TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Anna Kapanen

Polynomiyhtälöistä ja niitä käsittelevistä ylioppilastehtävistä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Marraskuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KAPANEN, ANNA: Polynomiyhtälöistä ja niitä käsittelevistä ylioppilastehtävistä

Pro gradu -tutkielma, 32 s., 5 liites.

Matematiikka

Marraskuu 2008

Tiivistelmä

Tämä didaktinen pro gradu -tutkielma käsittelee polynomiyhtälöitä ja polynomiyhtälöiden tehtäviä pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa 1950-luvusta alkaen meidän päiviimme saakka. Keskitytään ensimmäisen, toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälötehtäviin sekä sellaisiin murtoyhtälö-, yhtälöpari- ja sovellustehtäviin, jotka palautuvat polynomiyhtälöihin tai joiden ratkaisuissa tarvitaan polynomiyhtälöiden tietoja. Tutkielman tarkoituksena on tarkempi ja syvempi perehtyminen polynomiyhtälöihin kuin lukion oppimäärässä. Tavoitteena on myös seurata, miten matematiikan ylioppilaskokeet ja polynomitehtävät ovat kehittyneet ajan myötä. Tutkielman alussa on polynomiyhtälöiden matemaattinen osa, jossa on esitetty ensimmäisen, toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöt ja niihin liittyvät kaavat, määritelmät ja lauseet. Nämä kaikki polynomiyhtälöt opetetaan tavalla tai toisella lukiossa. Matemaattisesta osasta siirrytään ylioppilastutkinnon historiaan, missä kerrotaan, miten vuonna 1852 lukion oppimäärään sidottu ylioppilastutkinto on kehittynyt 156 vuoden aikana, ja mitä muutoksia on tapahtunut. Tutkielman varsinaisessa analyysissä esitetään mielenkiintoisia, haastavia ja suosittuja ylioppilastehtäviä tilastoineen sekä ylioppilastutkintolautakunnan puheenjohtajan professorin Aatos Lahtisen kommentit.

Avainsanat: pitkä matematiikka, polynomifunktio, polynomiyhtälö, ratkaisukaava, juuri, ylioppilastutkinto, ylioppilaskoe, ylioppilastehtävä.

Kiitokset

Haluan kiittää Jorma Merikoskea hyvästä ohjauksesta ja tarpeellisista kehittämisideoista työtä tehdessäni. Lämpimät kiitokseni puolisolleni Sepolle, vanhemmilleni ja muille sukulaisilleni, jotka auttoivat ja tukivat minua sekä tutkielmaa tehdessäni että koko opiskeluni aikana.

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Polynomiyhtälöt kuuluvat lukion pitkän matematiikan kurssiin *2. Polynomifunktiot*. Näihin yhtälöihin perustuvat monet matematiikan osa-alueet. Esimerkiksi korkeamman asteen yhtälöiden tietoja tarvitaan kurssilla *7. Derivaatta*. Polynomiyhtälöiden keskeinen merkitys herätti mielenkiintoni tutkia kyseistä aihetta tarkemmin. Samalla on kiinnostavaa tutkia, miten polynomiyhtälötehtävät muuttuivat ja kehittyivät ylioppilaskokeissa 1950-luvulta asti.

Tutkielman luvussa 2 esitetään matemaattinen osa, joka käsittelee ensimmäisen, toisen, kolmannen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöitä ja niihin liittyviä kaavoja, määritelmiä ja lauseita. Esitetyn materiaalin alkuosa sisältyy lukion oppimäärään ja löytyy lukion oppikirjasta [4]. Luvun 2 loppuosa myös kuuluu lukion oppimäärään, mutta tässä tutkielmassa sitä esitetään syvällisemmin ja materiaalina käytetään yliopiston oppikirjoja [15] ja [22].

Luvussa 3 tutustutaan ylioppilastutkinnon historiaan ja tutkitaan pitkän matematiikan ylioppilaskokeita, joista esitetään haastavia, suosittuja ja mielenkiintoisia polynomitehtäviä. Tutkielmassa pyritään myös vastaamaan seuraaviin kysymyksiin: korreloivatko kokeen ja lukion päättötodistuksen arvosanat keskenään, miten koetulosten tilastot ovat muuttuneet vuosien aikana, vaikuttaako tehtävän järjestysnumero ylioppilaskokeessa tehtävän vaikeustasoon. Lähteinä käytetään eri teoksia ylioppilastehtävineen vuodesta 1950 lähtien vuoteen 2008 [5], [21], [2], [6] sekä Dimensio-aikakausilehtiä [7] – [14].

Lukijalta edellytetään joidenkin analyysin ja algebran perusasioiden hallitsemista, minkä vuoksi kaikkia väitteitä ei todisteta tai perustella.

2 Polynomiyhtälöt

Tässä luvussa esitetään ensimmäisen, toisen, kolmannen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöt ja niihin liittyvät kaavat, määritelmät ja lauseet. Nämä kaikki polynomiyhtälöt opetetaan tavalla tai toisella lukiossa, joten ne löytyvät lukion oppikirjoista, mutta ei niin syvällisesti kuin tässä tutkielmassa. Pääteoksina käytetään lukion oppikirjaa [4] sekä yliopiston oppikirjoja [15] ja [22].

2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

Määritelmä 2.1. Funktiota, jonka lauseke on polynomi, kutsutaan *polynomifunktioksi*. Funktiota

(2.1) $$f(x) = kx + b,$$

missä k ja b ovat vakioita, sanotaan *lineaariseksi funktioksi*, jonka kuvaaja on suora $y = kx + b.$

Vakio k on kulmakerroin ja vakio b ilmoittaa suoran ja *y*-akselin leikkauspisteen *y*-koordinaatin.

Määritelmä 2.2. Funktiota (2.1) kutsutaan *ensimmäisen asteen polynomifunktioksi*, jos vakio $k \neq 0$. Yhtälö $kx + b = 0$ on tällöin *ensimmäisen asteen yhtälö*.

Jos $k > 0$, kuvaajana on nouseva suora $y = kx + b$, jos taas $k < 0$, kuvaajana on laskeva suora $y = kx + b$. Jos $k = 0$, niin kyseessä on *vakiofunktio* $f(x) = b$ ja kuvaajana on vaakasuora suora.

2.2 Toisen asteen yhtälö

Määritelmä 2.3. Funktiota

(2.2) $$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sanotaan *toisen asteen polynomifunktioksi*, jos $a \neq 0$. Sen kuvaaja on paraabeli.

Kerroin a määrää paraabelin aukeamissuunnan. Jos $a > 0$, niin paraabeli aukeaa ylöspäin, ja jos $a < 0$, niin se aukeaa alaspäin. Vakiotermin c muutokset siirtävät paraabelia pystysuunnassa.

Määritelmä 2.4. *Toisen asteen yhtälö* syntyy silloin, kun funktio (2.2) merkitään nollaksi, jolloin saadaan

(2.3) $$ax^2 + bx + c = 0,$$

missä vakiot a, b ja c ovat yhtälön kertoimia. Yhtälöä kutsutaan *täydelliseksi*, jos myös $b \neq 0$ ja $c \neq 0$, muutoin sitä kutsutaan *vaillinaiseksi*. Yhtälö (2.3) on toisen asteen yhtälön *normaalimuoto*.

Vaillinaisia yhtälöitä on helppo ratkaista käyttämällä perustietoja, kuten tulon nollasääntö, neliöjuuren ottaminen tai termien ryhmittely. Täydellinen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaistaan käyttämällä *ratkaisukaavaa*, joka johdetaan seuraavasti.

