.1).

3 Euklidisen tason affiinit kuvaukset

Affiini geometria koostuu ainoastaan niistä tason $\mathbb{E}^2$ ominaisuuksista, jotka riippuvat vain suorien leikkautumisominaisuuksista, eivät etäisyydestä tai kohtisuoruudesta.

Määritelmä 3.1. *Kollineaatio* on bijektio $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, joka toteuttaa seuraavan ehdon: kolme eri pistettä P, Q ja R ovat samalla suoralla, jos ja vain jos $T(P)$, $T(Q)$ ja $T(R)$ ovat samalla suoralla.

Määritelmä 3.2. Kuvausta $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ kutsutaan *affiiniksi* kuvaukseksi (affine transformation), jos on olemassa sellainen kääntyvä 2×2-matriisi A ja sellainen vektori $b \in \mathbb{R}^2$, että $T(x) = Ax + b$ kaikilla vektoreilla $x \in \mathbb{R}^2$.

Matriisi A ja vektori b ovat yksikäsitteisesti kuvauksen T määräämät. Matriisia A kutsutaan kuvauksen lineaariseksi osaksi ja vektoria b sen siirto-osaksi. Matriisin A sarakkeet ovat vektoreita $T(\epsilon_i) - b$, $i = 1, 2$ ja vektori $b = T(0)$.

Lauseen 2.19 perusteella jokainen yhtenevyyskuvaus on affiini kuvaus. Lauseen todistuksesta käy ilmi erilaiset matriisimuodot, jotka kaikki ovat edellisessä määritelmässä vaadittua tyyppiä.

Itse asiassa jokainen yhtenevyyskuvaus voidaan esittää muodossa $T(x) = T_0(x) + T(0)$, missä T_0 on sellainen kuvaus, jonka kiintopiste on origo ja $T(0)$ on siirto. Yhtenevyyskuvauksen, jonka kiintopiste on origo, on oltava peilaus tai kierto. Tälläisen peilauksen tai kierron matriisimuoto on $T_0(x) = (ref\theta)x$ tai $T_0(x) = (rot\theta)x$. Nämä molemmat ovat ortogonaalisia neliömatriiseja, eli niiden sarakkeet ovat ortogonaalisia yksikkövektoreita, ja siispä kääntyviä. Lisäksi $T(0) \in \mathbb{R}^2$. Siispä yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia, joiden lineaariselle osalle A pätee lisäehto, ortogonaalisuus. [1, s. 48.]

Lause 3.1. *Jokainen affiini kuvaus on kollineaatio.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 40])

Osoitetaan ensin, että affiini kuvaus T on bijektio. Olkoon $T(x) = Ax + b$. Osoitetaan kuvauksen surjektiivisuus: Oletetaan, että x kuuluu kuvauksen T kuvajoukkoon. Siis $x = Ax' + b$. Tällöin

$$\begin{aligned} Ax' &= x - b \\ A^{-1}Ax' &= A^{-1}(x - b) \\ x' &= A^{-1}(x - b). \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten kuvauksen injektiivisyys: Oletetaan, että $Ax + b = Ax' + b$, $x, x' \in \mathbb{E}^2$. Tällöin $A(x - x') = 0$, ja koska matriisi A on kääntyvä, niin $A \neq 0$ joten $x = x'$. Siispä affiini kuvaus T on bijektiivinen.

Osoitetaan sitten, että affiini kuvaus T säilyttää kollineaarisuuden. Olkoot P ja Q pisteitä ja olkoon T affiini kuvaus. Olkoon R mielivaltainen piste suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$, eli $R = (1-t)P + tQ$. Nyt

$$\begin{aligned}
T(R) =& T((1-t)P + tQ) \\
=& A((1-t)P + tQ) + b \\
=& (1-t)AP + tAQ + b \\
=& AP + b - tAP - b + tAQ + b \\
=& (1-t)T(P) + tT(Q).
\end{aligned}$$

Siispä piste $T(R)$ on suoralla $\overleftrightarrow{T(P)T(Q)}$.

Toisaalta, olkoon piste R' suoralla $\overleftrightarrow{T(P)T(Q)}$. Tällöin, koska T on surjektiivinen, on olemassa sellainen yksikäsitteinen piste R, että $T(R) = R'$. Nyt $T(R) = (1-t)T(P) + tT(Q)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Koska T on injektiivinen, niin $R = (1-t)P + tQ$, jolloin R on suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$. Siispä affiini kuvaus on kollineaatio. $\square$

Apulause 3.1. *Jokainen yhtenevyyskuvaus on kollineaatio.*

Tämä seuraa välittömästi edellisestä lauseesta, sillä yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia.

3.1 Affiinien kuvausten kiintosuorat ja kiintopisteet

Tässä aliluvussa käydään läpi affiinien kuvausten kiintosuoriin ja kiintopisteisiin liittyviä ominaisuuksia. Viimeisenä on lause, joka kertoo, että kahden ei-kollineaarisen kolmikon välille on aina olemassa affiini kuvaus, joka kuvaa ensimmäisen kolmikon toiseksi, ja että tämä kuvaus on yksikäsitteinen.

Lause 3.2. *Olkoon T affiini kuvaus ja olkoon $l = P + [v]$ suora. Silloin $T(l)$ on suora $T(P) + [Av]$, missä A on kuvauksen T lineaarinen osa.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 41]) Olkoon T affiini kuvaus ja olkoon $l = P + [v]$ suora, jolloin $X = P + tv$ on suoran l piste. Olkoon A kuvauksen lineaarinen osa ja b sen siirto-osa. Nyt $T(X) = T(P + tv) = A(P + tv) + b = AP + tAv + b = T(P) + tAv$. Nyt mielivaltainen suoran $T(l)$ piste $T(X) = T(P) + tAv$ on suoralla $T(P) + [Av]$. Samoin jokainen suoran $T(P) + [Av]$ piste on suoralla $T(l)$, joten $T(l) = T(P) + [Av]$.

$\square$

Lause 3.3. *Affiineille kuvauksille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Jos kaksi affiinin kuvauksen kiintosuoraa leikkaavat, ne leikkaavat kiintopisteessä.*

2. *Jos kaksi affiinin kuvauksen kiintosuoraa ovat yhdensuuntaiset, niin jokainen niiden kanssa yhdensuuntainen suora on kiintosuora.*

3. *Jos kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, niiden kuvat missä tahansa affiinissa kuvauksessa ovat yhdensuuntaiset.*

Todistus. (Tämän todistuksen kohdat 1 ja 2 ovat tekijän itse laatimia, kohta 3 vrt. [1, s. 72]) Todistetaan ensin kohta 1. Olkoot m ja n affiinin kuvauksen T kiintosuoria, ja olkoon X niiden leikkauspiste. Olkoot $m = X + [v]$ ja $n = X + [w]$. Tällöin $T(m) = T(X) + [Av] = T(X) + [v] = m$ ja $T(n) = T(X) + [Aw] = T(X) + [w] = n$. Nyt $T(X)$ on siis sekä suoralla m että n, joten $T(X) = X$ ja piste X on siis kiintopiste.

Todistetaan sitten kohta 2. Olkoot m ja n suoria, $m \,||\, n$. Olkoot $m = P + [v]$ ja $n = Q + [v]$. Nyt $T(m) = T(P) + [Av]$ ja $T(n) = T(Q) + [Av]$. Selvästi $T(m) \,||\, T(n)$.

Todistetaan lopuksi kohta 3. Olkoot m ja n suoria, $m \,||\, n$ ja olkoon T affiini kuvaus. Olkoot $m = P + [v]$ ja $n = Q + [v]$. Nyt edellisen lauseen mukaan $T(m) = T(P) + [Av]$ ja $T(n) = T(Q) + [Av]$. Siispä suorat $T(m)$ ja $T(n)$ ovat yhdensuuntaiset.

□

Nyt voidaan todistaa lause 2.22.

Todistus. (Vrt. [6, s. 41]) Olkoon T affiini kuvaus, jonka lineaarinen osa on matriisi A ja siirto-osa b. Olkoon $l = P + [v]$ suora.

Todistetaan aluksi kohta 1. Olkoon T ei-triviaali siirto. Tällöin $A = I$ ja $b \neq 0$. Nyt vektori v on aina matriisin A ominaisvektori joten l on kuvauksen T kiintosuora, jos ja vain jos $b \in [v]$. Siispä kiintosuoria ovat kaikki suorat, joiden suunta on $[v]$.

Todistetaan seuraavaksi kohta 2. Olkoon T puolikierto pisteen C ympäri. Tällöin lauseen 2.13 mukaan $A = -I$ ja $b = 2C$. Siispä v on aina matriisin A ominaisvektori, joten suora l on kuvauksen T kiintosuora, jos ja vain jos $-2P + 2C \in [v]$, eli $C \in P + [v]$. Siispä kiintosuoria ovat ne suorat, jotka kulkevat pisteen C kautta. Olkoon T kierto, jolle $A = rot\theta \neq \pm I$. Tällöin matriisilla A ei ole yhtään ominaisvektoria, eikä siis kuvauksella T yhtäkään kiintosuoraa.

Todistetaan sitten kohta 3. Olkoon T peilaus akselinaan suora m. Selvästi m on kiintosuora. (Lauseen 2.20 perusteella se on jopa kiintopistesuora.) Olkoon $m = Q + [w]$, missä w on yksikkövektori. Tällöin $\Omega_m(Q + tw^\perp) = Q + tw^\perp - 2\left\langle Q + tw^\perp - Q, w^\perp\right\rangle w^\perp = Q - tw^\perp$, joten $Q + \left[w^\perp\right]$ on kiintosuora. Siispä kuvauksen T kiintosuoria ovat kaikki suorat, jotka ovat kohtisuorassa peilauksen akselin kanssa. Edellisen lauseen mukaan kiintosuorat leikkaavat kiintopisteessä. Koska kuvauksen T kaikki kiintopisteet ovat suoralla m, ei muunlaisia kiintosuoria voi olla olemassa.

Todistetaan lopuksi kohta 4. Olkoon $T = \Omega_m \tau_{kw}$ liukupeilaus, missä w on suoran m yksikkösuuntavektori. Osoitetaan ensin, että m on kiintosuora. Olkoon Q mielivaltainen suoran m piste. Nyt

$$\begin{aligned} T(Q + tw) &= \Omega_m(Q + tw + kw) \\ &= Q + (t+k)w - 2\left\langle Q + (t+k)w - Q, w^{\perp}\right\rangle w^{\perp} \\ &= Q + (t+k)w, \end{aligned}$$

joten m on kiintosuora. Koska lauseen 2.21 mukaan liukupeilauksella ei ole kiintopisteitä, muiden kiintosuorien on oltava yhdensuuntaisia suoran m kanssa. Olkoon $l = Q + sw^{\perp} + [w]$. Nyt $l \,||\, m$. Tällöin

$$\begin{aligned} T(Q + sw^{\perp} + tw) &= \Omega_m(Q + sw^{\perp} + (t+k)w) \\ &= Q + sw^{\perp} + (t+k)w - 2\left\langle Q + sw^{\perp} + (t+k)w - Q, w^{\perp}\right\rangle w^{\perp} \\ &= Q - sw^{\perp} + (t+k)w. \end{aligned}$$

Nyt, jos l on kiintosuora, on oltava $s = 0$ jolloin $l = m$.

