TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Teppo Oittinen

Aritmeettisten funktioiden konvoluutioista

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Toukokuu 2007

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

OITTINEN, TEPPO: Aritmeettisten funktioiden konvoluutioista

Pro gradu -tutkielma, 39 s. + liitteitä 2 s.

Matematiikka

Toukokuu 2007

Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee aritmeettisten funktioiden konvoluutioita. Ensimmäisen luvun osassa yksi on määritelty K-konvoluutio ja hyödyllisiä funktioita. Osassa kaksi tutustutaan tutkielman perustana olevaan K-konvoluutioon ja sen eri ominaisuuksiin, joita ovat ykkösfunktio, multiplikatiivisuus, assosiatiivisuus, kommutatiivisuus ja käänteisfunktio. Osa kolme laajentaa K-konvoluutiota uusin määritelmin ja antaa sille säännöllisyyttä. Osissa neljä ja viisi näytetään yhteys säännöllisen aritmeettisen konvoluution ja joidenkin klassisten aritmeettisten funktioiden välillä, esimerkiksi Eulerin funktion ja Ramanujanin summan välillä. Toisessa luvussa määritellään binomikonvoluutio ja verrataan luvun yksi K-konvoluution todistuksia ja sen perusominaisuuksia binomikonvoluution vastaaviin ominaisuuksiin. Edelleen toisessa luvussa määritellään eksponentiaalinen generoiva funktio, joka on käytännöllinen työkalu tutkittaessa binomikonvoluutiota. Lisäksi tutustutaan käänteislauseeseen ja täydellisesti multiplikatiivisiin funktioihin. Liitteessä on kerrottu K-konvoluution historiasta. Päälähdeteoksina tutkielmassa ovat Paul J. McCarthyn kirja *Introduction to arithmetical functions* ja Pentti Haukkasen artikkeli *On a binomial convolution of arithmetical functions*.

Sisältö

Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee aritmeettisten funktioiden konvoluutioita. Lukijan oletetaan tuntevan algebran perusteet. Lisäksi tutustuminen Tampereen yliopiston lukuteorian kurssin osuuteen Dirichlet´n konvoluutiosta ja sen ominaisuuksista antaa hyvän lähtökohdan tutkielman ymmärtämiseen. Tästä on saatavilla kattava esitys Pentti Haukkasen luentomonisteessa ([14], s. 28).

Tutkielman ensimmäinen luku on jaettu viiteen osaan. Osassa yksi on määritelty K-konvoluutio ja hyödyllisiä funktioita. Osassa kaksi tutustutaan koko tutkielman perustana olevan K-konvoluution eri ominaisuuksiin, joita ovat ykkösfunktio, multiplikatiivisuus, assosiatiivisuus, kommutatiivisuus ja käänteisfunktio. Osa kolme laajentaa K-konvoluutiota uusin määritelmin ja antaa sille säännöllisyyttä. Osissa neljä ja viisi näytetään yhteys säännöllisen aritmeettisen konvoluution ja joidenkin klassisten aritmeettisten funktioiden välillä, esimerkiksi Eulerin funktion ja Ramanujanin summan välillä.

Toisessa luvussa määritellään binomikonvoluutio ja verrataan luvun yksi K-konvoluution todistuksia ja sen perusominaisuuksia binomikonvoluution vastaaviin ominaisuuksiin. Edelleen toisessa luvussa määritellään eksponentiaalinen generoiva funktio, joka on käytännöllinen työkalu tutkittaessa binomikonvoluutiota. Lisäksi tutustutaan käänteislauseeseen ja täydellisesti multiplikatiivisiin funktioihin.

Liitteessä 1 on kerrottu K-konvoluution historiasta päälähdeteoksen ja Pentti Haukkasen myöhemmän tutkimuksen mukaan. Historiaosuuden viitteet ovat aiheesta enemmän kiinnostuneille oiva lähdeluettelo. Liitteessä 2 on esitetty osa kirjoittajan omasta panoksesta. Päälähdeteoksina tutkielmassa ovat Paul J. McCarthyn kirja *Introduction to arithmetical functions* [16] ja Pentti Haukkasen artikkeli *On a binomial convolution of arithmetical functions* [12].

Haluaisin kiittää ohjaaja Pentti Haukkasta hyvästä aihevalinnasta ja ohjauksesta. Lisäksi suuri kiitos kuuluu Jussi Kankaalle hyvistä keskusteluista.

1 K-konvoluutiosta

1.1 Alustavia määritelmiä

Aloitamme määrittelemällä keskeisen käsitteen *K-konvoluutio*. Se tulee olemaan tutkielman jokaisen vaiheen perustana ja sen ominaisuudet ovat tutkimuksen pääaiheena. Sen lisäksi määrittelemme joukon hyödyllisiä funktioita, joita käytämme tulevissa tarkasteluissa.

Määritelmä 1.1. Kompleksiarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko on positiivisten kokonaislukujen joukko, on *aritmeettinen funktio*. ([14], s. 27)

Määritelmä 1.2. Olkoon $K(n,d)$ kompleksiarvoinen funktio, jossa (n,d) on järjestetty pari, n on positiivinen kokonaisluku ja d on luvun n tekijä. Silloin aritmeettisten funktioiden f ja g *K-konvoluutio* $f *_K g$ määritellään kaavalla

$$(f *_K g)(n) = \sum_{d|n} K(n,d) f(d) g(\frac{n}{d}), \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

([16], s. 149)

Jos $K(n,d) = 1$ kaikilla luvuilla n ja d, niin $f *_K g = f * g$, eli saamme funktioiden f ja g *Dirichlet´n konvoluution* $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$.

Määritelmä 1.3. *Eulerin funktio* ϕ määritellään niin, että $\phi(n)$ on sellaisten kokonaislukujen x lukumäärä, että $1 \leq x \leq n$ ja $(x,n) = 1$. ([16], s. 1)

Määritelmä 1.4. Aritmeettinen funktio δ määritellään kaavalla

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & jos\ n = 1, \\ 0, & jos\ n \neq 1. \end{cases}$$

([16], s. 4)

Määritelmä 1.5. Funktio ζ määritellään kaavalla

$$\zeta(n) = 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

([16], s. 2)

Määritelmä 1.6. *Möbiuksen funktio* μ määritellän funktion ζ käänteisfunktiona Dirichlet´n konvoluution suhteen. Siis

$$\mu = \zeta^{-1}.$$

([14], s. 31)

1.2 K-konvoluution ominaisuuksia

Nyt alamme tutkia K-konvoluution ominaisuuksia algebran avulla.

Lause 1.1. *Funktio δ on ykkösfunktio laskutoimituksen $*_K$ suhteen, jos ja vain jos*

$$K(n,n) = K(n,1) = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.1}$$

([16], s. 149)

Todistus. Oletetaan, että δ on ykkösfunktio laskutoimituksen $*_K$ suhteen. Siis $f *_K \delta = f$ ja $\delta *_K f = f$. Tällöin todistus seuraa suoraan määritelmistä 1.2 ja 1.4, sillä

$$f(n) = (f *_K \delta)(n) = \sum_{d|n} K(n,d) f(d) \delta(\frac{n}{d}).$$

Selvästi $\delta(\frac{n}{d}) = 0$ paitsi, jos $d = n$. Tällöin $f(n) = (f *_K \delta)(n) = K(n,n)f(n)$, koska tämä on voimassa kaikille aritmeettisille funktioille (esim. $f = \zeta$), niin $K(n,n) = 1$. Myös

$$f(n) = (\delta *_K f)(n) = \sum_{d|n} K(n,d) \delta(d) f(\frac{n}{d}).$$

Siis $f(n) = K(n,1)f(n)$, joten $K(n,1) = 1$.

Toisaalta on varmaa, että jos ehto (1.1) pätee, niin silloin $(f *_K \delta)(n) = K(n,n)f(n) = f(n)$ ja $(\delta *_K f)(n) = K(n,1)f(n) = f(n)$ kaikilla aritmeettisilla funktioilla f. $\square$

Määritelmä 1.7. Aritmeettista funktiota f kutsutaan *multiplikatiiviseksi funktioksi*, jos $f(1) = 1$ ja jos $f(mn) = f(m)f(n)$ aina, kun $(m,n) = 1$. ([14], s. 30)

Olkoon f multiplikatiivinen funktio. Jos n on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku ja jos $n = p_1^{\alpha_1} ... p_t^{\alpha_t}$, missä p_i on alkuluku, niin

$$f(n) = \prod_{i=1}^{t} f(p_i^{\alpha_i}).$$

Siten multiplikatiivinen funktio on kokonaan määritelty alkulukupotenssiensa mukaan.