Kerrotaan ensin yhtälö (2.3) luvulla $4a$ ja siirretään vakiotermi oikealle, jolloin saadaan

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac\ .$$

Sitten kummallekin puolelle lisätään termi b^2 ja muunnetaan kahden termin muotoa

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac\ .$$

Kirjoitetaan vasen puoli binomin neliöksi

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac\ .$$

Ratkaistaan binomi $2ax + b$ juurtamalla ja siirretään termi b oikealle

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\ .$$

Lopuksi jaetaan yhtälö $2a$:lla ja saadaan ratkaisukaava

(2.4) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

Määritelmä 2.5. Ratkaisukaavassa (2.4) juurimerkin alla olevaa lauseketta sanotaan *diskriminantiksi* ja merkitään $D = b^2 - 4ac$. Diskriminantin arvosta voidaan päätellä, onko yhtälöllä reaalijuuria vai ei. Tällöin seuraavat säännöt ovat voimassa, kun muistetaan neliöjuuren määrittelyehto ja otetaan huomioon merkkivaihtoehdot:

1) jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalijuurta $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

2) jos $D = 0$, yhtälöllä on yksi juuri, ns. kaksoisjuuri $x = \frac{-b}{2a}$,

3) jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole reaalijuuria.

Lause 2.1. *Toiseen asteen yhtälön* $ax^2 + bx + c = 0$ *juurien summa on* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *ja tulo* $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Todistus. Ks. [4, s. 124].

Toisen asteen polynomi voidaan jakaa tekijöihin.

Lause 2.2. J*os* x_1 *ja* x_2 *ovat polynomin* $ax^2 + bx + c = 0$ *nollakohtia, niin*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) .$$

Todistus. Ks. [4, s. 127].

2.3 Kolmannen asteen yhtälö

2.3.1 Esitiedot

Tässä pykälässä esitetään määritelmät ja kaavat, joita käytetään apuna varsinaisessa aiheessa pykälissä 2.3.2 ja 2.3.3 (vrt. [22, s. 194 – 196]).

Lause 2.3 (de Moivren kaava)**.** *Olkoon* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Silloin* $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. *Jos valitaan* $r = 1$, *jolloin* $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, *saadaan de Moivren kaava*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

Todistus. Ks. [22, s. 193 - 194].

Seuraavaksi tarkastellaan ensin binomiyhtälön erikoistapausta $x^n = 1$ ja sitten yleistä tapausta $x^n = \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Osoitetaan aluksi, että binomiyhtälön

(2.5) $$x^n = 1$$

n juurta ovat *n:nnen yksikönjuuren* $\sqrt[n]{1}$ eri arvot

$$x_k = \cos k\cdot\frac{2\pi}{n} + i\sin k\cdot\frac{2\pi}{n} \qquad (k = 0, 1,\ldots, n\text{-}1).$$

Korotetaan x_k potenssiin *n*. Soveltamalla de Moivren kaavaa saadaan

$$x_k^n = \cos k\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot n + i\sin k\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot n$$

$$= \cos k\cdot 2\pi + i\sin k\cdot 2\pi = 1,$$

joten nämä luvut toteuttavat binomiyhtälön (2.5).

Merkitään

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Tällöin de Moivren kaavan perusteella $x_k = \rho^k$, joten kaikki *n*:nnet yksikönjuuret voidaan esittää ρ :n potensseina:

$$\rho^0 (=1),\ \ \rho\ ,\ \rho^2,\ldots,\ \rho^{n-1}.$$

Osoitetaan nyt, että yleisen binomiyhtälön

(2.6) $$x^n = \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

n juurta ovat *juurroksen* eli *radikaalin* $\sqrt[n]{\alpha}$ eri arvot

(2.7) $$x_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Korotetaan x_k potenssiin n. Soveltamalla lausetta 2.3 ja trigonometristen funktioiden palautuskaavoja saadaan

$$x_k^n = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right]$$

$$= r\left[\cos\varphi + i\sin\varphi\right] = \alpha\ ,$$

joten luvut toteuttavat binomiyhtälön (2.6).

Kompleksilukujen tulosäännön perusteella voidaan esittää yhtälö (2.7) muodossa $x_k = \rho^k x_0$. Tällöin juurroksen $\sqrt[n]{\alpha}$ eri arvot ovat

$$x_0,\ \rho x_0,\ \rho^2 x_0, \ldots,\ \rho^{n-1} x_0 .$$

2.3.2 Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaava

Tutkielman tässä pykälässä johdetaan ensin kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavat eli Cardanon kaavat ja sitten tarkastellaan juurien reaalisuutta (vrt. [15, s. 544 – 553] ja [22, s. 197 - 202]).

Määritelmä 2.6. Yhtälöä

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0\,,$$

missä kertoimet a_1, a_2, a_3 voivat olla kompleksilukuja ja z on tuntematon, sanotaan *kolmannen asteen yhtälöksi* eli *kuutioyhtälöksi*.

Kun edelliseen yhtälöön sijoitetaan $z = x - \frac{a_1}{3}$, saadaan se muotoon

(2.8) $$x^3 + px + q = 0\,,$$

missä $p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2$ ja $q = a_3 - \frac{1}{3}a_1 a_2 + \frac{2}{27}a_1^3$ (ks. liite 1).

Sijoittamalla $x = u + v$ saadaan

$$
\begin{aligned}
x^3 + px + q &= (u + v)^3 + p(u + v) + q \\
&= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q \\
&= (u^3 + v^3 + q) + (3u^2v + 3uv^2) + p(u + v) \\
&= (u^3 + v^3 + q) + 3uv(u + v) + p(u + v) \\
&= (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v).
\end{aligned}
$$

Siis yhtälö (2.8) toteutuu, jos u ja v toteuttavat yhtälöparin

(2.9)
$$
\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}
$$

eli

(2.10)
$$
\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3}. \end{cases}
$$

Korottamalla jälkimmäinen yhtälö kolmanteen potenssiin saadaan

(2.11)
$$
\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\left(\dfrac{p}{3}\right)^3. \end{cases}
$$

Tällöin u^3 ja v^3 ovat lauseen 2.2 perusteella yhtälön

$(y - u^3)(y - v^3) = y^2 - yv^3 - yu^3 + u^3v^3 = y^2 - (u^3 + v^3)y + u^3v^3 = 0$ juuret.

Käyttämällä yhtälöparia (2.11) saadaan nyt kuutioyhtälön (2.8) *resolventtiyhtälö*

(2.12)
$$
y^2 + qy - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.
$$

Ratkaisemalla se saadaan

(2.13) $$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

(2.14) $$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Diskriminantin $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ avulla saadaan edelleen $u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ ja $v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$. Valitaan u_0:n lausekkeessa kuutiojuuren arvo mielivaltaisesti kolmesta mahdollisesta. Sitten valitaan v_0:n lausekkeessa kuutiojuuren arvo niin, että yhtälöparin (2.10) jälkimmäinen yhtälö toteutuu eli $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$. Jos $u_0 = 0$, niin voidaan valita tämä arvo mielivaltaisesti. Jos taas $u_0 \neq 0$, niin valitaan $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$. On osoitettava, että yhtälöparin (2.10) ensimmäinen yhtälö toteutuu. Aluksi saadaan

$$v_0^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{u_0^3} = -\frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Laventamalla lausekkeella $-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ saadaan edelleen

$$v_0^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Tästä nähdään, että pari (u_0, v_0) toteuttaa yhtälöparin (2.10) ja siis summa $u_0 + v_0$ on yhtälön (2.8) ratkaisu.

Jos u_0 on binomiyhtälön (2.13) ja v_0 binomiyhtälön (2.14) jokin juuri, niin luvun 2.3.1 lopussa esitettyjen tietojen perusteella (2.13):n kaikki juuret ovat u_0, ρu_0, $\rho^2 u_0$ ja (2.14):n kaikki juuret ovat v_0, ρv_0, $\rho^2 v_0$, missä

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

ja

$$\rho^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3}\cdot 2 + i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot 2$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ovat imaginaariset kolmannet yksikönjuuret.

Valitsemalla u_0 ja v_0 niin, että $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$, saadaan kolme lukuparia, jotka toteuttavat yhtälöparin (2.10), ja ne ovat (u_0, v_0), $(\rho u_0, \rho^2 v_0)$, $(\rho^2 u_0, \rho v_0)$ (ks. liite 2).

Edellisen perusteella saadaan seuraava lause.