□

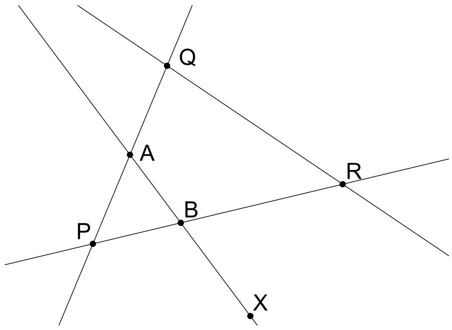
Lause 3.4. *Olkoot P ja Q pisteitä ja olkoon T affiini kuvaus. Silloin*

1. *$T((1-t)P + tQ) = (1-t)T(P) + tT(Q)$ kaikilla reaaliluvuilla t,*
2. *piste X on pisteiden P ja Q välissä, jos ja vain jos $T(X)$ on pisteiden $T(P)$ ja $T(Q)$ välissä. Edelleen, $\frac{d(P,X)}{d(P,Q)} = \frac{d(T(P),T(X))}{d(T(P),T(Q))}$.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Kohta 1 seuraa lauseen 3.1 todistuksesta.

Todistetaan kohta 2. Oletetaan, että piste X on pisteiden P ja Q välissä. Tällöin $X = (1-t)P + tQ$, missä $0 < t < 1$. Nyt kohdan 1 perusteella $T(X) = (1-t)T(P) + tT(Q)$, jolloin piste $T(X)$ on pisteiden $T(P)$ ja $T(Q)$ välissä. Lisäksi

$$\begin{aligned} \frac{d(T(P),T(X))}{d(T(P),T(Q))} &= \frac{|T(X) - T(P)|}{|T(Q) - T(P)|} \\ &= \frac{|(1-t)T(P) + tT(Q) - T(P)|}{|T(Q) - T(P)|} \\ &= \frac{|tT(Q) - tT(P)|}{|T(Q) - T(P)|} \\ &= \frac{|t|\,|T(Q) - T(P)|}{|T(Q) - T(P)|} \\ &= |t| \end{aligned}$$



Kuva 6: Lause 3.5

ja

$$\begin{aligned}
\frac{d(P,X)}{d(P,Q)} &= \frac{|X-P|}{|Q-P|} \\
&= \frac{|(1-t)P+tQ-P|}{|Q-P|} \\
&= \frac{|tQ-tP|}{|Q-P|} \\
&= |t| \, .
\end{aligned}$$

□

Lause 3.5. *Affiinien kuvausten kiintopisteille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Jos kaksi eri pistettä ovat affiinin kuvauksen kiintopisteitä, niin kaikki pisteet näiden kahden pisteen kautta kulkevalla suoralla ovat kiintopisteitä.*

2. *Jos kolme pistettä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla, ovat affiinin kuvauksen kiintopisteitä, kuvauksen on oltava identiteettikuvaus I.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 44]) Todistetaan ensin kohta 1. Olkoot P ja Q affiinin kuvauksen T kiintopisteitä (eli $T(P) = P$ ja $T(Q) = Q$), ja olkoon piste X suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$. Nyt lauseen 3.4 kohdan 1 nojalla $T(X) = (1-t)T(P)+tT(Q) = (1-t)P + tQ = X$.

Todistetaan sitten kohta 2.Olkoot P, Q ja R pisteitä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla, ja jotka ovat affiinin kuvauksen T kiintopisteitä. Nyt tämän lauseen ensimmäisen kohdan nojalla suorat $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{QR}$ ja $\overleftrightarrow{RP}$ koostuvat kiintopisteistä. Olkoon X piste, joka ei ole millään suorista $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{QR}$ ja $\overleftrightarrow{RP}$ ja olkoon piste A janan PQ keskipiste. Nyt suora $\overleftrightarrow{AX}$ ei voi olla samansuuntainen sekä suoran $\overleftrightarrow{QR}$ että $\overleftrightarrow{RP}$ kanssa, joten se leikkaa jommankumman suoran pisteessä B. Nyt X on siis samalla suoralla kahden kiintopisteen kanssa, joten sen on itsekin oltava kiintopiste. Siispä kuvauksen T kiintopisteitä ovat kaikki tason pisteet, joten T on identiteettikuvaus I.

□

Lause 3.6. *Olkoot P, Q ja R pisteitä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. Olkoot myöskin P', Q' ja R' pisteitä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. Silloin on olemassa sellainen yksikäsitteinen affiini kuvaus T, että $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$ ja $T(R) = R'$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 44]) Olkoot PQR ja $P'Q'R'$ ei-kollineaariset kolmikot. Nyt $\{Q - P, R - P\}$ ja $\{Q' - P', R' - P'\}$ muodostavat kaksi tason $\mathbb{E}^2$ kantaa, joten on olemassa sellainen kääntyvä 2×2-matriisi A, että $A(Q - P) = Q' - P'$ ja $A(R - P) = R' - P'$. Olkoon kuvaus $T = \tau_{P'} A \tau_{-P}$. Silloin $T(P) = \tau_{P'} A(P - P) = P'$, $T(Q) = \tau_{P'} A(Q - P) = \tau_{P'}(Q' - P') = Q'$ ja samoin $T(R) = R'$. Siispä T on affiini kuvaus jolla on vaadittu ominaisuus.

Osoitetaan vielä, että kuvaus T on todellakin yksikäsitteinen. Oletetaan, että $T'(P) = P'$, $T'(Q) = Q'$ ja $T'(R) = R'$. Tällöin $(T')^{-1}T$ on affiini kuvaus, jonka kiintopisteitä ovat P, Q ja R. Tällöin lauseen 3.5 mukaan $(T')^{-1}T = I$, joten $T = T'$. □

Kahden affiinin kuvauksen yhdistetty kuvaus on myöskin affiini, sillä olkoot $T(X) = AX + b$ ja $T'(X) = A'X + b'$. Nyt $TT'(X) = T(A'X + b') = A(A'X + b') + b = (AA')X + Ab' + b$, missä AA' on kääntyvä 2×2-matriisi ja $Ab' + b \in \mathbb{R}^2$.

3.2 Kollineaatioista

Tämän luvun alkupuolella todistettiin, että affiinit kuvaukset ovat kollineaatioita. Jotta voidaan todistaa, että sama on voimassa myös toisin päin, eli että kollineaatiot ovat affiineja kuvauksia, tarvitaan muutamia apulauseita.

Apulause 3.2. *Olkoon f kollineaatio ja olkoon $f(0) = 0$. Jos vektorit v ja w ovat lineaarisesti riippumattomat (eli $v \neq aw \ \forall a \in \mathbb{R}$), niin $f(v + w) = f(v) + f(w)$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 203]) Olkoot $l = v+[w]$ ja $m = w+[v]$ suoria. Piste $v+w$ on niiden leikkauspiste (koska piste $v + w$ toteuttaa suoran yhtälön suorilla l ja m), joten pisteen $f(v + w)$ on oltava suorien $f(l)$ ja $f(m)$ leikkauspiste.

Toisaalta suora $f(l)$ kulkee pisteen $f(v)$ kautta ja on samansuuntainen kuin $f([w]) = [f(w)]$, sekä suora $f(m)$ kulkee pisteen $f(w)$ kautta ja on samansuuntainen kuin $f([v]) = [f(v)]$. Koska $f(v)+f(w)$ toteuttaa molemmat ehdot, sen on oltava suorien $f(l)$ ja $f(m)$ yksikäsitteinen leikkauspiste. Siispä $f(v + w)$ ja $f(v) + f(w)$ ovat sama piste.

□

Apulause 3.3. *Olkoon $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen bijektio, että $\varphi(s + t) = \varphi(s) + \varphi(t)$ ja $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t) \ \forall \ s, t \in \mathbb{R}$. Silloin φ on identiteettifunktio.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 204]) Oletuksen perusteella $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ sekä $\varphi(-1) = -1$. Induktiolla voidaan helposti osoittaa, että $\varphi(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$, jolloin $\varphi(-n) = \varphi((-1)n) = \varphi(-1)\varphi(n) = -n$. Nyt, jos $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\varphi(m) = \varphi(nq) = \varphi(n)\varphi(q)$, niin $\varphi(q) = \frac{m}{n}$. Siispä φ on identiteettikuvaus rationaalilukujen joukossa.

Seuraavaksi osoitetaan, että φ säilyttää järjestyksen rationaalilukujen joukossa. Ensin, jos $a > 0$, niin $a = b^2$ jollakin $b \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\varphi(a) = \varphi(b^2) = (\varphi(b))^2 > 0.$$

Nyt, jos $t > s$, niin $t - s > 0$, eli

$$0 < \varphi(t - s) = \varphi(t) + \varphi(-s) = \varphi(t) - \varphi(s)$$

eli $\varphi(t) > \varphi(s)$. Siispä φ säilyttää järjestyksen.

Oletetaan sitten, että $\varphi(t) > t$ jollain $t \in \mathbb{R}$. Valitaan sellainen $q \in \mathbb{Q}$, että $t < q < \varphi(t)$. Koska φ säilyttää järjestyksen, on oltava $\varphi(t) < \varphi(q) = q$, mikä on ristiriita. Siispä ei voi olla $\varphi(t) > t$. Oletus $\varphi(t) < t$ johtaa samoin ristiriitaan, joten $\varphi(t) = t \ \forall t \in \mathbb{R}$. Siispä φ on identiteettikuvaus. □

Apulause 3.4. *Olkoon f sellainen kollineaatio, että $f(0) = 0$, $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$ ja $f(\epsilon_2) = \epsilon_2$. Silloin f on identiteettikuvaus.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 204]) Koska x_1-akseli on kuvauksen f kiintosuora (kaksi kiintopistettä), on olemassa sellainen funktio φ, että $f(t\epsilon_1) = \varphi(t)\epsilon_1 \forall t \in \mathbb{R}$. Samoin on olemassa sellainen funktio ψ, että $f(t\epsilon_2) = \psi(t)\epsilon_2 \forall t \in \mathbb{R}$. Nyt

$f(t\epsilon_1 + t\epsilon_2) \overset{\text{apulause 3.2}}{=} f(t\epsilon_1) + f(t\epsilon_2) = \varphi(t)\epsilon_1 + \psi(t)\epsilon_2$. Koska suora $x_1 = x_2$ on kiintosuora, on oltava $\varphi = \psi$. Nyt

$$f(t\epsilon_1 + s\epsilon_2) = f(t\epsilon_1) + f(s\epsilon_2) = \varphi(t)\epsilon_1 + \varphi(s)\epsilon_2. \quad (*)$$

Osoitetaan nyt, että $\varphi(xm) = \varphi(x)\varphi(m) \forall m \in \mathbb{R}$.
Lausekkeen (*) mukaan $f(\epsilon_1 + m\epsilon_2) = \epsilon_1 + \varphi(m)\epsilon_2$ ja $f(x\epsilon_1 + xm\epsilon_2) = \varphi(x)\epsilon_1 + \varphi(xm)\epsilon_2$. Koska pisteet $(1, m)$, (x, xm) ja $(0, 0)$ ovat kollineaariset, myöskin $(1, \varphi(m))$, $(\varphi(x), \varphi(xm))$ ja $(0, 0)$ ovat kollineaariset.
Siispä $\varphi(xm) = \varphi(x)\varphi(m)$, ja erityisesti $(\varphi(-1))^2 = \varphi(1) = 1$ joten $\varphi(-1) = -1$.