Huomautus 1.1. Voidaan todistaa, että Möbiuksen funktio μ on sellainen multiplikatiivinen funktio, että

$$\mu(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & jos\ \alpha = 0, \\ -1, & jos\ \alpha = 1, \\ 0, & jos\ \alpha \geq 2. \end{cases}$$

([16], s. 5)

Lause 1.2. *Kahden multiplikatiivisen funktion f ja g K-konvoluutio $f *_K g$ on multiplikatiivinen, jos ja vain jos*

$$K(mn, de) = K(m, d)K(n, e) \tag{1.2}$$

kaikilla m, n, d ja e siten, että $d|m$, $e|n$ ja $(m, n) = 1$. ([16], s. 150)

Todistus. Jos ehto (1.2) pätee ja funktiot f ja g ovat multiplikatiivisia, niin silloin kaikilla luvuilla m ja n, joille $(m, n) = 1$,

$$\begin{aligned}(f *_K g)(mn) &= \sum_{d|mn} K(mn, d)f(d)g(\frac{mn}{d}) \\ &= \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} K(mn, d_1d_2)f(d_1d_2)g(\frac{mn}{d_1d_2}).\end{aligned}$$

Soveltamalla ehtoa (1.2) saamme, että

$$\begin{aligned}(f *_K g)(mn) &= \Big(\sum_{d_1|m} K(m, d_1)f(d_1)g(\frac{m}{d_1})\Big)\Big(\sum_{d_2|n} K(n, d_2)f(d_2)g(\frac{n}{d_2})\Big) \\ &= (f *_K g)(m)(f *_K g)(n).\end{aligned}$$

Siis $f *_K g$ on multiplikatiivinen.

Oletamme, että jos f ja g ovat multiplikatiivisia, niin $f *_K g$ on multiplikatiivinen. Oletamme sitten, että $(m, n) = 1$ ja $d|m$ sekä $e|n$, ja määrittelemme funktiot f ja g siten, että

$$f(N) = \begin{cases} 1, jos\ N|de, \\ 0,\ muulloin, \end{cases}$$

ja

$$g(N) = \begin{cases} 1, jos\ N|\frac{mn}{de}, \\ 0,\ muulloin, \end{cases}$$

aina, kun $N \in \mathbb{Z}^+$. Valitaan y ja z, siten että $(y,z)=1$. Nyt selvästi $f(1)=1$. Jos $f(yz)=1$, niin $yz|de$, eli $de=yzx$. Tällöin $y|de$ ja $z|de$. Siis $f(y)f(z)=1$. Jos taas $f(y)f(z)=1$, niin $y|de$ ja $z|de$. Tällöin $yz|de$, koska $(y,z)=1$, joten $f(yz)=1$. Jos $f(y)f(z)=0$, niin $y \not| de$ tai $z \not| de$, joten $yz \not| de$, siis $f(yz)=0$. Jos taas $f(yz)=0$, niin $f(y)f(z)=0$. Tämän todistamme kontrapositiolla siten, että jos $f(y)f(z)\neq 0$, niin $f(yz)\neq 0$. Tämä palautuu aiempaan todistukseen, jos $f(y)f(z)=1$, niin $f(yz)=1$. Nyt voimme todeta, että jos $f(y)f(z)=0$, niin $f(yz)=0$. Siis funktio f on multiplikatiivinen. Samaan tapaan voidaan osoittaa, että funktio g on multiplikatiivinen.

Oletetaan, että $(m,n)=1$. Tällöin

$$(f *_K g)(m)(f *_K g)(n) = \sum_{a|m} K(m,a)f(a)g(\frac{m}{a}) \sum_{b|n} K(n,b)f(b)g(\frac{n}{b}).$$

Nyt $f(a)=0$ ja $f(b)=0$, ellei $a|de$ ja $b|de$. Siis

$$\begin{aligned}(f *_K g)(m)(f *_K g)(n) =& \sum_{a|de} K(m,a)f(a)g(\frac{m}{a}) \sum_{b|de} K(n,b)f(b)g(\frac{n}{b}) \\ =& \sum_{\substack{a|de \\ b|de}} K(m,a)f(a)g(\frac{m}{a})K(n,b)f(b)g(\frac{n}{b}).\end{aligned}$$

Oletuksesta $(m,n)=1$ seuraa, että $(a,b)=1$ ja $(\frac{m}{a},\frac{n}{b})=1$. Tällöin funktioiden f ja g multiplikatiivisuudesta seuraa, että

$$(f *_K g)(m)(f *_K g)(n) = \sum_{\substack{a|de \\ b|de}} K(m,a)K(n,b)f(ab)g(\frac{mn}{ab}).$$

Nyt $f(ab)=0$, ellei $ab|de$ ja $g(\frac{mn}{ab})=0$, ellei $\frac{mn}{ab}|\frac{mn}{de}$. Toisin sanoen $de|ab$. Siis $ab|de$ ja $de|ab$, eli $ab=de$. Ja koska $(d,e)=1$, niin $a=d$ ja $b=e$. Siis

$$(f *_K g)(m)(f *_K g)(n) = K(m,d)K(n,e)f(de)g(\frac{mn}{de}).$$

Koska $f(de)=1$ ja $g(\frac{mn}{de})=1$, niin

$$(f *_K g)(m)(f *_K g)(n) = K(m,d)K(n,e).$$

Vastaavasti

$$(f *_K g)(mn) = \sum_{c|mn} K(mn,c)f(c)g(\frac{mn}{c}).$$

Koska $(m,n)=1$, niin $c=ab$, missä $a|m$ ja $b|n$. Siis

$$(f *_K g)(mn) = \sum_{a|m} \sum_{b|n} K(mn, ab) f(ab) g(\frac{mn}{ab}).$$

Nyt $f(ab)=0$, ellei $ab|de$. Koska $(d,e)=1$, niin voidaan kirjoittaa, että $f(ab)=0$ ellei $a|d$ ja $b|e$. Siis

$$(f *_K g)(mn) = \sum_{a|d} \sum_{b|e} K(mn, ab) f(ab) g(\frac{mn}{ab}).$$

Ja vastaavasti $g(\frac{mn}{ab})=0$, ellei $\frac{mn}{ab}|\frac{mn}{de}$. Toisin sanoen $de|ab$, eli $d|a$ ja $e|b$. Siis $a|d,\ b|e,\ d|a,\ e|b$, eli $a=d,\ b=e$. Näin ollen

$$(f *_K g)(mn) = K(mn, de) f(de) g(\frac{mn}{de}).$$

Koska $f(de)=1$ ja $g(\frac{mn}{de})=1$, niin

$$(f *_K g)(mn) = K(mn, de).$$

Multiplikatiivisuus tarkoittaa, että

$$(f *_K g)(m)(f *_K g)(n) = (f *_K g)(mn),$$

joten (1.2) pätee. □

Lause 1.3. *K-konvoluutio on assosiatiivinen, jos ja vain jos*

$$K(n,d)K(d,e) = K(n,e)K(\frac{n}{e}, \frac{d}{e}), \tag{1.3}$$

kaikilla luvuilla n, d ja e siten, että $d|n$ ja $e|d$. ([16], s. 152)

Todistus. Oletamme ensin, että ehto (1.3) pätee kaikilla luvulla n, d ja e. Silloin

$$\begin{aligned}((f *_K g) *_K h)(n) &= \sum_{dA=n} K(n,d)(f *_K g)(d) h(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{dA=n} K(n,d) \left\{ \sum_{eB=d} K(d,e) f(e) g(\frac{d}{e}) \right\} h(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{eBA=n} K(n, \frac{n}{A}) K(\frac{n}{A}, e) f(e) g(\frac{n/A}{e}) h(\frac{n}{n/A}).\end{aligned}$$

Nyt ehdosta (1.3) seuraa, että

$$
\begin{aligned}
((f *_K g) *_K h)(n) &= \sum_{eBA=n} K(n,e)K(\frac{n}{e}, \frac{n/A}{e})f(e)g(\frac{n/A}{e})h(A) \\
&= \sum_{eBA=n} K(n, \frac{n}{BA})K(BA, B)f(\frac{n}{BA})g(B)h(\frac{BA}{B}) \\
&= \sum_{eC=n} K(n, \frac{n}{C})f(\frac{n}{C}) \left\{ \sum_{BA=C} K(C,B)g(B)h(\frac{BA}{B}) \right\} \\
&= \sum_{eC=n} K(n, \frac{n}{C})f(\frac{n}{C})(g *_K h)(C) \\
&= \sum_{eC=n} K(n,e)f(e)(g *_K h)(\frac{n}{e}) \\
&= (f *_K (g *_K h))(n).
\end{aligned}
$$

Siis K-konvoluutio on assosiatiivinen.