Lause 2.4 (Cardanon kaavat)**.** *Yhtälön* $x^3 + px + q = 0$ *juuret ovat*

$$x_1 = u_0 + v_0\,,\ \ x_2 = \rho u_0 + \rho^2 v_0\,,\ \ x_3 = \rho^2 u_0 + \rho v_0\,,$$

missä

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \ \ ja\ \ v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ .$$

Kuutiojuurien arvot on valittava niin, että

$$u_0 v_0 = -\frac{p}{3}\,.$$

Esimerkki 2.1. Etsi algebrallinen ratkaisu yhtälölle

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

käyttämällä Cardanon kaavoja.

Ratkaisu. Yhtälössä $x^3 - 3x + 2 = 0$ on p = -3 ja q = 2. Sijoitetaan nämä arvot yhtälöihin (2.13) ja (2.14) ja lasketaan u^3:n ja v^3:n arvot

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3} = -1 + \sqrt{0} = -1,$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3} = -1 - \sqrt{0} = -1.$$

Siis $u^3 = v^3 = -1$ ja $u_0 = v_0 = \sqrt[3]{-1} = -1$. Kun sijoitetaan edelliset arvot yhtälöön $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$, saadaan 1 = 1, joka on tosi. Koska $\rho + \rho^2 = -1$, saadaan juuriksi

$$x_1 = u_0 + v_0 = -1 + (-1) = -2,$$

$$x_2 = \rho u_0 + \rho^2 v_0 = -\rho + (-\rho^2) = -(\rho + \rho^2) = -(-1) = 1,$$

$$x_3 = \rho^2 u_0 + \rho v_0 = -\rho^2 - \rho = -(\rho^2 + \rho) = -(-1) = 1.$$

2.3.3. Juurien reaalisuustarkasteluja

Lause 2.5. *Jos yhtälön* $x^3 + px + q = 0$ *kertoimet ovat reaaliset ja merkitään*

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

niin yhtälöllä on

1) *vain yksi reaalijuuri, jos* $D > 0$,
2) *kolme erisuurta reaalijuurta, jos* $D < 0$,

3) kolme reaalijuurta, jotka eivät kaikki ole erisuuria, jos $D = 0$.

Todistus (vrt. [22, s. 199 – 200]). Tarkastellaan kolmea eri tapausta, joissa diskriminantti on positiivinen, negatiivinen tai nolla.

1) Kun $D > 0$, yhtälöiden (2.13) ja (2.14) oikeat puolet ovat reaaliset ja yhtälö $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$ toteutuu, kun u_0:ksi ja v_0:ksi valitaan reaaliset arvot. Silloin Cardanon kaavoista nähdään, että x_1 on reaalinen juuri ja x_2 ja x_3 ovat imaginaarisia liittolukuja, sillä

$$
\begin{aligned}
x_2 = \rho u_0 + \rho^2 v_0 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) u_0 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) v_0 \\
&= -\frac{1}{2} u_0 + \frac{i\sqrt{3}}{2} u_0 - \frac{1}{2} v_0 - \frac{i\sqrt{3}}{2} v_0 \\
&= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 = \rho^2 u_0 + \rho v_0 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) u_0 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) v_0 \\
&= -\frac{1}{2} u_0 - \frac{i\sqrt{3}}{2} u_0 - \frac{1}{2} v_0 + \frac{i\sqrt{3}}{2} v_0 \\
&= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)
\end{aligned}
$$

ja $u_0 \neq v_0$.

2) Tapaus $D < 0$ on mahdollinen vain silloin, kun $p < 0$. Tällöin yhtälöiden (2.13) ja (2.14) oikeat puolet ovat imaginaarisia liittolukuja, joiden napakoordinaattiesitys on

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,,$$

missä $r = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3$ ja $\cos\varphi = -\frac{q}{2r}$. Käyttämällä kaavaa (2.7) saadaan

$$u_k = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right] \qquad (k = 0,\ 1,\ 2),$$

$$v_k = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right] \qquad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

Nyt nähdään, että $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$, joten niiden summa on yhtälön $x^3 + px + q = 0$ juuri. Tällöin

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\ x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right),\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

(ks. liite 3).

Näistä kaavoista nähdään, että $x_1, x_2,\ x_3$ ovat reaalilukuja.

3) Diskriminantti $D = 0$, kun p on negatiivinen tai $p = 0$ ja $q = 0$. Yhtälöiden (2.13) ja (2.14) oikeat puolet ovat $-\frac{q}{2}$, ja yhtälö $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$ toteutuu eli vasen ja oikea puolet ovat reaalisia, kun valitaan $u_0 = v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$. Soveltamalla yhtälöä $\rho + \rho^2 = -1$ saadaan juuriksi

(2.15) $\qquad x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ ja $x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ (ks. liite 4).

Näin lause 2.5 on todistettu.

Esimerkissä 2.1 ratkaistiin kolmannen asteen yhtälö käyttämällä Cardanon kaavoja. Nyt esimerkissä 2.2 ratkaistaan sama kolmannen asteen yhtälö käyttämällä lausetta 2.5 ja todetaan, että toinen ratkaisutapa on mukavampi kuin esimerkissä 2.1.

Esimerkki 2.2. Etsi algebrallinen ratkaisu yhtälölle

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

käyttämällä lausetta 2.5.

Ratkaisu. Yhtälössä $x^3 - 3x + 2 = 0$ reaaliset kertoimet ovat p = -3 ja q = 2. Sijoittamalla nämä kertoimet diskriminantin lausekkeeseen saadaan

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 0\,.$$

Koska D = 0, niin lauseen 2.5 mukaan yhtälöllä on kolme reaalijuurta, jotka eivät kaikki ole erisuuria. Sijoitetaan q:n arvo yhtälöihin (2.15) ja saadaan, että x_1 = -2 ja x_2 = x_3 = 1.

2.4 Korkeamman asteen yhtälöt

Määritelmä 2.7. Polynomifunktiota, jonka asteluku on kolme tai suurempi, sanotaan *korkeamman asteen polynomifunktioksi*. Tällöin funktio, jonka asteluku on n, voidaan esittää muodossa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\,,$$

missä kertoimet ovat a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 ovat reaalilukuja ja $a_0 \neq 0$.

Polynomifunktiot ovat kaikkialla jatkuvia, eli geometrisesti tämä merkitsee sitä, että kuvaaja on koko x-akselin alueella katkeamaton käyrä.

Määritelmä 2.8. *Kolmannen asteen yhtälö* on sellainen yhtälö $P(x) = 0$, jossa tuntemattoman asteluku on vähintään kolme.

Lause 2.6 (Tulon nollasääntö)**.** *Tulo on nolla, jos ja vain jos jokin sen tekijöistä on nolla.*

Tämä seuraa siitä, että kompleksiluvut muodostavat kunnan.

Todistus. Ks. [17, s. 32 - 33].

Lause 2.7 (Algebran peruslause)**.** *Jokaisella n:nnen asteen yhtälöllä (* $n \geq 1$*) on ainakin yksi juuri (reaalinen tai imaginaarinen).*

Todistus. Ks. [15, s. 562 - 569].

Lause 2.8. *Jos* x_1 *on yhtälön* $P(x)=0$ *juuri, niin* $P(x)$ *on jaollinen* $(x-x_1)$*:llä.*

Todistus. Ks. [23, s. 11 - 12].

Yleensä korkeamman asteen yhtälön ratkaiseminen perustuu tulon nollasääntöön. Yhtälön polynomilauseke jaetaan tekijöihin, jotka ovat korkeintaan toista astetta polynomit, minkä jälkeen käytetään tulon nollasääntöä. Polynomin jakaminen tekijöihin on vaikein vaihe ratkaisemisessa. Tekijöiden ryhmittely ei onnistu aina, minkä vuoksi polynomit täytyy jakaa tekijöihin nollakohtien avulla. Tässä tapauksessa käyttämällä lauseita 2.7 ja 2.8 nollakohdat voidaan löytää kokeilemalla tai arvaamalla, minkä jälkeen suoritetaan jakolasku. Hyvä esimerkki tästä tapauksesta voisi olla kevään 1967 ylioppilastehtävä 1.