Osoitetaan sitten, että φ toteuttaa yhtäsuuruuden $\varphi(t+s) = \varphi(t) + \varphi(s)$.

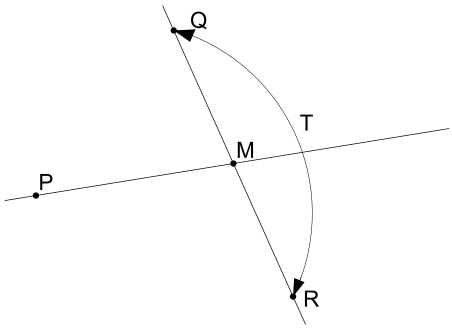
$$\begin{aligned}
\varphi(t+s)\epsilon_1 &= f((t+s)\epsilon_1) \\
&= f(t\epsilon_1 + s\epsilon_1) \\
&= f(t\epsilon_1 + s\epsilon_2 + s\epsilon_1 - s\epsilon_2) \\
&\overset{\text{apulause 3.2}, t \neq -s}{=} f(t\epsilon_1 + s\epsilon_2) + f(s\epsilon_1 - s\epsilon_2) \\
&\overset{\text{apulause 3.2}}{=} f(t\epsilon_1) + f(s\epsilon_2) + f(s\epsilon_1) + f(-s\epsilon_2) \\
&= \varphi(t)\epsilon_1 + \varphi(s)\epsilon_2 + \varphi(s)\epsilon_1 + \varphi(-s)\epsilon_2 \\
&= \varphi(t)\epsilon_1 + \varphi(s)\epsilon_1
\end{aligned}$$

Siispä apulauseen 3.3 nojalla φ on identiteettikuvaus, joten myöskin f on identiteettikuvaus. □

Lause 3.7. *Jokainen kollineaatio on affiini kuvaus.*

Todistus. (Vrt. [7, s. 218]) Olkoon g kollineaatio ja olkoot $g(0) = P$, $g(\epsilon_1) = Q$ ja $g(\epsilon_2) = R$. Lauseen 3.6 mukaan on olemassa sellainen affiini kuvaus h, että $h(0) = P$, $h(\epsilon_1) = Q$ ja $h(\epsilon_2) = R$. Koska affiinit kuvaukset ovat kollineaatioita, kuvaus h on kollineaatio. Tällöin myöskin h^{-1} on kollineaatio (koska kollineaatiot ovat määritelmän mukaan bijektioita), joten kuvaus $f = h^{-1}g$ on kollineaatio. Mutta nyt kuvauksen f kiintopisteitä ovat pisteet 0, ϵ_1 ja ϵ_2, joten edellisen apulauseen mukaan f on identiteettikuvaus, jolloin $g = h$. Koska h on affiini kuvaus, myöskin g on affiini kuvaus. □

Kollineaatio ja affiini kuvaus ovat siis ekvivalentteja, joten voidaan käyttää kumpaa tahansa määritelmistä.



Kuva 7: Affiini peilaus

4 Affiinit kuvaukset

Affiinit kuvaukset ovat siis sellaisia kuvauksia, jotka säilyttävät suorien leikkautumisominaisuudet, mutta eivät välttämättä pisteiden välistä etäisyyttä. Tässä luvussa käydään läpi kolme affiinia kuvausta: affiini peilaus, leikkuri ja dilataatio.

4.1 Affiini peilaus

Määritelmä 4.1. Olkoon P, Q ja R tason $\mathbb{E}^2$ kolme pistettä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. Yksikäsitteistä affiinia kuvausta, jonka kiintopiste on piste P ja joka vaihtaa pisteet Q ja R keskenään kutsutaan *affiiniksi peilaukseksi*, merkitään $[P; Q \leftrightarrow R]$.

Jokainen tavallinen peilaus on siis selvästi affiini peilaus. Affiineilla peilauksilla on joitakin tavallisten peilausten ominaisuuksia, kuten seuraavista lauseista käy ilmi.

Lause 4.1. *Olkoon M janan QR keskipiste ja olkoon P piste, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{QR}$. Silloin affiinin peilauksen $[P; Q \leftrightarrow R]$ kiintopisteitä ovat kaikki* *pisteet suoralla $\overleftrightarrow{PM}$ ($\overleftrightarrow{PM}$ on siis kiintopistesuora). Muita kiintopisteitä ei ole.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 45]) Olkoon M janan QR keskipiste ja olkoon $P \notin \overleftrightarrow{QR}$. Olkoon T affiini peilaus $[P; Q \leftrightarrow R]$. Nyt $Q = T(R) = AR + b$ ja $R = T(Q) = AQ + b$, joten $Q + R = A(Q + R) + 2b$, eli

$$\frac{Q+R}{2} = A\frac{Q+R}{2} + b.$$

Siispä $M = AM + b = T(M)$, joten M on kiintopiste. Lauseen 3.5 ensimmäisen kohdan mukaan suora $\overleftrightarrow{PM}$ koostuu kiintopisteistä. Lisäksi, jos affiini peilaus ei ole identiteettikuvaus, sillä ei voi lauseen 3.5 toisen kohdan mukaan olla muita kiintopisteitä. □

Lause 4.2. *Affiinin peilauksen $[P; Q \leftrightarrow R]$ kiintosuoria ovat suora $\overleftrightarrow{PM}$ ja kaikki suoran $\overleftrightarrow{QR}$ suuntaiset suorat, muita kiintosuoria ei ole.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 45]) Koska pisteet $T(Q)$ ja $T(R)$ määräävät saman suoran kuin pisteet Q ja R, suora $l = \overleftrightarrow{QR}$ on kiintosuora. Koska edellisen lauseen mukaan suora $\overleftrightarrow{PM}$ koostuu kiintopisteistä, niin jokainen suora $l' \,||\, l$ leikkaa tämän suoran kiintopisteessä M'. Siispä suora $T(l')$ kulkee pisteen M' kautta ja on yhdensuuntainen suoran $T(l) = l$ kanssa (lauseet 3.3 ja 1.12). Siispä suora $T(l') = l'$ on kiintosuora.

Olkoon l'' kiintosuora, joka ei ole yhdensuuntainen suoran l kanssa ja $l'' \neq \overleftrightarrow{PM}$. Tällöin suora l'' leikkaa suorat l ja l' kiintopisteissä (lause 3.3), mikä on ristiriita, sillä kaikki kiintopisteet ovat suoralla $\overleftrightarrow{PM}$.

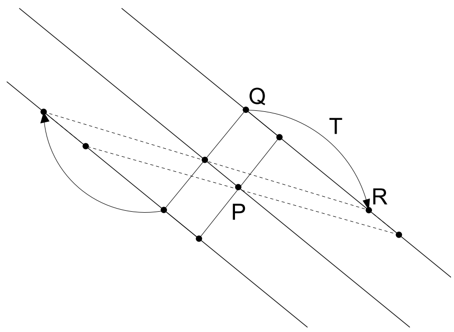
□

Lause 4.3. *Affiini peilaus $[P; Q \leftrightarrow R]$ on yhtenevyyskuvaus, jos ja vain jos $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{QR}$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 45]) Olkoon T affiini peilaus $[P; Q \leftrightarrow R]$.

Oletetaan ensin, että T on yhtenevyyskuvaus. Koska sillä on kiintopistesuora, sen on oltava tavallinen peilaus, jonka akseli on $\overleftrightarrow{PM}$ (lause 2.21). Koska $\overleftrightarrow{QR}$ on tämän peilauksen kiintosuora, lauseen 2.22 kohdan 3 mukaan sen on oltava kohtisuorassa suoran $\overleftrightarrow{PM}$ kanssa.

Oletetaan sitten, että $\overleftrightarrow{QR} \perp \overleftrightarrow{PM}$. Merkitään $m = \overleftrightarrow{PM}$. Osoitetaan, että kuvaus Ω_m vaihtaa pisteet Q ja R, jolloin lauseen 3.6 mukaan sen on oltava vaadittu affiini kuvaus, koska $\Omega_m(M) = M$.



Kuva 8: Leikkuri

Nyt $\Omega_m(Q) = Q - 2\langle Q - M, N\rangle N$, misä N on yksikkösuuntavektori suuntaan $[Q - R]$. Mutta $Q - M = \frac{1}{2}(Q - R)$, joten $\Omega_m(Q) = Q - \langle Q - R, N\rangle N = Q - (Q - R) = R$. Samoin $\Omega_m(R) = Q$, joten Ω_m vaihtaa pisteet Q ja R. □

4.2 Leikkuri

Määritelmä 4.2. Olkoot P, Q ja R kolme pistettä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. Affiinia kuvausta, jonka kiintopistesuora on suora, joka kulkee pisteen P kautta ja on suoran $\overleftrightarrow{QR}$ suuntainen, ja joka siirtää pisteen Q pisteeseen R, sanotaan *leikkuriksi* (shear). Merkitään $[P; Q \to R]$.

Kiintopistesuoraa kutsutaan leikkurin akseliksi.

Lause 4.4. *Leikkurilla $[P; Q \to R]$ on kiintopisteinään suoran l pisteet, kun $l \,||\, \overleftrightarrow{QR}$ ja $P \in l$. Kiintosuoria ovat kaikki suoran $\overleftrightarrow{QR}$ suuntaiset suorat.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 46])

Olkoon T leikkuri $[P; Q \to R]$. Määritelmän mukaan kiintopisteet ovat suoralla $m = P + [Q - R]$. Kuvauksella T ei voi olla muita kiintopisteitä, sillä muutoin T olisi identiteettikuvaus (lause 3.5).

Olkoon $l = Q + [Q - R]$. Koska $l \,||\, m$ ja $T(m) = m$, niin $T(l)$ on se yksikäsitteinen suora, joka kulkee pisteen $R = T(Q)$ kautta ja on suoran m suuntainen. Siispä $T(l) = l$ joten l on kiintosuora. Nyt lauseen 3.3 perusteella kaikki suorat, jotka ovat yhdensuuntaisia suorien m ja l kanssa, ovat kiintosuoria.