Oletamme sitten, että K-konvoluutio on assosiatiivinen. Oletamme myös, että n on positiivinen kokonaisluku ja että $d|n$ ja $e|d$. Määrittelemme aritmeettiset funktiot f, g ja h siten, että

$$
f(N) = \begin{cases} 1, & jos\ N = e, \\ 0 & muulloin, \end{cases}
$$

$$
g(N) = \begin{cases} 1, & jos\ N = \dfrac{d}{e}, \\ 0 & muulloin, \end{cases}
$$

ja

$$
h(N) = \begin{cases} 1, & jos\ N = \dfrac{n}{d}, \\ 0 & muulloin, \end{cases}
$$

aina, kun $N \in \mathbb{Z}^+$. Silloin K-konvoluution määritelmän perusteella

$$
((f *_K g) *_K h)(n) = \sum_{a|n} K(n,a)(f *_K g)(a)h(\frac{n}{a}).
$$

Edelleen K-konvoluution määritelmän perusteella

$$
((f *_K g) *_K h)(n) = \sum_{a|n} K(n,a) \sum_{b|a} K(a,b)f(b)g(\frac{a}{b})h(\frac{n}{a}).
$$

Koska $f(b)=0$ jos $b \neq e$, niin

$$((f *_K g) *_K h)(n) = \sum_{a|n} K(n,a)K(a,e)f(e)g(\frac{a}{e})h(\frac{n}{a}).$$

Koska $g(\frac{n}{a})=0$ jos $\frac{a}{e} \neq \frac{d}{e}$, niin

$$((f *_K g) *_K h)(n) = K(n,d)K(d,e)f(e)g(\frac{d}{e})h(\frac{n}{d}).$$

Tässä $f(e)=1$, $g(\frac{d}{e})=1$ ja $h(\frac{n}{d})=1$, joten

$$((f *_K g) *_K h)(n) = K(n,d)K(d,e).$$

Samoin K-konvoluution määritelmän perusteella

$$(f *_K (g *_K h))(n) = \sum_{c|n} K(n,c)f(c)(g *_K h)(\frac{n}{c}).$$

Tällöin

$$(f *_K (g *_K h))(n) = \sum_{c|n} K(n,c)f(c) \sum_{x|\frac{n}{c}} K(\frac{n}{c},x)g(x)h(\frac{n/c}{x}).$$

Tällöin $g(x)=0$ ellei $x=\frac{d}{e}$. Siis

$$(f *_K (g *_K h))(n) = \sum_{c|n} K(n,c)f(c)K(\frac{n}{c},\frac{d}{e})g(\frac{d}{e})h(\frac{n/c}{d/e}).$$

Koska $f(c)=0$, ellei $c=e$, joten

$$(f *_K (g *_K h))(n) = K(n,e)f(e)K(\frac{n}{e},\frac{d}{e})g(\frac{d}{e})h(\frac{n/e}{d/e}).$$

Tässä $f(e)=1$, $g(\frac{d}{e})=1$ ja $h(\frac{n/e}{d/e})=1$, joten

$$(f *_K (g *_K h))(n) = K(n,e)K(\frac{n}{e},\frac{d}{e}).$$

Assosiatiivisuus tarkoittaa, että

$$((f *_K g) *_K h)(n) = (f *_K (g *_K h))(n),$$

joten ehto (1.3) on voimassa. □

Lause 1.4. *K-konvoluutio on kommutatiivinen, jos ja vain jos*

$$K(n,d) = K(n, \frac{n}{d}), \tag{1.4}$$

kaikilla n ja d siten, että $d|n$. ([16], s. 152)

Todistus. Oletamme ensin, että ehto (1.4) pätee kaikilla luvuilla n ja d, missä $d|n$. Silloin K-konvoluution määritelmän mukaan

$$(f *_K g)(n) = \sum_{dA=n} K(n,d)f(d)g(\frac{n}{d}).$$

Ehdosta (1.4) seuraa, että

$$\begin{aligned}
(f *_K g)(n) &= \sum_{dA=n} K(n, \frac{n}{d})f(d)g(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{dA=n} K(n, \frac{n}{n/A})g(\frac{n}{n/A})f(\frac{n}{A}) \\
&= \sum_{dA=n} K(n, A)g(A)f(\frac{n}{A}) \\
&= (g *_K f)(n).
\end{aligned}$$

Tällöin K-konvoluutio on kommutatiivinen.

Oletamme seuraavaksi, että K-konvoluutio on kommutatiivinen ja että $d|n$, missä d ja n ovat mielivaltaisia, mutta kiinteitä. Tällöin myös $\frac{n}{d}|n$. Määrittelemme funktiot f ja g siten, että

$$f(N) = \begin{cases} 1, jos\ N = d, \\ 0\ muulloin, \end{cases}$$

ja

$$g(N) = \begin{cases} 1, jos\ N = \frac{n}{d}, \\ 0\ muulloin, \end{cases}$$

aina, kun $N \in \mathbb{Z}^+$. K-konvoluution määritelmän perusteella

$$(f *_K g)(n) = \sum_{a|n} K(n,a)f(a)g(\frac{n}{a}),$$

joten funktioiden f ja g määritelmien mukaan

$$(f *_K g)(n) = K(n,d)f(d)g(\frac{n}{d}) = K(n,d) \cdot 1 \cdot 1 = K(n,d).$$

Samoin

$$(g *_K f)(n) = \sum_{b|n} K(n,b)g(b)f(\frac{n}{b}),$$

joten funktioiden f ja g määritelmien perusteella

$$(g *_K f)(n) = K(n, \frac{n}{d})g(\frac{n}{d})f(\frac{n}{n/d}) = K(n, \frac{n}{d}) \cdot 1 \cdot 1 = K(n, \frac{n}{d}).$$

Kommutatiivisuus tarkoittaa, että $(f *_K g)(n) = (g *_K f)(n)$, joten ehto (1.4) on voimassa. □

Määritelmä 1.8. Aritmeettisten funktioiden f ja g *summa* $f+g$ ja *tulo* fg määritellään aritmeettisiksi funktioiksi siten, että

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \quad \forall\ n$$

ja

$$(fg)(n) = f(n)g(n) \quad \forall\ n.$$

([16], s. 2)

Lause 1.5. *Kaikilla aritmeettisilla funktioilla f, g ja h,*

$$(f *_K (g+h))(n) = (f *_K g)(n) + (f *_K h)(n)$$

ja

$$((g+h) *_K f)(n) = (g *_K f)(n) + (h *_K f)(n).$$

([16], s. 153)

Todistus. Suoraan sijoittamalla saamme, että

$$\begin{aligned}
(f *_K (g+h))(n) &= \sum_{d|n} K(n,d)f(d)(g+h)(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n} K(n,d)f(d)\left(g(\frac{n}{d}) + h(\frac{n}{d})\right) \\
&= \sum_{d|n} K(n,d)f(d)g(\frac{n}{d}) + \sum_{d|n} K(n,d)f(d)h(\frac{n}{d}) \\
&= (f *_K g)(n) + (f *_K h)(n).
\end{aligned}$$

Vastaavasti voimme myös osoittaa toisenkin kohdan. □

Olemme nyt osoittaneet, että aritmeettisten funktioiden joukko on kommutatiivinen rengas yhteenlaskun ja K-konvoluution suhteen, että multiplikatiivisten funktioiden K-konvoluutio on multiplikatiivinen ja että δ-funktio on ykkösfunktio K-konvoluutiossa, jos ja vain jos ehdot (1.1) - (1.4) pätevät. Vertaamalla saatuja tuloksia algebraan voimme havaita, että funktiolla f on mahdollisesti käänteisfunktio. Oletamme nyt, että ehdot (1.1) - (1.4) pätevät ja tutustumme funktion f käänteisfunktioon ja sen ominaisuuksiin.

Lause 1.6. *Aritmeettisella funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} K-konvoluution suhteen, jos ja vain jos $f(1) \neq 0$. Käänteisfunktio f^{-1} saadaan rekursiivisesti kaavasta*

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

ja

$$f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} K(n,d) f(d) f^{-1}(\frac{n}{d}) \quad \textit{kaikilla } n > 1.$$

([16], s. 153)

Huomautus 1.2. Kirjassa on sellainen painovirhe, että termi $\frac{1}{f(1)}$ puuttuu.

Todistus. Oletetaan, että aritmeettisella funktiolla f on käänteisfunktio. Silloin $(f *_K f^{-1})(n) = \delta(n)$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}^+$. Siis erityisesti $(f *_K f^{-1})(1) = \delta(1)$. Koska

$$(f *_K f^{-1})(1) = \sum_{d|1} K(1,d) f(d) f^{-1}(\frac{1}{d}) = f(1) f^{-1}(1),$$

ja $\delta(1) = 1$, niin $f(1) f^{-1}(1) = 1$. Siis $f(1) \neq 0$.

