TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Henry Joutsijoki

Residylause ja sen sovelluksia

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Marraskuu 2007

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

Joutsijoki, Henry: Residylause ja sen sovelluksia

Pro gradu -tutkielma, 53 s.

Matematiikka

Marraskuu 2007

Tiivistelmä

Residylause on kompleksianalyysiin kuuluva tulos, jonka avulla voimme laskea tehokkaasti määrättyjä integraaleja annetusta funktiosta. Perusideana residylauseessa on laskea annetun funktion residyjen summa erikoispisteissä ja kertoa se $2\pi i$:llä, jolloin integraalin arvo saadaan selville.

Tutkielman toisessa luvussa käsittelemme erikoispisteitä, jotka ovat perustana myöhemmin esitettävälle residylauseelle. Jaamme tutkielmassa erikoispisteet kahteen osaan: nollakohtaan ja eristettyihin erikoispisteisiin. Aluksi esitämme nollakohtaan liittyviä tuloksia ja esimerkkejä. Tämän jälkeen keskitymme eristettyihin erikoispisteisiin, jotka jaetaan kolmeen alaluokkaan: poistuva erikoispiste, oleellinen erikoispiste ja napa. Nämä erotellaan toisistaan Laurentin sarjakehitelmän kertoimien luonteen mukaan. Viimeisenä asiana toisessa luvussa esitämme residyn määritelmän ja sen määrittämiseen liittyviä lauseita.

Kolmannessa luvussa todistamme ensimmäiseksi residylauseen, jonka jälkeen todistamme residylausetta apuna käyttäen integrointilauseita ja tärkeän argumentin periaatteen. Tämän jälkeen siirrymme tutkielmassa käsittelemään argumentin periaatteen sovelluksia. Näistä sovelluksista tunnetuimmat ovat: algebran peruslause, Rouchén lause ja Hurwitzin lause. Viimeisessä alaluvussa todistamme Riemannnin funktionaaliyhtälön, joka kuuluu analyyttisen lukuteorian piiriin ja samalla saamme residylauseelle ja Riemannin ζ-funktion välille yhteyden.

Viimeisessä luvussa käsittelemme residylauseen historiaa. Historiaosuudessa keskitymme kahteen kuuluisaan matemaatikkoon, Augustin-Louis Cauchyyn ja Ernst Lindelöfiin, joiden saavutukset residylauseen historiassa ovat kiistatta merkittävimmät. Tässä luvussa käymme läpi yksityiskohtaisesti heidän kehittämiä tuloksia ja tällä tavoin annamme lukijalle laajan näkemyksen residylauseen historiallisesta kehityksestä.

Asiasanat: residylause, kompleksianalyysi

Sisältö

1 Johdanto

Residylause kuuluu kompleksianalyysin mielenkiintoisimpiin tuloksiin ja sen soveltamismahdollisuudet ovat erittäin laajat. Erityisesti vaikeiden integrointien sekä päättymättömien sarjojen summien määrittämisessä residylause on tehokas väline. Lisäksi se on monen keskeisen kompleksianalyysin tuloksen todistamisessa vaadittu apuväline. Näitä tuloksia käsittelemme tässä tutkielmassa.

Toisessa luvussa käymme läpi erikoispisteisiin liittyviä asioita. Aloitamme luvun lähtemällä tutusta nollakohdan määritelmästä ja nollakohtiin liittyvistä perustuloksista, joista tärkeimpiä ovat mm. L'Hospitalin sääntö ja diskreetti kuvauslause. Toisessa alaluvussa siirrymme tutkimaan eristettyjä erikoispisteitä. Eristetyt erikoispisteet jakautuvat kolmeen alaluokkaan. Nämä luokat ovat: napa, oleellinen erikoispiste ja poistuva erikoispiste. Niiden erottelu perustuu Laurentin sarjakehitelmän kertoimien ominaisuuksiin. Ensimmäisenä näistä käsittelemme poistuvan erikoispisteen, johon liittyy mielenkiintoinen Riemannin laajennuslause. Toisena erikoispisteenä esittelemme navan, jolla on keskeinen rooli toisessa luvussa esittettävissä residylauseen sovelluksissa. Viimeisenä eristettynä erikoispisteenä käymme läpi oleellisen erikoispisteen käsitteen, johon liittyy kiinnostavia ja syvällisiä tuloksia. Näistä tuloksista ensimmäiseksi esittelemme Casoratin-Weierstrassin lauseen, jonka jälkeen esitämme sille vahvemman tuloksen, joka tunnetaan nimellä Picardin suuri lause. Tämän seuraus on Picardin pieni lause, jota apuna käyttäen todistamme algebran peruslauseen. Ensimmäisen luvun viimeisenä asiana käymme läpi residyn käsitteen ja sen määrittämiseen liittyviä lauseita.

Kolmas luku käsittelee residylausetta ja sen sovelluksia, joka on tutkielman keskeisin osa. Ensimmäisessä alaluvussa todistamme aluksi residylauseen, jonka jälkeen osoitamme kaksi mielenkiintoista integrointilausetta, joiden avulla pystytään laskemaan tehokkaasti ja helposti vaikeita määrättyjä integraaleja. Näiden lauseiden soveltamisesta on useita esimerkkejä. Viimeisenä asiana ensimmäisessä alaluvussa todistamme argumentin periaatteen, joka on tärkeä residylauseen sovellus. Toinen alaluku käsitteleekin argumentin periaatteen sovelluksia. Ensimmäisenä sovelluksena esitämme todistuksen algebran peruslauseelle. Tämän jälkeen todistetuista sovelluksista kuuluisimmat ovat: Rouchén lause, joka on tehokas väline nollakohtien sijainnin, olemassaolon ja lukumäärän selvittämisessä, ja Hurwitzin lause. Viimeisessä alaluvussa käsittelemme Riemannin funktionaaliyhtälöä. Ennen funktionaaliyhtälön todistamista johdamme funktiolle $\pi \cot \pi z$ osamurtokehitelmän. Funktio $\pi \cot \pi z$ on tärkeä funktio kompleksianalyysissa, sillä se tulee vastaan monissa yllättävissäkin tilanteissa. Lisäksi johdamme funktioille $\pi \tan \pi z$ ja $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ osamurtokehitelmät. Viimeisenä asiana kolmannessa luvussa todistamme Riemannin funktionaaliyhtälön

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

missä ζ tarkoittaa Riemannin ζ-funktiota ja Γ tilastotieteestäkin tuttua gammafunktiota.

Viimeisessä luvussa keskitymme residylauseen historiaan. Historiaosuudessa tutustumme kahteen merkittävään matemaatikkoon, Augustin-Louis Cauchyyn ja Ernst Lindelöfiin, jotka ovat vaikuttaneet residylauseen syntyyn ja kehitykseen merkittävällä tavalla. Tarkastelemme heidän tieteellistä tuotantoa yksityiskohtaisesti ja jätämme henkilöhistorian vähemmälle huomiolle.

Tutkielman esimerkit ovat osin kirjoittajan keksimiä ja osin lähdekirjojen harjoitustehtäviä. Ratkaisut kaikkiin esimerkkeihin ovat kirjoittajan laatimia. Lukijalta oletamme kompleksianalyysin perustietojen vahvaa hallintaa sekä topologian alkeiden tuntemista. Esitiedoiksi kelpaavat esimerkiksi Tampereen yliopiston kurssit Kompleksianalyysi A+B tai kirjan [9] kappaleet 1-17.

2 Erikoispisteet

2.1 Nollakohdat

Tässä luvussa käsittelemme holomorfisen funktion nollakohtia koskevia tuloksia. Nollakohdat ovat ensimmäisiä erikoispisteisiin lukeutuvia asioita. Aloitamme määrittelemällä nollakohdan kertaluvun käsitteen.

Määritelmä 2.1. Oletetaan, että funktio f on holomorfinen pisteessä z_0 ja on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}_+$ että f on holomorfinen kiekossa $B(z_0, r)$. Piste z_0 on funktion f m-kertainen nollakohta, jos

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) \quad \text{ja} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Lause 2.1. *Jos funktio f on holomorfinen alueessa G ja on olemassa sellainen piste $\zeta_0 \in G$, että $f^{(n)}(\zeta_0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin f on vakio alueessa G.*

Todistus (Vrt. [8, s. 301]). Määrittelemme ensin joukot U ja V siten, että $U = \{z \in G \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+\} \neq \emptyset$ ja $V = G \setminus U$. Nyt selvästi $G = U \cup V$ ja $U \cap V = \emptyset$ Oletuksen perusteella $\zeta_0 \in U$, joten meidän tulee osoittaa, että $U = G$. Tämän todistamiseen riittää, että osoitamme joukot U ja V avoimiksi, jolloin G:n yhtenäisyyden nojalla $V = \emptyset$.

Osoitamme ensin, että U on avoin. Valitsemme mielivaltaisen $z_0 \in U$. Tällöin on olemassa sellainen $r > 0$, että avoin kiekko $B(z_0, r) \subseteq G$. Nyt voimme esittää tässä kiekossa funktion f Taylor-kehitelmän avulla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = f(z_0)$$

kaikilla $z \in B(z_0, r)$. Näin ollen $f^{(n)}(z) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $z \in B(z_0, r)$. Täten $B(z_0, r) \subseteq U$, joten U on avoin.

Todistamme seuraavaksi, että joukko V on avoin. Valitsemme mielivaltaisen $z_0 \in V$. Joukon V määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Koska $f^{(n)}$ on jatkuva alueessa G, on olemassa sellainen $B(z_0, r) \subseteq G$, että $f^{(n)}(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B(z_0, r)$. Siis $B(z_0, r) \subseteq V$, joten joukko V on avoin.

Lause 2.2. *Oletetaan, että funktio f on holomorfinen ja vakiofunktiosta eroava alueessa G. Olkoon piste $z_0 \in G$, jolla $f(z_0) = 0$. Tällöin funktio f voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$ ja funktio $g : G \to \mathbb{C}$ on holomorfinen funktio, jolla $g(z_0) \neq 0$.

Todistus (Vrt. [8, s. 301-302]). Koska f on vakiofunktiosta eroava, lauseen 2.1 perusteella on olemassa vähintään yksi $n \in \mathbb{Z}_+$, jolla $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Olkoon m pienin tällainen kokonaisluku. Valitsemme nyt avoimen kiekon $B(z_0, r) \subseteq G$. Tällöin voimme esittää funktion f Taylor-kehitelmän avulla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Koska $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, niin $f^{(n)}(z_0) = 0$, kun $0 \leq n < m - 1$. Siis $a_m \neq 0$, joten voimme esittää funktion f muodossa

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m},$$

kun $z \in B(z_0, r)$. Näin ollen määrittelemme funktion $g : G \to \mathbb{C}$ siten, että

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}, & \text{jos } z \neq z_0, \\ a_m, & \text{jos } z = z_0. \end{cases}$$

Tällöin funktio g on holomorfinen, kun $z \neq z_0$. Funktion g Taylor-kehitelmästä huomaamme, että g on derivoituva myös pisteessä $z = z_0$. Täten g on holomorfinen ja $g(z_0) \neq 0$. Lisäksi $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$.

Todistamme vielä funktion g yksikäsitteisyyden. Teemme vastaoletuksen, että alueessa G funktiolle f on olemassa toinen esitysmuoto. Olkoon se $f(z) = (z - z_0)^l h(z)$, missä $l \in \mathbb{Z}_+$ ja $h : G \to \mathbb{C}$ on holomorfinen funktio, jolla $h(z_0) \neq 0$. Nyt kaikilla kompleksiluvuilla $z \in G$ on voimassa $(z - z_0)^m g(z) = (z - z_0)^l h(z)$. Tällöin, jos $m > l$, niin

$$0 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{m-l} g(z) = \lim_{z \to z_0} h(z) = h(z_0) \neq 0,$$

mikä on mahdotonta. Vastaavasti menee tapaus $l > m$. Näin ollen $m = l$. Siis $g(z) = h(z)$ kaikilla $z \in G \setminus \{z_0\}$. Edelleen jatkuvuuden nojalla $g(z_0) = h(z_0)$, joten funktion f esitysmuoto on yksikäsitteinen.

Seurauslause 2.1.1. *Oletetaan, että funktio f on holomorfinen ja vakiofunktiosta eroava alueessa G ja piste $z_0 \in G$. Tällöin f voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z),$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$ ja funktio $g : G \to \mathbb{C}$ on holomorfinen, jolla $g(z_0) \neq 0$.

Todistus. Sovellamme lausetta 2.2 funktioon $h(z) = f(z) - f(z_0)$, joka on määritelty alueessa G.

Esimerkki 2.1 [8, s. 362, teht. 5.1.(iii)]**.** Määritä funktion $f(z) = \log^2(\cos z)$ nollakohdan $z_0 = 2\pi$ kertaluku. Logaritmin monifunktioluonteen vuoksi valitsemme argumentin päähaaran $0 \leq \theta < 2\pi$. Koska

$$0 = f'(2\pi) = f''(2\pi) = f^{(3)}(2\pi) \neq f^{(4)}(2\pi) = 6,$$

nollakohta on nelinkertainen.

Esimerkki 2.2 [8, s. 362, teht. 5.1.(iv)]**.** Määritä funktion $f(z) = \tan^2(1 + 2z^2 + z^4)$ nollakohdan $z_0 = i$ kertaluku. Koska

$$0 = f'(i) = f''(i) = f^{(3)}(i) \neq f^{(4)}(i) = 384,$$

nollakohta on nelinkertainen.

Reaalifunktioille tuttu L'Hospitalin sääntö pätee myös kompleksifunktioille.

Lause 2.3 (L'Hospitalin sääntö)**.** *Olkoot funktiot f ja g holomorfisia ja vakiofunktiosta eroavia avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$. Jos $f(z_0) = g(z_0) = 0$, niin*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \tag{2.1}$$

Todistus. Ks. [8, s. 304-305].

Esimerkki 2.3 [8, s. 362, teht. 5.3.(i)]**.** Määritä raja-arvo $\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$.

L'Hospitalin säännöllä saamme

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{2z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esimerkki 2.4 [8, s. 362, teht. 5.3.(iv)]**.** Määritä raja-arvo $\lim_{z \to 2\pi} \frac{\log(\cos z)}{(1 - e^{iz})^2}$. Logaritmin monifunktioluonteen takia valitsemme argumentin päähaaran $0 \leq \theta < 2\pi$.

L'Hospitalin säännöllä saamme

$$\lim_{z \to 2\pi} \frac{\log(\cos z)}{(1 - e^{iz})^2} = \lim_{z \to 2\pi} \frac{-\tan z}{2(1 - e^{iz})(-ie^{iz})} = \lim_{z \to 2\pi} \frac{-1 - \tan^2 z}{2e^{iz} - 4e^{2iz}} = \frac{1}{2}.$$

Esimerkki 2.5 [8, s. 362, teht. 5.3.(vi)]**.** Määritä raja-arvo $\lim_{z \to 0} (\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z})$.

L'Hospitalin säännöllä saamme

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{z - e^z + 1}{z(e^z - 1)} = \lim_{z \to 0} \frac{1 - e^z}{e^z + ze^z - 1} = \lim_{z \to 0} \frac{-e^z}{2e^z + ze^z} = -\frac{1}{2}.$$

Määritelmä 2.2. Avoimen joukon U osajoukko E on *diskreetti osajoukko*, jos sillä ei ole joukossa U kasautumispistettä.

Määritelmä 2.3. Olkoon f kompleksifunktio, jonka määrittelyjoukko sisältää avoimen joukon U. Funktio f kuvaa joukon U *diskreetisti*, jos jokaisella kompleksiluvulla w joukko $E_w = \{z \in U \mid f(z) = w\}$ on joukon U diskreetti osajoukko.

Lause 2.4 (Diskreetti kuvauslause)**.** *Jos funktio f on holomorfinen ja vakiofunktiosta eroava alueessa G, niin se kuvaa joukon G diskreetisti.*

Todistus (Vrt. [8, s. 306])*.* Kiinnitämme aluksi kompleksiluvun $w \in \mathbb{C}$. Olkoon $E = E_w = \{z \in G \mid f(z) = w\}$ ja z_0 joukon E kasautumispiste. Osoitamme, että E on alueen G diskreetti osajoukko. Toisin sanoen osoitamme, että $z_0 \notin G$. Teemme vastaoletuksen, että $z_0 \in G$. Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ sellainen joukossa $E \setminus \{z_0\}$ suppeneva lukujono, että $z_n \to z_0$. Funktion f jatkuvuuden nojalla saamme

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0) = \lim_{n\to\infty} w = w,$$

joten $z_0 \in E$. Nyt seurauslauseen 2.1.1 nojalla voimme esittää funktion f muodossa $f(z) = w + (z - z_0)^m g(z)$, missä $g(z_0) \neq 0$. Koska funktio g on jatkuva, voimme valita sellaisen avoimen kiekon $B(z_0, r) \subseteq G$, että jokaisella $z \in B(z_0, r)$ pätee $g(z) \neq 0$. Siis $f(z) \neq w$ aina, kun $z \in B'(z_0, r)$. Näin ollen $E \cap B'(z_0, r) = \emptyset$. Tämä on ristiriidassa joukon E kasautumispisteen määritelmän kanssa.

Seurauslause 2.1.2 (Analyyttisen jatkamisen periaate)**.** *Olkoot funktiot f ja g holomorfisia alueessa G. Olkoon $f(z) = g(z)$ kaikilla kompleksiluvuilla z, jotka kuuluvat johonkin alueen G osajoukkoon A, jolla on kasautumispiste alueessa G. Tällöin $f(z) = g(z)$ kaikilla $z \in G$.*

Todistus (Vrt. [8, s. 307])*.* Funktio $h(z) = g(z) - f(z)$ on holomorfinen alueessa G. Koska funktiolla h on nollakohta jokaisessa osajoukon A pisteessä, nollakohtien joukko ei ole G:n diskreetti osajoukko. Näin ollen lauseen 2.4 perusteella funktio h on identtisesti nolla. Toisin sanoen $f(z) = g(z)$ kaikilla $z \in G$.

Seurauslause 2.1.3. *Jos funktiot f ja g ovat holomorfisia alueessa G ja $f(z)g(z) = 0$ kaikilla $z \in G$, niin f tai g on identtisesti nolla.*

Todistus (Vrt. [8, s. 308])*.* Oletetaan, että on olemassa piste $z_0 \in G$, jolla $f(z_0) \neq 0$. Todistamme, että tällöin $g(z) = 0$ kaikilla $z \in G$. Koska f on jatkuva, valitsemme sellaisen avoimen kiekon $B(z_0, r) \subseteq G$, että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B(z_0, r)$. Mutta nyt $g(z) = 0$ kaikilla $z \in B(z_0, r)$. Näin ollen alueessa G funktion g nollakohdat eivät ole eristettyjä pisteitä eli pisteitä, jotka eivät ole G:n kasautumispisteitä. Siis lauseen 2.4 nojalla g on vakio alueessa G, jolloin sen tulee olla identtisesti nolla.