Esimerkki 2.3. Yhtälöllä $6x^3-11x^2+6x-1=0$ on yksi kokonaislukujuuri. Määrää sen kaikki juuret.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on se, että kokeilemalla havaitaan, että yksi juuri on $x=1$. Tällöin jakamalla kolmannen asteen yhtälö $(x-1)$:llä saadaan yhtälö $(x-1)(6x^2-5x+1)=0$. Käytetään tulon nollasääntöä siten, että jälkimmäinen tekijä asetetaan nollaksi ja sitten saadaan muut juuret.

On olemassa eräs erikoistapaus korkeamman asteen yhtälöstä, nk. *bikvadraattinen yhtälö*. Tämä on neljännen asteen yhtälö, josta puuttuvat kolmannen ja ensimmäisen asteen termit. Tällainen yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön tapaan tekemällä sijoitus $x^2=u$.

Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille on olemassa omat ratkaisukaavat. Kolmannen asteen yhtälölle ratkaisukaavat on esitetty pykälässä 2.3.2 ja neljännen asteen yhtälö ratkaistaan samalla menetelmällä kuin kolmannen asteen yhtälö. Tarkemmin neljännen asteen yhtälön ratkaiseminen ja ratkaisukaavat on esitetty Väisälän kirjassa [22]. Mutta, kuten kolmannen asteen yhtälön tapauksessa todettiin, ne ovat monimutkaisia, joten lukiossa niitä ei käytetä.

Norjalainen matemaatikko Niels Abel (1802 - 1829) todisti 1800-luvun alkupuolella, että viidennen ja korkeamman asteen yhtälöille ei voida muodostaa yleisiä ratkaisukaavoja eli näitä yhtälöitä ei voida ratkaista algebrallisesti. [16]

Toisaalta ranskalainen matemaatikko Evariste Galois (1811 - 1832) tutki ongelmaa syvällisemmin ja kehitti niin sanotun Galois'n teorian, joka tutkii polynomiyhtälöiden ratkeavuutta ryhmäteorian keinoin. Tämän teorian mukaan joitakin viidennen asteen polynomiyhtälöitä voidaan ratkaista juurilausekkeiden avulla. Lisää tästä teoriasta löytyy Internetistä [1]. Jos korkeamman asteen yhtälöitä ei onnistuta ratkaisemaan kokeilemalla tai jakolaskulla, tyydytään numeerisesti saatuihin likiarvoihin.

3 Polynomiyhtälöt ylioppilaskokeissa

3.1 Tutkimustavoitteet ja kysymykset

Tutkimuksessa haluan selvittää, miten polynomiyhtälöiden tehtävät kehittyivät pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa 1950-luvulta tähän päivään. Analyysissä käytän apuna eri teoksia ylioppilastehtävineen vuodesta 1950 lähtien vuoteen 2008 [5], [21], [2], [6]. Muun muassa käytän apuna Aatos Lahtisen artikkeleita ylioppilaskirjoituksista Dimensio-aikakausilehdistä [7] – [14].

Tässä tutkielmassa tarkastelen sekä kevään että syksyn matematiikan ylioppilaskokeita siitä huolimatta, että pitkässä matematiikassa suurin osa lukion ensi kerran kirjoittavia opiskelijoita osallistuu kevään kokeisiin. Keskityn ensimmäisen, toisen, kolmannen ja korkeamman asteen polynomiyhtälötehtäviin. Samalla otan mukaan sellaiset murtoyhtälö-, yhtälöpari- sekä sovellustehtävät, jotka palautuvat polynomiyhtälöihin tai joiden ratkaisuissa tarvitaan polynomiyhtälöiden tietoja.

Selvitän tutkimuksessani, millaiset polynomiyhtälötehtävät ylioppilaskokeissa ovat olleet suosittuja ja mitä tyyppiä ne olivat. Samalla tutkin, miten polynomiyhtälöistä esitetty asia oppikirjoissa ja lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelman sisältö ovat sidoksissa tehtävien kanssa. Lisäksi aion esittää mielestäni mielenkiintoisia ja haastavia tehtäviä sekä niistä saatujen pistemäärien keskiarvot. Päättelen tehtävien vaikeustason niiden järjestysnumeron perusteella. Selvitän myös, miten kokeen ja lukion päättötodistuksen arvosanat korreloivat keskenään. Myös koetuloksien tilastot vuosi vuodelta ja niihin liittyvät kysymykset ovat tutkimukseni kohteena.

3.2 Ylioppilastutkinto

Lukion oppimäärään sidottu ylioppilastutkinto sai alkunsa vuonna 1852. Tutkinto on lukion päättökoe, joka mittaa kokelaan tietoja, taitoja ja kypsyyttä. Samalla se on lukio-opetuksen arviointiväline.

Ylioppilastutkinto on kehittynyt huomattavasti 156 vuoden aikana. Yhteiskuntamme kehittyminen samana ajanjaksona näkyy kokeiden tehtävissä. Ylioppilaiden määrä on kasvanut: 1850-luvulla ylioppilaaksi tuli 70 kokelasta vuodessa, vuonna 1950 ylioppilaiden määrä oli jo 4000 ja 2000-luvun alkupuolella ylioppilaaksi kirjoitti jo 35000 kokelasta. Kuluneiden vuosien aikana on tapahtunut muutoksia sekä ylioppilaskokeen sisällössä että rakenteessa. Matematiikka ylioppilastutkinnossa on ollut alusta asti, jolloin se oli pakollinen. Alussa matematiikan koe oli suullinen, jossa liitutaulua käytettiin apuna. Vasta vuonna 1874 koe muuttui kirjalliseksi. Ylioppilaskokeessa oli kymmenen tehtävää, joista piti ratkaista vähintään kolme.

1940-luvulta lähtien tuli mahdollisuus valita matematiikan koe tai reaalikoe. Toisen maailmansodan aikana kirjoituksia pidettiin nuorille sotilaille rintamalla, paitsi vuosina 1940 ja 1942 ylioppilastutkintoa ei järjestetty ollenkaan ja lukion viimeisen luokan opiskelijat julistettiin ylioppilaiksi päästötodistuksien mukaan. Vuonna 1962 matematiikan koe palasi osittain pakolliseksi. Pakollisena se oli niille, jotka olivat lukeneet vähintään 15 viikkotunnin kurssin matematiikassa. Lyhyen matematiikan koe tuli mukaan vuonna 1901. Vuoteen 1960 sekä lyhyen että pitkän matematiikan kokeessa oli 10 tehtävää, joista noin puolet oli yhteisiä tehtäviä. Keväällä 1965 pitkän matematiikan kokeessa oli jo 12 tehtävää, joista piti ratkaista 10 ja kaksi viimeistä tehtävää edellytti tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. Tämä järjestelmä jatkui vuoteen 1973. Ennen vuoden 1996 uutta asetusta ylioppilaskokeessa oli kymmenen tehtävää, joissa neljässä tai viidessä olivat vaihtoehtoiset kohdat, ja opiskelijan piti ratkaista jompikumpi niistä. Vuonna 1994 opiskelijat alkoivat käyttää ylioppilaskokeessa graafisia laskimia. Tämä uutuus helpotti joidenkin tehtävien ratkaisemista siten, että opiskelija saattoi tarkistaa vastaukset laskimella, mm. polynomiyhtälöitä ratkaistaessa. Taulukkokirjojen kaavakokoelmat, jotka olivat sallittuja kokeissa, laajenivat eikä kokelaiden tarvinnut opetella lukuisia kaavoja ulkoa. Sekä laskimien että taulukkokirjojen käyttö muutti jonkin verran tehtävien vaikeustasoa. [24]

Vuonna 1996 astui voimaan uusi ylioppilastutkintoasetus, joka muutti tutkintoa monessa suhteessa. Asetuksen mukaan kokelas voi vapaasti valita, kirjoittaako hän pitkän tai lyhyen matematiikan kokeen vai reaalikokeen. Asetuksen yhtenä päämääränä oli matematiikan suosion ja sen osaamisen kasvu. Pentti Parviaisen [19] mukaan tilanne kääntyi uudistuksen tavoitteiden vastaiseksi: pitkän matematiikan kirjoittajien määrä laski ja osaamisen taso madaltui.