Oletetaan sitten, että $f(1) \neq 0$. Olkoon g sellainen aritmeettinen funktio, että $g(1) = \frac{1}{f(1)}$ ja

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} K(n,d) f(d) g(\frac{n}{d}), \tag{1.5}$$

kun $n > 1$. Olkoon aluksi $n > 1$. Silloin

$$\begin{aligned} (f *_K g)(n) &= \sum_{d|n} K(n,d) f(d) g(\frac{n}{d}) \\ &= K(n,1) f(1) g(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} K(n,d) f(d) g(\frac{n}{d}). \end{aligned}$$

Kaavan (1.5) perusteella

$$\sum_{\substack{d|n \\ d>1}} K(n,d)f(d)g(\frac{n}{d}) = -f(1)g(n),$$

ja ehdon (1.1) mukaan $K(n,1) = 1$. Näin ollen

$$\begin{aligned}(f *_K g)(n) &= f(1)g(n) - f(1)g(n) \\ &= 0 \\ &= \delta(n).\end{aligned}$$

Olkoon sitten $n = 1$. Nyt

$$\begin{aligned}(f *_K g)(1) &= \sum_{d|1} K(1,d)f(1)g(\frac{1}{d}) \\ &= K(1,1)f(1)g(1).\end{aligned}$$

Koska $K(1,1) = 1$ ja $g(1) = \frac{1}{f(1)}$, niin

$$\begin{aligned}(f *_K g)(1) &= 1 \cdot f(1) \cdot \frac{1}{f(1)} \\ &= 1 \\ &= \delta(1).\end{aligned}$$

Olemme nyt todistaneet, että

$$(f *_K g)(n) = \delta(n), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Siis

$$f *_K g = \delta.$$

Kommutatiivisuuden nojalla myös $g *_K f = \delta$. Koska δ on ykkösfunktio K-konvoluution suhteen, niin funktio g on funktion f käänteisfunktio K-konvoluution suhteen. $\square$

Lause 1.7. *Jos f on multiplikatiivinen funktio, niin f^{-1} on multiplikatiivinen funktio.* ([16], s. 152)

Todistus. Oletetaan, että f on multiplikatiivinen. Silloin
$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1$. Jos $mn = 1$, niin

$$f^{-1}(mn) = f^{-1}(1) = 1 = f^{-1}(1)f^{-1}(1) = f^{-1}(m)f^{-1}(n).$$

Oletetaan, että $mn \neq 1$ ja että $f^{-1}(m'n') = f^{-1}(m')f^{-1}(n')$ aina, kun $(m', n') = 1$ ja $m'n' < mn$. Jos $m = 1$ tai $n = 1$, niin
$f^{-1}(mn) = f^{-1}(m)f^{-1}(n)$. Oletetaan, että $m \neq 1$ ja $n \neq 1$. Silloin lauseesta 1.6 seuraa, että

$$f^{-1}(mn) = -\sum_{\substack{de|mn \\ de>1}} K(mn, de)f(de)f^{-1}(\frac{mn}{de}).$$

Ehdon (1.2), funktion f multiplikatiivisuuden ja induktio-oletuksen perusteella

$$f^{-1}(mn) = -\sum_{\substack{d|m \\ e|n \\ de>1}} K(m, d)K(n, e)f(d)f(e)f^{-1}(\frac{m}{d})f^{-1}(\frac{n}{e}).$$

Järjestelemällä termejä uudelleen saamme, että

$$\begin{aligned} f^{-1}(mn) = &- K(m, 1)f(1)f^{-1}(m)\sum_{\substack{d=1 \\ e|n \\ e>1}} K(n, e)f(e)f^{-1}(\frac{n}{e}) \\ &- K(n, 1)f(1)f^{-1}(n)\sum_{\substack{d|m \\ e=1 \\ d>1}} K(m, d)f(d)f^{-1}(\frac{m}{d}) \\ &- \left(-\sum_{\substack{d|m \\ d>1}} K(m, d)f(d)f^{-1}(\frac{m}{d})\right)\left(-\sum_{\substack{e|n \\ e>1}} K(n, e)f(e)f^{-1}(\frac{n}{e})\right). \end{aligned}$$

Ehdon (1.1) ja lauseen 1.6 nojalla

$$\begin{aligned} f^{-1}(mn) =& f^{-1}(m)f^{-1}(n) + f^{-1}(n)f^{-1}(m) - f^{-1}(m)f^{-1}(n) \\ =& f^{-1}(m)f^{-1}(n). \end{aligned}$$

Siis jos f on multiplikatiivinen, niin f^{-1} on myös. $\square$

1.3 Säännöllisyyttä aritmeettisissa konvoluutioissa

Määritelmä 1.9. Luvun n tekijää d sanotaan luvun n *unitaaritekijäksi* (unitary divisor), jos $(d, \frac{n}{d}) = 1$. Jos d on luvun n unitaaritekijä, niin merkitään $d \| n$. ([14], s. 40.)

Osoittautuukin mielekkääksi tutkia funktion $K(n, d)$ käyttäytymistä unitaaritekijää apuna käyttäen. Olkoon siis kaikilla luvuilla n ja d siten, että $d|n$,

$$(1.6) \qquad K(n, d) = \begin{cases} 1, jos\ d|n \text{ ja } (d, \dfrac{n}{d}) = 1, \text{ eli } d\|n, \\ 0, muulloin. \end{cases}$$

Jatkamme nyt tarkasteluja tämän rajauksen pohjalta määritelmään 1.10 asti. ([16], s. 154)

Lause 1.8. *Jos f ja g ovat aritmeettisia funktioita, niin kaikilla luvuilla n*

$$(f *_K g)(n) = \sum_{d\|n} f(d)g(\frac{n}{d}),$$

kun K on kuten kaavassa (1.6). ([16], s. 154)

Todistus. Olkoot f ja g aritmeettisia funktioita. Silloin

$$(f *_K g)(n) = \sum_{d|n} K(n, d)f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{d\|n} f(d)g(\frac{n}{d}). \ \square$$

Tarkastelemme, että kaavan (1.6) funktio K toteuttaa aikaisemmat ehdot. Ehdon (1.1) tarkistaminen on helppoa, koska vaatimukset $(n, \frac{n}{n}) = 1$ ja $(1, \frac{n}{1}) = 1$ ovat lopulta samat. Samoin myös ehdon (1.4) toteutuminen on helppo tarkastella, koska ehdosta $(d, \frac{n}{d}) = 1$ seuraa suoraan, että $(\frac{n}{d}, \frac{n}{n/d}) = 1$ ja päinvastoin. Ehdon (1.2) tarkastelemiseen tarvitaan aritmetiikan peruslausetta. Todistaaksemme ehdon (1.3), meidän täytyy osoittaa, että kaikille luvuille n, d ja e, siten että $d|n$ ja $e|d$, ehdot (a) ja (b) ovat ekvivalentit, missä

$$(a) \qquad (d, \frac{n}{d}) = 1 \ ja \ (e, \frac{d}{e}) = 1,$$

$$(b) \qquad (e, \frac{n}{e}) = 1 \ ja \ (\frac{d}{e}, \frac{n/e}{d/e}) = 1.$$

Koska ehto (1.2) pätee, niin on riittävää todistaa ekvivalenssi vain tapauksessa, jossa $n = p^\alpha,\ d = p^\beta$ ja $e = p^\gamma$, missä p on alkuluku ja $0 \le \gamma \le \beta \le \alpha$. Tällöin väitteistämme saamme, että

$$(a') \qquad (\beta = \alpha \ tai \ \beta = 0) \ ja \ (\gamma = \beta \ tai \ \gamma = 0)$$

sekä

$$(b') \qquad (\gamma = \alpha \ tai \ \gamma = 0) \ ja \ (\beta = \alpha \ tai \ \beta = \gamma).$$

Logiikan laskusääntöjen perusteella ylläoleva on yhtäpitävää seuraavan kanssa

$$(a'') \quad (\beta = \alpha,\ \gamma = \beta)_1 \vee (\beta = \alpha,\ \gamma = 0)_2 \vee (\beta = 0,\ \gamma = \beta)_3 \vee (\beta = 0,\ \gamma = 0)_4$$

sekä

$$(b'') \quad (\gamma = \alpha,\ \beta = \alpha)_5 \vee (\gamma = \alpha,\ \beta = \gamma)_6 \vee (\gamma = 0,\ \beta = \alpha)_7 \vee (\gamma = 0,\ \beta = \gamma)_8,$$

missä alaindeksit ovat luettelointi indeksejä, joilla erotellaan lausekkeet toisistaan. Suora vertailu osoittaa, että

$$\begin{aligned}
(\beta = \alpha,\ \gamma = \beta)_1 &\Leftrightarrow (\gamma = \alpha,\ \beta = \alpha)_5,\\
(\beta = \alpha,\ \gamma = \beta)_1 &\Leftrightarrow (\gamma = \alpha,\ \beta = \gamma)_6,\\
(\beta = \alpha,\ \gamma = 0)_2 &\Leftrightarrow (\gamma = 0,\ \beta = \alpha)_7,\\
(\beta = 0,\ \gamma = \beta)_3 &\Leftrightarrow (\gamma = 0,\ \beta = \gamma)_8,\\
(\beta = 0,\ \gamma = 0)_4 &\Leftrightarrow (\gamma = 0,\ \beta = \gamma)_8.
\end{aligned}$$

Siis (a'') ja (b'') ovat yhtäpitävät.