Lause 2.5. *Olkoot U avoin joukko ja funktio $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Olkoon g funktion f^{-1} haara alueessa G. Tällöin funktio g on holomorfinen.*

Todistus (Vrt. [8, s. 308-309]). Oletuksen perusteella funktio $g : G \to U$ on jatkuva funktio, jolla $f[g(z)] = z$ kaikilla $z \in G$. Näin ollen osoitamme, että funktio g on holomorfinen alueen G jokaisessa pisteessä.

Oletamme, että H on joukon U sellainen alue, joka sisältää yhtenäisen joukon $g(G)$. Jos $w_1 = g(z_1)$ ja $w_2 = g(z_2)$, missä $z_1, z_2 \in G$ ovat erillisiä pisteitä, niin $f(w_1) = z_1 \neq z_2 = f(w_2)$. Siis funktio f ei ole vakio alueessa H, joten f' ei ole identtisesti nolla siellä. Kun sovellamme diskrettiä kuvauslausetta funktioon f', saamme, että $E = \{w \in H \mid f'(w) = 0\}$ on joukon H diskreetti osajoukko.

Valitsemme mielivaltaisen pisteen $z_0 \in G$ ja merkitsemme, että $w_0 = g(z_0)$. Jos $w_0 \notin E$, niin funktio g on derivoituva pisteessä z_0, koska

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{f(g(z)) - f(g(z_0))} = \frac{w - w_0}{f(w) - f(w_0)} \to \frac{1}{f'(w_0)},$$

kun $z \to z_0$. Jos $w_0 \in E$, niin valitsemme sellaisen $r > 0$, että $E \cap B(w_0, r) = \{w_0\}$. Koska funktio g on jatkuva pisteessä z_0, voimme valita sellaisen avoimen kiekon $B(z_0, s) \subseteq G$, että $g[B(z_0, s)] \subseteq B(w_0, r)$. Koska funktio g on univalentti (eli injektio) ja $g(z_0) = w_0$, kaikilla $z \in B'(z_0, s)$, funktion g kuva $g(z) \subseteq B'(w_0, r)$. Täten funktion g kuva ei ole joukon E piste. Näin ollen funktio g on holomorfinen joukossa $B'(z_0, s)$. Koska funktio g on lisäksi jatkuva joukossa $B(z_0, s)$, se on myös derivoituva pisteessä z_0. Siis funktio g on derivoituva alueessa G.

2.2 Eristetyt erikoispisteet

Määritelmä 2.4. Funktiolla f on *eristetty erikoispiste* z_0, jos on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}_+$, että f on holomorfinen punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$, mutta ei pisteessä z_0.

Määritelmä 2.5. Funktio f on holomorfinen paitsi eristetyissä erikoispisteissä avoimessa joukossa U, jos sen erikoispisteiden joukko E on diskreetti ja jos f on holomorfinen joukossa $U \setminus E$.

Määritelmässä (2.5) ei suljeta pois mahdollisuutta, että joukko E olisi tyhjä joukko. Tällöin funktio f yksinkertaisesti olisi holomorfinen koko joukossa U.

Eristetyn erikoispisteen käsitteeseen sisältyy olennaisesti Laurentin sarjakehitelmä. Siis, jos funktiolla f on eristetty erikoispiste pisteessä z_0, niin funktiolle f voidaan muodostaa Laurentin sarjakehitelmä kyseisen pisteen suhteen. Tällöin funktio f voidaan ilmoittaa muodossa

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

missä kertoimet

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

ja γ on positiivisesti suunnistettu ympyräkaari. Kutsumme jatkossa Laurentin sarjakehitelmän $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ osaa funktion f *singulaariosaksi* pisteessä z_0. Tätä käsitettä tarvitsemme erityisesti tämän luvun lopussa olevissa esimerkeissä sekä toisessa luvussa esitettävässä residylauseen todistuksessa. Kertoimilla a_n on erityinen rooli puhuttaessa eristetystä erikoispisteestä; niiden ominaisuuksien mukaan voimme jakaa eristetyt erikoispisteet kolmeen alaluokkaan. Nämä alaluokat ovat: poistuva erikoispiste, oleellinen erikoispiste ja napa. Esittelemme ensimmäiseksi poistuvan erikoispisteen käsitteen.

Määritelmä 2.6. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ funktion f eristetty erikoispiste. Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ funktion f Laurentin sarjakehitelmä punkteeratussa kiekossa $B'(z_0,r)$. Tällöin z_0 on funktion f *poistuva erikoispiste*, jos $a_{-n} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Seurauslause 2.2.1. *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Tällöin z_0 on poistuva erikoispiste, jos ja vain jos voimme määrittää tai uudelleen määrittää arvon $f(z_0)$ siten, että voimme tehdä funktion f derivoituvaksi pisteessä z_0.*

Todistus. Jätämme todistuksen lukijalle harjoitustehtäväksi.

Lause 2.6 (Riemannin laajennuslause)**.** *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste pisteessä z_0. Tällöin erikoispiste on poistuva, jos ja vain jos funktio f on rajoitettu punkteeratussa kiekossa $B'(z_0,r)$.*

Todistus (Vrt. [8, s. 311]). Teemme todistuksen kahdessa osassa. Oletamme ensin, että funktio f on rajoitettu punkteeratussa kiekossa $B'(z_0,r)$. Siis on olemassa sellainen $m \in \mathbb{R}$, että $|f(z)| \leq m$ jokaisella $z \in B'(z_0,r)$. Olkoot $r \in \mathbb{R}_+$ riittävän pieni, jolloin funktio f on holomorfinen punkteeratussa kiekossa $B'(z_0,r)$ ja γ on z_0-keskisen ja s-säteisen ympyrän kaari. Muodostamme seuraavaksi funktion f Laurentin sarjakehitelmän punkteeratussa kiekossa $B'(z_0,r)$. Tällöin kerroin

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

kaikilla $0 < s < r$. Koska $\gamma(t) = z_0 + se^{it}$, missä $t \in [0,2\pi]$, niin $\gamma'(t) = ise^{it}$. Tällöin

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+se^{it})ise^{it}}{(se^{it})^{n+1}}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0+se^{it})|}{|(se^{it})^n|}|dt| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi m}{s^n} = \frac{m}{s^n}.\end{aligned}$$

Kun $n < 0$ ja $s \to 0$, niin $|a_n| = 0$. Näin ollen $a_{-n} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, jolloin z_0 on poistuva erikoispiste.

Oletamme seuraavaksi, että funktiolla f on poistuva erikoispiste z_0. Seurauslauseen 2.2.1 nojalla voimme tehdä funktion f derivoituvaksi pisteessä z_0. Tällöin raja-arvo $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |f(z_0)|$ on olemassa. Täten voimme valita sellaisen $r \in \mathbb{R}_+$, että $|f(z)| < |f(z_0)| + 1$ kaikilla $z \in B'(z_0, r)$. Mutta nyt funktio f on rajoitettu punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$.

Lause 2.7. *Olkoon z_0 funktion f eristetty erikoispiste. Tällöin erikoispiste on poistuva, jos ja vain jos $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ on olemassa.*

Todistus. Jätämme todistuksen harjoitustehtäväksi lukijalle.

Toisena erikoispisteenä esitämme navan käsitteen.

Määritelmä 2.7. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ funktion f eristetty erikoispiste. Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ funktion f Laurentin sarjakehitelmä punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$. Tällöin z_0 on funktion f *napa*, jos $a_{-n} \neq 0$ vähintään yhdellä, mutta korkeintaan äärellisen monella $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lause 2.8. *Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Holomorfisella funktiolla f punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$ on m-kertainen napa pisteessä z_0, jos ja vain jos f voidaan esittää punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$ muodossa*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

missä g on holomorfinen funktio kiekossa $B(z_0, r)$ ja $g(z_0) \neq 0$.

Todistus (Vrt. [8, s. 311-312]). Todistamme vain suunnan " $\Rightarrow$ ", sillä toinen suunta on varsin suoraviivainen todistus.

Olkoon $m \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$ holomorfisella funktiolla f m-kertainen napa pisteessä z_0. Täten funktion f Laurentin sarjakehitelmä on

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{2.2}$$

missä $a_{-m} \neq 0$. Kerromme yhtälön (2.2) puolittain termillä $(z - z_0)^m$, jolloin

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n. \tag{2.3}$$

Yhtälön (2.3) oikeanpuoleisin lauseke on Taylor-kehitelmä, joka suppenee kaikilla $z \in B(z_0, r)$. Merkitsemme $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$. Tällöin funktio g on holomorfinen kiekossa $B(z_0, r)$ ja $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$. Täten $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ kaikilla $z \in B'(z_0, r)$.

Lause 2.9. *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste pisteessä z_0. Tällöin erikoispiste on napa, jos ja vain jos $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$. Lisäksi erikoispiste on m-kertainen napa, jos ja vain jos m on yksikäsitteinen positiivinen eksponentti, jolla $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^m|f(z)|$ on positiivinen reaaliluku.*

Todistus (Vrt. [8, s. 317]). Todistamme ensimmäiseksi kummankin väitteen " $\Rightarrow$ " suunnan. Oletamme ensin, että funktiolla f on m-kertainen napa pisteessä z_0. Tällöin lauseen 2.8 perusteella punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$ voimme esittää funktion f muodossa $f(z) = (z-z_0)^{-m}g(z)$, missä funktio g on holomorfinen kiekossa $B(z_0, r)$ ja $g(z_0) \neq 0$. Näin ollen

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \lim_{z\to z_0}|g(z)||z-z_0|^{-m} = \infty.$$

Olkoon $l \in \mathbb{R}_+$ mielivaltainen. Tällöin meidän pitää tarkastella kolmea eri tapausta, kun haluamme selvittää milloin $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^m|f(z)|$ on positiivinen. Siis käsiteltävinä tapauksina ovat $l < m$, $l = m$ ja $l > m$. Nyt

$$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^l|f(z)| = \lim_{z\to z_0}\frac{|g(z)||z-z_0|^l}{|z-z_0|^m}. \tag{2.4}$$

Yhtälöstä (2.4) näemme, että jos $l = m$, niin $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^l|f(z)| = |g(z_0)|$. Muutoin, jos $l < m$, niin $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^l|f(z)| = \infty$ tai jos $l > m$, niin $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^l|f(z)| = 0$. Siis ainoa tapaus, jossa yhtälön (2.4) puolet ovat positiivisia, on $l = m$. Näin ollen m on yksikäsitteinen eksponentti.

Todistamme nyt väitteiden " $\Leftarrow$ " suunnan. Oletamme ensimmäiseksi, että $|f(z)| \to \infty$, kun $z \to z_0$. Valitsemme sellaisen punkteeratun kiekon $B'(z_0, r)$, että funktio f on holomorfinen siinä ja $|f(z)| \geq 1$ kaikilla $z \in B'(z_0, r)$. Muodostamme apufunktion $h(z) = \frac{1}{f(z)}$, jolla on eristetty erikoispiste pisteessä z_0. Koska $|h(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in B'(z_0, r)$, Riemannin laajennuslauseen perusteella funktion h erikoispiste on poistuva. Tällöin voimme poistaa erikoispisteen z_0 määrittelemällä $h(z_0) = \lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Koska funktio h ei ole identtisesti nolla punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$, funktiolla h täytyy olla jotain kertalukua m oleva nollakohta laajennuksen myötä. Näin ollen saamme, että funktiolla f puolestaan täytyy olla samaa kertalukua oleva napa pisteessä z_0. Koska jollakin $m > 0$ lauseke $|z-z_0|^m|f(z)|$ saa positiivisen arvon, kun $z \to z_0$, tällöin myös

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)||z-z_0|^m}{|z-z_0|^m} = \infty.$$

Täten funktiolla f on napa pisteessä z_0 ja sen kertaluku on m.

Viimeisenä erikoispisteenä esittelemme oleellisen erikoispisteen.

Määritelmä 2.8. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ funktion f eristetty erikoispiste. Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ funktion f Laurentin sarjakehitelmä punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$. Tällöin z_0 on funktion f *oleellinen erikoispiste*, jos $a_{-n} \neq 0$ on voimassa äärettömän monella $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lause 2.10 (Casoratin-Weierstrassin lause)**.** *Jos funktio f on holomorfinen punkteeratussa kiekossa $U = B'(z_0, r)$ ja lisäksi sillä on oleellinen erikoispiste pisteessä z_0, niin $f(U)$ on tiheä kompleksitasossa $\mathbb{C}$. Toisin sanoen joukolla $\mathbb{C} \setminus f(U)$ ei ole sisäspisteitä.*

Todistus (Vrt. [8, s. 321])*.* Teemme vastaoletuksen, että joukolla $\mathbb{C} \setminus f(U)$ on sisäpisteitä. Olkoot w_0 joukon $\mathbb{C} \setminus f(U)$ sisäpiste ja $s \in \mathbb{R}_+$ sellainen, että $B(w_0, s) \subseteq (\mathbb{C} \setminus f(U))$. Tällöin kaikilla $z \in U$ pätee, että $|f(z) - w_0| \geq s$. Näin ollen funktio $g : U \to \mathbb{C} : g(z) = [f(z) - w_0]^{-1}$ on holomorfinen ja $|g(z)| \leq s^{-1}$ kaikilla $z \in U$. Riemannin laajennuslauseen perusteella funktion g erikoispiste on poistuva pisteessä z_0. Koska funktiolla g ei ole nollakohtia joukossa U, sen käänteisfunktiolla $\frac{1}{g}$ on eristetty erikoispiste pisteessä z_0. Se on joko napa tai poistuva erikoispiste, riippuen siitä, että onko raja-arvo $\lim_{z \to z_0} |g(z)|$ nolla vai siitä eroava. Täten funktiolla $f(z) = w_0 + (\frac{1}{g(z)})$ on pisteessä z_0 joko napa tai poistuva erikoispiste. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten joukolla $\mathbb{C} \setminus f(U)$ ei ole sisäpisteitä.

Italialainen matemaatikko Felice Casorati (1835-1890) esitti edellisen lauseen todistuksen vuonna 1868 ja samaan tulokseen päätyi myös Karl Weierstrass (1815-1897) riippumattomana Casoratista vuonna 1876. Kolme vuotta myöhemmin, eli vuonna 1879, ranskalainen matemaatikko Émile Picard esitti syvällisen tuloksen, joka kantaa nimeä Picardin suuri lause. Se on vahvennus Casoratin-Weierstrassin lauseeseen, joka takaa ainoastaan sen, että funktion f kuvajoukko on tiheä. Picardin suuresta lauseesta saadaan suorana seurauksena Picardin pieni lause, joka on perustana algebran peruslauseen todistukselle. Algebran peruslauseelle esitämme myös toisen todistuksen, joka nojaa residylauseeseen. Jälkimmäinen todistus esitetään luvussa kolme. Ennen Picardin lauseiden esittämistä tulee meidän määritellä kokonaisen funktion käsite.

Määritelmä 2.9. Kokonainen funktio on funktio, joka on holomorfinen ja määritelty koko kompleksitasossa

Lause 2.11 (Picardin suuri lause)**.** *Jos funktio f on holomorfinen punkteeratussa kiekossa $U = B'(z_0, r)$ ja sillä z_0 on oleellinen erikoispiste, niin joukko $\mathbb{C} \setminus f(U)$ sisältää korkeintaan yhden pisteen.*

Todistus. Ks. [4, s. 300-301].

Seurauslause 2.2.2 (Picardin pieni lause)**.** *Jos f on kokonainen funktio, joka ei saa kahta arvoa, niin se on vakio.*

Todistus. Ks. [4, s. 297].

Lause 2.12 (Algebran peruslause)**.** *Polynomifunktiolla $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, missä $n > 0$, on vähintään yksi nollakohta.*

Todistus (Vrt. [3, s. 501-502]). Todistus perustuu Picardin pieneen lauseeseen. Teemme vastaoletuksen, että polynomifunktiolla $p(z)$, joka on kokonainen funktio, ei ole nollakohtia. Lisäksi väitämme, että polynomifunktio $p(z)$ ei saa jotain arvoa $1/k$, missä $k = 1, 2, \ldots$. Oletamme, että on olemassa sellaiset pisteet z_k, että $p(z_k) = 1/k$, kun $k = 1, 2, \ldots$. Koska polynomifunktiolla $p(z)$ on napa äärettömyydessä, jonkin ympyrän K ulkopuolella $|p(z)| > 1$. Näin ollen kaikki pisteet z_k sijaitsevat ympyrän K sisällä tai sen kaarella. Täten ympyrän K sisällä tai sen reunalla on vähintään yksi kasautumispiste Z. Koska polynomifunktio $p(z)$ on jatkuva, niin

$$p(Z) = \lim_{z_k \to Z} p(z_k) = 0.$$

Näin ollen on olemassa sellainen kokonaisluku k, että $p(z)$ ei saa arvoa $\frac{1}{k}$. Lisäksi $p(z)$ ei saa arvoa 0, joten Picardin pienen lauseen perusteella $p(z)$ on vakio, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Määritelmä 2.10. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ funktion f eristetty erikoispiste. Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ funktion f Laurentin sarjakehitelmä punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$. Tällöin funktion f *residy* pisteessä z_0 on $\mathrm{Res}(z_0, f) = a_{-1}$.

Lause 2.13. *Jos z_0 on funktion f yksinkertainen napa, niin* $\mathrm{Res}(z_0, f) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$.

Todistus (Vrt. [6, s. 172-173]). Koska z_0 on funktion f napa, on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}_+$, että $f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kaikilla $z \in B'(z_0, r)$. Tällöin

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+1}$$

kaikilla $z \in B'(z_0, r)$, joten

$$\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} \left\{ a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+1} \right\} = a_{-1} = \mathrm{Res}(z_0, f).$$

Lause 2.14. *Olkoon funktiolla f m-kertainen napa ($m > 1$) pisteessä z_0. Olkoon $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, missä funktio g on holomorfinen pisteessä z_0 ja $g(z_0) \neq 0$. Tällöin* $\mathrm{Res}(z_0, f) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$.

Todistus (Vrt. [6, s. 173-174]). Koska funktio g on holomorfinen pisteessä z_0, sen Taylor-kehitelmä avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$ on

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n},$$

missä $a_{-m} \neq 0$. Näin ollen

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Koska $a_{-1} = \mathrm{Res}(z_0, f)$, funktion g Taylor-kehitelmän perusteella $a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$, jolloin $\mathrm{Res}(z_0, f) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$.

Lause 2.15. *Jos funktiolla f on m-kertainen napa pisteessä z_0, niin*

$$\mathrm{Res}(z_0, f) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

Todistus. Jätämme todistuksen lukijalle harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 2.6. Olkoon $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3}$. Määritä funktion f erikoispisteen $z_0 = 1$ laatu ja laske $\mathrm{Res}(1, f)$.