Seuraava muutos, joka oli myönteinen ja tervetullut ylioppilastutkinnossa, tuli voimaan vuonna 2000. Tällöin vuodesta 1874 asti käytetty kymmenen tehtävän koe jäi historiaan ja tilalle tuli koe, jossa on 15 tehtävää, joista 10 pitää ratkaista. Tehtävät tulevat pakollisten ja syventävien kurssien alueelta. Ylioppilastutkintolautakunta ilmoittaa, että tehtävät ovat vaikeusjärjestyksessä, missä alkupään tehtävät ovat perustehtäviä ja kokeen lopussa on vaativampia tehtäviä, joista muutama on syventävien kurssien alueelta. Yleensä syventävien kursien tehtävät ovat perustehtäviä ja kokelas, joka kävi kurssilla, pystyy ratkaisemaan ne helposti. Kuitenkaan kokelaiden ei tarvitse sokeasti luottaa siihen, että tehtävät ovat vaikeusjärjestyksessä, koska se mikä toiselle on helppo, voi olla toiselle vaikea. Ollaan erilaisia ja jokaisella on oma mielikuva vaikeudesta.

Uudistuksen tarkoituksena oli antaa kokelaille valinnanvaraa ja samalla saada selville, miten he ovat omaksuneet opetussuunnitelman vaativat tiedot ja taidot lukion aikana, sekä tarkastella opiskelijoiden saavuttamaa kypsyyttä. Uudistettu koe antaa opiskelijoille mahdollisuudet näyttää omat tiedot, taidot ja osoittaa kypsyyttä valitsemalla oikeat kymmenen tehtävää, jotka hän osaa parhaiten. Kuitenkin täytyy huomata, että uudistus ei anna opiskelijoille lisää tietoja, taitoja tai kypsyyttä, vaan edelleenkin opiskelijan on itse hankittava ne. Täytyy todeta, että hyville opiskelijoille kokeen rakenne on yhdentekevä, he menestyvät joka tapauksessa, muille uusi järjestelmä on toisaalta vanhaa helpompi, toisaalta vaikeampi. Ylioppilastutkintolautakunnan puheenjohtaja professori Aatos Lahtinen sanoo: ”Valinnaisuudesta hyötynevät pääasiassa keskitasoa paremmat matematiikan taitajat. He voivat sarjan loppupään vaikeista tehtävistä valita itselleen sopivimmat ja näin optimoida pistemääränsä. Heikoille taitajille hyöty on pienempi tai olematon.” [13]

Hyötyjen lisäksi uudistuksessa on myös haittoja. Yhtenä ongelmana on kokelaan ajankäyttö: on hitaampaa valita oikeat 10 tehtävää, kuin ratkaista kaikki tehtävät numerojärjestyksessä, mikä oli aikaisemmissa kokeissa. Toinen ongelma on, että kokelaan täytyy opetella strategia, jonka mukaan hän valitsee juuri hänelle sopivat tehtävät ja näin maksimoi pistemääränsä. Yksi vinkki tähän voi olla se, että ensimmäiset kolme perustehtävää täytyy laskea heti ja sitten rauhallisesti käyttäen ajattelua ja järkeä valita muut 7 tehtävää. Joskus vaikeammat tehtävät eivät aukea heti, joten ne kannattaa hahmotella paperilla. Yleensä pitkät sanalliset tehtävät pelottavat opiskelijoita, mutta useimmiten niissä selitetään tehtävä niin tarkasti, että loppujen lopuksi tehtävä ei ole suinkaan vaikea. Kolmas ongelma uudistuksessa on se, että jotkut opiskelijat ajattelevat, että jotkin kurssit voi jättää opiskelematta kunnolla, eivätkä he valitse ylioppilaskokeessa sen kurssialueen tehtäviä. Tämä ajattelu on väärä, koska monet koetehtävät muodostuvat useilta eri alueilta.

Vuonna 2007 ylioppilastutkinto uudistui taas. Uudistetussa kokeessa on edelleenkin 15 tehtävää, joista pitää ratkaista 10. Kaksi tai kolme ensimmäistä tehtävää ovat perustehtäviä, tehtävät 4 – 10 ovat vaikeampia ja tehtävät 11 – 13 ovat syventävien kurssien alueelta. Muutos vanhaan kokeeseen on siinä, että uudessa kokeessa kaksi viimeistä tehtävää ovat ns. jokeritehtäviä, jotka ovat tavallisia tehtäviä laajempia ja vaativimpia. Ne arvostellaan asteikolla 0-9, kun taas muissa tehtävissä asteikko on 0-6. Muutoksen tarkoituksena on parantaa pitkän matematiikan kokeen mahdollisuuksia mitata opiskelijoiden tietoja, taitoja ja kypsyyttä. [20]

Mitä voidaan sanoa uuden koemuodon vaikutuksesta? Valinnaisuuden kasvu on hieman kasvattanut matematiikan kirjoittajien määrää. Irma Ihon mukaan pitkän matematiikan kirjoittajien määrää on pysynyt pitkään vakiona, noin 12 000:ssa. Suurin osa kirjoittajista on poikia, tyttöjen prosenttiosuus on noin 40 % huolimatta siitä, että lukioissa on enemmän tyttöopiskelijoita. [3]. Kuten aiemmin todettiin, valinnaisuus ei lisääkään tietoa, kuitenkin se antaa opiskelijoille mahdollisuudet luoda positiivinen kuva osaamisestaan ja arvioida omat voimat ammatin valinnassa. Pentti Parviainen sanoo: ”Ylioppilastutkintoon liittyvät uudistukset ovat odotettuja ja tarpeellisia muutoksia. Ne lisäävät ylioppilastutkinnon valinnaisuutta, soveltuvat ajan vaatimuksiin ja vastaavat paremmin yhteiskunnan odotuksiin lukiokoulutukselta.” [20]

3.3 Ylioppilastehtävät

Analyysin alussa olen tutkinut kaikki tutkielmaani sopivat ylioppilastehtävät ja lajitellut ne seuraaviin luokkiin: 1. asteen polynomiyhtälöt, 2. asteen polynomiyhtälöt, 3. asteen polynomiyhtälöt, korkeamman asteen polynomiyhtälöt, yhtälöparit, murtoyhtälöt, sovellustehtävät.

Melkein kaikissa ylioppilaskokeissa on polynomiyhtälötehtäviä ja yleensä ne sijoittuvat kokeen alkupäähän, mikä ylioppilastutkintolautakunnan mukaan tarkoittaa, että nämä tehtävät ovat helppoja perustehtäviä. Kuitenkin, varsinkin vanhoissa kokeissa on olemassa joitakin vaativia polynomitehtäviä, jotka sijaitsevat loppupäässä. Ylioppilastehtävien tilastoja, kuten esimerkiksi tehtäväkohtaisia tuloksia: keskiarvo, hajonta ja vastausprosentti, käytän vain vuodesta 1991 enkä aikaisemmista tilastoista pysty sanomaan mitään. Analysoidessani tehtäviä voin sanoa, että vanhat ylioppilastehtävät ovat vaikeampia ja monipuolisempia kuin nykytehtävät, jotka ovat enemmän pelkistettyjä ja yksinkertaisia tehtäviä polynomiyhtälöistä.

Suurin osa tehtävistä on laskutehtäviä ja yleensä ne liittyvät toisen asteen yhtälöön. Tämä on ymmärrettävää, koska lukion opetussuunnitelman mukaan toisen asteen yhtälöiden opettamiseen käytetään eniten aikaa. Samoin pitkän matematiikan oppikirjassa [4] toisen asteen yhtälöiden teoria on esitetty laajasti, harjoitustehtäviä on paljon. Jotkin toisen asteen yhtälön tehtävät ovat yksinkertaisia laskutehtäviä: murtoyhtälö-, yhtälöpari- tai tulon nollasääntötehtäviä. Yksi tällaisista laskutehtävistä on esimerkiksi kevään 1999 tehtävä 1.