Osoitetaan vielä, että muita kiintosuoria ei ole. Tehdään vastaoletus, että suora n, joka ei ole yhdensuuntainen suorien l ja m kanssa, on kiintosuora. Olkoon suorien n ja m leikkauspiste B ja suorien n ja l leikkauspiste C. Nyt B ja C ovat kiintopisteitä (lause 3.3), jolloin lauseen 3.5 perusteella n on kiintopistesuora. Tämä on ristiriita, sillä todistuksen alkuosan perusteella kaikki kiintopisteet ovat suoralla m. Siispä muunsuuntaisia kiintosuoria ei ole. □

Leikkuri voidaan esittää matriisimuodossa. Tarkastellaan ensin sellaista leikkuria, jonka kiintopisteet ovat x_1-akselilla. Koska origo on kuvauksen kiintopiste, on siirto-osa $b = 0$. Vektori $\epsilon_1 = (1, 0)$ on kiintopiste, joten matriisin A ensimmäisen sarakkeen on oltava $\epsilon_1 = (1, 0)$. Leikkuri kuvaa vektorin $\epsilon_2 = (0, 1)$ suoralle $\epsilon_2 + [\epsilon_1]$, joten toinen sarake on $(\lambda, 1)$. Siispä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = 0.$$

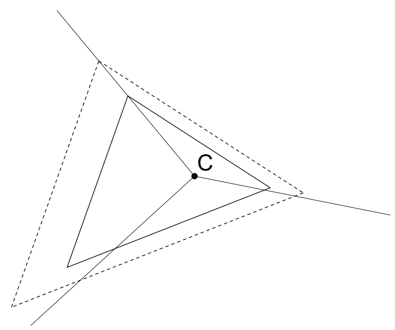
Tarkastellaan sitten leikkuria, jonka akseli on horisontaalinen suora pisteen P kautta. Tämä leikkuri voidaan kirjoittaa $T(X) = P + s_\lambda(X - P)$. Leikkuri, jonka akseli kulkee origon kautta, ja jolla on suuntavektori $(\cos\theta, \sin\theta) = (rot\theta)\epsilon_1$, voidaan taas kirjoittaa $T(X) = (rot\theta)s_\lambda(rot(-\theta))X$. Tällöin siis mielivaltainen leikkuri, jonka akseli on $P + [(rot\theta)\epsilon_1]$ voidaan kirjoittaa $T(X) = P + (rot\theta)s_\lambda(rot(-\theta))(X - P)$.

4.3 Dilataatio

Määritelmä 4.3. Affiinia kuvausta, jonka jokaiselle suoralle l on voimassa $T(l) = l$ tai $T(l) \,||\, l$ sanotaan *dilataatioksi.*

Lause 4.5. *Dilataatio, jolla on kaksi kiintopistettä, on identiteettikuvaus.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 47]) Olkoot P ja Q kaksi dilataation T kiintopistettä. Tällöin kaikki pisteet suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$ ovat kiintopisteitä (lause 3.5). Olkoon X sellainen mielivaltainen piste, että $X \notin \overleftrightarrow{PQ}$. Silloin T kuvaa suoran $\overleftrightarrow{PX}$ suoraksi pisteen P kautta säilyttäen sen suunnan, jolloin $\overleftrightarrow{PX}$ on kiintosuora. Samoin $\overleftrightarrow{QX}$ on kiintosuora, jolloin pisteen X on oltava kiintopiste (lause 3.3).



Kuva 9: Dilataatio

Nyt kuvauksella T on kolme kiintopistettä, joten se on identiteettikuvaus (lause 3.5). Siispä ei-triviaalilla dilataatiolla voi olla enintään yksi kiintopiste. □

Dilataatiota, jolla on yksi kiintopiste, kutsutaan *keskeisdilataatioksi* ja sen kiintopistettä *dilataation keskukseksi.*

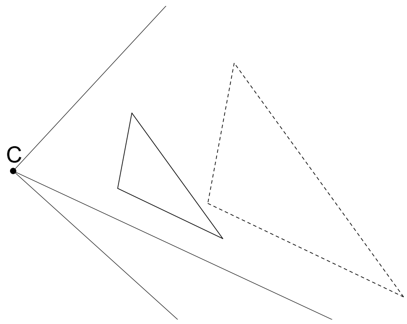
Lause 4.6. *Dilataatioille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Keskeisdilataatio, jonka keskus on piste C, voidaan esittää muodossa: $T(X) = C + \kappa(X - C)$, missä κ on suurennuskerroin.*

2. *Dilataatio, jolla ei ole kiintopisteitä, on siirto.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 48]) Todistetaan ensin kohta 1. Olkoon T keskeisdilataatio, jonka keskus on piste C. Koska T on dilataatio, niin jokainen vektori $v \in \mathbb{R}^2$ on matriisin A ominaisvektori (koska $T(l) = l$ tai $T(l) \,||\, l$). Siispä on olemassa sellainen $\kappa \neq 0, \kappa \in \mathbb{R}$, että $A = \kappa I$. Koska $T(C) = \kappa IC + b = C$, niin kuvauksen T siirto-osa $b = C - \kappa C$, joten $\forall X \in \mathbb{E}^2 : T(X) = \kappa X + C - \kappa C = C + \kappa(X - C)$.

Todistetaan sitten kohta 2. Jos $\kappa \neq 1$, niin yhtälöllä $T(X) = \kappa X + b = X$ on ratkaisu $X = \frac{-1}{\kappa - 1} b$. Siispä jokainen dilataatio on joko siirto, jolloin $\kappa = 1$, tai sillä on kiintopiste.



Kuva 10: Dilataatio

□

Lause 4.7. *Keskeisdilataation kiintosuorat ovat ne suorat, jota kulkevat keskuksen kautta.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 48]) Olkoon T keskeisdilataatio ja C sen keskus. Kaikki suorat, jotka kulkevat pisteen C kautta ovat kiintosuoria, sillä $T(C + [v]) = T(C) + [v] = C + [v]$.

Toisaalta, jos jokin kiintosuora l ei kulje pisteen C kautta, se leikkaa jonkin pisteen C kautta kulkevan kiintosuoran pisteessä $B \neq C$. Tällöin myös pisteen B pitäisi olla kiintopiste, mikä on ristiriidassa keskeisdilataation määritelmän kanssa. Siispä kaikki kiintosuorat kulkevat dilataation keskuksen kautta.

□

Puolikierto on erikoistapaus keskeisdilataatiosta, kerroin $\kappa = -1$.

Samoin kuin leikkuri, myös dilataatio voidaan esittää matriisimuodossa:

$$A = \kappa I = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = (1 - \kappa)C,$$

missä C on dilataation keskus.

5 Yhdenmuotoisuuskuvaukset

Tässä luvussa tutustutaan yhdenmuotoisuuskuvauksiin. Yhdenmuotoisuuskuvaus on sellainen kuvaus, joka kuvaa kaksi kuviota samanmuotoisiksi, mutta ei välttämättä samankokoisiksi, kuten yhtenevyyskuvaus. Tässä luvussa osoitetaan, että yhtenevyyskuvaukset ovat yhdenmuotoisuuskuvauksia, jotka ovat edelleen affiineja kuvauksia.

Määritelmä 5.1. Kuvausta $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ sanotaan *yhdenmuotoisuuskuvaukseksi* (similarity), jos kaikille tason pisteille X ja Y on voimassa

$$d(T(X), T(Y)) = \kappa d(X, Y), \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Yhdenmuotoisuus voidaan saavuttaa kahdella askeleella. Ensiksi keskeisdilataatiolla tehdään kuvio oikean kokoiseksi, ja sitten yhtenevyyskuvauksella siirretään se oikeaan paikkaan.

Lause 5.1. *Jokainen yhdenmuotoisuuskuvaus on keskeisdilataatio ja yhtenevyyskuvaus suoritettuna peräkkäin. Jokainen yhdenmuotoisuuskuvaus on affiini kuvaus.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 49]) Olkoon T yhdenmuotoisuuskuvaus jonka suurennuskerroin on κ. Olkoon S sellainen keskeisdilataatio, että $S(X) = \frac{1}{\kappa}X$. Olkoon $X, Y \in \mathbb{E}^2$. Tällöin $d(TS(X), TS(Y)) = \kappa d(S(X), S(Y)) = \kappa \frac{1}{\kappa} d(X, Y) = d(X, Y)$. Siispä TS on yhtenevyyskuvaus. Nyt $T = TSS^{-1}$, missä S^{-1} on keskeisdilataatio ja TS on siis yhtenevyyskuvaus. Koska T koostuu kahdesta affiinista kuvauksesta, se on myöskin affiini kuvaus.

□

Yhtenevyyskuvaus on siis yhdenmuotoisuuskuvaus, tällöin suurennuskerroin $\kappa = 1$. Yhdenmuotoisuuskuvaus on edelleen affiini kuvaus.

Lause 5.2. *Yhdenmuotoisuuskuvauksille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Jos T_1 ja T_2 ovat yhdenmuotoisuuskuvauksia, joiden suurennuskertoimet ovat κ_1 ja κ_2, niin T_1T_2 on yhdenmuotoisuuskuvaus, jonka suurennuskerroin on $\kappa_1\kappa_2$.*

2. *Jos T on yhdenmuotoisuuskuvaus, jonka suurennuskerroin on κ, niin T^{-1} on yhdenmuotoisuuskuvaus jonka suurennuskerroin on $\frac{1}{\kappa}$.*

Todistus. Todistetaan ensin kohta 1. Olkoot T_1 ja T_2 yhdenmuotoisuuskuvauksia, joiden suurennuskertoimet ovat κ_1 ja κ_2. Olkoon $X, Y \in \mathbb{E}^2$. Tällöin $d(T_1T_2(X), T_1T_2(Y)) = \kappa_1 d(T_2(X), T_2(Y)) = \kappa_1\kappa_2 d(X, Y)$. Siispä T_1T_2 on yhdenmuotoisuuskuvaus jonka suurennuskerroin on $\kappa_1\kappa_2$.

Todistetaan sitten kohta 2. Olkoon T yhdenmuotoisuuskuvaus jonka suurennuskerroin on κ. Koska yhdenmuotoisuuskuvaukset ovat affiineja kuvauksia, ne ovat bijektioita (lauseen 3.1 todistus). Siispä kuvauksen T käänteiskuvaus T^{-1} on olemassa. Nyt $d(T^{-1}(X), T^{-1}(Y)) = \frac{1}{\kappa} d(TT^{-1}(X), TT^{-1}(Y)) = \frac{1}{\kappa} d(X, Y)$. Siis T^{-1} on yhdenmuotoisuuskuvaus, jonka suurennuskerroin on $\frac{1}{\kappa}$.

□

Määritelmä 5.2. Kahden kuvion $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ sanotaan olevan *yhdenmuotoiset* (similar) jos on olemassa sellainen yhdenmuotoisuuskuvaus T, että $T(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$.

6 Kolmiot

Tämän luvun alkupuolella määritellään säteet, kulmat ja suoraviivaiset kuviot ja käydään läpi niihin liittyviä lauseita. Sitten määritellään barysentriset koordinaatit ja lopuksi päästään kolmioiden yhtenevyyslauseisiin.

6.1 Säteet ja kulmat

Määritelmä 6.1. Olkoot P tason $\mathbb{E}^2$ piste ja v vektori ($v \neq 0$). Silloin $r = \{P + tv \mid t \geq 0\}$ on *säde*, jonka lähtöpiste on P ja suuntavektori on v.

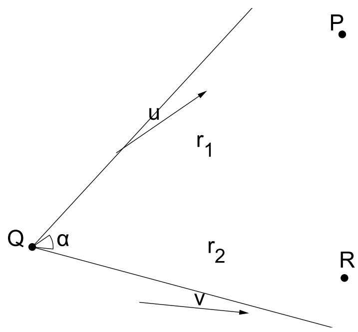
Jokainen pisteen P kautta kulkeva suora on siis yhdiste kahdesta säteestä, joiden suuntavektorit ovat v ja $-v$.

Määritelmä 6.2. Kahden säteen r_1 ja r_2, joiden lähtöpiste on P, yhdistettä kutsutaan *kulmaksi*. Pistettä P kutsutaan kulman *kärjeksi* ja säteitä kulman *kyljiksi*.