Funktiolla f on selvästi kolminkertainen napa $z_0 = 1$ Näin ollen laskemme seuraavaksi funktion f residyn arvon pisteessä $z_0 = 1$. Merkitsemme, että $m = 3$ ja $g(z) = \cos(\pi z)$. Tällöin $g''(1) = \pi^2$, joten lauseen 2.14 perusteella $\mathrm{Res}(1, f) = \frac{\pi^2}{2}$.

Esimerkki 2.7 [8, s. 364, teht. 5.17.(ii)]**.** Olkoon $f(z) = \frac{\cos(\pi z/2)}{(z-1)^3}$. Määritä funktion f erikoispisteen $z_0 = 1$ laatu ja laske $\mathrm{Res}(1, f)$.

Merkitsemme ensin, että $h(z) = \cos(\pi z/2)$ ja $k(z) = (z-1)^3$. Koska funktiolla h on yksinkertainen nollakohta pisteessä z_0 ja funktiolla k on kolminkertainen nollakohta pisteessä z_0, funktiolla $f = h/k$ on kaksinkertainen napa pisteessä z_0. Laskemme seuraavaksi residyn arvon pisteessä $z_0 = 1$. Lauseen 2.15 ja L'Hospitalin säännön perusteella

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(1, f) &= \lim_{z \to 1} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{\cos(\pi z/2)}{z-1} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \left[\frac{\frac{\pi}{2}(1-z)\sin(\frac{\pi z}{2}) - \cos(\frac{\pi z}{2})}{(z-1)^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \frac{\frac{\pi^2}{4}(1-z)\cos(\frac{\pi z}{2})}{2z-2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \frac{\frac{-\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi z}{2}) + \frac{\pi^3}{8}(1-z)\sin(\frac{\pi z}{2})}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.8 [8, s. 364, teht. 5.17.(iv)]**.** Olkoon $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$. Määritä funktion f erikoispisteen $z_0 = 0$ laatu ja laske $\mathrm{Res}(0, f)$.

Koska

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{-1}{z^3})^n}{n!} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^{-3})^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3n-2} n!} = z^2 - \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3n-2} n!},
\end{aligned}$$

näemme, että erikoispiste on oleellinen ja $\text{Res}(0, f) = -1$.

Esimerkki 2.9 [8, s. 364, teht. 5.17.(iv)]**.** Olkoon $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$. Määritä funktion f erikoispisteen $z_0 = 0$ laatu ja laske $\text{Res}(0, f)$.

Koska

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{-1}{z^3})^n}{n!} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^{-3})^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3n-2} n!} = z^2 - \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3n-2} n!}, \end{aligned}$$

näemme, että erikoispiste on oleellinen ja $\text{Res}(0, f) = -1$.

Esimerkki 2.10. Olkoon $f(z) = z^{-2}(z-1)^{-2}$. Laske funktion f singulaariosa pisteessä $z_0 = 1$ ja sen avulla $\text{Res}(1, f)$.

Koska

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{(1 + (z-1))^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}(z-1)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2}(n+1)(z-1)^n \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+2}(n+1)(z-1)^n \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+4}(n+3)(z-1)^n, \end{aligned}$$

yhtälöketjun viimeisestä muodosta näemme, että funktion f singulaariosa on $\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1}$ ja näin ollen $\text{Res}(1, f) = a_{-1} = -2$.

Seuraavassa esimerkissä käytämme "ordo"-merkintänä kirjainta O.

Esimerkki 2.11 [8, s. 364, teht. 5.18.(iii)]**.** Olkoon $f(z) = \frac{\sin(z^3)}{(1-\cos z)^3}$. Laske funktion f singulaariosa pisteessä $z_0 = 0$ ja sen avulla $\text{Res}(0, f)$.

Sinin sarjakehitelmän nojalla

$$\sin z^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{6n+3}}{(2n+1)!} = z^3 - \frac{z^9}{6} + \frac{z^{15}}{120} + \mathrm{O}(z^{21}).$$

Kosinin sarjakehitelmän perusteella

$$1 - \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \mathrm{O}(z^8),$$

josta saamme

$$(1-\cos z)^3 = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \mathrm{O}(z^8)\right)^3 = \frac{z^6}{8}\left(1 - \frac{z^2}{4} + \frac{7z^4}{240} + \mathrm{O}(z^6)\right).$$

Soveltamalla geometrista sarjaa saamme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-\cos z)^3} &= \frac{8}{z^6} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{z^2}{4} - \frac{7z^4}{240} + \mathrm{O}(z^6))} \\
&= \frac{8}{z^6}\left[1 + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{7z^4}{240} + \mathrm{O}(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{7z^4}{240} + \mathrm{O}(z^6)\right)^2 + \mathrm{O}(z^6)\right] \\
&= \frac{8}{z^6} + \frac{2}{z^4} + \frac{4}{15z^2} + \mathrm{O}(1).
\end{aligned}$$

Nyt

$$\left(z^3 - \frac{z^9}{6} + \frac{z^{15}}{120} + \mathrm{O}(z^{21})\right)\left(\frac{8}{z^6} + \frac{2}{z^4} + \frac{4}{15z^2} + \mathrm{O}(1)\right) = \frac{8}{z^3} + \frac{2}{z} + \frac{4z}{15} + \mathrm{O}(z^3),$$

mistä näemme, että funktion f singulaariosa on $\frac{8}{z^3} + \frac{2}{z}$ ja $\mathrm{Res}(0, f) = 2$.

3 Residylause ja sen sovelluksia

3.1 Residylause

Määritelmä 3.1. Olkoon U avoin joukko. Silmukka σ on *nollahomologinen* joukossa U, jos silmukan kierrosluku $n(\sigma, z) = 0$ kaikilla $z \notin U$.

Jatkossa merkinnällä $|\sigma|$ tarkoitamme kompaktia joukkoa $|\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \cdots \cup |\gamma_p|$.

Määritelmä 3.2. Olkoot U avoin joukko ja $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ funktiojonosta $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ muodostettu osasumma. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee normaalisti* joukossa U, jos funktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti jokaisessa joukon U kompaktissa osajoukossa.

Lause 3.1 (Residylause)**.** *Olkoon funktio f holomorfinen avoimessa joukossa U paitsi eristetyissä erikoispisteissä. Olkoot σ silmukka joukossa $U \setminus E$ ja nollahomologinen joukossa U. Tällöin*

$$\int_{\sigma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in E} n(\sigma, z) \mathrm{Res}(z, f).$$

Todistus (Vrt. [8, s. 323-325])*.* Ensimmäiseksi todistamme, että joukossa E ehto $n(\sigma, z) \neq 0$ voi päteä vain äärellisellä määrällä pisteitä, vaikka joukossa E olisi ääretön määrä pisteitä. Teemme vastaoletuksen, että ehto $n(\sigma, z) \neq 0$ pätee äärettömän monella kompleksiluvulla z joukossa E.

Tällöin voimme muodostaa sellaisen lukujonon $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ joukossa E, että $n(\sigma, z_k) \neq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin mikään pisteistä z_k ei voi olla rajoittamattomassa joukossa $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$, joten $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ on rajoitettu lukujono. Siis lukujonolla $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ pitää olla vähintään yksi kasautumispiste kompleksitasossa. Olkoon se piste z_0, joka on myös joukon E kasautumispiste. Koska E on joukon U diskreetti osajoukko, niin $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$. Koska σ on nollahomologinen joukossa U saamme, että $n(\sigma, z_0) = 0$. Valitsemme nyt avoimen kiekon $B(z_0, r)$, joka ei leikkaa joukkoa $|\sigma|$. Tällöin $n(\sigma, z) = n(\sigma, z_0)$ kaikilla $z \in B(z_0, r)$. Toisaalta, koska lukujonon $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ kasautumispiste on z_0, voimme valita sellaisen $N \in \mathbb{N}$, että $z_N \in B(z_0, r)$. Tällöin $n(\sigma, z_N) \neq 0$, joka on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Olkoot $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ joukon E pisteitä, joilla $n(\sigma, \zeta) \neq 0$. Olkoon V avoin joukko, joka on saatu joukosta U poistamalla siitä kaikki joukon E pisteet, jotka eroavat pisteistä $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$. Täten σ on silmukka joukossa $V \setminus \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p\}$. Koska $\mathbb{C} \setminus V = (\mathbb{C} \setminus U) \cup \{z \in E \mid z \neq \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p\}$, niin $n(\sigma, z) = 0$ kaikilla $z \notin V$. Siis σ on nollahomologinen joukossa V.

Olkoon S_k funktion f singulaariosaa pisteessä ζ_k. Funktio S_k on holomorfinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_k\}$ ja funktiolla $f - S_k$ on poistuva erikoispiste pisteessä ζ_k. Näin ollen funktio $g = f - S_1 - S_2 - \cdots - S_p$ on holomorfinen joukossa V

paitsi poistuvissa erikoispisteissä $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$. Voimme poistaa nämä erikoispisteet, jolloin funktio g on holomorfinen koko joukossa V. Täten Cauchyn lauseen nojalla

$$0 = \int_\sigma g(z)dz = \int_\sigma f(z)dz - \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz,$$

josta

$$\int_\sigma f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz. \tag{3.1}$$

Jos $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-\zeta_0)^{-n}$ on funktion f singulaariosa mielivaltaisessa pisteessä $\zeta_0 \in E$, niin sarja S suppenee normaalisti joukossa $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$. Lisäksi se suppenee tasaisesti joukossa $|\sigma|$, jolloin voimme vaihtaa integraali- ja summamerkin paikkaa. Siis

$$\begin{aligned} \int_\sigma S(z)dz &= \int_\sigma \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-\zeta_0)^n} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\sigma \frac{dz}{(z-\zeta_0)^n} \\ &= a_{-1} \int_\sigma \frac{dz}{z-\zeta_0} = 2\pi i n(\sigma, \zeta_0) \mathrm{Res}(\zeta_0, f). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Kaavojen (3.1) ja (3.2) perusteella

$$\int_\sigma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} n(\sigma, \zeta_k)\mathrm{Res}(\zeta_k, f) = 2\pi i \sum_{z \in E} n(\sigma, z)\mathrm{Res}(z, f).$$

Seurauslause 3.1.1. *Olkoon funktio f holomorfinen avoimessa joukossa U paitsi eristetyissä erikoispisteissä. Olkoon γ sellainen Jordanin kaarimonikulmio joukossa $U \setminus E$, että Jordanin käyrän $|\gamma|$ rajoittama alue $G \subseteq U$. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Res}(z_n, f),$$

missä $z_1, z_2, \dots, z_p$ ovat joukon E alkioita, jotka kuuluvat alueeseen G.

Seuraavaksi todistamme Jordanin epäyhtälön. Tämä epäyhtälö on tarpeellinen apuväline mm. seuraavassa esimerkissä. Jordanin epäyhtälön todistus on yksinkertainen ja täten sivuutamme sen.

Lause 3.2 (Jordanin epäyhtälö)**.** *Jos $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, niin $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$.*

Todistus. Ks. [9, s. 224-225].

Esimerkki 3.1 [7, s. 200, teht. 4]**.** Todista *Fresnelin integraaleille*

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Laskemme integraalit integroimalla funktiota e^{-z^2} pitkin sulkeutuvaa tietä γ, jonka muodostavat origosta pisteisiin R ja $Re^{\frac{\pi i}{4}}$ piirretyt janat sekä näiden pisteiden välinen ympyrän $|z| = R$ kaari. Koska integrointipolku on suljettu, Cauchyn lauseen ja parametrisoinnin perusteella

$$\int_\gamma e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{i\theta} e^{iR^2 e^{2i\theta}} d\theta + \int_R^0 e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-t^2 e^{\frac{i\pi}{2}}} dt = 0. \tag{3.3}$$

Koska

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ja

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{i\theta} e^{iR^2 e^{2i\theta}} d\theta \right| &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{iR^2 e^{2i\theta}}\right| d\theta = R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{R^2(i\cos 2\theta - \sin 2\theta)}\right| d\theta \\ &= R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-4R^2\theta}{\pi}} d\theta \quad \text{(lause 3.2)} \\ &= \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right) \to 0, \text{ kun } R \to \infty,\end{aligned}$$

saamme kaavan (3.3) muotoon

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-t^2 e^{\frac{i\pi}{2}}} dt.$$

Edelleen

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-it^2} dt,$$

josta saamme Eulerin kaavaa soveltamalla

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i) = \int_0^\infty \cos t^2 dt - i \int_0^\infty \sin t^2 dt,$$

mistä väite seuraa.

Merkinnällä $K(z_0, r)$ tarkoitamme joukkoa $\{z : |z - z_0| = r\}$.

Lause 3.3. *Olkoon R muuttujien x ja y rationaalifunktio, jonka määrittelyjoukko sisältää ympyrän $K(0,1)$. Tällöin*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi \sum_{n=1}^{p} \text{Res}(z_n, f),$$

missä $f(z) = z^{-1}R[(z + z^{-1})/2, (z - z^{-1})/2i]$ ja pisteet $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ovat funktion f napoja avoimessa kiekossa $B(0,1)$.

Todistus (Vrt. [8, s. 329-330]). Funktio f on rationaalifunktio, jonka muuttujana on z. Funktiolla f on äärellinen määrä napoja tai poistuvia erikoispisteitä ja oletuksen perusteella sillä ei ole erikoispisteitä ympyrällä $K(0,1)$. Oletamme, että $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ovat funktion f napoja kiekossa $B(0,1)$. Koska funktion f jokaisella poistuvalla erikoispisteellä residy on nolla, seurauslauseen 3.1.1 nojalla saamme, että

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Res}(z_n, f).$$

Parametrisoimalla funktion f saamme, että

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} R[(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2, (e^{i\theta}-e^{-i\theta})/2i] ie^{i\theta} d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Siis

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = i\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Res}(z_n, f),$$

mistä väite seuraa.

Esimerkki 3.2 [6, s. 178, teht. 7.1.3.2]**.** Todista, että

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-c^2}},$$

jos $0 < c^2 < 1$.

Koska $\sin\theta = (z^2-1)/2iz$, lauseen 3.3 nojalla

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+c\frac{z^2-1}{2iz}} = \frac{2i}{cz^2+2iz-c}.$$

Funktion f nimittäjän nollakohdat ovat

$$z_1 = \frac{-i+i\sqrt{1-c^2}}{c} \quad \text{ja} \quad z_2 = \frac{-i-i\sqrt{1-c^2}}{c}.$$

Näistä $z_2 \notin B(0,1)$, jolloin lauseen 3.3 perusteella

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+c\sin\theta} = 2\pi \mathrm{Res}(z_1, f).$$

Koska

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(z_1, f) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{2i(z-z_1)}{cz^2+2iz-c} \\ &= \lim_{z\to z_1} \frac{2i}{2cz+2i} = \frac{i}{c\left(\frac{-i+i\sqrt{1-c^2}}{c}\right)+i} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}},\end{aligned}$$

niin
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Esimerkki 3.3 [8, s. 367, teht. 5.49.i]**.** Todista, että
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a + b\cos\theta} = 2\pi b^{-1}[1 - a(a^2 - b^2)^{-1/2}],$$
jos $0 < b < a$.

Koska $\cos\theta = (z^2+1)/2z$, niin
$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2+1}{bz^2 + 2az + b}.$$

Nimittäjän nollakohdat ovat:
$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{-a + (a^2 - b^2)^{1/2}}{b} \quad \text{ja} \quad z_3 = \frac{-a - (a^2 - b^2)^{1/2}}{b}.$$

Näistä $z_3 \notin B(0,1)$, joten lauseen 3.3 perusteella
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a + b\cos\theta} d\theta = 2\pi[\mathrm{Res}(z_1, f) + \mathrm{Res}(z_2, f)].$$

Koska
$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(z_1, f) &= \lim_{z \to z_1} z f(z) = \frac{z(z^2+1)}{bz^3 + 2az^2 + bz} \\ &= \lim_{z \to z_1} \frac{3z^2+1}{3bz^2 + 4az + b} = \frac{1}{b}\end{aligned}$$

ja
$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(z_2, f) &= \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to z_2} \frac{(z - z_2)(z^2+1)}{bz^3 + 2az^2 + bz} \\ &= \lim_{z \to z_2} \frac{3z^2 - 2z_2 z + 1}{3bz^2 + 4az + b} = \frac{-a}{b\sqrt{a^2 - b^2}},\end{aligned}$$

niin
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a + b\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{b}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right].$$

Esimerkki 3.4 [8, s. 268, teht. 5.49.v]**.** Todista, että
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{2\pi}{ab},$$
jos $a > 0$ ja $b > 0$.

Funktio

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\left[a^2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2 + b^2\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2\right]^{-1} = \frac{4z}{(a^2-b^2)z^4 + 2(a^2+b^2)z^2 + a^2 - b^2}.$$

Nimittäjän nollakohdat ovat:

$$z_1 = -i\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad z_2 = i\sqrt{\frac{a+b}{a-b}},$$
$$z_3 = -\sqrt{\frac{b-a}{a+b}} \quad \text{ja} \quad z_4 = \sqrt{\frac{b-a}{a+b}}.$$

Näistä $z_1, z_2 \notin B(0,1)$, joten lauseen 3.3 perusteella

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = 2\pi[\operatorname{Res}(z_3, f) + \operatorname{Res}(z_4)].$$

Koska

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(z_3, f) &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)f(z) = \lim_{z\to z_3}\frac{4z(z-z_3)}{(a^2-b^2)z^4 + 2(a^2+b^2)z^2 + a^2 - b^2} \\
&= \lim_{z\to z_3}\frac{8z - 4z_3}{4(a^2-b^2)z^3 + 4(a^2+b^2)z} = \frac{z_3}{(a^2-b^2)z_3^3 + (a^2+b^2)z_3} \\
&= \frac{1}{2ab} = \operatorname{Res}(z_4, f),
\end{aligned}$$

niin

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = 2\pi\left[\frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab}\right] = \frac{2\pi}{ab}.$$

Lause 3.4. *Jos $f(z) = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)/(b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m)$ on rationaalifunktio, missä $m \geq n+2$ ja nimittäjällä ei ole reaalisia nollakohtia, niin vakion $c \geq 0$ arvoilla*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{icx}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\operatorname{Res}[z_k, f(z)e^{icz}], \tag{3.4}$$

missä $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ovat funktion f napoja puolitasossa $H = \{z \mid \Im z > 0\}$. Lisäksi, jos funktion f kaikki kertoimet ovat reaalisia, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(cx)dx = \Re\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{p}\operatorname{Res}[z_k, f(z)e^{icz}]\right\} \tag{3.5}$$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(cx)dx = \Im\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{p}\operatorname{Res}[z_k, f(z)e^{icz}]\right\}. \tag{3.6}$$

Todistus (Vrt. [8, s. 331-333]). Koska $m \geq n+2$, itseisarvo $|z^2 f(z)|$ saa äärellisen raja-arvon L, kun $|z| \to \infty$. Näin ollen voimme valita sellaiset luvut $M > |L|$ ja $r_0 > 0$, että

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \tag{3.7}$$

kaikilla kompleksiluvuilla z, joilla $|z| \geq r_0$. Koska oletuksen perusteella funktiolla f ei ole nollakohtia reaaliakselilla ja itseisarvo $|f(z)|$ on äärellinen epäyhtälön (3.7) nojalla, epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{icx}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)e^{icx}dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)e^{icx}dx$$

on suppeneva.