Jatkamme siis samalla funktiolla K . Määritellään $\mu_K = \zeta^{-1}$. Silloin $\mu_K *_K \zeta = \delta$, eli

$$(1.7) \qquad \sum_{d \| n} \mu_K(d) = \begin{cases} 1, jos\ n = 1, \\ 0\ muulloin. \end{cases}$$

Jos p on alkuluku ja $\alpha = 0$, niin silloin $\mu_K(p^0) = \mu_K(1) = 1$. Jos p on alkuluku ja $\alpha > 0$, niin silloin $\mu_K(1) + \mu_K(p^\alpha) = 0$, toisin sanoen $\mu_K(p^\alpha) = -1$. Siksi K-konvolutio on tällä tietyllä funktiolla K, jota kutsutaan *unitaarikonvoluutioksi*, säännöllinen seuraavan määritelmän mielessä.

Määritelmä 1.10. K-konvoluutiota kutsutaan *säännölliseksi aritmeettiseksi konvoluutioksi* (regular), jos
a) ehdot (1.1) – (1.4) pätevät,
b) $K(n, d) = 0$ tai $K(n, d) = 1$ kaikilla n ja d siten, että $d|n$,
c) jos $\mu_K = \zeta^{-1}$, niin $\mu_K(p^\alpha) = 0$ tai $\mu_K(p^\alpha) = -1$ kaikilla alkuluvuilla p ja kaikilla $\alpha > 0$. ([16], s. 155)

Määritelmä 1.11. Olkoon K-konvoluutio säännöllinen aritmeettinen konvoluutio. Jokaisella luvulla n olkoon

$$A(n) = \{d : d|n \ ja \ K(n, d) = 1\}.$$

Silloin viittaamme säännölliseen aritmeettiseen konvoluutioon A, kirjoittaen sen alaindeksillä $*_A$ ja Möbiuksen funktioon μ_A. Jos f ja g ovat aritmeettisia funktioita, niin

$$(f *_A g)(n) = \sum_{d \in A(n)} f(d)g(\frac{n}{d}) \ kaikilla \ luvuilla \ n.$$

([16], s. 155)

Jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n valitsemme epätyhjän luvun n tekijöiden osajoukon $A(n)$. Silloin kaikilla luvuilla n ja d, joille $d|n$, olkoon

$$K(n, d) = \begin{cases} 1, \ jos \ d \in A(n), \\ 0, \ jos \ d \notin A(n). \end{cases} \tag{1.8}$$

Tällöin K-konvoluutio joko on säännöllinen aritmeettinen konvoluutio tai sitten se ei ole säännöllinen aritmeettinen konvoluutio.

Lause 1.9. *Ehdot* (1.1) – (1.4) *ovat yhtäpitäviä järjestyksessä ehtojen* (1.9) – (1.12) *kanssa.*

$$1, \ n \in A(n) \quad aina, \ kun \ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.9}$$

$$Jos \ (m, n) = 1, \ niin \ A(mn) = \{de : d \in A(m), \ e \in A(n)\}. \tag{1.10}$$

$$Väittämät \ 1') \ \ d \in A(n) \ ja \ e \in A(d) \ ja \tag{1.11}$$

$$2') \ \ e \in A(n) \ ja \ \frac{d}{e} \in A(\frac{n}{e}) \ ovat \ yhtäpitävät.$$

$$Jos \ d \in A(n), \ niin \ \frac{n}{d} \in A(n). \tag{1.12}$$

([16], s. 156)

Todistus. Osoitamme ensin, että (1.1) $\Leftrightarrow$ (1.9). Olkoon $K(n, n) = K(n, 1) = 1$, kaikilla luvuilla n. Silloin ehdon (1.8) mukaan $n,\ 1 \in A(n)$, kaikilla luvuilla n. Olkoon sitten $1,\ n \in A(n)$, kaikilla luvuilla n. Tällöin ehdon (1.8) mukaan $K(n, 1) = K(n, n) = 1$, kaikilla luvuilla n.

Toiseksi osoitamme, että (1.4) $\Leftrightarrow$ (1.12). Oletamme ensin, että $K(n, d) = K(n, \frac{n}{d})$, kaikilla luvuilla n ja d siten, että $d|n$. Silloin myös $\frac{n}{d}|n$, joten jos $d \in A(n)$, niin $\frac{n}{d} \in A(n)$. Oletamme sitten, että jos $d \in A(n)$, niin $\frac{n}{d} \in A(n)$ kaikilla luvuilla n. Silloin oletuksesta seuraa, että jos $K(n, d) = 1$, niin myös $K(n, \frac{n}{d}) = 1$ kaikilla luvuilla $d|n$. Siis $K(n, d) = K(n, \frac{n}{d})$.

Osoitamme sitten, että (1.3) $\Leftrightarrow$ (1.11). Olkoon $K(n, d)K(d, e) = K(n, e)K(\frac{n}{e}, \frac{d}{e})$ kaikilla luvuilla n, d ja e siten, että $d|n$ ja $e|d$. Tällöin myös $e|n$ ja $\frac{d}{e}|\frac{n}{d}$, joten jos $d \in A(n)$ ja $e \in A(d)$, niin $e \in A(n)$ ja $\frac{d}{e} \in A(\frac{n}{e})$. Samoin jos $e \in A(n)$ ja $\frac{d}{e} \in A(\frac{n}{e})$, niin $d \in A(n)$ ja $e \in A(d)$. Toinen suunta todistetaan vastaavasti.

Todistuksen ehtojen (1.2) ja (1.10) yhtäpitävyydestä sivuutamme, koska tarkastelu on saman tyylistä kuin edellä. $\square$

Lause 1.10. *Jos K-konvoluutio toteuttaa määritelmän 1.10 ehdot a) ja b), niin se toteuttaa ehdon c), jos ja vain jos jokaisella alkuluvulla p ja jokaisella $\alpha \geq 1$ on olemassa luvun α tekijä t siten, että*

$$A(p^{\alpha}) = \{\ 1,\ p^{t},\ p^{2t},\ \dots\ ,\ p^{\alpha}\ \}$$

ja

$$A(p^{ht}) = \{\ 1,\ p^{t},\ p^{2t},\ \dots\ ,\ p^{ht}\ \}\ \textit{kun}\ h = 1,\ \dots,\ \alpha/t.$$

([16], s. 156)

Todistus. Oletamme ensin, että K-konvoluutio toteuttaa ehdot a), b) ja c). Olkoon

$$A(p^{\alpha}) = \{1, p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \dots, p^{\alpha_k}\},\ \alpha_k = \alpha,$$

missä $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$. Olkoon $p^j \in A(p^{\alpha_1})$ jollakin luvulla j, joka $0 < j < \alpha_1$. Silloin ehdosta (1.11) seuraa, että kun $p^{\alpha_1} \in A(p^{\alpha})$ ja $p^j \in A(p^{\alpha_1})$, niin $p^j \in A(p^{\alpha})$, mutta tämä ei ole mahdollista, joten $A(p^{\alpha_1}) = \{1, p^{\alpha_1}\}$.

Koska $\mu_A = \zeta^{-1}$, niin $\mu_A(1) = 1$. Möbiuksen funktion ominaisuuksista seuraa, että $\mu_A(1) + \mu_A(p^{\alpha_1}) = 1 + \mu_A(p^{\alpha_1}) = 0$, toisin sanoen $\mu_A(p^{\alpha_1}) = -1$. Silloin

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \mu_A(p^{\alpha_1}) + \mu_A(p^{\alpha_2}) + \ldots + \mu_A(p^{\alpha_k}) \\ &= \mu_A(p^{\alpha_2}) + \ldots + \mu_A(p^{\alpha_k}), \end{aligned}$$

josta seuraa kohdan c) mukaan, että $\mu_A(p^{\alpha_i}) = 0$, kun $i = 2, \dots, k$. Valitkaamme siis, että $\alpha_1 = t$.