- Jos $r_1 = r_2$, kulma on *nollakulma*.
- Jos r_1 ja r_2 ovat saman suoran 'puolikkaat', ne ovat vastasäteitä (opposite rays) ja kulma on *oikokulma* (straight angle).
- Jos $r_1 \perp r_2$, kulma on *suorakulma* (right angle).

Kahden eri pisteen P ja Q kautta kulkee sellainen yksikäsitteinen säde, jonka lähtöpiste on P. Merkitään tätä $\overrightarrow{PQ}$. Kulmaa, jonka kärki on piste Q ja kyljet $\overrightarrow{QP}$ ja $\overrightarrow{QR}$ merkitään $\angle PQR$ $(= \angle RQP)$.

Määritelmä 6.3. Olkoon $\mathcal{A}$ kulma, jonka kylkien yksikkösuuntavektorit ovat u ja v. Kulman $\mathcal{A}$ koko radiaaneissa on $\cos^{-1}\langle u, v\rangle = \alpha$.



Kuva 11: Kulma

Jos $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ ja $v = (\cos\phi, \sin\phi)$, niin on olemassa sellainen $\alpha \in [0, \pi]$, että $(rot\,\alpha)u = v$ tai $(rot\,\alpha)v = u$. Toisin sanoen, on olemassa kierto, joka kuvaa kyljen toiseksi.

Lause 6.1. *Olkoon $\mathcal{A}$ kulma. Sen koko radiaaneina on*

1. 0*, jos ja vain jos $\mathcal{A}$ on nollakulma,*
2. π*, jos ja vain jos $\mathcal{A}$ on oikokulma,*
3. *välillä* $(0, \pi)$*, muulloin. Lisäksi, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, jos ja vain jos $\mathcal{A}$ on suorakulma.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Olkoon $\mathcal{A}$ kulma ja olkoon α sen koko radiaaneina. Olkoot vektorit u ja v kulman $\mathcal{A}$ kylkien yksikkösuuntavektorit. Todistetaan ensin kohta 1.

$$\begin{aligned}\alpha = 0 &\Leftrightarrow (rot\,0)u = v\\ &\Leftrightarrow u = v\\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ on nollakulma.}\end{aligned}$$

Todistetaan sitten kohta 2. Olkoon $\mathcal{A}$ oikokulma. Silloin sen kyljet ovat saman suoran puolikkaat, eli $v = -u$. Nyt

$$\begin{aligned}\alpha =& \cos^{-1}\langle u, v\rangle \\ =& \cos^{-1}\langle u, -u\rangle \\ =& \cos^{-1}(-|u|^2) \\ =& \cos^{-1}(-1) \\ =& \pi.\end{aligned}$$

Olkoon sitten $\alpha = \pi$. Olkoon $u = (\cos\theta, \sin\theta)$. Tällöin $(rot\pi)u = v$ tai $(rot\pi)v = u$. Tarkastellaan ensimmäistä.

$$v = \begin{bmatrix}\cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\pi+\theta) \\ \sin(\pi+\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\cos\theta \\ -\sin\theta\end{bmatrix} = -u,$$

eli $\mathcal{A}$ on oikokulma. Toinen menee samoin.

Todistetaan lopuksi kohta 3. Olkoot $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ ja $v = (\cos\phi, \sin\phi)$. Nyt $\alpha = \cos^{-1}\langle u, v\rangle = \cos^{-1}(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = \cos^{-1}(\cos(\theta - \phi))$. Nyt $\cos(\theta - \phi)$ saa arvoja välillä $[-1, 1]$, jolloin $\cos^{-1}(\cos(\theta - \phi))$ saa arvoja välillä $[0, \pi]$.
Lisäksi, $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos^{-1}\langle u, v\rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v \Leftrightarrow$ A on suorakulma.

□

Määritelmä 6.4. Kulman $\mathcal{A}$ sanotaan olevan *terävä* (acute), jos $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Kulman $\mathcal{A}$ sanotaan olevan *tylppä* (obtuse), jos $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

Lause 6.2. *Olkoon $\mathcal{A} = \angle PQR$ kulma.*

1. *Kulma $\angle PQR$ on terävä, jos ja vain jos $\langle P - Q, R - Q\rangle > 0$.*

2. *Kulma $\angle PQR$ on tylppä, jos ja vain jos $\langle P - Q, R - Q\rangle < 0$.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Olkoon $\mathcal{A} = \angle PQR$ kulma ja olkoon α sen koko radiaaneina. Olkoot u kyljen $P - Q$ yksikkösuuntavektori ja v kyljen $R - Q$ suuntavektori (eli $P - Q = cu$, $R - Q = dv$, $c, d \in \mathbb{R}^+$).

Todistetaan ensin kohta 1.

$$\begin{aligned}\angle PQR \text{ terävä} &\Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow \langle u, v\rangle > 0 \\ &\Leftrightarrow \langle P - Q, R - Q\rangle > 0.\end{aligned}$$

Todistetaan sitten kohta 2.

$$\begin{aligned}\angle PQR \text{ tylppä} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\\ &\Leftrightarrow \cos\alpha < 0\\ &\Leftrightarrow \langle u, v\rangle < 0\\ &\Leftrightarrow \langle P-Q, R-Q\rangle < 0.\end{aligned}$$

□

Määritelmä 6.5. Olkoon $\mathcal{A}$ kulma, jonka kärki on P ja suuruus α. Olkoot u ja v sen kylkien yksikkösuuntavektorit, $(rot\,\alpha)u = v$. Silloin sädettä pisteestä P suuntavektorinaan $(rot\,\frac{\alpha}{2})u$ sanotaan kulman $\mathcal{A}$ *puolittajaksi.*

Oikokulmalla on kaksi puolittajaa (yksi molempiin suuntiin), kaikilla muilla kulmilla on yksi puolittaja.

Lause 6.3. *Kaikille kulmille $\mathcal{A}$ on olemassa yksikäsitteinen peilaus, joka vaihtaa sen kyljet: peilaus kulmanpuolittajan yli.*

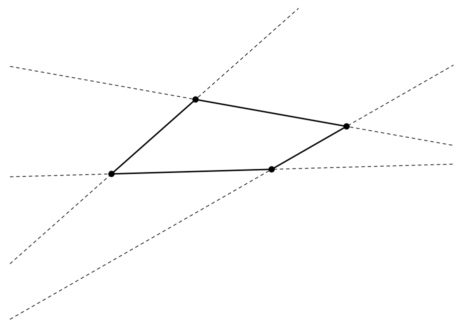
Todistus. (Vrt. [6, s. 52]) Olkoon $\mathcal{A}$ kulma, jonka koko on α. Olkoon kulman kärki P ja olkoot kyljet $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ ja $v = (\cos\phi, \sin\phi)$. Olkoon kuvaus $T = \tau_P\Big(ref\big(\frac{\theta+\phi}{2}\big)\Big)\tau_{-P}$. Nyt

$$\begin{aligned}T(P+tu) =&\tau_P\Big(ref\big(\frac{\theta+\phi}{2}\big)\Big)(P+tu-P)\\ =&P + \Big(ref\big(\frac{\theta+\phi}{2}\big)\Big)tu\\ =&P + t\Big(ref\big(\frac{\theta+\phi}{2}\big)\Big)(rot\theta)\epsilon_1\\ =&P + t\Big(ref\big(\frac{\phi}{2}\big)\Big)\epsilon_1\\ =&P + t(rot\,\phi)\epsilon_1\\ =&P + tv, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Siispä $T(r_1) = r_2$ ja samoin $T(r_2) = r_1$, missä r_1 ja r_2 ovat kulman kyljet.

Osoitetaan vielä kuvauksen yksikäsitteisyys. Oletetaan, että T' on myöskin peilaus, joka vaihtaa kulman kyljet. Tällöin kuvauksen $T'T$ kiintopisteitä ovat pisteet säteillä r_1 ja r_2. Siispä myöskin säteiden leikkauspiste P on kiintopiste. Koska $T(P) = P$, myöskin $T'(P) = P$. Siispä peilauksen T' akseli kulkee pisteen P kautta, jolloin $T'T$ on kierto pisteen P ympäri. Koska kuitenkin ainoa kierto, jolla on muitakin kiintopisteitä kuin kierron keskus, on identiteettikuvaus, niin kuvauksen $T'T$ on oltava identiteettikuvaus. Siispä $T' = T$.

□



Kuva 12: Suoraviivainen kuvio

6.2 Suoraviivaiset kuviot

Määritelmä 6.6. Äärellisen monen janan, säteen ja suoran yhdistettä kutsutaan *suoraviivaiseksi kuvioksi* (rectilinear figure).

Tavallisia esimerkkejä ovat kolmiot, nelikulmiot ja kulmat.

Määritelmä 6.7. Olkoon $\mathcal{F}$ suoraviivainen kuvio. Kuviota $\hat{\mathcal{F}}$, joka koostuu kaikista sellaisista suorista, jotka sisältävät kuvion $\mathcal{F}$ suoria, janoja ja säteitä, sanotaan kuvion $\mathcal{F}$ *suoraviivaiseksi täydennykseksi.* Suoraviivainen kuvio $\mathcal{F}$ on *täydellinen* (complete), jos aina kun jokin jana kuuluu kuvioon $\mathcal{F}$, myöskin suora, joka sisältää tämän janan, kuuluu kuvioon $\mathcal{F}$. Tällöin $\hat{\mathcal{F}}$ on pienin täydellinen suoraviivainen kuvio, joka sisältää kuvion $\mathcal{F}$.

Määritelmä 6.8. Olkoon $\mathcal{F}$ mikä tahansa kuvio. Affiini kuvaus, joka jättää kuvion $\mathcal{F}$ kiinteäksi, on kuvion $\mathcal{F}$ *affiini symmetria.*

Lause 6.4. *Olkoot T affiini kuvaus ja $\mathcal{F}$ suoraviivainen kuvio. Silloin T kuvaa kuvion $\hat{\mathcal{F}}$ suorien joukon bijektiivisesti joukkoon $T(\hat{\mathcal{F}})$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 52]) Olkoon T affiini kuvaus ja olkoon $\mathcal{F}$ suoraviivainen kuvio.

Osoitetaan ensin, että T kuvaa suorien joukon surjektiivisesti. Olkoon $T(l) \subset \widehat{T(\mathcal{F})}$, mutta $l \not\subset \widehat{\mathcal{F}}$. Olkoon m mielivaltainen kuvion $\widehat{\mathcal{F}}$ suora. Nyt siis $m \neq l$, joten $T(m) \neq T(l)$ (koska affiini kuvaus on bijektio). Siis $T(l)$ leikkaa suoran $T(m)$ enintään yhdessä pisteessä. Koska joukko $T(\mathcal{F})$ sisältää äärellisen määrän suoria, näiden suorien ja suoran $T(l)$ leikkauspisteitä on vain äärellinen joukko. Tämä on ristiriita, sillä $T(l)$ sisältää ainakin yhden kuvion $T(\mathcal{F})$ janan (koska $T(l) \subset \widehat{T(\mathcal{F})}$), jolloin se sisältää äärettömän määrän kuvion pisteitä.