Oletamme, että $r \geq r_0$. Tällöin epäyhtälön (3.7) perusteella avoimessa kiekossa $B(0,r)$ on funktion f kaikki navat. Määrittelemme seuraavaksi kaarimonikulmion $\gamma = \alpha + \beta$, missä $\alpha(t) = t$, kun $-r \leq t < r$ ja $\beta(t) = re^{it}$, kun $0 \leq t \leq \pi$. Nyt seurauslauseen 3.1.1 perusteella funktion f integraali pitkin kaarimonikulmiota γ on

$$\int_\gamma f(z)e^{icz}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}[z_k, f(z)e^{icz}]. \tag{3.8}$$

Voimme esittää kaavan (3.8) muodossa

$$\int_\gamma f(z)e^{icz}dz = \int_{-r}^{r} f(t)e^{ict}dt + \int_\beta f(z)e^{icz}dz.$$

Kun $r \to \infty$, niin

$$\int_{-r}^{r} f(t)e^{ict}dt \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ict}dt.$$

Tutkimme seuraavaksi, miten integraali $\int_\beta f(z)e^{icz}dz$ käyttäytyy. Jaamme tarkastelun kahteen osaan: $c > 0$ ja $c = 0$. Tarkastelemme ensin tapauksen $c > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\left|\int_\beta f(z)e^{icz}dz\right| &\leq \int_\beta |f(z)||e^{icz}||dz| \leq \int_\beta \frac{M}{|z|^2}e^{\Re(icz)}|dz| \qquad (3.7)\\
&= \int_0^\pi \frac{M}{r^2}e^{-cr\sin t}r\,dt = \frac{2M}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-cr\sin t}dt\\
&\leq \frac{2M}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2crt}{\pi}}dt \quad \text{(lause 3.2)}\\
&= \frac{M\pi(1-e^{-cr})}{cr^2} \to 0,
\end{aligned}$$

kun $r \to \infty$. Jos $c = 0$, niin

$$\left| \int_\beta f(z)dz \right| \leq \int_\beta |f(z)||dz| \leq \frac{M\pi}{r} \to 0,$$

kun $r \to \infty$. Näin ollen saamme, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ict}dt = 2\pi i \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Res}[z_k, f(z)e^{icz}].$$

Ottamalla reaali- ja imaginaariosat erilleen saamme kaavat (3.5) ja (3.6) todistetuksi.

Esimerkki 3.5 [8, s. 368, teht. 5.50.i]**.** Määritä epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx.$$

Merkitsemme

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + \pi^2)^2} \quad \text{ja} \quad c = 1$$

Funktiolla f on kaksinkertainen napa pisteessä $z = \pi i$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[\pi i, f(z)e^{iz}] &= \lim_{z \to \pi i} \frac{d}{dz}[(z - \pi i)^2 f(z)e^{iz}] = \lim_{z \to \pi i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - \pi i)^2 e^{iz}}{(z^2 + \pi^2)^2} \right] \\
&= \lim_{z \to \pi i} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z + \pi i)^2} \right] = \lim_{z \to \pi i} \frac{ie^{iz}(z + \pi i) - 2e^{iz}}{(z + \pi i)^3} \\
&= \frac{(\pi + 1)e^{-\pi}}{4i\pi^3},
\end{aligned}$$

joten lauseen 3.4 perusteella

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx = \frac{2\pi i(\pi + 1)e^{-\pi}}{4i\pi^3} = \frac{(\pi + 1)e^{-\pi}}{2\pi^2}.$$

Esimerkki 3.6. Määritä epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2 + 1} dx.$$

Integraalin voi määrittää yksinkertaisella arvoinnilla ja sinin parittomuuteen vetoamalla, mutta ratkaisemme nyt tämän integroinnin lauseen 3.4 avulla. Merkitsemme siis

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad \text{ja} \quad c = \pi.$$

Funktiolla f on yksinkertaiset navat pisteissä $z = i$ ja $z = -i$. Koska $-i \notin H$, tarvitsee meidän laskea vain $\operatorname{Res}[i, f(z)e^{i\pi z}]$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[i, f(z)e^{i\pi z}] &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z)e^{i\pi z} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{i\pi z}}{z^2+1}\\ &= \lim_{z\to i}\frac{(\pi + i\pi z + 1)e^{i\pi z}}{2z} = \frac{-ie^{-\pi}}{2}.\end{aligned}$$

Nyt lauseen 3.4 perusteella

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin \pi x}{x^2+1}dx = \Im\left[2\pi i\frac{-ie^{-\pi}}{2}\right] = 0.$$

Esimerkki 3.7 [8, s. 368, teht. 5.50.v]**.** Määritä epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos \pi x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}dx.$$

Merkitsemme

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2} \quad \text{ja} \quad c = \pi.$$

Funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä $z = i$ ja kaksinkertainen napa pisteessä $z = 2i$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[i, f(z)e^{i\pi z}] &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z)e^{i\pi z} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{i\pi z}}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\\ &= \lim_{z\to i}\frac{(\pi + \pi iz + 1)e^{i\pi z}}{2z(z^2+4)^2 + 4z(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{-ie^{-\pi}}{18}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[2i, f(z)e^{i\pi z}] &= \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}(z-2i)^2f(z)e^{i\pi z} = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{e^{i\pi z}}{(z^2+1)(z+2i)^2}\\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{e^{i\pi z}[\pi i(z^2+1)(z+2i) - 2(z^2+2iz+1)]}{(z^2+1)^2(z+2i)^3}\\ &= \frac{ie^{-2\pi}(11+6\pi)}{288}.\end{aligned}$$

Täten lauseen 3.4 nojalla

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+\pi^2)^2}dx &= 2\pi i\left[\frac{-ie^{-\pi}}{18} + \frac{ie^{-2\pi}(11+6\pi)}{288}\right]\\ &= \frac{\pi e^{-2\pi}(-11+16e^{\pi}-6\pi)}{144}.\end{aligned}$$

Määritelmä 3.3. Funktio f on *meromorfinen* avoimessa joukossa U, jos sillä on napoja tai poistuvia erikoispisteitä joukossa U.

Lause 3.5 (Argumentin periaate). *Oletetaan, että funktio f on meromorfinen avoimessa joukossa U. Olkoon γ sellainen Jordanin kaarimonikulmio joukossa U, että Jordanin käyrä $|\gamma|$ ei kulje funktion f minkään nollakohdan tai navan kautta. Olkoon $|\gamma|$ sellainen Jordanin käyrä, että sen rajoittama alue $G \subseteq U$. Tällöin*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = Z - P,$$

missä Z ja P tarkoittavat funktion f nollakohtien ja napojen lukumäärää alueessa G (kun kertaluvut on otettu huomioon).

Todistus (Vrt. [8, s. 340-341]). Oletuksien perusteella funktio f ei ole identtisesti nolla alueessa H, jolla $\overline{G} \subseteq H \subseteq U$. Näin ollen funktio $\frac{f'}{f}$ on meromorfinen alueessa H ja sen erikoispisteitä ovat funktion f nollakohdat ja navat. Oletamme ensin, että $z_0 \in H$ on funktion f m-kertainen nollakohta. Tällöin avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$ voimme esittää funktion f muodossa $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, missä funktio $g : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ on holomorfinen ja jolla ei ole nollakohtia. Näin ollen avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$ $f'(z) = m(z - z_0)^{m-1}g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$, jolloin

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

kun $z \in B'(z_0, r)$. Koska funktio $\frac{g'}{g}$ on holomorfinen kiekossa $B(z_0, r)$, funktiolla $\frac{f'}{f}$ on yksinkertainen napa pisteessä z_0 ja $\mathrm{Res}(z_0, f'/f) = m$. Vastaavasti, jos funktiolla f on m-kertainen napa pisteessä $z_0 \in H$, niin voimme esittää funktion f muodossa $f(z) = (z - z_0)^{-m}h(z)$, missä funktio. $h : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ on holomorfinen ja jolla ei ole nollakohtia. Tällöin

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{m}{z - z_0},$$

kun $z \in B'(z_0, r)$. Nyt funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä z_0 ja $\mathrm{Res}(z_0, f'/f) = -m$. Täten seurauslauseen 3.1.1 nojalla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Res}(z_n, f'/f),$$

missä $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ovat funktion f'/f navat alueessa G. Siis, jos funktion f nollakohdat ja navat ovat funktion f'/f napoja, niin funktion f'/f erikoispisteiden määrä alueessa G on $Z - P = \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Res}(z_n, f'/f)$.

3.2 Argumentin periaatteen sovelluksia

Esitimme aikaisemmin algebran peruslauseelle todistuksen nojautuen Picardin pieneen lauseeseen. Nyt esitämme algebran peruslauseelle toisen todistuksen käyttäen apuna argumentin periaatetta.

Lause 3.6 (Algebran peruslause). *Polynomifunktion* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$*, missä* $m \geq 1$ *ja* $a_0 \neq 0$*, nollakohtien kertalukujen summa on* m.

Todistus (Vrt. [7, s. 195-196]). Esitämme polynomin $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ muodossa

$$p(z) = a_0 z^m \{1 + f(z)\}, \tag{3.9}$$

missä

$$f(z) = \frac{a_1}{a_0 z} + \frac{a_2}{a_0 z^2} + \cdots + \frac{a_m}{a_0 z^m}.$$

Näin ollen $f(z) \to 0$, kun $z \to \infty$. Täten on olemassa sellainen $R > 0$, että $|f(z)| < 1$ kun $|z| \geq R$. Koska $p(z) \neq 0$ ympyrällä $K = K(0, R)$ ja sen ulkopuolella, on polynomifunktion $p(z)$ kaikki mahdolliset nollakohdat ympyrän K sisällä. Argumentin periaatteen perusteella polynomifunktion $p(z)$ nollakohtien kertalukujen summa 2π:llä kerrottuna $= \Delta_K \arg p(z)$, eli se lisäys, jonka $\arg p(z)$ saa, kun kompleksiluku z tekee kierroksen pitkin ympyrää K. Koska ympyrän K kierrosluku jokaisen nollakohdan suhteen on 1, yhtälön (3.9) perusteella

$$\begin{aligned} \Delta_K \arg p(z) &= \Delta_K \arg z^m + \Delta_K \arg\{1 + f(z)\} \\ &= 2\pi m + \Delta_K \arg\{1 + f(z)\}. \end{aligned}$$

Koska $|f(z)| < 1$, kun $|z| \geq R$, on olemassa piste $\zeta = 1 + f(z)$ ympyrässä $|\zeta - 1| < 1$. Kompleksiluvun z kuljettua kierroksen pitkin ympyrää K, kuvaa ζ sulkeutuvan käyrän ympyrässä $|\zeta - 1| < 1$, jonka argumentin lisäys on 2π:n monikerta. Toisaalta $\arg \zeta$ voidaan sulkea rajojen $\frac{-\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ välille. Tällöin sen lisäys on nolla, jolloin $\Delta_K \arg\{1 + f(z)\} = 0$ ja $\Delta_K \arg p(z) = 2\pi m$, josta väite seuraa.

Eugene Rouché (1832-1910) esitti seuraavan lauseen, joka tunnetaan kirjallisuudessa nimellä *Rouchén lause.* Sen avulla voimme saada tietoa holomorfisen funktion nollakohtien lukumäärästä, sijainnista ja olemassaolosta. Tämän pystymme tekemään vertailemalla funktioita $|f - g|$ ja $|f| + |g|$, missä funktio g on testifunktio, jonka nollakohtien sijainnit tiedämme sopivasti valitulla Jordanin käyrällä.

Lause 3.7 (Rouchén lause). *Olkoot* G *Jordanin kaarimonikulmion rajoittama alue ja funktiot* f *ja* g *holomorfisia jossain avoimessa joukossa, joka sisältää alueen* $\overline{G}$*. Olkoon epäyhtälö*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \tag{3.10}$$

voimassa kaikilla $z \in \partial G$*. Tällöin funktioilla* f *ja* g *on yhtä monta nollakohtaa alueessa* G *(kun kukin nollakohta lasketaan niin monta kertaa kuin sen kertaluku osoittaa).*

Todistus (Vrt. [8, s. 342]). Epäyhtälön (3.10) perusteella funktioilla f ja g ei voi olla nollakohtia Jordanin käyrällä $J = \partial G$. Muodostamme uuden funktion $h = \frac{f}{g}$. Funktio h on meromorfinen jossain avoimessa joukossa, joka sisältää $\overline{G}$:n ja Jordanin käyrä J ei käy funktion h minkään nollakohdan tai navan kautta. Jakamalla epäyhtälön (3.10) puolittain termillä $|g(z)|$ saamme

$$|1 - h(z)| < 1 + |h(z)| \tag{3.11}$$

kaikilla $z \in J$. Koska $|1 - h(z)| = 1 + |h(z)|$ pätee selvästi kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $h(z) \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$, epäyhtälön (3.11) nojalla $h(J) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Koska $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$ ja polku $\beta = h \circ \gamma$, missä γ on mikä tahansa Jordanin käyrä J, saamme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)dz}{g(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)dz}{h(z)} = n(\beta, 0) = 0. \tag{3.12}$$

Argumentin periaatteen ja oletusten nojalla yhtälöketjun (3.12) ensimmäinen lauseke on $Z_f - Z_g$, missä Z_f ja Z_g ovat funktioiden f ja g nollakohtien lukumäärä alueessa G. Näin ollen saamme $Z_f = Z_g$.

Seuraavasta lauseesta Palka [8] käyttää nimitystä *Branched Covering Principle*. Tämä nimitys ei ole vakiintunut matemaattisessa kirjallisuudessa, joten jätämme sen nimeämättä.

Lause 3.8. *Oletetaan, että funktio f on holomorfinen avoimessa joukossa U ja $z_0 \in U$. Oletetaan lisäksi, että funktio f saa arvon w_0 m-kertaisena pisteessä z_0. Olkoon $r > 0$ riittävän pieni luku, joka täyttää seuraavat ehdot:*

1. *Suljettu kiekko $\overline{B}(z_0, r) \subseteq U$.*
2. *Kaikilla $z \in \overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ pätee $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$.*

Olkoon $s = s(r) > 0$, missä $s = \min\{|f(z) - w_0| : z \in K(z_0, r)\}$. Tällöin $H = \{z \in B(z_0, r) \mid f(z) \in B(w_0, s)\}$ on alue ja kaikilla $w \in B'(w_0, s)$ joukko $E_w = \{z \in B(z_0, r) \mid f(z) = w\}$ sisältää alueen H m pistettä, joilla jokaisella funktio f saa arvon w yksinkertaisena.

Todistus (Vrt. [8, s. 344-346]). Oletuksen perusteella funktio f ei ole vakio alueessa $G \subseteq U$, jossa $z_0 \in G$. Täten f' ei ole identtisesti nolla alueessa G. Näin ollen diskreetin kuvauslauseen perusteella joukot $\{z \in G \mid f(z) = w_0\}$ ja $\{z \in G \mid f'(z) = 0\}$ ovat alueen G diskreettejä osajoukkoja. Valitsemme sellaisen $r > 0$, että $\overline{B}(z_0, r) \subseteq G$ ja ehdot $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$ täyttyvät kaikilla $z \in \overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Funktio f on jatkuva kiekossa $B(z_0, r)$ ja näin ollen joukko H on avoin.

Valitsemme mielivaltaisen kompleksiluvun $w \in B'(w_0, s)$. Sovellamme Rouchén lausetta funktioihin $g(z) = f(z) - w_0$ ja $h(z) = f(z) - w$ avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$. Tällöin

$$|g(z) - h(z)| = |f(z) - w_0 - (f(z) - w)| = |w - w_0| < s \leq |g(z)|$$

kaikilla $z \in K(z_0, r)$. Näin ollen funktioilla g ja h on yhtä monta nollakohtaa kiekossa $B(z_0, r)$ kertaluvut huomioonotettuina. Täten funktiolla g on m-kertainen nollakohta pisteessä z_0. Funktiolla h puolestaan on m kappaletta nollakohtia punkteeratussa kiekossa $B'(z_0, r)$, kun $w \neq w_0$. Koska $h'(z) = f'(z) \neq 0$, kun $z \in B'(z_0, r)$, funktion h nollakohdat ovat yksinkertaisia avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$. Toisin sanoen joukko $E_w = \{z \in B(z_0, r) \mid f(z) = w\}$ sisältää m pistettä, joilla jokaisella funktio f saa arvon w yksinkertaisena. Näin ollen $E_w \subseteq H$.

Todistamme seuraavaksi, että avoin joukko H on yhtenäinen. Valitsemme mielivaltaisen osa-alueen $V \subseteq H$. Näin ollen meidän tulee osoittaa, että $z_0 \in V$. Teemme vastaoletuksen, että $z_0 \notin V$. Määrittelemme funktion $k : \overline{V} \to \mathbb{C}$ siten, että $k(z) = [f(z) - w_0]/s$. Funktio k on jatkuva ja holomorfinen V:ssä. Lisäksi koska $z_0 \notin V$ ja $V \subseteq \overline{B}(z_0, r)$, funktiolla k ei ole nollakohtia V:ssä. Näin ollen joukon H määrittelyn perusteella $|k(z)| < 1$ kaikilla $z \in V$ ja funktion k jatkuvuuden nojalla $|k(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \overline{V}$. Koska $V \subseteq H$, niin $|k(z)| = 1$ kaikilla $z \in \partial V$. Täten funktio $\frac{1}{k}$ on jatkuva $\overline{V}$:ssä, holomorfinen V:ssä ja $|\frac{1}{k(z)}| = 1$ kaikilla $z \in \partial V$. Näin ollen maksimiperiaatteen nojalla $\frac{1}{|k(z)|} \leq 1$ kaikilla $z \in V$. Siis $|k(z)| \geq 1$ kaikilla $z \in V$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Lause 3.9 (Avoin kuvauslause)**.** *Jos funktio f on holomorfinen ja vakiofunktiosta eroava alueessa G, niin $f(G)$ on avoin ja se on alue.*

Todistus (Vrt. [8, s. 347]). Olkoon U alueen G avoin osajoukko. Tällöin meidän tulee todistaa, että joukko $f(U)$ on avoin.

Valitsemme mielivaltaisen pisteen $w_0 \in f(U)$. Siis $f(z_0) = w_0$, missä $z_0 \in U$. Lisäksi valitsemme sellaisen $r > 0$, että $\overline{B}(z_0, r) \subseteq U$. Oletusten nojalla $f(z) \neq w_0$ ja $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Lauseen 3.8 perusteella jokaisella $w \in B(w_0, s)$, missä $s = \min\{|f(z) - w_0| : z \in K(z_0, r)\}$, pätee $w \in f[B(z_0, r)] \subseteq f(U)$. Täten $f(U)$ on avoin joukko, mistä seuraa myös, että $f(G)$ on avoin joukko. Koska $f(G)$ on myös yhtenäinen, on se alue.