Esimerkki 3.1. Ratkaise yhtälöt

a) $(2x+1)(1-2x)(x+1)=0$, b) $(2x+1)(1-2x)(x+1)=1$.

Vaikka edellä mainittu tehtävä on kokeen ensimmäinen, mikä kertoo, että se käsittelee perusasioita, kaikki opiskelijat eivät saaneet täysiä pisteitä. Tehtävän keskiarvoksi tuli 4,99 ja vastaajia oli 99,8 %. Lahtisen [8] mukaan monet opiskelijat eivät oivaltaneet, että a-kohdan yhtälö voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla, vaan he suorittivat kertolaskut ja yrittivät ratkaista kolmannen asteen yhtälön, mikä ei onnistunut hyvin kaikilta. Vastaavasti b-kohdan yhtälössä tyypillinen virhe oli se, että jotkut merkkasivat jokaisen vasemman puolen tekijän ykköseksi, mikä johti väärään tulokseen. Seuraavaksi esitän kevään 2001 tehtävänä 1 olleen murtoyhtälön.

Esimerkki 3.2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{x+3}=0\,.$$

Yhtälöä lähdetään ratkaisemaan kertomalla puolittain nimittäjien tulolla, jolloin päästään toisen asteen yhtälöön ja käyttämällä ratkaisukaavaa saadaan yhtälön juuret. Aatos Lahtinen [12] kertoo, että jotkut opiskelijat tyytyivät likiarvovastaukseen, jolloin muutama piste lähti pois. Kokonaisuudessaan tehtävä oli suoritettu hyvin, mikä näkyy keskiarvossa, joka oli 5,44.

Eräät toisen asteen yhtälöt liittyvät sovellustehtäviin, joissa pitää muodostaa toisen asteen yhtälö tai yhtälöpari ja ratkaista se. Hyviä esimerkkejä tästä tehtävätyypistä ovat kevään 2000 tehtävä 2 ja kevään 2008 tehtävä 7a. Esimerkissä 3.3 pitää muodostaa murtoyhtälö, josta saadaan sitten toisen asteen yhtälö, ja toisessa esimerkissä, joka liittyy geometriaan, pitää muodostaa yhtälöpari ja sitten ratkaista toisen asteen yhtälö.

Esimerkki 3.3. Lukion jazzyhtyeen konsertin tuotto 192 euroa on jaettava tasan yhtyeen jäsenille. Jos jäseniä olisi 2 enemmän, jokainen saisi 8 euroa vähemmän. Montako jäsentä yhtyeessä on?

Esimerkki 3.4. Laske paraabelien $y=x^2-3$ ja $y=-x^2+2x+1$ leikkauspisteiden koordinaatit.

Lahtisen [11] mukaan esimerkissä 3.3 jotkut opiskelijat eivät osanneet muodostaa oikeata yhtälöä, mikä johti harhaan. Tehtävän keskiarvoksi tuli kuitenkin 5,14, mikä oli kokeen suurin.

Polynomiyhtälöihin liittyvistä tehtävistä löytyy mm. todistustehtäviä, joista suurin osa esiintyy vanhoissa ylioppilaskokeissa. Lukion oppimäärässä todistustekniikkaan perehdytään aika vähän. Tästä johtuen todistustehtävät eivät ole suosittuja ylioppilaskokeissa. Alla on esimerkkinä syksyn 1969 tehtävä 4.

Esimerkki 3.5. Polynomi $P(x)$ jaetaan binomilla $x-a$ ja jakoa jatketaan, kunnes jakojäännös on vakio R. Osoita, että $R = P(a)$.

Tehtävää ratkaistaessa pitää ymmärtää jakolaskun periaate.

Nykyisessä opetussuunnitelmassa matematiikan oppimäärä ei ole niin laaja kuin edellisessä. Lauri Kuurnen [7] mukaan tavoitteena on oppia vähemmän, mutta entistä paremmin. Tällöin polynomien jakolasku jätettiin kokonaan pois lukion pakollisten kurssien opetuksesta, mikä aiheutti opiskelijoille hankaluuksia ymmärtää joitakin asioita, kuten esimerkiksi polynomien tekijöihin jakoa. Monet opettajat väittävät, että ”jakolaskun opetteleminen on hankalaa ja liikaa aikaa vievää”. Kuurne on toista mieltä niin kuin minäkin. Minunkin mielestäni polynomien jakolasku ei ole vaikea asia, vaan se täytyy osata opettaa selkeästi ja mahdollisimman yksinkertaisesti. Silloin kun opiskelijoilla perusasiat ovat hallussa, heidän on helpompi ymmärtää muut asiat. Lauri Kuurne omassa artikkelissaan esittää jakolaskun ”helpon oppimäärän”, jonka avulla ”motivoitu ryhmä” oppii jakoalgoritmin ”reilussa tunnissa”. Jos edellinen esimerkkitehtävä olisi nykyisessä ylioppilaskokeessa eikä opiskelija hallitse jakolaskua, hän olisi voinut jättää tehtävän kokonaan pois ja valita toisen tehtävän, koska valinnanvaraa kuitenkin on. Vuonna 1969 sama tapa ei onnistunut, koska silloin tehtävien määrä oli vain kymmenen. Opetushallitus hyväksyi vuonna 2004 uudet opetussuunnitelman perusteet [18], joiden mukaan pitkän matematiikan lukiokurssin *2. Polynomifunktiot* yhtenä tavoitteena on oppia ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua. Tästä nähdään, että polynomien jakolaskua ei vaadita lukion perusopetuksessa, vaan sitä opetetaan vasta lukion syventävässä kurssissa *12. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä*, jossa yhtenä tavoitteena on oppia tutkimaan polynomien jaollisuutta ja määrittämään polynomien tekijät. Ylioppilaskokeissa viimeinen polynomien jakolaskutehtävä oli vuonna 2002 tehtävänä 5, joka esitetään seuraavaksi.

Esimerkki 3.6. Polynomi $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ on jaollinen binomilla $x^2 - 1$. Lisäksi on $P(2) = 12$. Määritä $P(x)$.

Tämä tehtävä voidaan ratkaista ainakin kolmella tavalla eikä ole pakko käyttää jakolaskua, mutta minun näkökulmani mukaan ratkaisu jakolaskulla on kätevin ja ymmärrettävin. Aatos Lahtinen [14] sanoo, että yleisin tapa edellisen esimerkin ratkaisussa oli kolmen yhtälön muodostaminen. Tällöin ryhmän ratkaisussa monet tekivät huolimattomuusvirheitä. Toiseksi yleisin tapa oli jakolaskun suorittaminen, jossa monet opiskelijat eivät osanneet jatkaa jakolaskua loppuun asti, mikä osoittaa, että jakolaskun opetus lukiossa on heikko. Tehtävän keskiarvo oli tyydyttävä 3,46.

Kuten aikaisemmin jo mainitsin, vanhoista ylioppilaskokeista löytyy enemmän vaativimpia polynomitehtäviä. Esimerkiksi keväällä 1971 on kaksi polynomitehtävää, joiden järjestysnumerot ovat 8 ja 10. Nämä ovat todella mielenkiintoisia tehtäviä, joissa täytyy käyttää luovaa ajattelua eikä pelkkää mekaanista laskua. Silloin, kun kokelas ymmärtää tehtävien idean, laskut on helppo suorittaa. Alla esitetään nämä tehtävät.

Esimerkki 3.7. Funktio f on määritelty kaikilla reaaliarvoilla, ja yhtälö $f(a+b) = f(a)f(b)$ toteutuu kaikilla arvopareilla a, b. Lisäksi on $f(1) = 3$. Määrää $f(4)$.

Esimerkki 3.8. Luku a on yhtälön $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ juuri. Osoita, että myös a^2 on sen juuri.

Tutkiessani kaikki ylioppilaskokeet vuosilta 1950 – 2008 voin sanoa, että suosittu todistustehtävä oli toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan johtaminen. Alla on esimerkki tällaisesta ylioppilastehtävästä, joka on kevään 1999 tehtävä 6a. Samantyyppisiä tehtäviä oli mm. kevään 1954 tehtävä 5 ja syksyn 1964 tehtävä 5.