Koska T on affiini kuvaus, se on bijektio. Riittää siis osoittaa, että jos $m \in \widehat{\mathcal{F}}$, niin $T(m) \in \widehat{T(\mathcal{F})}$. Olkoon $m \in \widehat{\mathcal{F}}$. Nyt suora m sisältää janan m_0, joka kuuluu kuvioon $\mathcal{F}$. Tällöin $T(m_0)$ on kuvion $T(\mathcal{F})$ jana. Siispä kuvio $\widehat{T(\mathcal{F})}$ sisältää suoran, jonka jana $T(m_0)$ määrää, siis suoran $T(m)$.

Siispä kuvaus T kuvaa kuvion $\hat{\mathcal{F}}$ suorien joukon bijektiivisesti joukkoon $T(\hat{\mathcal{F}})$. □

Määritelmä 6.9. Olkoon $\mathcal{F}$ suoraviivainen kuvio. Kuvion $\mathcal{F}$ pistettä, jossa kaksi kuvion $\hat{\mathcal{F}}$ suoraa leikkaavat, sanotaan kuvion $\mathcal{F}$ *kärjeksi*(vertex).

Lause 6.5. *Olkoon $\mathcal{F}$ suoraviivainen kuvio ja olkoon T affiini kuvaus. Silloin T kuvaa kuvion $\mathcal{F}$ kärkipisteiden joukon bijektiivisesti kuvion $T(\mathcal{F})$ kärkipisteiden joukoksi. Jos T on kuvion $\mathcal{F}$ affiini symmetria, niin T permutoi (permutes) kuvion $\mathcal{F}$ kärkipisteet.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 53]) Riittää osoittaa, että T kuvaa kuvion $\mathcal{F}$ kärkipisteet kuvion $T(\mathcal{F})$ kärkipisteiksi. Olkoon piste P kuvion $\mathcal{F}$ kärki. Silloin $T(P)$ on kuvion $T(\mathcal{F})$ piste. Koska P on kahden kuvion $\widehat{\mathcal{F}}$ suoran leikkauspiste, $T(P)$ on niiden kuvien leikkauspiste, joka edellisen lauseen mukaan on kuviossa $T(\mathcal{F})$. Siispä $T(P)$ on kuvion $T(\mathcal{F})$ kärki.

□

Apulause 6.1.

1. *Jokainen suoraviivaisen kuvion $\mathcal{F}$ affiini symmetria T on myöskin kuvion $\hat{\mathcal{F}}$ affiini symmetria.*

2. *Jokainen suoraviivaisen kuvion $\mathcal{F}$ affiini symmetria permutoi myös niiden kuvion $\hat{\mathcal{F}}$ kärkien joukon jotka eivät ole kuvion $\mathcal{F}$ kärkiä.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 53]) Olkoon T affiini symmetria ja olkoon $\mathcal{F}$ suoraviivainen kuvio.

Todistetaan ensin kohta 1. Koska T permutoi kuvion $\widehat{\mathcal{F}}$ suorat ja $\widehat{\mathcal{F}}$ on näiden suorien unioni, on oltava $T(\widehat{\mathcal{F}}) = \widehat{\mathcal{F}}$

Todistetaan sitten kohta 2. Koska T kuvion $\widehat{\mathcal{F}}$ affiini symmetria, niin kuvaus T permutoi kuvion $\widehat{\mathcal{F}}$ kärkien joukon. Koska T on myös kuvion $\mathcal{F}$

affiini symmetria, sen on permutoitava myös kuvion $\mathcal{F}$ kärkien joukko. Siispä kuvauksen T on permutoitava loput kuvion $\widehat{\mathcal{F}}$ kärjet keskenään.

$\square$

6.3 Barysentriset koordinaatit

Määritelmä 6.10. Olkoot P, Q ja R pisteitä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. Jokaista tason $\mathbb{E}^2$ pistettä X kohti on olemassa sellainen yksikäsitteinen kolmikko (λ, μ, ν), $(\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R})$, että

$$X = \lambda P + \mu Q + \nu R \quad \text{ja} \quad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

Yhteyttä $X \to \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}$ kutsutaan *barysentriseksi koordinaattisysteemiksi* ja kuviota PQR *referenssikolmioksi.*

Huom.

1. Tämä yleistää tutun tavan ilmaista suoran $\overleftrightarrow{PQ}$ pisteet: $\lambda P+\mu Q$, $\lambda+\mu = 1$.

2. Barysentriset koordinaatit 'kertovat missä kohdassa tasoa kuvioon PQR nähden piste X on'.

3. Barysentrisillä koordinaateilla on myös fysikaalinen tulkinta: Jos massat λ, μ ja ν sijoitetaan pisteisiin P, Q ja R, niin systeemin painopiste on pisteessä X. (Tämä pätee tietysti myös suoran tapaukselle.)

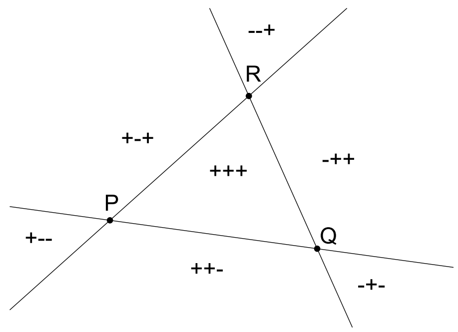
Lause 6.6. *Olkoon $\overleftrightarrow{PQ}$ suora ja olkoon R mikä tahansa sen ulkopuolinen piste. Käyttämällä kuviota PQR referenssikolmiona saadaan mille tahansa pisteelle X ja sen barysentrisille koordinaateille λ, μ ja ν seuraavat ehdot:*

1. $\nu = 0$, jos ja vain jos $X \in \overleftrightarrow{PQ}$,

2. $\nu > 0$, jos ja vain jos $XR \cap \overleftrightarrow{PQ} = \phi$.

Todistus. (Vrt. [6, s. 58]) Olkoon $\overleftrightarrow{PQ}$ suora ja olkoon R piste joka ei ole tällä suoralla.

Todistetaan ensin kohta 1. Olkoon $\nu = 0$. Siis $X = \lambda P + \mu Q + \nu R = \lambda P + \mu Q = (1-\mu)P + \mu Q$. Siispä piste X on suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$. Olkoon $X \in \overleftrightarrow{PQ}$. Tällöin on olemassa sellainen μ, että $X = (1-\mu)P + \mu Q = \lambda P + \mu Q$, ja $\nu = 0$.



Kuva 13: Barysentriset koordinaatit

Todistetaan sitten kohta 2. Olkoon $\nu > 0$ ja olkoon $0 \leq t \leq 1$. Nyt

$$\begin{aligned}(1-t)X + tR &= (1-t)\lambda P + (1-t)\mu Q + (1-t)\nu R + tR \\ &= (1-t)\lambda P + (1-t)\mu Q + ((1-t)\nu + t)R.\end{aligned}$$

Koska $(1-t)\nu + t > 0$, jana XR ei voi leikata suoraa $\overleftrightarrow{PQ}$. Toisaalta, jos $\nu < 0$, on olemassa sellainen $t \in \mathbb{R}$, että $(1-t)\nu + t = 0$, eli $t = \frac{-\nu}{1-\nu}$, missä $0 < \frac{-\nu}{1-\nu} < 1$. Tällöin jana leikkaa suoran eli $\overleftrightarrow{PQ} \cap XR \neq \phi$.

$\square$

Määritelmä 6.11. Olkoon l suora ja olkoon R sen ulkopuolinen piste. Sellaisten pisteiden X joukkoa, joille $XR \cap l = \phi$, sanotaan suoran l ja pisteen R määräämäksi *puolitasoksi.*

Lause 6.7. *Puolitasoille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Jokainen suora määrää kaksi puolitasoa. Peilaus Ω_l vaihtaa puolitasot.*

2. *Olkoot l suora, P ja Q sen pisteitä. Olkoon R suoran l ulkopuolinen piste. Suoran l ja pisteen R määräämä puolitaso on joukko pisteitä, joille $\nu > 0$ (kun referenssikolmio on PQR). Joukko, joille $\nu < 0$, on*

puolitaso, jonka määräävät l ja $\Omega_l R$. Näitä kahta puolitasoa sanotaan toistensa vastakkaisiksi puoliksi.

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima, katso myös [3, s. 64]) Todistetaan ensin kohta 1. Olkoon l suora ja olkoot piste $A \notin l$ ja piste $B \notin l$ siten, että suora l määrää kaksi eri puolitasoa $\{X \mid XA \cap l = \phi\}$ ja $\{X \mid XB \cap l = \phi\}$. Olkoon $B = \Omega_l(A)$. Nyt peilaus Ω_l vaihtaa puolitasot, $\Omega_l(B) = \Omega_l\Omega_l(A) = A$.

Todistetaan sitten kohta 2. Pisteen R ja suoran l määräämä puolitaso on joukko $XR \cap l = \phi$ eli $XR\cap \overleftrightarrow{PQ}= \phi$. Nyt lauseen 6.6 kohdan 2 perusteella $\nu > 0$. Olkoon $\nu < 0$. Tällöin $XR\cap \overleftrightarrow{PQ}\neq \phi$, jolloin $X\Omega_l(R)\cap \overleftrightarrow{PQ}= \phi$ on pisteen Ω_l ja suoran l määräämä puolitaso.

□

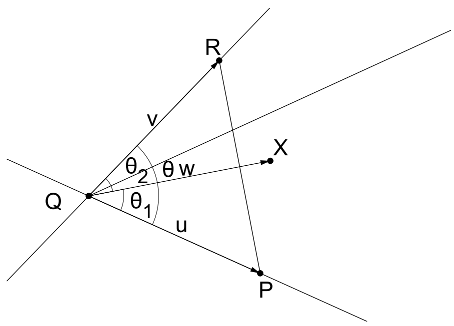
Kun kaksi pistettä ovat samalla puolitasolla, sanotaan, että ne ovat samalla puolella suoraa l. Kun kaksi pistettä eri puolilla suoraa l, sanotaan, että ne ovat vastakkaisilla puolilla suoraa l.

Määritelmä 6.12. Pisteen X sanotaan olevan kulman $\angle PQR$ *aukeamassa* jos $\lambda > 0$ ja $\nu > 0$.

Tämä on siis sama, kuin että pisteet X ja R ovat samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{PQ}$ ja pisteet X ja P ovat samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{QR}$.