Lause 3.10. *Olkoon funktio f holomorfinen alueessa G. Jos funktio f on univalentti alueessa G, niin $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in G$.*

Todistus (Vrt. [8, s. 347-348]). Oletamme, että $f'(z_0) = 0$ jollain $z_0 \in G$ Koska funktio f on univalentti, se on vakiofunktiosta eroava. Näin ollen funktio f saa arvon w_0 m-kertaisena pisteessä z_0. Koska $f'(z_0) = 0$, kun $m \geq 2$, lauseen 3.8 perusteella millä tahansa riittävän lähellä olevalla kompleksiluvulla $w \neq w_0$ on vähintään kaksi alkukuvaa alueessa G. Tämä on ristiriidassa funktion f univalenttisuuden kanssa, joten $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in G$.

Lause 3.11. *Olkoon funktio f holomorfinen alueessa G. Jos piste $z_0 \in G$ on sellainen, että $f'(z_0) \neq 0$, niin on olemassa G:n osa-alue H, missä funktio f on univalentti ja $z_0 \in H$.*

Todistus (Vrt. [8, s. 348]). Koska $f'(z_0) \neq 0$, funktio f saa arvon $w_0 = f(z_0)$ yksinkertaisena pisteessä z_0. Näin ollen lauseen 3.8 perusteella, kun $U = G$, niin $z_0 \in H$ ja $f(H)$ on univalentti kuvaus kiekolle $B(w_0, s)$.

Lause 3.12 (Käänteisfunktiolause)**.** *Oletetaan, että G on alue ja funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on univalentti holomorfinen funktio. Tällöin käänteisfunktio $f^{-1} : f(G) \to G$ on holomorfinen.*

Todistus (Vrt. [8, s. 348]). Avoimen kuvauslauseen nojalla $G' = f(G)$ on alue. Todistamme ensimmäiseksi, että f^{-1} on jatkuva funktio. Oletamme, että $z_0 \in G'$ ja $w_0 = f^{-1}(z_0)$. Nyt jokaiselle $\epsilon > 0$ muodostamme sellaisen $\delta > 0$, että $f^{-1}[B(z_0, \delta)] \subseteq B(w_0, \epsilon)$. Merkitsemme, että $U = G \cap B(w_0, \epsilon)$. Tällöin joukko U on avoin ja $w_0 \in U$. Näin ollen avoimen kuvauslauseen nojalla $U' = f(U)$ on G':n avoin osajoukko ja $z_0 \in U'$. Täten $f^{-1}(U') = U$. Valitsemme sellaisen $\delta > 0$, että $B(z_0, \delta) \subseteq U'$. Tällöin $f^{-1}[B(z_0, \delta)] \subseteq U$. Siis $f^{-1}[B(z_0, \delta)] \subseteq B(w_0, \epsilon)$. Näin ollen funktio f^{-1} on jatkuva G':n jokaisessa pisteessä ja lauseen 2.5 perusteella f^{-1} on holomorfinen funktio.

Määritelmä 3.4. Funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee normaalisti* joukossa U kohti rajafunktiota f, jos $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on pisteittäin suppeneva kohti funktiota f joukossa U ja suppeneminen on tasaista jokaisessa joukon U kompaktissa osajoukossa.

Lause 3.13 (Hurwitzin lause)**.** *Oletetaan, että funktiojonossa $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jokainen funktio on holomorfinen ja ei sisällä nollakohtia alueessa G. Oletetaan lisäksi, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee normaalisti kohti rajafunktiota f alueessa G. Tällöin funktiolla f ei ole nollakohtia tai se on identtisesti nolla alueessa G.*

Todistus (Vrt. [8, s. 348-349]). Oletuksen nojalla funktio f on holomorfinen alueessa G. Jos $f(z_0) = 0$ jollain $z_0 \in G$, niin identtisyyslauseen perusteella $f(z) = 0$ kaikilla $z \in G$. Oletamme nyt, että z_0 on funktion f eristetty nollakohta (eli on olemassa sellainen pisteen z_0 ϵ-ympäristö, että $B'(z_0, \epsilon)$ ei sisällä funktion f nollakohtaa). Tällöin voimme valita sellaisen $r > 0$, että $\overline{B}(z_0, r) \subseteq G$ ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in K(z_0, r)$. Nyt $|f(z)|$ saavuttaa miniminsä ympyrällä $K(z_0, r)$. Merkitsemme, että $\epsilon = \min|f(z)|$. Koska $f_n \to f$ suppenee tasaisesti ympyräkehällä $K(z_0, r)$, on olemassa $n \in \mathbb{Z}_+$, jolla $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \leq |f(z)|$ kaikilla $z \in K(z_0, r)$. Rouchén lauseen perusteella funktioilla f_n ja f on yhtä monta nollakohtaa kiekossa $B(z_0, r)$. Näin ollen funktiolla f_n on vähintään yksi nollakohta kiekossa $B(z_0, r)$, joka ristiriidassa oletuksen kanssa.

Lause 3.14. *Oletetaan, että $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono holomorfisia ja univalentteja funktioita alueessa G. Oletetaan lisäksi, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee normaalisti kohti rajafunktiota f alueessa G. Tällöin funktio f on univalentti tai se on vakio alueessa G.*

Todistus (Vrt. [8, s. 349]). Oletuksen perusteella funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on holomorfinen. Oletamme nyt, että funktio f ei ole vakio. Valitsemme mielivaltaisen pisteen $z_0 \in G$. Määrittelemme funktiojonon $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ kaikilla $z \in G_0 = G \setminus \{z_0\}$. Koska funktio f_n on univalentti alueessa G, funktiolla g_n ei ole nollakohtia alueessa G_0. Koska $g_n \to g$ suppenee normaalisti alueessa G_0, niin $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Koska funktio g ei ole identtisesti nolla alueessa G_0, Hurwitzin lauseen perusteella funktiolla g ei ole nollakohtia aluessa G_0. Siis $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \neq z_0$. Näin ollen funktio f on univalentti.

3.3 Riemannin funktionaaliyhtälö

Lause 3.15. *Olkoon $f(z) = \pi \cot \pi z$. Tällöin funktion f osamurtokehitelmä on muotoa*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \tag{3.13}$$

Todistus (Vrt. [8, s. 484-486]). Yhtälön (3.13) puolet ovat meromofisia funktioita, joiden napoina ovat kaikki kokonaisluvut. Tarkastelemme nyt yhtälöä (3.13) kokonaisluvuista eroavilla kompleksiluvuilla. Valitsemme mielivaltaisen tällaisen kompleksiluvun z. Määrittelemme funktion

$$h(\zeta) = \frac{\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{1}{\zeta^2(\zeta - z)}. \tag{3.14}$$

Funktio h on meromorfinen, koska sillä on yksinkertainen napa pisteessä z. Näin ollen lauseen 2.13 perusteella

$$\mathrm{Res}(z, h) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

Lisäksi funktiolla h on yksinkertainen napa kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(n, h) = \lim_{\zeta \to n} (\zeta - n) h(\zeta) &= \lim_{\zeta \to n} \left[\frac{(\zeta - n)\pi \cot(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{\zeta - n}{\zeta^2(\zeta - z)} \right] \\
&= \lim_{\zeta \to n} \left[\frac{(\zeta - n)\pi \cot \pi(\zeta - n)}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{\zeta - n}{\zeta^2(\zeta - z)} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{n(n - z)} = \frac{1}{n(n - z)} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}$$

Origossa funktiolla h on poistuva erikoispiste. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ sellainen, että $N > |z|$ ja alue

$$Q_N = \{z : |x| \leq N + (1/2),\ |y| = N + (1/2)\}.$$

Näin ollen residylausetta soveltamalla saamme, että

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_N} h(\zeta)d\zeta = \frac{\pi\cot(\pi z)}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\sum_{1\le|n|\le N}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right). \tag{3.15}$$

Osoitamme seuraavaksi, että $\int_{\partial Q_N} h(\zeta)d\zeta \to 0$, kun $N\to\infty$. Tällöin

$$\frac{\pi\cot(\pi z)}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\sum_{1\le|n|}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Todistamme ensin, että

$$|\cot(\pi\zeta)| \le m = \frac{1+e^{-3\pi}}{1-e^{-3\pi}} \tag{3.16}$$

kaikilla $\zeta\in\partial Q_N$. Koska $\zeta = N+\frac{1}{2}+it$, missä t on mielivaltainen reaaliluku, niin

$$\begin{aligned}|\cot(\pi\zeta)| &= |\cot(\pi N + 2^{-1}\pi + i\pi t)| = |\tan(2^{-1}\pi - (\pi N + 2^{-1}\pi + i\pi t))|\\ &= |\tan(-\pi N - i\pi t)| = |-\tan(\pi N + i\pi t)| = |\tan(i\pi t)|\\ &= \left|\frac{e^{-\pi t}-e^{\pi t}}{e^{-\pi t}+e^{\pi t}}\right| \le \frac{e^{-\pi t}+e^{\pi t}}{e^{-\pi t}+e^{\pi t}} = 1 < m.\end{aligned}$$

Vastaavasti, kun $\zeta = Ni + \frac{i}{2} + t$, niin

$$\begin{aligned}|\cot(\pi\zeta)| &= \left|\frac{e^{i\pi\zeta}+e^{i\pi\zeta}}{e^{i\pi\zeta}-e^{i\pi\zeta}}\right| = \left|\frac{e^{i2\pi\zeta}+1}{e^{i2\pi\zeta}-1}\right| \le \frac{1+|e^{i2\pi\zeta}|}{1-|e^{i2\pi\zeta}|}\\ &= \frac{1+e^{-(2N+1)\pi}}{1-e^{-(2N+1)\pi}} \le \frac{1+e^{-3\pi}}{1-e^{-3\pi}} = m.\end{aligned}$$

Koska $|\cot(\pi\zeta)| = |\cot(-\pi\zeta)|$, vastaavat rajat ovat voimassa alueen Q_N kahdella muulla sivulla. Näin ollen epäyhtälö (3.16) pätee. Koska $|\zeta|\ge N$, kun $\zeta\in\partial Q_N$, epäyhtälön (3.16) nojalla

$$|h(\zeta)| \le \frac{m\pi}{N(N-|z|)} + \frac{1}{N^2(N-|z|)} = \frac{m\pi N+1}{N^2(N-|z|)}$$

kaikilla halutunlaisilla kompleksiluvuilla ζ. Koska alueen Q_N piiri on $8N+4$, niin

$$\left|\int_{\partial Q_N} h(\zeta)d\zeta\right| \le \int_{\partial Q_N} |h(\zeta)||d\zeta| \le \frac{(8N+4)(m\pi N+1)}{N^2(N-|z|)} \to 0,$$

kun $N \to \infty$. Näin ollen saamme yhtälön (3.15) muotoon

$$\begin{aligned}
\pi \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{1 \le |n|} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.
\end{aligned}$$

Todistettuamme funktiolle $\pi \cot \pi z$ osamurtokehitelmän tulee luonnollisesti mieleemme, voisimmeko saada muillekin trigonometrisille funktiolle osamurtokehitelmän. Vastaus tähän on myönteinen, ja kahdessa seuraavassa lauseessa muodostamme funktioille $\pi \tan \pi z$ ja $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ osamurtokehitelmät.

Lause 3.16. *Olkoon $f(z) = \pi \tan \pi z$. Tällöin funktion f osamurtokehitelmä on muotoa*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{(n + \frac{1}{2})^2 - z^2}$$

Todistus (Vrt. [6, s. 216-217]). Koska $\pi \tan \pi z = -\pi \cot \pi(z + \frac{1}{2})$, voimme käyttää apuna lausetta 3.15 ja erityisesti sen todistuksen loppuosaa. Määrittelemme ensin lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ siten, että $a_0 = 0$ ja $a_n = \frac{1}{n}$, kun $n > 0$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\pi \tan \pi z &= -\pi \cot \pi (z + \frac{1}{2}) \\
&= -\left[\frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{z-n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{z+\frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n+\frac{1}{2}} - a_n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - (n+\frac{1}{2})^2} - a_n + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{(n+\frac{1}{2})^2 - z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Koska

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n - \frac{1}{n+1}\right) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -1+1 = 0,$$

saamme

$$\pi \tan \pi z = \frac{2z}{(n+\frac{1}{2})^2 - z^2}.$$

Lause 3.17. *Olkoon $f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. Tällöin funktion f osamurtokehitelmä on muotoa*

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2}.$$

Todistus (Vrt. [6, s. 217]). Sinin yhteenlaskukaavan nojalla $\sin \pi z + \sin 0 = 2 \sin \frac{\pi z}{2} \cos \frac{\pi z}{2}$. Koska $\cos^2 \frac{\pi z}{2} + \sin^2 \frac{\pi z}{2} = 1$, saamme lauseiden 3.15 ja 3.16 perusteella

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin \pi z} &= \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi z}{2} \cos \frac{\pi z}{2}} = \frac{\pi(\cos^2 \frac{\pi z}{2} + \sin^2 \frac{\pi z}{2})}{2 \sin \frac{\pi z}{2} \cos \frac{\pi z}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi \cot \frac{\pi z}{2} + \pi \tan \frac{\pi z}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2z}{z^2 - (2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{z} - \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2z}{z^2 - (2n+1)^2} \\
&= -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 3.5. *Eulerin gammafunktio* $\Gamma(z)$ on meromorfinen funktio, jonka yksinkertaiset navat ovat pisteissä $z = 0, -1, \ldots$. Määrittelemme gammafunktion kaavalla

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n},$$

missä $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ on *Eulerin vakio.* Lisäksi $\Gamma(1) = 1$.

Lause 3.18. *Jos $\Re z > 0$, niin*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Todistus. Ks. [4, s. 180-181].

Määritelmä 3.6. Määrittelemme *Riemannin ζ-funktio* määritellään sarjan

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$

summana niillä arvoilla z, joilla sarja suppenee. Näin on, kun $\Re z > 1$.

Lause 3.19. *Olkoon $\Re z > 1$. Tällöin*

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx.$$

Todistus. Ks. [7, s. 317-319].

Lause 3.20 (Riemannin funktionaaliyhtälö)**.** *Kaikilla $\Re s < 0$*

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{3.17}$$

Todistus (Vrt. [7, s. 322-327]). Olkoon $s > 1$ mielivaltainen reaaliluku. Olkoon alue $G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n + \frac{1}{2}, x = \Re z \geq a\}$, missä $0 < a < 1$. Merkitsemme alueen G_n reunaa merkinnällä γ_n. Olkoon $\pi f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z^s}$. Valitsemme funktion f haaran, joka on reaalinen positiivisella reaaliakselilla; se on yksikäsitteinen alueella G_n. Funktiolla f on alueella G_n navat pisteissä $1, 2, \ldots, n$. Täten $\operatorname{Res}(\nu, f) = \frac{1}{\nu^s}$ ja residylauseen perusteella

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma_n} f(z) dz = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^s}. \tag{3.18}$$

Yhtälön 3.18 vasemman puolen voimme esittää muodossa

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma_n} f(z) dz = \frac{1}{2i} \int_{K_n} f(z) dz + \frac{1}{2i} \int_{a+iy_n}^{a-iy_n} f(z) dz, \tag{3.19}$$

missä $a - iy_n$ ja $a + iy_n$ ovat ympyrän $|z| = n + \frac{1}{2}$ ja suoran $x = a$ leikkauspisteet. Lisäksi K_n on γ_n:n ympyränkaari. Osoitamme seuraavaksi, että

$$\frac{1}{2i} \int_{K_n} f(z) dz \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Koska $|\cot \pi z| \leq m$ jokaisella ympyrällä $|z| = n + \frac{1}{2}$, saamme

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2i} \int_{K_n} f(z) dz \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{K_n} |f(z)||dz| = \frac{1}{2} \int_{K_n} \left| \frac{\cot \pi z}{z^s} \right| |dz| \\
&< \frac{1}{2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{(n+\frac{1}{2})^s} (n + 1/2) d\theta = \frac{\pi m}{2(n+\frac{1}{2})^{s-1}} \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Yhtälön (3.19) viimeisen integraalin voimme esittää muodossa

$$(3.20) \qquad \frac{1}{2i}\int_{a+iy_n}^{a-iy_n} f(z)dz = -\frac{1}{2i}\int_a^{a+iy_n} f(z)dz + \frac{1}{2i}\int_a^{a-iy_n} f(z)dz.$$

Koska

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\cot \pi z}{2i} = -\frac{1}{2} \qquad \text{ja} \qquad \lim_{y\to-\infty}\frac{\cot \pi z}{2i} = \frac{1}{2},$$

sijoitamme yhtälön (3.20) oikean puolen ensimmäiseen integraaliin

$$\frac{\cot \pi z}{2i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1}$$

ja toiseen integraaliin

$$\frac{\cot \pi z}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i}\int_a^{a+iy_n} f(z)dz &= \int_a^{a+iy_n}\left(\frac{z^{-s}}{2} + \frac{z^{-s}}{e^{-2\pi i z}-1}\right)dz \\ &= \frac{a^{1-s}}{2(s-1)} + \frac{(a+iy_n)^{1-s}}{2(1-s)} + \int_a^{a+iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi i z}-1}dz. \end{aligned}$$

Kun $n \to \infty$, jolloin $y_n \to \infty$, niin $\frac{(a+iy_n)^{1-s}}{2(1-s)} \to 0$, koska $s > 1$. Täten

$$-\frac{1}{2i}\int_a^{a+iy_n} f(z)dz = \frac{a^{1-s}}{2(s-1)} + \int_a^{a+iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi i z}-1}dz + \frac{1}{n},$$

missä $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$. Vastaavalla tavalla saamme yhtälön (3.20) viimeiselle integraalille lausekkeen

$$\frac{1}{2i}\int_a^{a-iy_n} f(z)dz = \frac{a^{1-s}}{2(s-1)} + \int_a^{a-iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{2\pi i z}-1}dz + \frac{1}{n}.$$

Saadut lausekkeet yhdistämällä saamme yhtälölle (3.18) esityksen

$$(3.21) \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^s} = \frac{a^{1-s}}{s-1} + \int_a^{a+iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi i z}-1}dz + \int_a^{a-iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{2\pi i z}-1}dz.$$

Yhtälössä (3.21) molemmat integraalit suppenevat, koska

$$\begin{aligned} \left|\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi i z}-1}\right| &\le \frac{|z|^{-s}}{e^{2\pi y}-1} \text{ kun } y > 0, \\ \left|\frac{z^{-s}}{e^{2\pi i z}-1}\right| &\le \frac{|z|^{-s}}{e^{-2\pi y}-1} \text{ kun } y < 0, \end{aligned}$$

joten integraalit

$$\int_a^{a+i\infty} \frac{|z|^{-s}}{e^{2\pi y}-1}|dz| \text{ ja } \int_a^{a-i\infty} \frac{|z|^{-s}}{e^{-2\pi y}-1}|dz|$$

suppenevat. Koska $n \to \infty$, voimme esittää yhtälön (3.21) muodossa

$$\zeta(s) = \frac{a^{1-s}}{s-1} + \int_a^{a+i\infty} \frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}dz + \int_a^{a-i\infty} \frac{z^{-s}}{e^{2\pi iz}-1}dz. \tag{3.22}$$

Johdimme kaavan (3.22) oletuksella, että $s > 1$, mutta se pätee myös koko tasossa. Kaavan (3.22) oikean puolen ensimmäinen termi on funktio, jonka ainoa napa on $s = 1$, ja molemmat integraalit ovat *säännöllisiä* eli holomorfisia lukuunottamatta eräitä erikoispisteitä G_n:ssä. Näin ollen kaava on voimassa kaikilla muuttujan s arvoilla.