Jatkamme induktiolla osoittaen, että kun $h = 1, \ldots, k$ sekä $\alpha_h = ht$ ja $A(p^{ht}) = \{1, p, p^2, \ldots, p^{ht}\}$, niin $\alpha = kt$ ja

$$A(p^\alpha) = \{1, p^t, p^{2t}, \ldots, p^\alpha\}.$$

Oletamme nyt, että $h > 1$ ja että jos $j = 1, \ldots, h-1$, niin $\alpha_j = jt$ ja $A(p^{jt}) = \{1, p^t, p^{2t}, \ldots, p^{jt}\}$. Ehdon (1.11) mukaan $A(p^{\alpha_h})$ on joukon $\{1, p^t, \ldots, p^{(h-1)t}, p^{\alpha_h}\}$ osajoukko. Toisaalta, kun $p^t \in A(p^{\alpha_h})$, niin ehdon (1.12) nojalla, $p^{\alpha_h - t} \in A(p^{\alpha_h})$. Ja koska $\alpha_h > \alpha_h - t > (h-2)t$, niin $\alpha_h - t = (h-1)t$. Siis $\alpha_h = ht$ ja $p^{(h-1)t} \in A(p^{\alpha_h})$. Nyt olkoon $2 \leq i \leq h-2$. Jos $n = p^{ht}$, $d = p^{it}$ ja $e = p^t$, niin

$$\frac{d}{e} = p^{(i-1)t} \in A(p^{(h-1)t}) = A(\frac{n}{e}) \quad \text{ja} \quad e = p^t \in A(p^{ht}) = A(n).$$

Siis ehdosta (1.11) seuraa, että

$$p^{it} = d \in A(n) = A(p^{ht}).$$

Siksi

$$A(p^{\alpha_h}) = A(p^{ht}) = \{1, p^t, p^{2t}, \ldots, p^{ht}\}.$$

Oletetaan sitten, että a) ja b) pätevät. Olkoon p alkuluku ja $\alpha \geq 1$. Oletetaan myös, että

$$A(p^\alpha) = \{1, p^t, p^{2t}, \ldots, p^\alpha\},$$

missä $t|\alpha$ ja $A(p^{ht}) = \{1, p^t, p^{2t}, \ldots, p^{ht}\}$, kun $h = 1, \ldots, \frac{\alpha}{t}$. Koska $A(p^t) = \{1, p^t\}$, niin $0 = 1 + \mu_A(p^t)$, siis $\mu_A(p^t) = -1$. Oletamme seuraavaksi, että $\alpha > t$. Koska $A(p^{2t}) = \{1, p^t, p^{2t}\}$, niin $0 = 1 + \mu_A(p^t) + \mu_A(p^{2t}) = \mu_A(p^{2t})$, siis $\mu_A(p^{2t}) = 0$. Samoin voimme osoittaa, että myös $\mu_A(p^{3t}) = 0$ ja niin edelleen kunnes toteamme, että $\mu_A(p^\alpha) = 0$, joten ehto c) pätee. $\square$

Määritelmä 1.12. Olkoon A säännöllinen aritmeettinen konvoluutio. Jos p on alkuluku ja $\alpha \geq 1$, niin $A(p^\alpha) = \{1,\ p^t,\ p^{2t},\ \ldots,\ p^{kt}\ \}$, missä $\alpha = kt$. Luvun α jakajaa t kutsutaan potenssin p^α tyypiksi säännöllisen konvoluution A suhteen (the type of p^α with respect to A) ja sitä merkitään $t_A(p^\alpha)$. ([16], s. 158)

Lause 1.11. *Olkoon p alkuluku ja α, $\beta \geq 1$. Jos $A(p^\alpha) \cap A(p^\beta) \neq \{1\}$, niin $t_A(p^\alpha) = t_A(p^\beta)$. Ja olettamalla samalla, että $\alpha \leq \beta$ saamme, että $A(p^\alpha)$ koostuu joukon $A(p^\beta)$ pienimmistä alkioista, joita otetaan mukaan $(\alpha/t) + 1$ kappaletta, missä $t = t_A(p^\alpha) = t_A(p^\beta)$.* ([16], s. 159)

Todistus. Jos $p^\gamma > 1$ ja $p^\gamma \in A(p^\alpha) \cap A(p^\beta)$, niin $p^\gamma \in A(p^\alpha)$ ja $p^\gamma \in A(p^\beta)$. Tällöin määritelmästä 1.12 ja lauseesta 1.10 seuraa, että $t_A(p^\alpha) = t_A(p^\gamma)$, koska $\gamma = xt$ ja $x \in \mathbb{N}$. Samoin, koska $p^\gamma \in A(p^\beta)$, niin $t_A(p^\gamma) = t_A(p^\beta)$. Siis $t_A(p^\alpha) = t_A(p^\gamma) = t_A(p^\beta)$. Nyt $\alpha = ht$ ja $\beta = kt$, joillakin h ja k. Ja jos $\alpha \leq \beta$, niin

$$A(p^\alpha) = \{1,\ p^t,\ \ldots,\ p^{ht}\}\ ja$$
$$A(p^\beta) = \{1,\ p^t,\ \ldots,\ p^{ht}, p^{(h+1)t},\ \ldots,\ p^{kt}\} = A(p^\alpha) \cup \{p^{(h+1)t},\ \ldots,\ p^{kt}\}. \square$$

Jos konvoluutiot $A_1,\ \ldots,\ A_n$ ovat säännöllisiä aritmeettisia konvoluutioita ja jos $S_1 \cup \ldots \cup S_h$ on jokin alkulukujen ositus, niin silloin on olemassa yksikäsitteinen säännöllinen aritmettinen konvoluutio A siten, että kaikilla $i = 1, \ldots,\ h$,

$$A(p^\alpha) = A_i(p^\alpha) \quad kaikilla\ p \in S_i\ ja\ kaikilla\ \alpha \geq 1.$$

Huomautus 1.3. Dirichlet´n konvoluutiota merkitään kirjaimella D. Kaikilla alkulukupotensseilla p^α, $D(p^\alpha) = \{1,\ p,\ p^2,\ \ldots,\ p^\alpha\}$ ja $t_D(p^\alpha) = 1$. Unitaarikonvoluutiota merkitään kirjaimella U. Kaikilla p^α, $U(p^\alpha) = \{1, p^\alpha\}$ ja $t_U(p^\alpha) = \alpha$. Jos A on mielivaltainen aritmeettinen konvoluutio, niin $U(p^\alpha) \subseteq A(p^\alpha) \subseteq D(p^\alpha)$ aina, kun p^α on alkuluvun potenssi.

Olkoon A säännöllinen aritmeettinen konvoluutio. Positiivista kokonaislukua n, jolle $A(n) = \{1,\ n\}$, kutsutaan *primitiiviseksi*. Ehdon (1.10) mukaan, jos n on primitiivinen, niin $n = p^\alpha$ jollakin alkuluvulla p ja $\alpha \geq 1$. Edelleen p^α on primitiivinen, jos ja vain jos $t_A(p^\alpha) = \alpha$. Lauseen 1.10 todistuksessa on esitetty, että jos p on alkuluku ja $\alpha \geq 1$, niin

$$\mu_A(p^\alpha) = \begin{cases} -1, & jos\ p^\alpha\ on\ primitiivinen \\ 0, & muulloin. \end{cases} \tag{1.13}$$

Esimerkki 1.1. Säännöllinen aritmeettinen konvoluutio ei ole määritelty ainoastaan vastaavan primitiivisen kokonaisluvun toimesta. Olkoon A ja B säännöllisiä aritmeettisia konvoluutioita, joille

$$A(p^\alpha) = B(p^\alpha) = \{1,\ p^\alpha\},\ \text{jokaiselle alkuluvulle } p \neq 3 \text{ ja jokaiselle } \alpha \geq 1,$$
$$A(3^\alpha) = B(3^\alpha) = \{1,\ 3^\alpha\},\ \text{jokaiselle } \alpha \neq 6,\ 8,\ 9,\ 12,$$
$$A(3^6) = B(3^6) = \{1,\ 3^3,\ 3^6\},$$
$$A(3^8) = B(3^8) = \{1,\ 3^4,\ 3^8\},$$
$$A(3^9) = B(3^9) = \{1,\ 3^3,\ 3^6,\ 3^9\},$$
$$A(3^{12}) = \{1,\ 3^3,\ 3^6,\ 3^9,\ 3^{12}\} \neq B(3^{12}) = \{1,\ 3^4,\ 3^8,\ 3^{12}\}.$$

Silloin $A \neq B$, mutta primitiiviset kokonaisluvut A:n suhteen ovat samat kuin B:n.

1.4 Yhteys toisiin funktioihin

Olkoon A säännöllinen aritmeettinen konvoluutio. Funktion μ_A määritelmästä funktion ζ käänteisfunktiona seuraa analogia Möbiuksen käännöslauseeseen.

Lause 1.12. *Jos f ja g ovat aritmeettisia funktioita, niin*

$$f(n) = \sum_{d \in A(n)} g(d) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \tag{1.14}$$

jos ja vain jos

$$g(n) = \sum_{d \in A(n)} f(d)\mu_A(\frac{n}{d}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.15}$$

([16], s. 161)

Todistus. Algebrallisilla notaatioilla voimme kirjoittaa

$$(1.14) \Leftrightarrow f = g *_A \zeta \Leftrightarrow g = f *_A \mu_A \Leftrightarrow (1.15). \; \square$$

Lause 1.13. *Olkoon A säännöllinen aritmeettinen konvoluutio. Jos p on alkuluku ja p^α on luvun p korkein potenssi, joka jakaa luvun n, niin $p^\alpha \in A(n)$. Lisäksi, jos $p^\beta \in A(n)$, niin $p^\beta \in A(p^\alpha)$.* ([16], s. 168)

Todistus. Sivuutetaan.