Lause 6.8. *Olkoon piste X kulman $\angle PQR$ aukeamassa. Silloin säde $\overrightarrow{QX}$ leikkaa janan PR.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 59]) Olkoon X piste kulman $\angle PQR$ aukeamassa. Käytetään kuviota PQR referenssikolmiona, jolloin mielivaltainen piste säteellä $\overrightarrow{QX}$ on $Q+t(X-Q)$, missä $t > 0$. Piste X barysentristen koordinaattien avulla on $X = \lambda P+\mu Q+\nu R$, joten $Q+t(X-Q) = (1-t)Q+t\lambda P+t\mu Q+t\nu R = t\lambda P + (1-t+t\mu)Q + t\nu R$. Tämä piste on suoralla $\overleftrightarrow{PR}$, jos koordinaatin Q kerroin on nolla (Lause 6.6), eli jos $(1-t+t\mu) = 0$. Tällöin $t = \frac{-1}{\mu-1} = \frac{1}{1-\mu}$. Koska oletuksen mukaan piste X on kulman $\angle PQR$ aukeamassa, niin $\lambda > 0$ ja $\nu > 0$.
Siispä $1-\mu = \lambda+\nu > 0$, eli $t > 0$. Edelleen $\lambda t = \frac{\lambda}{1-\mu} > 0$ ja $\nu t = \frac{\nu}{1-\mu} > 0$, joten piste $Q + t(x-Q) \in PR$. □



Kuva 14: Lause 6.8

6.4 Kulmien yhteenlasku

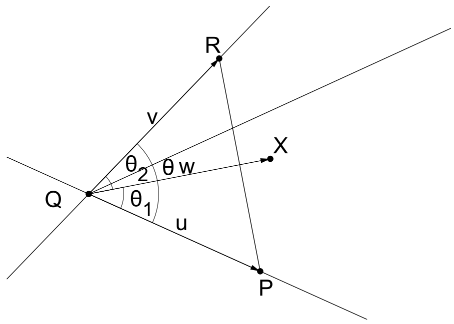
Lause 6.9. *Kulmien suuruuksille on voimassa seuraavat ehdot:*

1. *Olkoon $\angle PQR$ kulma ja olkoon X piste sen aukeamassa. Silloin kulman $\angle PQR$ suuruus on kulmien $\angle PQX$ ja $\angle RQX$ suuruuksien summa.*

2. *Olkoon $\angle PQR$ oikokulma ja olkoon X piste, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$. Silloin kulmien $\angle PQX$ ja $\angle RQX$ kokojen summa on π.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 60]) Todistetaan ensin kohta 1. Olkoon $\angle PQR$ kulma ja olkoon piste X sen aukeamassa. Olkoot kulman $\angle PQR$ koko θ, kulman $\angle PQX$ koko θ_1 ja kulman $\angle RQX$ koko θ_2. Olkoot $u = P - Q$, $v = R - Q$ ja $w = X - Q$, missä u, v, w ovat yksikkövektoreita (näin voidaan olettaa yleisyyden kärsimättä). Olkoon $(rot\theta)u = v$. Koska piste X on kulman $\angle PQR$ aukeamassa, niin $X - Q = \lambda(P - Q) + \mu(R - Q)$, eli $w = \lambda u + \mu v$, missä $\lambda, \mu \geq 0$. Radiaanisen koon määritelmän mukaan nyt on neljä vaihtoehtoa:

1. $(rot\theta_1)u = w$ ja $(rot\theta_2)w = v$. Siis $(rot\theta_2)((rot\theta_2)u) = v$ eli $(rot(\theta_1 + \theta_2))u = v$. (Tämä on helppo osoittaa tarkastelemalla kuvausten matriisiesityksiä.) Koska oletuksen mukaan $(rot\theta)u = v$, niin $\theta_1 + \theta_2 = \theta + 2n\pi$. Mutta $0 < \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$ (määr.), joten $\theta_1 + \theta_2 = \theta$.



Kuva 15: Lause 6.9

2. $(rot\theta_1)u = w$ ja $(rot\theta_2)v = w$. Siis $\cos\theta_1 = \langle u, w\rangle$, joten $\sin\theta_1 = \left\langle u^\perp, w\right\rangle$. Nyt $0 < \sin\theta_1 = \left\langle u^\perp, w\right\rangle = \mu\left\langle u^\perp, v\right\rangle$ ja $0 < \sin\theta_2 = \left\langle v^\perp, w\right\rangle = \lambda\left\langle v^\perp, u\right\rangle$. Kuitenkin $\left\langle u^\perp, v\right\rangle = \left\langle u^{\perp\perp}, v^\perp\right\rangle = -\left\langle u, v^\perp\right\rangle$, mikä on ristiriita, sillä $\left\langle u^\perp, v\right\rangle > 0$ ja $\left\langle v^\perp, u\right\rangle > 0$.

3. $(rot\theta_1)w = u$ ja $(rot\theta_2)w = v$. Siis $\cos\theta_1 = \langle w, u\rangle$, jolloin $\sin(-\theta_1) = \left\langle w^\perp, u\right\rangle$. Nyt $0 > \sin(-\theta_1) = \left\langle w^\perp, u\right\rangle = \left\langle w^{\perp\perp}, u^\perp\right\rangle = -\left\langle w, u^\perp\right\rangle = -\mu\left\langle v, u^\perp\right\rangle$. Siis $\left\langle v, u^\perp\right\rangle > 0$. Samoin $0 > \sin(-\theta_2) = -\lambda\left\langle u, v^\perp\right\rangle$, jolloin $\left\langle u, v^\perp\right\rangle > 0$ ja päädytään ristiriitaan kuten edellisessä.

4. $(rot\theta_1)w = u$ ja $(rot\theta_2)v = w$. Tällöin $0 < \sin\theta_2 = \lambda\left\langle u, v^\perp\right\rangle$ kuten kohdassa (2), mutta $0 < \sin\theta = \left\langle u^\perp, v\right\rangle = -\left\langle u, v^\perp\right\rangle$, eli $\left\langle u, v^\perp\right\rangle < 0$, mikä on ristiriita.

Todistetaan sitten kohta 2. Olkoon $\angle PQR$ oikokulma. Nyt $v = -u$ ja $v^\perp = -u^\perp$. Samat neljä vaihtoehtoa ovat mahdolliset nytkin:

1. Nyt $\theta = \pi$ ja edellisen perusteella $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

2. Nyt $0 < \sin\theta_1 = \left\langle u^\perp, w\right\rangle = -\left\langle v^\perp, w\right\rangle = -\sin\theta_2 < 0$, mikä on ristiriita.

3. $0 > \sin(-\theta_1) = \left\langle w^{\perp}, u \right\rangle = -\left\langle w^{\perp}, v \right\rangle = -\sin(-\theta_2) > 0$, mikä on ristiriita.

4. Tällöin samoin kuin kohdassa (1) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

$\square$

6.5 Kolmiot

Määritelmä 6.13. Olkoot P, Q ja R tason $\mathbb{E}^2$ pisteitä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. *Kolmio PQR* on se suoraviivainen kuvio, joka koostuu janoista PQ, QR ja PR. Näitä janoja kutsutaan kolmion *sivuiksi.*

Lause 6.10. *Olkoon PQR barysentrisen koordinaattisysteemin referenssikolmio. Tällöin*

1. *piste $X \in \mathbb{E}^2$ on kolmion PQR kärkipiste, jos ja vain jos kaksi sen barysentrisistä koordinaateista on nolla,*

2. *piste $X \in \mathbb{E}^2$ on kuviossa PQR jos se on kärkipiste tai jos yksi sen barysentrisistä koordinaateista on nolla muiden ollessa positiivisia.*

Todistus. (Tämä todistus on tekijän itse laatima.) Olkoon PQR kolmio. Käyttämällä kolmiota PQR referenssikolmiona tason piste voidaan kirjoittaa $X = \lambda P + \mu Q + \nu R$.

Todistetaan kohta 1. Oletetaan ensin, että X on kolmion PQR kärkipiste. Olkoon $X = P$ (kirjaimia voi vaihtaa tarvittaessa). Tällöin $X \in \overleftrightarrow{PQ}$ ja $X \in \overleftrightarrow{PR}$. Lauseen 6.6 nojalla tällöin $\nu = 0$ ja $\mu = 0$, sekä koska $XP \cap \overleftrightarrow{QR} = \phi$, niin $\lambda > 0$.

Oletetaan sitten, että $\mu = \nu = 0$ ja $\lambda \neq 0$. Tällöin lauseen 6.6 nojalla $X \in PQ$, $X \in PR$, joten $X \in PQ \cap PR$, eli $X = P$.

Todistetaan sitten kohta 2. Oletetaan ensin, että piste X on kolmion PQR kärkipiste. Tällöin se on triviaalisti kolmion piste.

Oletetaan sitten, että $\lambda = 0$ ja $\mu, \nu > 0$. Tällöin lauseen 6.6 perusteella $X \in \overleftrightarrow{QR}$. Koska $\mu, \nu > 0$, niin $XQ \cap \overleftrightarrow{PR} = \phi$ ja $XR \cap \overleftrightarrow{PQ} = \phi$. Siispä $X \in QR$, jolloin se on kolmion PQR piste. Samoin voidaan käydä läpi kaksi muutakin vaihtoehtoa.

$\square$

Edellisessä siis tarkoitetaan, että piste on 'kolmiolla', ei sen sisäpiste.

Määritelmä 6.14. Piste on kolmion sisällä, jos se on kaikkien kolmen kulman aukeamassa.

Huom. Kolmion sisäpisteillä $\lambda, \mu, \nu > 0$ (vrt.määritelmä 6.12).

Lause 6.11. *Affiini kuvaus T kuvaa kolmion PQR kolmioksi $P'Q'R'$, missä $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$ ja $R' = T(R)$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 62]) Olkoon PQR kolmio ja olkoon T affiini kuvaus. Lauseiden 3.1 ja 3.4 mukaan kolme ei-kollineaarista pistettä kuvautuvat ei-kollineaarisiksi, joten pisteet $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$ ja $T(R) = R'$ eivät kaikki ole samalla suoralla. Tällöin ne muodostavat kolmion $P'Q'R'$. Lauseen 3.4 mukaan myös kolmion muodostavat janat kuvautuvat affiinissa kuvauksessa janoiksi. □

Määritelmä 6.15. Kolmio on

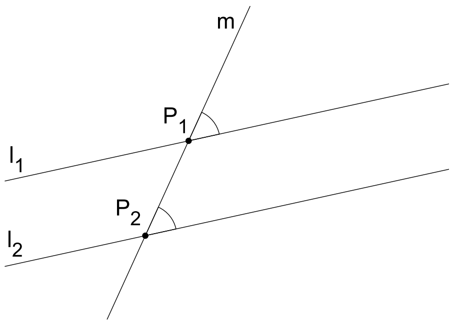
1. *erisivuinen* (scalene), jos kaikki kolme sivua ovat eri pituisia,
2. *tasakylkinen*, jos kaksi sivua ovat yhtä pitkät,
3. *tasasivuinen*, jos kaikki kolme sivua ovat yhtä pitkät.

6.6 Kulmien kongruenssi eli yhtenevyys

Lause 6.12. *Kaksi kulmaa ovat yhtenevät, jos ja vain jos niillä on sama suuruus.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 64]) Oletetaan ensin, että kulmat $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat yhtenevät, ja olkoon T sellainen yhtenevyyskuvaus, että $T(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Lauseen 6.4 mukaan T kuvaa kaksi kuvion $\widehat{\mathcal{A}}$ suoraa kahdeksi kuvion $\widehat{\mathcal{B}}$ suoraksi, joten se kuvaa kulman $\mathcal{A}$ kärjen kulman $\mathcal{B}$ kärjeksi. Olkoot u ja v kulman $\mathcal{A}$ kylkien yksikkösuuntavektorit. Jos A on kuvauksen T lineaarinen osa, niin kulman $\mathcal{B}$ kylkien suuntavektorien on oltava Au ja Av. Koska matriisi A on ortogonaalinen (T on yhtenevyyskuvaus), niin $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$, joten kulmilla $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on sama koko radiaaneina.