Oletamme seuraavaksi, että $-1 < s < 0$ ja $a \to 0$. Tällöin $\frac{a^{1-s}}{s-1} \to 0$. Osoitamme nyt, että integraali $\int_a^{a+i\infty} \frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}dz$ suppenee tasaisesti välillä $0 \leq a \leq \varsigma$, missä $0 < \varsigma < 1$. Arvioimalla riittävän pienillä $|z|$:n arvoilla saamme

$$\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1} = \frac{iz^{-s-1}(1+z)}{2\pi},$$

jolloin on olemassa sellainen ympyrä $|z| \leq 2\varsigma$, missä $|1+z| < 2\pi$. Näin ollen

$$\left|\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}\right| \leq |z|^{-s-1} \leq |y|^{-s-1}.$$

Koska integraali $\int_0^1 y^{-s-1}dy$ suppenee, suppenee integraali $\int_a^{a+i\infty} \frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}dz$ tasaisesti ainakin, kun $0 \leq a \leq \varsigma$. Täten

$$\lim_{a\to 0} \int_a^{a+i\infty} \frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}dz = i\int_0^{\infty} \frac{y^{-s}e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{e^{2\pi y}-1}dy$$

ja vastaavasti

$$\lim_{a\to 0} \int_a^{a-i\infty} \frac{z^{-s}}{e^{2\pi iz}-1}dz = i\int_0^{-\infty} \frac{|y|^{-s}e^{\frac{i\pi s}{2}}}{e^{-2\pi y}-1}dy.$$

Nyt saamme kaavan (3.22) muotoon

$$\zeta(s) = ie^{-\frac{i\pi s}{2}} \int_0^{\infty} \frac{y^{-s}}{e^{2\pi y}-1}dy + ie^{\frac{i\pi s}{2}} \int_0^{-\infty} \frac{|y|^{-s}}{e^{-2\pi y}-1}dy. \tag{3.23}$$

Kaavassa (3.23) jälkimmäiseen integraaliin sijoitusta $y = -u$ soveltamalla, voimme yhdistää integraalit ja täten

$$\zeta(s) = 2\sin\frac{\pi s}{2} \int_0^{\infty} \frac{y^{-s}}{e^{2\pi y}-1}dy.$$

Kirjoittamalla $2\pi y = x$ saamme

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \int_0^\infty \frac{x^{-s}}{e^x - 1} dx. \tag{3.24}$$

Johdimme kaavan (3.24) oletuksella $-1 < s < 0$, mutta voimme johtaa sen koko puolitasoon $\Re s < 0$, sillä molemmat puolet ovat tässä puolitasossa säännöllisiä holomorfisia funktioita.

Olkoon s puolitasossa $\Re s < 0$. Tällöin $\Re(1-s) > 1$, joten lauseen 3.19 perusteella

$$\zeta(1-s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \frac{x^{-s}}{e^x - 1} dx. \tag{3.25}$$

Sijoittamalla kaavan (3.25) vasemman puoleisen lausekkeen kaavan (3.24) integraalin paikalle saamme

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \zeta(1-s)\Gamma(1-s).$$

Jos $\Re s > 1$, niin Riemannin ζ-funktio voidaan esittää muodossa

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-s}} \right),$$

missä $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono alkulukuja. Tätä tulosta sanotaan *Eulerin lauseeksi*. Sen todistus on yksinkertainen ja se löytyy esimerkiksi Nevanlinnan [7] kirjasta.

Eulerin lauseen seurauksena ζ-funktiolla ei ole nollakohtia puolitasossa $\Re s > 1$. Riemannin funktionaaliyhtälön perusteella ζ-funktion nollakohdat puolitasossa $\Re s < 0$ (eli parilliset negatiiviset kokonaisluvut) ovat triviaaleja. Täten kaikki ζ-funktion epätriviaalit nollakohdat sijaitsevat vyössä $0 \leq \Re s \leq 1$. Tästä pääsemmekin kuuluisaan *Riemannin hypoteesiin*, jonka mukaan kaikki ζ-funktion epätriviaalit nollakohdat sijaitsevat suoralla $\Re s = \frac{1}{2}$. Riemannin hypoteesia ei ole pystytty todistamaan oikeaksi tai vääräksi. Sitä on laskennallisesti tutkittu ja kaikki tähän mennessä löydetyt epätriviaalit nollakohdat ovat olleet kyseisellä suoralla. Riemannin hypoteesi on yksi niistä ongelmista, joiden ratkaisemisesta amerikkalainen Clay-instituutti on luvannut maksaa miljoona dollaria.

4 Historiaa

Tässä luvussa keskitymme kahteen kuuluisaan matemaatikkoon Augustin-Louis Cauchyyn ja Ernst Lindelöfiin. Seuraamme Cauchyn henkilöhistorian osalta Bellin [2] teosta ja matemaattisessa osuudessa Bellhosten [1] kirjaa. Ernst Lindelöfin tapauksessa seuraamme puolestaan Elfvingin [5] kirjaa.

4.1 Augustin-Louis Cauchy

1800-luvulla matematiikan luonne muuttui merkittävällä tavalla. Yksi aikakauden suurimmista nimistä oli Augustin-Louis Cauchy, joka syntyi Pariisissa 21.8.1789. Hänen isänsä Louis-François avioitui kaksi vuotta ennen vallankumousta Marie Madeleine Desestren kanssa. Louis-François oli varsin sivistynyt ja ammatiltaan tuomari. Lisäksi kumpikin vanhemmista oli hartaita katolisia. He saivat kuusi lasta, joista Augustin oli vanhin. Augustinin lapsuus oli rankka, sillä tuolloin oli meneillään Ranskan vallankumouksen verisin vaihe. Vallankumouksen takia perhe päätti muuttaa Arcueil'n kylään, missä heillä oli oma maapaikka. Siellä ollessaan isä huolehti lasten koulutuksesta. Hän kirjoitti jopa itse oppikirjat lapsilleen, joista useimmat olivat runomuodossa, minkä hän taitoi erinomaisesti.

Arcueil'n kylän vieressä olivat markiisi Laplacen ja kreivi Claude-Louis Bertholler'n maatilat. Matemaatikko Laplace oli seurallinen ja vieraili usein Cauchyn mökissä. Sen sijaan kemisti Bertholler pysytteli tiiviisti omalla maatilallaan. Maatilalla Laplace tapasi Augustinin, kirjojen ja papereiden parissa viihtyvän pojan, jossa hän näki ilmiömäisen matemaattisen lahjakkuuden. Augustinin ollessa yhdentoista vuoden ikäinen Louis-François valittiin senaatin sihteeriksi. Isän työhuone sijaitsi Luxembourgin palatsissa Pariisissa, josta Augustinkin sai nurkkauksen omaksi työhuoneekseen. Tuolloin hän tapasi usein kuuluisan matemaatikon Lagrangen, joka toimi Ecole Polytechniquen professorina. Lagrange kiinnostui pojasta ja Laplacen tavoin ennusti hänestä tulevan vielä suuri matemaatikko. Kaksi vuotta myöhemmin Augustin siirtyi Panthéonin oppikouluun, jossa hän menestyi erinomaisesti saaden palkintoja useissa aineissa, kuten kreikassa ja latinassa. Vuonna 1804 oppikoulusta päästyään Augustin opiskeli matematiikkaa hyvän opettajan johdolla kymmenen kuukauden ajan, jonka jälkeen hän pääsi opiskelemaan Ecole Polytechnique'iin.

Polytechniquesta hän siirtyi kahden vuoden opiskelun jälkeen insinöörikouluun. Siellä hän uurasti kolme vuotta saaden opintonsa päätökseen, jonka jälkeen hän lähti suorittamaan ensimmäistä työtehtäväänsä Cherbourgiin. Hänen matkatavaroidensa joukossa oli muun muassa Lagrangen kirja *Traité des fonctions analytiques*, joka oli käänteentekevä teos Cauchylle, sillä sen sisältämä puutteellinen kompleksianalyysi oli juuri se sykäys, mikä ajoi Cauchyn kompleksianalyysin saralla merkittäviin tuloksiin. Cauchy vietti kolme vuotta Cherbourgissa, missä kaiken työn ohella häneltä liikeni aikaa myös tutkimustyöhön. Hän kävi läpi kaikki matematiikan osa-alueet aina lukuteoriasta tähtitieteeseen keksien uusia tuloksia ja paikaten vanhoja. Vuoteen 1824 mennessä Cauchy oli herättänyt huomiota Ranskan matematiikkapiireissä monitahokkaita ja symmetrisiä funktioita koskevilla tutkimuksillaan. Esimerkiksi Cauchy ratkaisi Poinsot'n esittämän ongelman: onko muita säännöllisiä monitahokkaita olemassa kuin tunnetut 4, 6, 8, 12 ja 20-sivuiset monitahokkaat. Hänen vastauksensa tähän ongelmaan oli, että ei ole olemassa. Lisäksi hän yleisti Eulerin kaavan, jossa annetaan monitahokkaan särmien lukumäärän a, sivujen lukumäärän b ja kärkien lukumäärän c välille yhteys: $a + 2 = b + c$.

Cauchy aloitti tähän aikaan myös permutaatioiden teorian järjestelmällisen tutkimisen, joka myöhemmin johti äärellisten ryhmien teoriaan. Cauchyn kehittämää permutaatioryhmien teoriaa on myöhemmin pystytty hyödyntämään esimerkiksi modernissa atomiteoriassa ja eräs kvanttimekaniikan koulukunta uskoo, että permutaatioryhmien teoria muodostaa pätevän perustan spektriviivojen teorialle. Vuoden 1814 jälkeen Cauchyn tutkimusten painopiste siirtyi kompleksianalyysin saralle, jota käsittelemme myöhemmin yksityiskohtaisesti. Neljä vuotta myöhemmin kääntyi Cauchyn elämässä uusi sivu, sillä hän meni naimisiin Aloise de Buren kanssa. He elivät yhdessä miltei 40 vuotta ja saivat kaksi tytärtä. Kolme vuotta naimisiin menonsa jälkeen Cauchy kirjoitti Ecole Polytechnique'issä pitämänsä analyysia koskevat luennot julkaisemista varten. Näiden luentojen sisältö oli varsin merkittävä, sillä niissä Cauchy formalisoi määritelmät raja-arvosta, jatkuvuudesta sekä paljon siitä, mitä hän kirjoitti päättymättömien sarjojen suppenemisesta. Nämä määritelmät esiintyvät vieläkin hyvin kirjoitetuissa differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirjoissa.

Koska Cauchy oli erittäin tuottelias tutkimusten saralla, perusti hän oman aikakauskirjan *Exercises de Mathématiques*, joka ilmestyi ajanjaksona 1826-1830. Tätä seurasi vielä uusi sarja, joka kantoi nimeä *Exercises d'Analyse Mathématique et de Physique*. Näissä sarjoissa hän julkaisi selittäviä ja alkuperäisiä töitään puhtaan ja sovelletun matematiikan saralta. Vuoden 1830 vallankumous syöksi silloisen vallanpitäjän Kaarle X pois valtaistuimelta. Tämä tapahtuma ajoi Cauchyn vapaaehtoiseen maanpakoon, koska hän oli vannonut Kaarlelle uskollisuudenvalan, jota hän ei järkähtämättömän luonteensa takia voinut rikkoa. Näin ollen hän jätti perheensä Pariisiin ja suuntasi kohti Sveitsiä, missä hänen ajankulunaan olivat tieteelliset kokoukset ja tutkimustyö. Sveitsissä hän ei ehtinyt olla kauaa, vaan hänet kutsuttiin Torinoon matemaattisen fysiikan professoriksi. Hän ei ehtinyt työskennellä kauaa, sillä vallasta syösty Kaarle, palkitsi uskollisen kannattajansa uskomalla hänen huomaansa perillisensä, 13-vuotiaan Bordeaux'n herttuan kasvatuksen. Hammasta kiristellen Cauchy lupautui ottamaan vastuun kasvatuksesta ja seuraavat vuodet, aina vuoteen 1838 asti, hänen päähuolenaihensa oli Bordeaux'n herttua. Cauchyn Pariisiin jääneet ystävät olivat yrittäneet saada häntä palaamaan takaisin Pariisiin jo pitkän aikaa. Nyt se onnistui ja Cauchy palasi juurilleen päästen heti takaisin Tiedeakatemiaan töihin. Cauchy pystyi jälleen keskittymään puhtaasti matematiikkaan. Tämän huomasi selvästi hänen tutkimustensa määrästä, sillä Cauchy kirjoitti viimeisten 19 vuoden aikana yhteensä yli 500 tutkimusta kaikilta matematiikan aloilta, mekaniikasta, fysiikasta ja tähtitieteestä.

Augustin-Louis Cauchyn matemaattinen tuotanto sisältää kaikkiaan 789 tutkimusta, joista hyvin monet olivat erittäin laajoja. Häntä kritisoitiin pitkään ja ankarasti kuoleman jälkeen, mutta kritiikki kohdistui lähinnä hänen suureen tuotantoonsa ja esitystavan huolimattomuuteen. Negatiivisista kommenteista huolimatta, ei Cauchyn suurta osuutta modernin matematiikan kehityksessä voida sivuuttaa. Hänen kehittämänsä menetelmät eri matematiikan osa-alueilla ovat jättäneet lähtemättömän jäljen. Cauchy kuoli 23.5.1857 69-vuoden ikäisenä kuumeeseen, joka oli seuraus saamastaan keuhkokatarrista. Viimeisinä tunteina Cauchy keskusteli maatilallaan Pariisin arkkipiispan kanssa hyväntekeväisyystoiminnasta, joka oli ollut Cauchyn sydäntä lähellä läpi koko elämän. Cauchyn viimeiset sanat olivat osoitettu arkkipiispalle: ”Ihmiset häviävät, mutta heidän tekonsa säilyvät”.

Vuodesta 1814 lähtien Cauchy keskittyi täysin analyysin ja erityisesti kompleksianalyysin tutkimiseen, joiden parissa hän saavutti merkittäviä tuloksia. Ensimmäisenä kiinnostuksen kohteena Cauchylla oli kompleksinen integrointi pitkin umpinaista polkua. Cauchyn tavoitteena oli kehittää uusia keinoja määrättyjen integraalien laskemiseen, algebrallisten ja transsendentisten yhtälöiden nollakohtien määrittämiseen sekä tavallisten lineaaristen että osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

Ensimmäisen kompleksianalyysiä koskevan artikkelin *Sur les intégrales définies* Cauchy esitti vuonna 1814. Cauchy lähti liikkeelle artikkelissaan reaalifunktiosta $f(u)$, missä u oli jo itsessään kahden reaalimuuttujan x ja y funktio. Näin ollen Cauchy muodosti yhtälön

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]. \tag{4.1}$$

Täten Cauchy oletti, että f ja u olivat kompleksifunktioita, jotka voitiin kirjoittaa muodossa $u = M(x,y) + iN(x,y)$ ja $f(u) = P'(x,y) + iP''(x,y)$. Sijoittamalla nämä esitysmuodot yhtälöön (4.1) ja asettamalla

$$\begin{aligned} S &= P'\frac{\partial M}{\partial x} - P''\frac{\partial N}{\partial x}, \qquad & T &= P'\frac{\partial N}{\partial x} + P''\frac{\partial M}{\partial x}, \\ U &= P'\frac{\partial M}{\partial y} - P''\frac{\partial N}{\partial y}, \qquad & V &= P'\frac{\partial N}{\partial y} + P''\frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

Cauchy muodosti kompleksisen differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial S}{\partial y} + i\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x},$$

josta saatiin johdettua Cauchyn-Riemannin yhtälöt erikoistapauksessa, kun $M(x, y) = x$ ja $N(x, y) = y$. Muodostettuaan integraaliyhtälöt

$$\iint \frac{\partial S}{\partial y} dxdy = \iint \frac{\partial U}{\partial x} dxdy \quad \text{ja} \quad \iint \frac{\partial T}{\partial y} dxdy = \iint \frac{\partial V}{\partial x} dxdy \tag{4.2}$$

pitkin suorakulmiota $R = [x_0, X] \times [y_0, Y]$ Cauchy sai integrointijärjestystä vaihtamalla kaksi tärkeää yhtälöä

$$\int_{x_0}^{X} [S(x, Y) - S(x, y_0)]dx = \int_{y_0}^{Y} [U(X, y) - U(x_0, y)]dy \quad \text{ja} \tag{4.3}$$

$$\int_{x_0}^{X} [T(x, Y) - T(x, y_0)]dx = \int_{y_0}^{Y} [V(X, y) - V(x_0, y)]dy. \tag{4.4}$$

Yhtälöt vastaavat *Cauchyn integraalilausetta*, jota sovelletaan erilaisiin umpinaisiin polkuihin, jotka riippuivat u:n kuvauksesta. Cauchy oli olettanut tähän saakka, että integroidut funktiot olivat säännöllisiä integrointivälillä. Tästä oletuksesta hän nyt luopui ja näin ollen keskittyi tapauksiin, missä säännöllisyysoletus ei päde joissain tietyissä eristetyissä pisteissä. Tällöin yhtälössä (4.2) ei voi vaihtaa integrointijärjestystä. Näin ollen Cauchy esitti yleisen ongelman kaksoisintegraalin

$$\int_{a'}^{a''} \int_{b'}^{b''} \frac{\partial K}{\partial z}\, dxdz$$

määrittämisestä, kun $K = \phi(x, z)$ saa määrittelemättömän arvon pisteessä $(X, Z) \in [a', a''] \times [b', b'']$. Integroinnin lopputulos riippui siis integrointijärjestyksestä. Lopputulosten välille Cauchy määritti eron A, joka pystyttiin laskemaan erikoisintegraalin (Cauchy kutsui residylaskentaa ensin erikoisintegraalien teoriaksi) muodossa:

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \zeta \to 0}} \int_0^{\epsilon} \phi(X \pm \xi, Z \pm \zeta) d\zeta.$$

Tällaiset integraalit olivat aivan uudenlaisia tuon ajan analyysissä. Seuraavaksi Cauchy jatkoi yhtälön (4.2) integraalien tutkimista tapauksessa, kun $f = g/h$. Cauchy käsitteli sellaisia funktioita f, että se saa reaaliarvoja reaaliakselilla ja sillä on yksinkertaisia napoja $u_i = u(x_i, y_i)$ alueen $u(R)$ reunalla tai sisällä. Tällöin (4.3) integrointiyhtälöt eivät olleet voimassa. Näin ollen laskeakseen arvot A ja A' Cauchy vaihtoi funktioiden $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ensimmäisen asteen kehitelmät kahteen erikoisintegraaliin:

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \eta \to 0}} \int_0^{\epsilon} S(x_i \pm \xi, y_i \pm \eta) d\xi$$

ja

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \eta\to 0}} \int_0^{\epsilon} T(x_i \pm \xi, y_i \pm \eta) d\xi.$$

Tällä tavalla hän sai arvot $A = 2\mu\pi$ ja $A' = 2\lambda\pi$, missä

$$\mu = -\Im\left[\sum \frac{g(u_i)}{h'(u_i)}\right] \quad \text{ja} \quad \lambda = \Re\left[\sum \frac{g(u_i)}{h'(y_i)}\right],$$

jos kaikki u_i:t olivat alueen $u(R)$ sisällä. Saatu tulos oli ekvivalentti residylauseen kanssa, jota sovellettiin u:n kuvauksesta riippuviin umpinaisiin polkuihin. Jos jokin napa oli alueen $u(R)$ reunalla, niin A:n ja A':n arvot olivat tällöin $\mu\pi$ ja $\lambda\pi$. Artikkelin loppuosassa Cauchy käsitteli erikoisintegraalien sovelluksia. Cauchy muun muassa laski epäoleellisia integraaleja funktioista, joilla oli yksinkertaisia napoja puolitasossa $\Im z \geq 0$.