Esimerkki 3.9. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Johda ratkaisukaava yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ kaikille reaaliratkaisuille. (Huomaa myös tapaus $a = 0$ ja muut erikoistapaukset).

Koska tämä tehtävä oli vaihtoehtoinen, monet jättivät sen kokonaan käsittelemättä. Ne, jotka valitsivat tämän tehtävän, käsittelivät päätapausta $a \neq 0$ ja ohjeen mukaisesti $a = 0$. Kuitenkin tapaukset $a = b = 0$, $c \neq 0$ ja $a = b = c = 0$ jäivät monilta pois. Sen sijaan kokelaat käsittelivät tapauksia $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$ ja $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$, jotka sisältyvät päätapaukseen. Olisi mielenkiintoista nähdä, millainen olisi tehtävän suosio, jos tämä ei olisi ollut vaihtoehtotehtävä. [9]

Ylioppilaskokeissa löytyy vain muutama korkeamman asteen yhtälö, joista suurin osa on neljännen asteen yhtälöitä. Tämä selittyy sillä, että aihe on vaikea ja lukion oppikirjoissa on vain maininta korkeamman asteen yhtälöistä. Minun tutkimukseni mukaan viimeinen neljännen asteen yhtälö oli vuonna 1990 tehtävänä 3b.

Esimerkki 3.10. Määritä yhtälön $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ kaikki neljä juurta.

Kyseinen bikvadraattinen yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön tapaan merkitsemällä $y = x^2$.

Toinen mielenkiintoinen esimerkki neljännen asteen yhtälöstä on syksyn 1972 tehtävä 10.

Esimerkki 3.11. Määrää yhtälön $x^4 + 2x^3 - 3 = 0$ reaalijuuret.

Ratkaisun alkuvaiheessa saadaan selville juuri $x = 1$ kokeilemalla. Jakamalla $(x-1)$:llä yhtälö saadaan muotoon $(x-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 3) = 0$, jossa ratkaistavana on yhtälö $x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$. Kirjoitetaan jälkimmäinen yhtälö muotoon $(x+1)^3 + 2 = 0$. Tällöin yhtälön $x^4 + 2x^3 - 3 = 0$ reaalijuurina saadaan $x = 1$ ja

$x = -\sqrt[3]{2} - 1$. Tehtävän vaativuus on syntyneen kolmannen asteen yhtälön ratkaisemisessa.

1990- ja 2000-lukujen suosituin polynomiyhtälöihin liittyvä tehtävä oli kevään 1990 tehtävä 4, jonka keskiarvo oli 5,94, hajonta 0,47 ja kirjoittajia oli 10 079.

Esimerkki 3.12. Eräs kirjakauppa myy CD-ROM-sanakirjaa, tietosanakirjaa ja levyasemaa seuraavin pakettihinnoin: Sanakirja ja levyasema 9 000 mk, tietosanakirja ja levyasema 8 200 mk, sanakirja, tietosanakirja sekä levyasema 12 000 mk. Mikä on tämän mukaan levyaseman hinta?

Tässä tehtävässä muodostetaan lineaarinen yhtälöryhmä, jota ratkaistaessa saadaan vastaukset.

Aatos Lahtinen toteaa, että kahdentoista vuoden matematiikan kouluopinnoista huolimatta matematiikan ylioppilaskokeen tulokset laskevat vuosi vuodelta, mikä on aika huolestuttava asia. Hänen mukaansa olisi helppoa sanoa, että ongelma on ylioppilaskokeen tehtävien vaikeudessa. Yhtenä syynä tähän ongelmaan voisi olla opiskelijan vähäinen paneutuminen oppikirjoihin, harjoitustehtäviin sekä kykenemättömyys kuuntelemaan ja keskittymään oppitunnin aikana. Erityisesti harjoitustehtävien kanssa täytyy ”keskustella” enemmän ja perehtyä huolellisesti niihin. On pyrittävä näkemään sekä tehtävän vastaus että ongelma, jolloin molemmat täytyy ratkaista harkiten. Matematiikan ymmärtämisen taitoa on melkein mahdotonta opettaa, vaan opiskelijan täytyy itse oppia se. Opettajan rooli on kuitenkin aika suuri tässä, koska hänen täytyy ohjata prosessia ja auttaa opiskelijoita saavuttamaan päämääränsä ei ainoastaan pelkillä mekaanisilla ratkaisuilla. Opettajan pitää sytyttää oppilaissa kipinä, joka saa heidät ajattelemaan itsenäisesti ja näkemään tehtävän ongelman. Omassa artikkelissaan Aatos Lahtinen sanoo: ”On luonnollisesti välttämätöntä, että tuntee tehtävän aihepiirin, tarvitaan käsitteistön ja perusrakenteet. Näiden oppiminen vaatii työtä ja harjoittelua; matematiikkaan ei ole oikotietä. Paljon muuta ei sitten tarvitakaan, vain hieman ajattelua.” [10]

3.4 Johtopäätökset

Ylioppilastutkinto on ollut olemassa jo 156 vuotta ja näiden kuluneiden vuosien aikana on tapahtunut suuria muutoksia sekä sen sisällössä että rakenteessa. Matematiikan ylioppilaskokeen rakenne on muuttunut monta kertaa, ja nykymuodon se sai vuonna 2007. Nykyisessä kokeessa on 15 tehtävää, joista pitää ratkaista 10, kaksi viimeistä tehtävää ovat jokeritehtäviä. Muutokset uudessa valinnaiskokeessa olivat odotettuja ja tarpeellisia. Uudistettu koe antaa opiskelijoille parhaat mahdollisuudet näyttää omat tiedot, taidot ja osoittaa kypsyyttä, mutta täytyy huomata, että uudistus ei anna lisää tietoja, taitoja tai kypsyyttä, vaan edelleenkin opiskelijan on itse hankittava ne.

Polynomitehtävät ovat suosittuja ylioppilaskokeissa, mikä on ymmärrettävä, koska polynomiyhtälöt ovat yksi matematiikan tärkeimmistä osa-alueista, mihin perustuvat monet asiat. Kokeista löytyy sekä peruspolynomitehtäviä, jotka yleensä sijaitsevat ylioppilaskokeen alkupäässä, että vaikeampia polynomitehtäviä. Suurin osa tehtävistä on mekaanisia laskutehtäviä, jotka liittyvät toiseen asteen yhtälöihin. On myös sanallisia tehtäviä ja muutama todistustehtävä, joissa pitää todistaa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan. Korkeamman asteen yhtälön tehtäviä on vähän.

Todetaan, että kahdentoista vuoden matematiikan kouluopinnoista huolimatta matematiikan ylioppilaskokeen tulokset laskevat vuosi vuodelta, mikä on aika huolestuttava asia. Opiskelijan täytyy vakavammin suhtautua matematiikkaan ja paneutua sen opiskeluun enemmän. Matematiikan ymmärtäminen eikä pelkkä kaavojen opetteleminen ulkoa on välttämätöntä menestymiseen kokeessa. Ongelman ratkaiseminen onnistuu parhaiten, kun hahmotetaan tehtävä paperille ja yritetään ymmärtää ongelmaa. Yksi tärkeimmistä asioista matematiikan menestymisessä on harjoitustehtävien tekeminen ja huolellinen perehtyminen niihin.

Aatos Lahtisen mukaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusarvosanan ja lukion päättötodistuksen arvosanan välillä korrelaatio on ollut luvuilla 1990 ja 2000 korkea. Poikkeus oli vain vuonna 1999, jolloin sekä ylimääräisen että pakollisen matematiikan arvosanojen korrelaatiot putosivat eikä syitä tähän tiedetä. Eniten kirjoittajia matematiikan ylioppilaskokeissa oli keväällä 2002, jolloin yhteensä matematiikkaa valitsi 13 126 opiskelijaa.