Oletetaan sitten, että kulmilla $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on sama koko radiaaneina. Olkoot $(rot\theta)u = v$ ja $(rot\theta)u' = v'$, missä u ja v ovat kulman $\mathcal{A}$ kylkien yksikkösuuntavektorit ja u' ja v' ovat kulman $\mathcal{B}$ kylkien yksikkösuuntavektorit. Olkoon ϕ sellainen luku, että $u' = (\cos\phi)u + (\sin\phi)u^{\perp} = (rot\phi)u$. Silloin $v' = (rot\theta)u' = (rot(\theta+\phi))u = (rot\phi)(rot\theta)u = (rot\phi)v$. Olkoot P ja Q kulmien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kärjet. Silloin $\tau_Q(rot\phi)\tau_{-P}(P+tu) = \tau_Q(rot\phi)(tu) = \tau_Q(tu') = Q+tu'$. Samoin $\tau_Q(rot\phi)\tau_{-P}(P+tv) = Q+tv'$. Siispä $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat yhtenevät. □



Kuva 16: Lause 6.13

Määritelmä 6.16. Olkoot l_1 ja l_2 suoria. Olkoon m suora, joka leikkaa suorat l_1 ja l_2 pisteissä P_1 ja P_2. Kahta eri leikkauspisteeseen muodostunutta kulmaa sanotaan *samankohtaisiksi kulmiksi*, jos leikkaava suora on niillä samannimisenä kylkenä.

Lause 6.13. *Olkoot l_1 ja l_2 suoria, $l_1 \,||\, l_2$. Olkoon m suora, joka leikkaa suorat l_1 ja l_2 pisteissä P_1 ja P_2. Nyt samankohtaiset kulmat jotka muodostuvat ovat yhtenevät.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 65]) Olkoot l_1, l_2 ja m suoria. Olkoon $l_1 \,||\, l_2$ ja olkoon v niiden suuntavektori. Olkoon m suora ja olkoot $m \cap l_1 = P_1$ ja $m \cap l_2 = P_2$. Olkoot $Q = P_1 + v$ ja $R = P_2 - v$. Kulmat $\angle P_2P_1Q$ ja $\angle RP_2P_1$ ovat samankohtaiset kulmat. Nyt $H_{P_2}\tau_{P_2-P_1}(\overrightarrow{P_1Q}) = \overrightarrow{P_2R}$ ja $H_{P_2}\tau_{P_2-P_1}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{P_2P_1}$. Siispä yhtenevyyskuvaus $H_{P_2}\tau_{P_2-P_1}$ kuvaa kulman $\angle P_2P_1Q$ kulmaksi $\angle RP_2P_1$, joten kulmat ovat yhtenevät. $\square$

6.7 Kolmioiden yhtenevyyslauseet

Tässä aliluvussa todistetaan euklidisen geometrian kuuluisat yhtenevyyslauseet. Seuraava lause tunnetaan sss-lauseena (sivu-sivu-sivu).

Lause 6.14. *Olkoot ΔPQR ja $\Delta P'Q'R'$ sellaisia kolmioita, että $d(P,Q) = d(P',Q')$, $d(P,R) = d(P',R')$ ja $d(Q,R) = d(Q',R')$. Silloin on olemassa sellainen yhtenevyyskuvaus T, että $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$ ja $T(R) = R'$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 65]) Olkoot PQR ja $P'Q'R'$ kolmioita ja olkoot $d(P,Q) = d(P'Q')$, $d(P,R) = d(P',R')$ ja $d(Q,R) = d(Q',R')$.
Olkoon nyt l_1 ja l_2 suoria. Tällöin on olemassa sellainen yhtenevyyskuvaus T, että $T(l_1) = l_2$, sillä jos $l_1 \,||\, l_2$, niin peilaus suorien puolivälissä olevan suoran yli vaihtaa kyseiset suorat, ja jos l_1 ja l_2 leikkaavat, niin peilaus niiden välisen kulmanpuolittajan yli vaihtaa suorat. (1)

Jos PQ ja $P'Q'$ ovat kollineaarisia janoja, joilla on sama pituus, niin on olemassa sellainen yhtenevyyskuvaus T, että $T(P) = P'$ ja $T(Q) = Q'$. Tässä tapauksessa yhtenevyyskuvaus on $T = \tau_{P'-P}$ tai $T = H_{P'}\tau_{P'-P}$. (lause 2.15) (2)

Oletetaan sitten, että $d(P,R) = d(P,R')$ ja $d(Q,R) = d(Q,R')$. Tällöin on olemassa yhtenevyyskuvaus T, jonka kiintopistesuora on $l = \overleftrightarrow{PQ}$ ja $T(R) = R'$. Tällöin $T = I$ tai $T = \Omega_l$. (3)

Valitaan nyt yhtenevyyskuvaus T_1, joka kuvaa suoran $\overleftrightarrow{PQ}$ suoraksi $\overleftrightarrow{P'Q'}$ (vrt. (1)). Valitaan myös yhtenevyyskuvaus T_2 joka kuvaa pisteen $T_1(P)$ pisteeksi P' ja pisteen $T_1(Q)$ pisteeksi Q' (vrt. (2)). Valitaan vielä yhtenevyyskuvaus T_3, joka kuvaa pisteen $T_2T_1(R)$ pisteeksi R' ja jonka kiintopistesuora on suora $\overleftrightarrow{P'Q'}$ (vrt. (3)). Silloin $T = T_3T_2T_1$ on kysytty yhtenevyyskuvaus. (Tilanteesta riippuen jokin tai jotkin kuvauksista toimivat muiden ollessa identiteettikuvauksia.) Siispä kolmiot ovat yhtenevät.

□

Seuraava apulause tunnetaan kosinilauseena.

Apulause 6.2. *Olkoot P, Q ja R tason $\mathbb{E}^2$ pisteitä. Silloin $d(P,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2 - 2d(P,Q)d(Q,R)\cos\theta$, missä θ on kulman PQR suuruus radiaaneina.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 66]) Olkoon $P,Q,R \in \mathbb{E}^2$ ja olkoon kulman PQR koko θ. Käytetään polarisaatioidentiteettiä (apulause 2.1). Olkoot $X = P - Q$ ja $Y = R - Q$, jolloin $X - Y = P - R$. Nyt

$$
\begin{aligned}
d(P,R)^2 =& d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2 - 2d(P,Q)d(Q,R)\cos\theta \\
d(P,R)^2 =& d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2 - 2d(P,Q)d(Q,R)\frac{\langle P-Q, R-Q\rangle}{|P-Q|\,|R-Q|} \\
d(P,R)^2 =& d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2 - 2d(P,Q)d(Q,R)\frac{\frac{1}{2}(d(P,Q)^2 + d(R,Q)^2 - d(P,R)^2)}{d(P,Q)d(R,Q)} \\
d(P,R)^2 =& d(P,R)^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Seuraava yhtenevyyslause tunnetaan sks-lauseena (sivu-kulma-sivu).

Lause 6.15. *Olkoot ΔPQR ja $\Delta P'Q'R'$ sellaiset kolmiot, että $d(P,Q) = d(P',Q')$, $d(Q,R) = d(Q',R')$ ja $\angle PQR = \angle P'Q'R'$. Silloin on olemassa sellainen yhtenevyyskuvaus T, että $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$ ja $T(R) = R'$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 66]) Olkoot PQR ja $P'Q'R'$ kolmioita ja olkoot $d(P,Q) = d(P'Q')$ ja $d(Q,R) = d(Q',R')$. Olkoon $\angle PQR = \angle P'Q'R'$, ja kulmien koko radiaaneina θ. Nyt kosinilauseen nojalla

$$\begin{aligned} d(P,R)^2 &= d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2 - 2d(P,Q)d(Q,R)\cos\theta \\ &= d(P',Q')^2 + d(Q',R')^2 - 2d(P',Q')d(Q',R')\cos\theta \\ &= d(P',R'), \end{aligned}$$

joten lauseen 6.14 perusteella $PQR \cong P'Q'R'$.

$\square$

Apulause 6.3. *Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtenevät.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 66]) Olkoon PQR sellainen kolmio, että $d(Q,P) = d(Q,R)$. Edellisen lauseen nojalla kolmiot PQR ja RQP ovat yhtenevät, sillä $d(P,Q) = d(R,Q)$, $d(Q,R) = d(Q,P)$ ja $\angle PQR = \angle RQP$. Siispä $\angle QRP \cong \angle QPR$. $\square$

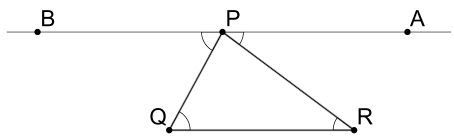
6.8 Kolmion kulmien yhteenlasku

Lause 6.16. *Kolmion kulmien summa on aina π.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 66])

Olkoon PQR kolmio. Silloin yksikäsitteinen suora pisteen P kautta suoran $\overleftrightarrow{QR}$ suuntaan on $\overrightarrow{PA} \cup \overrightarrow{PB}$, missä $A = P + (R - Q)$ ja $B = P + (Q - R)$. Nyt lauseen 6.9 mukaan kulman $\angle APB$ koko on kulmien $\angle BPR$ ja $\angle APR$ kokojen summa π. Koska $Q = B + (R - P)$, niin piste Q on kulman $\angle BPR$ aukeamassa. Lauseen 6.9 mukaan kulman $\angle BPR$ koko on kulmien $\angle BPQ$ ja $\angle RPQ$ kokojen summa. Lauseiden 6.12 ja 6.13 nojalla samankohtaiset kulmat ovat yhtenevät jolloin niiden koot ovat samat. Siispä kulmat$\angle BPQ$ ja $\angle PQR$ ovat samankokoiset ja kulmat $\angle APR$ ja $\angle PRQ$ ovat samankokoiset. Tällöin siis kulman $\angle APB$ koko on sama kuin kulmien $\angle PQR$, $\angle RPQ$ ja $\angle PRQ$ kokojen summa. Siispä kolmion kulmien summa on π.

$\square$



Kuva 17: Lause 6.16

Edellinen lause on yksi harvoista tuloksista, jotka eivät päde epäeuklidisessa geometriassa, ja tätä voidaankin käyttää kriteerinä euklidisen ja epäeuklidisen tunnistamisessa.

Apulause 6.4. *Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtenevät toisen kolmion kahden kulman kanssa, myös kolmannet kulmat ovat yhtenevät.*

Tämä seuraa suoraan edellisestä lauseesta.

Viitteet

[1] Brannan, David A., Esplen, Matthew F., Gray, Jeremy J., *Geometry*, Cambridge University Press, 1999.

[2] Cederberg, Judith N., *A Course in Modern Geometries*, Springer-Verlag New York Inc., 1989.

[3] Greenberg, Marvin J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H.Freeman and Company, 1972.

[4] Martin, George E., *Transformation Geometry*, Springer-Verlag New York Inc., 1982.

[5] Rosenberg, Erkki, *Geometria*, Limes ry, 1996.

[6] Ryan, Patrick J., *Euclidean and non-euclidean geometry -an analytic approach*, Cambridge University Press, 1986.

[7] Silvester, John R., *Geometry Ancient and Modern*, Oxford University Press, 2001.