Seuraavien vuosien aikana Cauchy kehitti erikoisintegraalien teorian sovelluksia. Hän käytti sitä 1815 ilmestyneessä artikkelissa *Sur la théorie des ondes* muodostaessaan käänteiskaavat Fourier muunnoksille

$$F_1(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \phi_1(m) \cos am \, dm \;\text{ ja }\; F_2(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \phi_2(m) \sin am \, dm,$$

kun $a \geq 0$. Käänteiskaavoiksi tulivat

$$\phi_1(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos m\mu F_1(\mu) \, d\mu \;\text{ ja }\; \phi_2(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin m\mu F_2(\mu) \, d\mu.$$

Vuosina 1817-1821 Cauchyn tuotteliaisuus väheni merkittävästi, jolloin hän kirjoitti ainoastaan kuusi artikkelia. Vuonna 1819 Cauchy esitti Akatemialle artikkelin algebrallisten tai transsendenttisten yhtälöiden nollakohtien määrittämisestä integraalimuodossa. Hänen keinonsa perustui erikoisintegraalien teoriaan. Hän tutki funktiota $f(u)/uF(u)$, jolla on reaaliset yksinkertaiset navat pisteissä 0, a, a', a'' jne. välillä $[-1, 1]$ ja kompleksiset yksinkertaiset navat pisteissä $\alpha + i\beta$, $\alpha' + i\beta'$ jne. yksikköympyrän ylemmässä puoliskossa. Integroimalla funktiota pitkin puoliympyrän kaarta ja soveltaen residylausetta Cauchy sai

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \frac{f(\cos p + i \sin p)}{F(\cos p + i \sin p)} dp = i \int_{-1}^{1} \frac{f(r)}{rF(r)} dr \\
&+ \pi \left[\frac{f(0)}{F'(0)} + \frac{f(a)}{aF'(a)} + \frac{f(a')}{a'F'(a')} + \cdots\right] \\
&+ 2\pi \left[\frac{f(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta)F'(\alpha + i\beta)} + \frac{f(\alpha' + i\beta')}{(\alpha' + i\beta')F'(\alpha' + i\beta')} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Tämän työn siivittämänä Cauchy kirjoitti tärkeän artikkelin *Recherches sur les intégrales définies qui renferment des exponentielles imaginaires.* Siinä

Cauchy systemaattisesti sovelsi residylausetta integrointeihin pitkin kaaripolkuja. Samassa artikkelissa hän esitti n. derivaatalle integraaliesityksen

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inp} f(b+e^{ip})dp = \frac{\pi}{n!}\frac{d^n f(b)}{db^n},$$

Cauchyn integraalikaavan yksikköympyrän erikoistapauksessa

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f(e^{ip})}{1-ae^{ip}} + \frac{f(e^{-ip})}{1-ae^{-ip}}\right]dp = \pi f(a) \quad (a<1)$$

ja "keskiarvotuloksen"

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[f(e^{ip})+f(e^{-ip})]dp = \pi f(0).$$

Seuraavan tärkeän artikkelin *Calcul Infinitésimal* Cauchy aloitti tutkimalla reaalifunktiota $f(x)$, jolla on navat $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ välillä $[x', x'']$. Sitten hän määritteli integraalin $\int_{x'}^{x''} f(x)dx$ arvon summana

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{x'}^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^{x_1-\epsilon} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{m-1}+\epsilon}^{x''} f(x)dx.$$

Jos kyseessä oli integrointi $-\infty$:stä ∞:ään, niin integraalin arvo määriteltiin summana

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1/\epsilon}^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^{x_1-\epsilon} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{m-1}+\epsilon}^{1/\epsilon} f(x)dx.$$

Laskeakseen integraalin arvon, joka on usein määrittelemätön, on välttämätöntä lisätä erikoisintegraaleja, kuten

$$\lim \int_{-1/\epsilon}^{-1/\epsilon\mu} f(x)dx,\ \lim\left[\left(\int_{x_0+\epsilon}^{x_i-\epsilon\mu_i} f(x)dx + \int_{x_i+\epsilon\nu_i}^{x_i+\epsilon} f(x)dx\right)\right] \text{ ja } \lim\int_{1/\epsilon\nu}^{1/\epsilon} f(x)dx,$$

missä μ, μ_i, ν_i ja ν ovat mielivaltaisia positiivisia vakioita. Jos

$$\mathbf{f}^- = \lim_{x\to-\infty} xf(x),\ \mathbf{f}_i = \lim_{x\to x_i}(x-x_i)f(x) \text{ ja } \mathbf{f}^+ = \lim_{x\to\infty} = xf(x)$$

(Cauchy käytti residystä aluksi merkintää **f** yksinkertaisen navan tapauksessa) ovat olemassa ja äärellisiä, niin Cauchy johti kaavat

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\left(\int_{x_i-\epsilon}^{x_i-\epsilon\mu_i} f(x)dx + \int_{x_i+\epsilon\nu_i}^{x_i+\epsilon} f(x)dx\right)\right] = \mathbf{f}_i \log\frac{\mu_i}{\nu_i} \quad \text{ja}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1/\epsilon}^{-1/\epsilon\nu} f(x)dx = \mathbf{f}^- \log\mu \quad \text{ja} \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_{1/\epsilon\nu}^{1/\epsilon} f(x)dx = \mathbf{f}^+ \log\frac{1}{\nu}$$

käyttämällä integraalilaskennan väliarvolausetta

$$\int_{x_0}^{X} \phi(x)\chi(x)dx = \phi(\xi)\int_{x_0}^{X} \chi(x)dx \quad (x_0 \leq \xi < X,\ \phi \geq 0),$$

kun $\chi(x) = \frac{1}{x-x_i}$ ja $\chi(x) = \frac{1}{x}$. Esimerkiksi

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\epsilon}^{-\epsilon\mu} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon\nu}^{\epsilon} \frac{dx}{x} \right) = \log\left(\frac{\mu}{\nu}\right),$$

ja integraali $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$ on määrittämätön sillä se riippuu vakioista μ ja ν. Tämän jälkeen Cauchy tutki kahta kahden muuttujan reaalifunktiota $\phi(x,y)$ ja $\chi(x,y)$, joilla

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\chi(x,y)}{\partial y}. \tag{4.5}$$

Tällöin yhtälöstä

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial\chi(x,y)}{\partial y} dxdy$$

hän johti yhtälön

$$\int_{x_0}^{x} (\phi(x,Y) - \phi(x,y_0))dx = \int_{y_0}^{y} (\chi(X,y) - \chi(x_0,y))dy, \tag{4.6}$$

jonka voi samaistaa yhtälöiden (4.3) kanssa sillä oletuksella, että $\phi(x,y)$ ja $\chi(x,y)$ ovat äärellisiä ja jatkuvia suorakulmiossa R. Jos funktioilla $\phi(x,y)$ ja $\chi(x,y)$ on yksi napa $(a,b) \in R$, niin

$$\int_{x_0}^{x} (\phi(x,Y) - \phi(x,y_0))dx = \int_{y_0}^{y} (\chi(X,y) - \chi(x_0,y))dy - \Delta, \tag{4.7}$$

missä

$$\Delta = \lim_{k \to 0} \int_{y_0}^{Y} (\chi(a+k,y) - \chi(a-k,y))dy. \tag{4.8}$$

Cauchy sovelsi saatuja kaavoja kompleksifunktioihin ja hän esittikin seuraavanlaisen huomion: olkoon f kompleksifunktio ja u kahden reaalimuuttujan kompleksifunktio. Tällöin yhtälö (4.5) on voimassa, kun $\phi(x,y) = f(u)\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\chi(x,y) = f(u)\frac{\partial u}{\partial y}$. Tämän johdosta yhtälö (4.6) pätee, jos funktiot ovat rajoitettuja ja jatkuvia. Yhtälö (4.7) pätee puolestaan, jos funktioilla on yksi napa $u_0 = a + ib$ alueen $u(R)$ sisällä.

Esimerkiksi, jos funktio $f = \frac{g}{h}$ on sellainen, että g on jatkuva ja rajoitettu ja funktiolla h on yksinkertaisia napoja alueen $u(R)$ sisälllä, niin kaavan (4.8) nojalla $\Delta = 2\pi i(\lambda + i\mu)$, mikä vastaa residylauseen johdossa saatuja A:n ja A':n arvoja. Erikoistapauksessa $u(x,y) = x + iy$ saadaan, että

$$\int_{x_0}^{X} (f(x+iY) - f(x+iy_0))dx = i\int_{y_0}^{Y} (f(X+iy) - f(x_0+iy))dy - \Delta,$$

missä

$$\Delta = i\lim_{k\to 0}\int_{y_0}^{Y} (f(a+k+iy) - f(a-k+iy))dy. \tag{4.9}$$

Laskeakseen erikoisintegraalin Δ, Cauchy käytti sijoitusta $y = kz + b$ ja integraalilaskennan väliarvolausetta apunaan, jolloin hän sai johdettua kaavan

$$\Delta = 2\pi i\mathbf{f}, \tag{4.10}$$

missä

$$\mathbf{f} = \lim_{k\to 0} kf(u_0 + k). \tag{4.11}$$

Näin ollen residylause voitiin esittää muodossa

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} (f(x+iY) - f(x+iy_0))dx &= i\int_{y_0}^{Y} (f(X+iy) - f(x_0+iy))dy \\ &- 2\pi i(\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \cdots + \mathbf{f}_{m-1}),\end{aligned}$$

missä $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_{m-1}$ ovat yksinkertaisten napojen $u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}$ residyt alueen R sisällä.

Tähän mennessä Cauchy oli tutkinut residylausetta vain yksinkertaisten napojen tapauksessa, mutta vuonna 1823 tekemässään alahuomautuksessa artikkeliinsa, Cauchy esitti funktion f residylle kaavan moninkertaisten napojen tapauksessa. Siis

$$\mathrm{Res}(u_i, f) = \lim_{k\to 0}\frac{d^{p-1}}{dk^{p-1}}\frac{k^p f(u_i+k)}{(p-1)!}, \tag{4.12}$$

missä u_i on p-kertainen napa. Tämä tulos yleisti kaavan (4.11). Cauchy ei antanut tälle kaavalle todistusta, mutta myöhemmistä artikkeleista löydettiin seuraavat päätelmät. Ensinnäkin kaavassa (4.9) hän teki muuttujan vaihdoksen $y = b + kz$ erikoisintegraaliin Δ ja sitten kehitti yhtälöstä

$$\mathbf{f}[u_0 + k(1+iz)] = k^p(1+iz)^p f[u_0 + k(1+iz)]$$

$(p-1)$. asteen k:n suhteen, jolloin hän sai muodon

$$\mathbf{f}(u_0) + k(1+iz)\mathbf{f}'(u_0) + \cdots + \frac{k^{p-1}(1+iz)^{p-1}}{(p-1)!}\mathbf{f}^{(p-1)}(u_0) + \omega[u_0 + k(1+iz)].$$

Sijoittamalla tämän erikoisintegraaliin Δ jää jäljelle vain

$$\frac{\mathbf{f}^{(p-1)}(u_0)}{(p-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+z^i}+\frac{1}{-1+z^i}\right)dz.$$

Näin ollen hän sai todistettua residykaavan $\Delta = 2\pi i\mathbf{f}$, mutta sillä erolla, että

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f}^{(p-1)}(u_0)}{(p-1)!} = \lim_{k\to 0}\frac{d^{p-1}}{dk^{p-1}}\frac{k^p f(u_0+k)}{(p-1)!}.$$

Cauchy keskittyi nyt lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Hän kehitti keinon, jossa hän sovelsi erikoisintegraalien teoriaa. Se sisälsi mm. residylauseen soveltamista funktioon $\frac{F(\theta)}{(u-\theta)F'(\theta)}$, missä $F(\theta)$ on karakteristinen yhtälö. Juuri tässä yhteydessä Cauchy laajensi residylauseen koskemaan myös funktioita, joilla on moninkertaisia napoja. Vuoden 1823 lopussa Cauchyn kymmenen vuotta kestänyt erikoisintegraaleihin liittyvä teoria näytti olevan lopullisesti valmis, mutta kaksi vuotta myöhemmin hän keksi uusia, tärkeitä tuloksia residylauseeseen liittyen. Tuona vuonna tammikuun lopun ja helmikuun alun välissä hän kirjoitti kolme artikkelia, joissa hän tutki residylaskentaa ja kompleksifunktioiden käyräviivaista integrointia.

Ensimmäinen näistä kolmesta artikkelista oli *Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitesimal*. Tässä tutkimuksessa Cauchy ilmoitti uudesta matemaattisen analyysin osa-alueesta, jota hän kutsui residylaskennaksi. Ensimmäiseksi hän käsitteli funktion f derivoituvaa vakiotermiä säännöllisessä pisteessä u_0, joka voidaan käsittää termin $u - u_0$ kertoimeksi pisteen u_0 ympäristössä muodostetussa sarjakehitelmässä. Toiseksi hän käsitteli funktion f residyä m-kertaisessa navassa u_0, jonka hän määritteli funktion $\mathbf{f}(u) = (u-u_0)^m f(u)$ sarjakehitelmän termin $(u-u_0)^{m-1}$ kertoimena. Nämä asiat yhdistämällä hän sai residyksi $\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(u_0)}{(m-1)!}$ tai asettamalla $k = u - u_0$

$$\lim_{k\to 0}\frac{d^{m-1}}{dk^{m-1}}\frac{k^m f(u_0+k)}{(m-1)!}\frac{f^{(m-1)}(u_0)}{(m-1)}.$$

Residylaskenta ei kuitenkaan ollut puhdas uutuus, vaikka Cauchy sitä siksi julistikin, sillä hän oli jo vuonna 1823 kehittänyt tarpeelliset työkalut residyn laskemiseen. Kuitenkin tähän saakka residyjä oli laskettu erikoisintegraalien avulla, joten Cauchylla ei ollut tarvetta kehittää omaa erityistä terminologiaa ja merkintätapaa residyille. Toisessa tutkimuksessa *Nouveau mémoire sur le calcul des résidues et sur les intégrales définies* Cauchy pyrki laajentamaan residylaskentaa siten, että navan kertaluku olisi korvattu murtoluvulla. Loppujen lopuksi Cauchy luopui tästä ajatuksesta. Kolmannessa tutkimuksessaan *Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* Cauchy tutki määrättyjä integraaleja imaginaaristen rajojen kanssa. Tämä tutkimus oli tärkeä askel siirryttäessä erikoisintegraalien teoriasta pitkälle vietyihin meromorfisia funktioita koskeviin artikkeleihin 1850-luvulla.

Keskeinen keksintö Cauchylla oli siis kompleksisen integraalin määrittely ja käyttö. Aivan kuten *Calcul Infinitésimal* artikkelissaan vuonna 1823, Cauchy määritteli ensin integraalin

$$\int_{x_0+iy_0}^{x+iy} f(u)du$$

raja-arvona, kun väleillä $[x_0, X]$ ja $[y_0, Y]$ on mielivaltainen jako:

$$[(x_1 - x_0) + i(y_1 - y_0)]f(x_0 + iy_0) + [(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)]f(x_1 + iy_1) + \\ \cdots + [(X - x_{n-1}) + i(Y - y_{n-1})]f(x_{n-1} + iy_{n-1}),$$

missä $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq X$ ja $y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq Y$. Tämän jälkeen Cauchy esitti parametriesityksen $\phi(t) + i\chi(t)$ kaikille käyrille pisteestä $x_0 + iy_0$ pisteeseen $X + iY$. Tapauksessa, jossa funktio f on äärellinen ja jatkuva, Cauchy todisti integraalin arvon olevan riippumaton integrointipolusta pisteiden $x_0 + iy_0$ ja $X + iY$ välillä. Tätä seuraten Cauchy tutki tapausta, missä funktiolla f oli napoja kahden annetun polun rajoittamalla alueella. Tutkimuksensa alussa Cauchy käytti kehittämäänsä erikoisintegraalien teoriaa todistaakseen residylauseen kahdelle lähekkäin olevalle käyrälle. Myöhemmin hän yleisti tämän tuloksen kahdelle mielivaltaiselle käyrälle. Yleisestä residylauseesta Cauchy johti helposti aiemmat tuloksensa.

Vuonna 1826 Cauchy esitti ensimmäiset tuotoksensa *Exercises de Mathématiques* julkaisussa. Tätä varten Cauchy esitti erityisen merkintätavan residylle. Lisäksi Cauchy kutsui integraaliresidyksi funktion $f(u)$ residyjen summaa. Tätä hän sovelsi funktion f singulaariosan esitystavassa. Tärkeimpiä sovellusalueita residylauseelle olivat algebrallisten ja transsendentisten yhtälöiden ratkaiseminen sekä tavallisten differentiaaliyhtälöiden ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen. Tästä esimerkkinä on lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

ratkaiseminen. Yleisesti ottaen muut matemaatikot, lukuunottamatta venäläistä Mikhail Ostrogradskia, eivät olleet kiinnostuneita Cauchyn kehittämistä teorioista hänen omana aikanaan. Tämä ei suinkaan johtunut Cauchysta itsestään, vaan siitä, että muut matemaatikot pitivät hänen kehittämiään keinojaan turhan monimutkaisina. Vasta vuoden 1840 jälkeen Cauchyn teoria sai hyväksyntää Ranskan, Saksan ja Italian matemaatikkojen keskuudessa.