4 Lopuksi

Tutkimukseni tekeminen oli hyvin mielenkiintoista ja syvensi tietojani polynomiyhtälöistä, varsinkin korkeamman asteen polynomiyhtälöistä ja niiden ratkaisemisesta. Oli antoisaa perehtyä matematiikan ylioppilaskokeiden historiaan ja seurata niiden kehittymistä ajan myötä.

Ajatellessani tulevaani ammattiani oli hyödyllistä tutkia, mitkä ylioppilastehtävät olivat suosittuja eri aikoina, ja miten opiskelijat osasivat ratkaista ne. Tehdessäni tutkielmani oli hyvää lukea ylioppilastutkintolautakunnan puheenjohtajan professorin Aatos Lahtisen artikkeleita Dimensio-aikakausilehdissä. Uskon, että käytän tutkielmaani opetusalallani ja sen tekemisessä saamaani tietoja, kuten esimerkiksi jakolaskun opettaminen. Samoin voin hyödyntää tutkielmaani kokeita laatiessani.

5 Viitteet

[1] E. Artin, [Galois Theory], Wikipedia [Viitattu 25.7.2008]. URL http://en.wikipedia.org/wiki/Galois_theory.

[2] T. Hautajärvi, J. Ottelin, L. Wallin-Jaakkola, Laudatur: Lukion pitkän matematiikan kertausta ylioppilastehtävien avulla. 1. painos, Otava, 2002.

[3] I. Iho, Ylioppilastutkinnon rakenne vakiintunut. Dimensio 72 (2008), 5.

[4] P. Jäppinen, A. Kupiainen, M. Räsänen, Calculus 1: Funktiot ja yhtälöt; Polynomifunktiot. 1. painos, Otava, 2005.

[5] N. Kallio, P. Heinänen, P. Woivalin, Matematiikan esimerkkikirja IV: ylioppilastehtävät 1951 – 1972. 9. painos, WSOY, 1973.

[6] J. Kangasaho, P. Piri, H. Taavitsainen, Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 1995 – 2005. 9. painos, WSOY, 2005.

[7] L. Kuurne, Pelastakaamme polynomien jakolasku. Dimensio 72 (2008), 23 – 24.

[8] A. Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1999. Dimensio 63 (1999), 11.

[9] A. Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1999. Dimensio 63 (1999), 13.

[10] A. Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1999. Dimensio 63 (1999), 4.

[11] A. Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2000. Dimensio 64 (2000), 18 – 19.

[12] A. Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2001. Dimensio 65 (2001), 16.

[13] A. Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2002. Dimensio 66 (2002), 18 – 19.

[14] A. Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2002. Dimensio 66 (2002), 21.

[15] E. Lindelöf, Johdatus korkeampaan analyysiin. 4. painos, WSOY, 1956.

[16] M. Livio, Yhtälö jota ei voinut ratkaista, [Viidennen asteen yhtälö]. Terra Cognita, 2008 [Viitattu 25.7.2008]. URL http://fi.wikipedia.org/wiki/Viidennen_asteen_yht%C3%A4l%C3%B6.

[17] J. Merikoski, M. Halmetoja, T. Tossavainen, Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan. 1. painos, WSOY, 2004.

[18] Opetushallitus, [Aikuisten perusopetuksen ja lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet 2004], 2004 [Viitattu 17.8.2008].
URL http://www.oph.fi/ops/aikuisops/aikuisperusteet.pdf.

[19] P. Parviainen, Matematiikan ylioppilaskoe uudistuu. Dimensio 63 (1999), 3.

[20] P. Parviainen, Ylioppilastutkinto uudistuu. Dimensio 69 (2005), 5.

[21] P. Toivanen, Ylioppilastehtävät 1974 – 1984, Matematiikka, Laaja oppimäärä. WSOY, 1984.

[22] K. Väisälä, Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet. Otava, 1950.

[23] K. Väisälä, Algebran oppi- ja esimerkkikirja II. 5. painos, WSOY, 1960.

[24] Ylioppilastutkintolautakunta, [Ylioppilastutkinto 150 vuotta], 2002 [Viitattu 9.8.2008]. URL http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/ylioppilastutkinto/150/.

Liitteet

Liite 1

Johdamme kolmannen asteen yhtälölle $z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$ yksinkertaisemman muodon $x^3 + px + q = 0$, jossa $p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2$ ja $q = a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3$. Sijoituksella $z = x - \frac{a_1}{3}$ saamme

$$\left(x - \frac{1}{3}a_1\right)^3 + a_1\left(x - \frac{1}{3}a_1\right)^2 + a_2\left(x - \frac{1}{3}a_1\right) + a_3$$

$$= \left(x - \frac{1}{3}a_1\right)\left(x^2 - \frac{2}{3}a_1x + \frac{1}{9}a_1^2\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}a_1\right)^2 + a_2\left(x - \frac{1}{3}a_1\right) + a_3$$

$$= x^3 - \frac{2}{3}a_1x^2 + \frac{1}{9}a_1^2x - \frac{1}{3}a_1x^2 + \frac{2}{9}a_1^2x - \frac{1}{27}a_1^3 + a_1x^2 - \frac{2}{3}a_1^2x + \frac{1}{9}a_1^3 + a_2x - \frac{1}{3}a_1a_2 + a_3$$

$$= x^3 - \frac{1}{3}a_1^2x + \frac{2}{27}a_1^3 + a_2x - \frac{1}{3}a_1a_2 + a_3$$

$$= x^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right)x + a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3 = 0 = x^3 + px + q.$$

Liite 2

Valitsemalla u_0 ja v_0 niin, että $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$, saadaan kolme lukuparia, jotka toteuttavat yhtälöparin (2.10), ja ne ovat $(u_0,\ v_0)$, $(\rho u_0,\ \rho^2 v_0)$, $(\rho^2 u_0,\ \rho v_0)$. Luvussa 2.3.2 osoitettiin, että lukupari $(u_0,\ v_0)$ toteuttaa yhtälöparin (2.10). Nyt havaitaan suoraan laskemalla, että myös lukuparit $(\rho u_0,\ \rho^2 v_0)$, $(\rho^2 u_0,\ \rho v_0)$ toteuttavat sen. Tällöin osoitetaan ensin, että $\rho^3 = 1$,

$$\rho^3 = \rho \cdot \rho^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$= \frac{1-3i^2}{4} = \frac{1-3(-1)}{4} = 1.$$

Nyt saamme

$$(\rho u_0)^3 + (\rho^2 v_0)^3 = \rho^3 u_0^3 + \rho^6 v_0^3 = \rho^3 (u_0^3 + \rho^3 v_0^3) = u_0^3 + v_0^3 = -q$$

ja

$$\rho u_0 \cdot \rho^2 v_0 = \rho^3 u_0 v_0 = 1 \cdot u_0 \cdot \left(-\frac{p}{3u_0} \right) = -\frac{p}{3}.$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että lukupari $(\rho^2 u_0,\ \rho v_0)$ toteuttaa yhtälöparin (2.10). Kokeilemalla muita lukupareja (u, v) huomataan, etteivät ne toteuta sitä.

Liite 3

$$x_1 = u_0 + v_0$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) + \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \\
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3} + \cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}.
\end{aligned}$$

$$x_2 = \rho u_0 + \rho^2 v_0$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right]\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}i\sin\frac{\varphi}{3} - \cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-2\cos\frac{\varphi}{3} - 2\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right) \\
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\varphi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}\right) \\
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Siis

$$x_2 = \rho u_0 + \rho^2 v_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$x_3 = \rho^2 u_0 + \rho v_0$$

$$= \left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right]\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{3}i\sin\frac{\varphi}{3}-\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}+i\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{3}i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-2\cos\frac{\varphi}{3}+2\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

Toisaalta

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\varphi}{3}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

Siis

$$x_3 = \rho^2 u_0 + \rho v_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Liite 4

$$x_1 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$x_2 = \rho u_0 + \rho^2 v_0 = \rho \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \rho^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left(\rho + \rho^2\right) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \cdot (-1) = \sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$x_3 = \rho^2 u_0 + \rho v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left(\rho^2 + \rho\right) = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$