Määritelmä 1.13. Jos a ja b ovat kokonaislukuja, niin $(a, b)_A = d$ merkitsee, että d on suurin luvun a jakaja siten, että $d \in A(b)$. ([16], s. 161)

Siis $(a, b)_D = (a, b)$ eli lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä. Ja $(a, b)_U$ on suurin kokonaisluku d, siten että $d|a$ ja $d\|b$, toisin sanoen $d|a$ ja $(d, \frac{b}{d}) = 1$. Analogia Eulerin funktion ϕ kanssa on havaittavissa.

Määritelmä 1.14. Olkoon $\phi_A(n)$ sellaisten kokonaislukujen x lukumäärä, että $1 \leq x \leq n$ ja $(x, n)_A = 1$. ([16], s. 161)

Huomautus 1.4. Määritelmä 1.14 on yhtäpitävää seuraavan kanssa

$$\phi_A(n) = \sum_{\substack{1 \leq x \leq n \\ (x,n)_A = 1}} 1.$$

Määritelmä 1.15. Olkoon N sellainen funktio, että

$$N(n) = n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Lause 1.14. *Funktio ϕ_A toteuttaa kaavan*

$$\phi_A(n) = \sum_{d \in A(n)} d\mu_A(\frac{n}{d}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

([16], s. 163)

Todistus. Koska $\mu_A = \zeta^{-1}$, niin $\mu_A *_A \zeta = \delta$. Ja koska voimme muuttaa summausjärjestystä, niin

$$\begin{aligned}
\phi_A(n) &= \sum_{\substack{1 \le x \le n \\ (x,n)_A = 1}} 1 \\
&= \sum_{x=1}^{n} \delta(\ (x,n)_A\ ) \\
&= \sum_{x=1}^{n} \sum_{d \in A((x,n)_A)} \mu_A(d)\ \zeta(\frac{(x,n)_A}{d}) \\
&= \sum_{d \in A(n)} \mu_A(d) \sum_{\substack{x=1 \\ d|x}}^{n} 1 \\
&= \sum_{d \in A(n)} \mu_A(d)(\frac{n}{d}) \\
&= (\mu_A *_A N)(n).
\end{aligned}$$

Ja koska $\mu_A *_A N = N *_A \mu_A$, niin $\phi_A(n) = \sum_{d \in A(n)} d\mu_A(\frac{n}{d}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Toisaalta samaan tulokseen on päästy toisellakin tavalla. Lause 1.15 ja sen todistus ovat hieman vaikeammat ymmärtää.

Lause 1.15. *Jokaiselle $d \in A(n)$ olkoon*

$$S_d = \{\frac{xn}{d} : 1 \le x \le d \text{ ja } (x,d)_A = 1\}.$$

Jos $d \ne e$, niin $S_d \cap S_e = \varnothing$ ja

$$\bigcup_{d \in A(n)} S_d = \{1, \ldots, n\}.$$

([16], s. 162)

Todistus. Käytämme vastaoletusta $S_d \cap S_e \neq \varnothing$. Olkoon $d, e \in A(n)$, $1 \leq x \leq d$ ja $(x,d)_A = 1$, sekä $1 \leq y \leq e$ ja $(y,e)_A = 1$. Vastaoletuksen perusteella on olemassa $a \in S_d$ ja $a \in S_e$, joten on olemassa sellaiset x ja y, että $\frac{xn}{d} = \frac{yn}{e}$, siis $xe = yd$. Tulemme todistamaan, että tällöin $x = y$ ja siten $e = d$.

On riittävää osoittaa, että jos p on luvun x alkulukutekijä ja jos p^u on korkein potenssi luvulle p, joka jakaa luvun x, niin $p^u | y$. Jos $p \nmid d$, niin $p^u | y$.

Oletamme sitten, että $p|d$. Silloin $p|n$. Olkoot p^α, p^β ja p^γ korkeimmat potenssit luvulle p, jotka jakavat luvut n, d ja e tässä järjestyksessä. Huomioitava, että $\gamma = 0$ on mahdollista. Olkoon sitten $t = t_A(p^\alpha)$. Nyt, koska $d \in A(n)$ ja $p^\beta \in A(d)$, niin tästä seuraa ehdon (1.11) mukaan, että $p^\beta \in A(n)$. Tällöin taas lauseen 1.13 mukaan $p^\beta \in A(p^\alpha)$.

Lauseen 1.10 mukaan $\beta = it$, jollakin $i > 0$ ja $t_A(p^\beta) = t$. Ja samoin $\gamma = jt$, jollakin $j \geq 0$ ja jos $j > 0$, niin $t_A(p^\gamma) = t$. Koska $(x,d)_A = 1$, niin $u < t$. Myös jos $j > 0$ ja jos p^v on suurin potenssi luvulle p joka jakaa luvun y, niin $v < t$ koska $(y,e)_A = 1$. Nyt $p^u p^{jt} = p^v p^{it}$, joten $j > 0$, koska muutoin $t \leq u$. Siis $u - v = (i-j)t$, jolloin $i = j$ ja $u = v$.

Jäi vielä osoitettavaksi, että jos $1 \leq m \leq n$, niin $m \in S_d$, jollakin $d \in A(n)$. Olkoon luku d sellainen, että $(m,n)_A = \frac{n}{d}$. Silloin ehdon (1.12) mukaan, koska $\frac{n}{d} \in A(n)$, niin $d \in A(n)$. Olkoon $m = \frac{xn}{d}$ ja $e = (x,d)_A$. Silloin $d \in A(n)$ ja $e \in A(d)$, siis ehdon (1.11) mukaan $e \in A(n)$ ja $\frac{d}{e} \in A(\frac{n}{e})$. Tällöin ehdon (1.12) mukaan myös $\frac{n}{e} \in A(n)$, joten voimme päätellä, että $d|e \in A(n)$. Kuitenkin, koska $m = (\frac{x}{e})(\frac{en}{d})$, niin $e(\frac{n}{d})|m$. Siksi luvun d määritelmästä $d = \frac{n}{(m,n)_A}$ seuraa, että $e = 1$. Nyt $m = \frac{xn}{d}$ ja $(x,d)_A = 1$, joten $m \in S_d$. $\square$

Lauseesta 1.15 seuraa, että

$$N(n) = \sum_{d \in A(n)} \phi_A(d) \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+, \tag{1.16}$$

ja siten lauseen 1.12 nojalla

$$\phi_A(n) = \sum_{d \in A(n)} N(d)\mu_A(\frac{n}{d}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.17}$$

Siis $\phi_A = N *_A \mu_A$. Koska $\mu_A = \zeta^{-1}$, niin määritelmän 1.5 ja lauseen 1.7 nojalla μ_A on multiplikatiivinen. Samoin todetaan, että funktio N on multiplikatiivinen, joten lauseen 1.2 nojalla ϕ_A on multiplikatiivinen. Jos p

on alkuluku ja $\alpha \geq 1$, niin

$$\begin{aligned}\phi_A(p^\alpha) &= \sum_{d \in A(p^\alpha)} d\mu_A(\frac{p^\alpha}{d}) \\ &= \mu_A(\frac{p^\alpha}{1}) + p^t \mu_A(\frac{p^\alpha}{p^t}) + \ldots + p^{\alpha-t}\mu_A(\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-t}}) + p^\alpha \mu_A(\frac{p^\alpha}{p^\alpha}).\end{aligned}$$

Koska $\mu_A(1) = 1$ ja ehdon (1.13) mukainen primitiivisyys toteutuu, kun $t = t_A(p^\alpha)$, jolloin $\mu_A(p^t) = -1$ ja muulloin $\mu_A(p^{\alpha-xt}) = 0$, niin

$$\phi_A(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-t}.$$

Esimerkiksi jos p on alkuluku ja $\alpha \geq 1$, niin

$$\phi_U(p^\alpha) = \sum_{d \in U(p^\alpha)} d\mu_U(\frac{p^\alpha}{d}) = 1\mu_U(\frac{p^\alpha}{1}) + p^\alpha \mu_U(\frac{p^\alpha}{p^\alpha}) = p^\alpha - 1.$$

Siis multiplikatiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned}\phi_A(n) &= \prod_{p^\alpha \| n} (p^\alpha - p^{\alpha-t}) \quad \text{ja} \\ \phi_U(n) &= \prod_{p^\alpha \| n} (p^\alpha - 1).\end{aligned}$$

1.5 Yhteys Ramanujanin summaan

Määritelmä 1.16. Jos a ja b ovat kokonaislukuja niin

$$e(a, b) = e^{\frac{2\pi i a}{b}}.$$

([16], s. 70)

Määritelmä 1.17. Ramanujanin summa $c(n, r)$ säännöllisen aritmeettisen konvoluution suhteen määritellään kaavalla

$$c_A(n, r) = \sum_{(x,r)_A = 1} e(nx, r), \ \forall \ n \in \mathbb{Z},$$

missä $r \in \mathbb{Z}^+$. ([16], s. 164)