4.2 Ernst Lindelöf

Suomalaisten matemaatikkojen saavutukset kompleksianalyysin saralla ovat kiistatta suuria. Yksi merkittävimmistä suomalaisista matemaatikoista oli Ernst Lindelöf, joka syntyi vuonna 1870 Helsingissä. Hänen isänsä Lorenz Lindelöf toimi tuolloin matematiikan professorina Suomen Keisarillisessa Aleksanterin Yliopistossa (joka vuodesta 1919 lähtien tunnetaan Helsingin yliopistona). Ernst Lindelöf pääsi 17-vuotiaana ylioppilaaksi, jonka jälkeen hän siirtyi yliopistoon opiskelemaan matematiikkaa. Hän valmistui filosofian kandidaatiksi vuonna 1891 ja kaksi vuotta myöhemmin hän väitteli tohtoriksi.

Vuonna 1895 Ernst Lindelöf nimitettiin dosentiksi ja seitsemän vuotta myöhemmin apulaisprofessoriksi. Seuraavana vuonna hän pääsi professorin virkaan. Hänen tuloksekas työuransa kesti neljä vuosikymmentä ja hän siirtyi eläkkeelle vuonna 1938. Kahdeksan vuotta myöhemmin hän menehtyi. Ernst Lindelöf ei koskaan mennyt naimisiin ja suuren osan elämästään hän asui veljensä Uno Lindelöfin luona, joka toimi englannin kielen professorina samaisessa yliopistossa. Voidaan kiistämättä sanoa, että Ernst Lindelöf oli etupäässä tiedemies ja opettaja. Hänen tieteellisesti tuotteliaimmat vuotensa olivat 1890-1915, jonka jälkeen hän keskittyi opettamiseen ja oppikirjojen laatimiseen. Ernst Lindelöf toimi yhdessä Rolf Nevanlinnan kanssa ohjaajana maineikkaalle suomalaiselle matemaatikolle Lars Ahlforsille. Ahlfors todisti kauan ratkaisemattomana olleen *Denjoyn otaksuman* kokonaisille funktioille ja tästä saavutuksesta hän sai Fieldsin mitalin vuonna 1936 yhdessä amerikkalaisen Jesse Douglasin kanssa, joka puolestaan ratkaisi *Plateaun ongelman.* Fieldsin mitali jaettiin vuonna 1936 ensimmäisen kerran ja Lars Ahlfors on ainoa suomalainen tähän mennessä, joka on saanut kyseisen mitalin.

Tieteellisesti tuotteliaimpina vuosinaan Ernst Lindelöf vietti viisi pidempää ajanjaksoa ulkomailla: Tukholmassa 1890-91, Pariisissa 1893-94 ja 1898-99 sekä Göttingenissä vuosina 1901 ja 1905. Tukholmassa hänen yhdyshenkilönään oli Gösta Mittag-Leffler, joka seurasi Lorenz Lindelöfiä professorin virassa. Lindelöf kirjoitti ensimmäisen artikkelinsa *Sur l'intégration de l'équation différentielle de Kummer* vuonna 1890. Kummerin differentiaaliyhtälö on

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0,$$

jonka Gaussin esittämä hypergeometrinen sarja

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots, |x| < 1,$$

toteuttaa.

Kolme vuotta ensimmäisen artikkelinsa jälkeen Ernst esitti väitöskirjansa *Sur les systèmes et le calcul des invariants différentiels des groupes continus finis.* Se käsittelee transformaatioryhmien teoriaa, missä on mukana äärellinen määrä jatkuvia ryhmäparametreja. Tämä teoria yleisesti pohjautuu norjalaisen Sophus Lien (1842-1899) tuloksiin, jotka hän esitti kirjassaan *Theo-*

rie der Transformationsgruppen (1888). Keskeisin käsite Lien teoriassa on *invariantti*, johon Lindelöfkin tarttui väitöskirjassaan. Väitökirjassa Lindelöf lähinnä yksinkertaistaa keinoja, miten löytää annetun transformaatioryhmän differentoituvat invariantit.

Ensimmäisen Pariisin matkan aikana Lindelöf kiinostui Émile Picardin esittämistä olemassaolotodistuksista, jotka liittyivät differentiaaliyhtälöihin. Picardin tulokset perustuivat peräkkäisiin approksimointeihin, joiden avulla saatiin selville differentiaaliyhtälön ja -yhtälöryhmien ratkaisu. Lindelöf pystyi vähentämään todistuksissa vaadittavia säännöllisyysehtoja sekä laajentamaan ratkaisun määrittelyjoukkoa. Ensimmäisen tuloksen hän esitti *Comptes Rendus* (1894) julkaisussa, jota seurasi vielä samana vuonna laajennettu versio *Journal de Liouville* lehdessä.

Ernst Lindelöfillä oli ainutlaatuinen ominaisuus löytää periaatteita ja metodeja, jotka olivat yksinkertaisia ja tehokkaita. Näin tapahtui analyyttisen jatkamisen kohdalla. Tästä hyvänä esimerkkinä on hänen tutkimuksensa *Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques* vuodelta 1898. Oletetaan, että funktiolla $f(z)$ on tunnettu Taylor-kehitelmä origossa ja ympyrä C, missä tämä kehitelmä suppenee. Tällöin, jos haluamme laskea funktion f arvoja tehokkaasti lähellä ympyränkehää tai ympyrän ulkopuolella, niin pitää valita sellainen yhdesti yhtenäinen alue T, joka täyttää seuraavat ehdot: ensinnäkin alueen T tulee sisältää origo, toiseksi $f(z)$ pitää olla säännöllinen T:ssä ja kolmanneksi alue T pitää pystyä kuvaamaan konformisesti yksikkökiekolle.

Kokonaisten funktioiden teoria oli jo ollut ranskalaisten matemaatikkojen, kuten Picard, Poincaré, Hadamard ja Borel, keskuudessa suosittu aihe. Suomessa tämä osa-alue ei ollut nostanut päätään ennen Lindelöfin panostusta. Vuonna 1902 tehdyssä laajassa tutkimuksessa *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* Lindelöf teki perusteellisen tarkastelun em. matemaatikkojen teorioihin. Hän yksinkertaisti useita todistuksia ja lisäsi mukaan myös joitakin omia tuloksia. Esimerkiksi Poincaré, Hadamard ja Borel olivat saaneet tulokset, että on olemassa luku $\rho = \inf\{\sigma \mid \Sigma|\frac{1}{a_n}|^\sigma < \infty\}$, kun $p \leq \rho \leq p+1$, jolla $\log M(r) \sim r^\rho$, $|\frac{1}{a_n}| \sim n^{-1/\rho}$ ja $\sqrt[n]{|c_n|} \sim n^{-1/\rho}$. Tässä p tarkoittaa pienintä lukua, jolla Weierstrassin tuloesitys

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \cdot + \frac{1}{p}(\frac{z}{a_n})^p}$$

suppenee. Näistä tuloksista ensimmäistä Lindelöf paransi siten, että termin r^ρ asemesta oli $r^\rho(\log r)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu}$. Lindelöfin työ kokonaisten funktioiden saralla aloitti Suomessa uuden tutkimuskohteen: holomorfisten funktioiden arvojenjakautumisopin. Rolf Nevanlinna jatkoi Lindelöfin työtä ja hänen saavutuksensa tällä alueella kuuluvatkin kiistatta kansainvälisesti tunnetuimpiin, mitä suomalaiset matemaatikot ovat tehneet kautta aikojen.

Pariisissa ollessaan Ernst Lindelöf tutki ahkerasti kompleksianalyysiä ja erityisesti Cauchyn alkuperäisiä tuotoksia, jotka olivat pirstoutuneet yli 700 pieneen muistiinpanoon. Erityisesti Lindelöfiä kiinnosti Cauchyn yleiset tehokkaat työkalut, joilla voitiin laskea mm. sarjoja ja integraaleja. Näistä työkaluista kaikista tärkein oli residylause. Lindelöfin ensimmäinen kirjoitus tästä aihepiiristä oli *Quelques applications d'une formule sommatoire general* vuodelta 1902. Tässä kirjoituksessa Lindelöf johti puolisuunnikassäännön

$$\frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + \frac{1}{2}f(n) = \int_1^n f(x)dx + R_n$$

jäännöstermin residylauseen avulla. Residylauseen sovelluksina Lindelöf johti uusia esitysmuotoja *Bernoullin polynomeille* ja *Eulerin summakaavan jäännöstermille*. Eräs kiinnostava sovellus oli Taylor-kehitelmän avulla määritellyn funktion analyyttinen jatkaminen. Toinen merkittävä sovellus liittyi Riemannin ζ-funktioon, jonka summakaava mahdollistaa sen nollakohtien eristämisen vyöhön $0 < \Re z < 1$.

Vuoden 1902 tutkimusten myötä Lindelöf tunnustettiin maailmanlaajuisesti Cauchyn kompleksianalyysin asiantuntijaksi. Tästä johtuen Émile Borel pyysi häntä kirjoittamaan aiheesta monografian kokoelmaan *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, missä hänen itsensä lisäksi mukana oli maineikkaita matemaatikkoja, kuten Lebesque, Baire, Denjoy, Fréchet, Painlevé ym. Tämä monografia tunnetaan erinomaisena kirjana nimeltä *Calcul des résidus*, joka ilmestyi 1905.

Kirjassaan Lindelöf pyrki jäljittämään lukuisten kirjoitusten alkuperän ja näin ollen antamaan arvon tuloksista niiden keksijöille. Kirjan alussa Lindelöf esittelee perustuloksia kompleksianalyysistä ja residylauseen. Toinen luku käsittelee valikoiman residylauseen sovelluksia, kuten uuden todistuksen *Jensenin lauseelle*, analyyttiset kaavat *Bernoullin* ja *Eulerin luvuille* ja lukuisten integraalien määrittämisen, joista esimerkkinä $\int_0^\infty \frac{(\log z)^2}{1+z^2}dz = \frac{\pi^3}{8}$. Kolmas luku on laajennettu versio tutkimuksesta *Quelques applications d'une formulae sommatoire general*. Neljännessä luvussa Lindelöf esittää yhteyden Eulerin gammafunktiolle ja Riemannin ζ-funktiolle, ja viimeinen luku koskee analyyttistä jatkamista.

Bernhard Riemann (1826-1866) esitti väitöskirjassaan kuuluisan kuvauslauseensa: Olkoon G laajennetun kompleksitason yhdesti yhtenäinen alue, jolla on ainakin kaksi reunapistettä. Tällöin G on konformisesti ekvivalentti yksikkökiekon kanssa. Vuoden 1908 tienoilla kiinnostus kuvauslausetta kohtaan oli suuri Poincarén ja Koeben töiden myötä. Heidän työnsä keskittyivät osittain kuvauksen reunakäyttäytymisen tutkimiseen ja uusien keinojen kehittämiseen, joita tarvittaisiin Riemannin kuvauslauseen todistamisessa uudenlaisella tavalla. Kuvauksen reunakäyttäytyminen on erikoistapaus säännöllisen funktion käyttäytymisestä alueen reunalla, joka puolestaan on lähellä holomorfisten funktioiden käyttäytymisen tutkimista oleellisten erikoispisteiden ympäristössä sekä kokonaisten funktioiden teoriaa ja niiden arvojenjakautumisoppia, ja loppujen lopuksi Picardin lausetta. Nämä olivat Lindelöfin tutkimuskohteita vuodesta 1907 eteenpäin ja niistä hän kirjoitti monia tutkimuksia, joista esimerkkeinä *Mémoire sur certaines inégalités dans le théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (1908) ja *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (1915).

Lindelöf kehitti teoriaa lukuisien parannusten ja lisäysten kautta. Hänen suurin mielenkiintonsa keskittyi kuitenkin elegantteihin ja yhdenmukaisiin metodeihin. Näin ollen ei ole mitenkään erikoista, että hänen tutkimuksiensa otsikoissa ilmenee sana periaate hyvin usein. Esitämme seuraavaksi neljä Lindelöfin kehittämää periaatetta.

Vuonna 1908 kirjoitetun tutkimuksen lähtökohtana oli *Lindelöfin periaate*. Se on *Schwarzin lemman* yleistys, jonka mukaan jos $f(t)$ on säännöllinen ja $|f(t)| \leq 1$ pätee yksikköympyrässä ja jos $f(0) = 0$, niin $|f(t)| \leq |t|$ yksikköympyrällä. Lindelöfin yleistetty versio Schwarzin lemmasta on seuraavanlainen: Olkoot X ja Z yhdesti yhtenäisiä alueita x ja z-tasoilla. Olkoot c_λ ja γ_λ Greenin funktioiden sama-arvokäyriä alueilla X ja Z sekä x_0 ja z_0 ovat niiden mielivaltaisesti valittuja napoja. Lisäksi olkoot $z = f(x)$ säännöllinen X:ssä, $f(x) \in Z$ ja $f(x_0) = z_0$. Tällöin $f(x)$ kuvaa sama-arvokäyrän c_λ rajoittaman alueen γ_λ:n rajoittamalle alueelle kaikilla kertaluvuilla λ. Greenin funktio tarkoittaa funktiota, joka täyttää ehdot: Funktio $g(z, a)$ on harmoninen alueessa G lukuunottamatta pistettä $z = a$, jossa sillä on logaritminen napa: $g(z, a) = \log \frac{1}{|z-a|} + u(z, a)$, missä funktio $u(z, a)$ on G:ssä harmoninen. Lisäksi G:n reunalla Γ funktio $g(z, a)$ on jatkuva ja yhtäsuuri kuin 0.

Maksimiperiaatteen mukaan holomorfisen funktion itseisarvo $|f(x)|$ saavuttaa maksiminsa suljetun alueen reunalla. Avoimen alueen T tapauksessa funktion $f(x)$ ei välttämättä tarvitse olla määritelty reunalla C. Näin ollen tämä periaate voidaan esittää muodossa: Olkoon $\overline{f}(\xi) = \limsup_{x \in T, x \to \xi} |f(x)|$, kun $\xi \in C$. Tällöin, jos kaikilla $\xi \in C$ pätee $|\overline{f}(\xi)| \leq M$, niin $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in T$.

Edellisestä periaattesta saadaan hyödyllinen tulos heikentämällä sen oletuksia. Oletetaan $|\overline{f}(\xi)| \leq M$, kun $\xi \in C \setminus E$, missä E on reunalla olevien erikoispisteiden joukko. Oletetaan lisäksi, että säännöllinen "vaimennusfunktio" $\omega(x)$ on T:ssä olemassa ja $0 < |\omega(x)| \leq 1$. Lisäksi oletamme, että

$$\forall \sigma > 0 : \limsup_{x \in T, x \to \xi} |\omega^\sigma(x) f(x)| \leq M \qquad \text{kaikilla } \xi \in E.$$

Tällöin $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in T$. Tämä periaate tunnetaan kirjallisuudessa nimellä *Phragménin-Lindelöfin periaate*, ja se esitettiin artikkelissa *Sur l'extension d'un principe classic de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènés dans le voisinage d'un point singulier*, joka on vuodelta 1908. Lindelöf kehitti sen yhteistyössä ruotsalaisen matemaatikon E. Phragménin kanssa.

Oletetaan, että $|\overline{f}(\xi)| \leq M$ on voimassa koko reunalla C, kun $\overline{f}(\xi) \leq \sigma < M$ pätee reunan osalla γ. Lisäksi γ peittää reunasta korkeintaan $1/n$ sisäpisteestä $x_0 \in T$ katsottuna. Tällöin $|f(x_0)| \leq M^{(n-1)/n}\sigma^{1/n}$.

Lindelöf pystyi todistamaan työkalujensa avulla lukuisia tärkeitä tuloksia, jotka koskivat konformikuvauksia ja holomorfisen funktion käyttäytymistä krittisten pisteiden ympäristössä. Hän esitti yksinkertaisten menetelmien avulla todistuksen Picardin lauseelle. Lisäksi kolmen viimeisen periaatteen avulla Lindelöf osoitti, että yhdesti yhtenäisen alueen T kuvaus yksikköympyrälle pysyy bijektiivisenä ja jatkuvana reunalla C, kun se sisältää yhtenäisen polun. Tulos, joka kantaa nimeä *Phragménin-Lindelöfin lause*, käsittelee holomorfisen funktion käyttäytymistä kriittisten pisteiden lähettyvillä. Se juontaa em. artikkelista ja perustuu kolmantena esitettyyn periaatteeseen. Siinä oletetaan, että alueella T on reunapisteenä ∞ ja alue on kulman π/α levyinen. Lisäksi funktiolla $f(x)$ pätee $|\overline{f}(\xi)| \leq C$ T:n reunalla paitsi mahdollisesti äärettömyydessä. Tällöin joko $|f(x)| \leq C$ koko T:ssä tai $f(x)$ on vähintään astetta α, missä α vastaa aikaisemmin määriteltyä lukua ρ.

Analyyttisen lukuteorian alueella Lindelöf teki mielenkiintoisen artikkelin *Quelques remarques sur la croissance de la fonction* $\zeta(s)$, joka perustui Phragménin-Lindelöfin lauseeseen. Osoittaakseen Riemannin ζ-funktion kasvua imaginaariakselin suunnassa Lindelöf esitti reaalifunktion

$$\mu(\sigma) = \limsup_{|t|\to\infty} \frac{|\zeta(\sigma + it)|}{\log|t|}.$$

Lindelöf osoitti, että $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$, kun $\sigma < 0$ ja $\mu(\sigma) = 0$, kun $\sigma > 1$. Lisäksi hän osoitti, että $\mu(\sigma)$ on jatkuva ja alaspäin konveksi vyössä $0 < \Re z < 1$. Edelleen Lindelöf otaksui, että $\mu(\frac{1}{2}) = 0$ eli käyrä $t = \mu(\sigma)$ on itse asiassa murtoviiva. Matemaatikko Littlewood osoitti vuonna 1912, että Lindelöfin otaksuma on seuraus kuuluisasta Riemannin hypoteesista, jonka mukaan kaikki ζ-funktion triviaaleista nollakohdista (eli parillisista negatiivisista kokonaisluvuista) eroavat nollakohdat sijaitsevat suoralla $\sigma = \frac{1}{2}$.

Viitteet

[1] B. Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy: A Biography*, Springer-Verlag, 1991.

[2] E.T. Bell, *Matematiikan miehiä*, suom. Helka & Klaus Vala, Werner Söderström, 1963.

[3] R.P. Boas Jr., A proof of the fundamental theorem of algebra, *Amer. Math. Monthly* 42 (1935), 501-502.

[4] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*. 2nd ed, Springer-Verlag, 1978.

[5] G. Elfving, *The History of Mathematics in Finland 1828-1918*. Societas Scientiarum Fennica, 1981.

[6] T.O. Moore & E.H. Hadlock, *Complex Analysis*. 1st ed, World Scientific, 1991.

[7] R. Nevanlinna & V. Paatero, *Funktioteoria*. 1. painos, Otava, 1963.

[8] B. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*. 1st ed, Springer-Verlag, 1991.

[9] H.A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*. 2nd ed, Oxford, 2003.