Kiinnitetään luku n. Lauseen 1.15 mukaan

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{r} e(nh,r) &= \sum_{d\in A(r)} \sum_{(x,d)_A=1} e(\frac{nxr}{d},r) \\ &= \sum_{d\in A(r)} \sum_{(x,d)_A=1} e(nx,d) \\ &= \sum_{d\in A(r)} c_A(n,d),\ \forall r\in\mathbb{Z}^+.\end{aligned}$$

Silloin lauseen 1.12 nojalla saamme, että

$$c_A(n,r) = \sum_{d\in A(r)} \left(\sum_{h=1}^{d} e(nh,d)\right)\mu_A(\frac{r}{d}).$$

Tässä

$$\sum_{h=1}^{d} e(nh,d) = \sum_{h=1}^{d} (e^{\frac{2\pi i n}{d}})^h.$$

Geometrisen sarja kaavan mukaan saamme, että

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ \sum_{h=1}^{d} q^n &= a_1\frac{1-q^d}{1-q},\end{aligned}$$

missä $q = e^{\frac{2\pi i n}{d}}$. Ja silloin

$$\sum_{h=1}^{d} (e^{\frac{2\pi i n}{d}})^h = \begin{cases} 1^h, & \text{jos } e^{\frac{2\pi i n}{d}} = 1, \\ e^{\frac{2\pi i n}{d}}\dfrac{1-e^{2\pi i n}}{1-e^{\frac{2\pi i n}{d}}}, & \text{jos } e^{\frac{2\pi i n}{d}} \neq 1.\end{cases}$$

Koska $e^{i\pi} = -1$ ([18], s. 2), niin $e^{2\pi i n} = 1$. Siis

$$\sum_{h=1}^{d} (e^{\frac{2\pi i n}{d}})^h = \begin{cases} 1^h, & \text{jos } e^{\frac{2\pi i n}{d}} = 1, \\ 0, & \text{jos } e^{\frac{2\pi i n}{d}} \neq 1.\end{cases}$$

Koska $e^{\frac{2\pi i n}{d}} = 1$ ([18], s. 24), jos ja vain jos $d|n$, niin

$$\sum_{h=1}^{d} e(nh,d) = \begin{cases} d, & \text{jos } d|n, \\ 0, & \text{jos } d \not| n.\end{cases}$$

Siis

$$c_A(n,r) = \sum_{\substack{d|n \\ d\in A(r)}} d\mu_A(\frac{r}{d}).$$

Tästä seuraa suoraan ehdon (1.17) mukaan, että

$$c_A(n,r) = \phi_A(r), \; jos \; r|n,$$

ja määritelmästä 1.13, että

$$c_A(n,r) = \mu_A(r), \; jos \; (n,r)_A = 1.$$

2 Binomikonvoluutiosta

Tässä luvussa tutkimme Pentti Haukkasen julkaisua ([12], s. 210) aritmeettisten funktioiden binomikonvoluutiosta. Binomikonvoluutio on hyvin lähellä K-konvoluutiota ja sen ominaisuuksia. Julkaisussa on esitetty lauseet ja niiden todistuksista tärkein kohta. Nyt tarkastelemme julkaisua ja vertaamme todistuksia K-konvoluution todistuksiin.

2.1 Määritelmiä ja perusominaisuuksia

Määritelmä 2.1. Positiiviselle kokonaisluvulle n merkitköön $n = \prod_p p^{n(p)}$ luvun n kanonista tekijöihin jakoa.

Huomautus 2.1. Tekijöihin jaon ominaisuuksista on syytä huomata, että

$$\frac{n}{e} = \frac{\prod_p p^{n(p)}}{\prod_p p^{e(p)}} = \prod_p p^{n(p)-e(p)}.$$

Määritelmä 2.2. Funktio $B(n,d)$, missä n on positiivinen kokonaisluku ja d on luvun n tekijä, määritellään

$$B(n,d) = \prod_p \binom{n(p)}{d(p)}, \tag{2.1}$$

missä $\binom{n(p)}{d(p)}$ on binomikerroin $\left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$. ([12], s. 210)

Määritelmä 2.3. *Binomikonvoluutio* aritmeettisille funktioille f ja g määritellään

$$(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} B(n,d) f(d) g(\frac{n}{d}).$$

([12], s. 210)

Jos merkinnästä halutaan yhdenmukainen K-konvoluution kanssa, niin merkitsemme binomikonvoluutiota $f \circ g = f *_B g$. Binomikonvoluutiota voidaan myös kutsua B-konvoluutioksi.

Lause 2.1. *Binomikonvoluutio on assosiatiivinen.* ([12], s. 210)

Todistus. Oletamme, että $d|n$ ja $e|d$. Silloin $0 \leq e(p) \leq d(p) \leq n(p)$ aina, kun p on alkuluku. Näemme että

$$\frac{n(p)!}{d(p)![n(p)-d(p)]!}\frac{d(p)!}{e(p)![d(p)-e(p)]!} =$$

$$\frac{n(p)!}{e(p)![n(p)-e(p)]!}\frac{[n(p)-e(p)]!}{[d(p)-e(p)]![n(p)-e(p)-d(p)+e(p)]!}.$$

Tällöin

$$\binom{n(p)}{d(p)}\binom{d(p)}{e(p)} = \binom{n(p)}{e(p)}\binom{n(p)-e(p)}{d(p)-e(p)}.$$

Käyttämällä määritelmiä 2.1 sekä 2.2 ja huomautusta 2.1 saamme, että

$$B(n,d)B(d,e) = B(n,e)B(\frac{n}{e},\frac{d}{e}). \tag{2.2}$$

Nyt tunnemme lauseesta 1.3, että K-konvoluutio on assosiatiivinen, jos ja vain jos

$$K(n,d)K(d,e) = K(n,e)K(\frac{n}{e},\frac{d}{e}),$$

kaikilla luvuilla n, d, e, siten että $d|n$ ja $e|d$. Siis ehto (2.2) toteuttaa lauseen 1.3 ehdot, joten binomikonvoluutio on assosiatiivinen. □

Lause 2.2. *Binomikonvoluutio on kommutatiivinen.* ([12], s. 211)

Todistus. Oletamme, että $d|n$. Silloin $0 \le d(p) \le n(p)$ aina, kun p on alkuluku. Näemme, että

$$\frac{n(p)!}{d(p)![n(p)-d(p)]!} = \frac{n(p)!}{[n(p)-d(p)]![n(p)-n(p)+d(p)]!}.$$

Silloin edellisen lauseen todistusta mukaillen

$$\binom{n(p)}{d(p)} = \binom{n(p)}{n(p)-d(p)}.$$

Siis

$$B(n,d) = B(n,\frac{n}{d}). \tag{2.3}$$

Palauttamalla tarkastelu K-konvoluutioon ja lauseeseen 1.4, voimme päätellä, että binomikonvoluutio toteuttaa lauseen ehdot, joten binomikonvoluutio on kommutatiivinen. □

Lause 2.3. *Funktio δ on ykkösfunktio binomikonvoluution suhteen.* ([12], s. 211)

Todistus. Selvästi

$$\frac{n(p)!}{n(p)![n(p)-n(p)]!} = \frac{n(p)!}{0![n(p)-0]!} = 1.$$

Eli

$$\binom{n(p)}{n(p)} = \binom{n(p)}{0} = 1.$$

Siis

$$B(n, n) = B(n, 1). \tag{2.4}$$

Kuten edellisessäkin lauseessa, palauttamalla tarkastelun K-konvoluutioon ja lauseeseen 1.1 saamme, että δ on ykkösfunktio binomikonvoluutiossa. $\square$

Lause 2.4. *Aritmeettisella funktiolla f on käänteisfunktio binomikonvoluution suhteen, jos ja vain jos $f(1) \neq 0$.* ([12], s. 211)

Todistus. Aritmeettisella funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} K-konvoluutiossa, jos ehdot (1.1) - (1.4) ovat voimassa ja jos ja vain jos $f(1) \neq 0$. Lauseiden 2.1 - 2.3 nojalla lause on tosi. $\square$

Lause 2.5. *Jos $f(1) \neq 0$, niin funktion f käänteisfunktio f^{-1} binomikonvoluutiossa on*

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$
$$f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} B(n, d) f(d) f^{-1}(\frac{n}{d}), \text{ kaikilla } n > 1.$$

([12], s. 211)

Todistus. On samankaltainen kuin K-konvoluutiossa lauseen 1.6 todistus. $\square$

Huomautus 2.2. Artikkelissa on sellainen painovirhe, että termi $\frac{1}{f(1)}$ puuttuu.

2.2 Multiplikatiiviset funktiot

Lause 2.6. *Jos f ja g ovat multiplikatiivisia funktioita, niin $f \circ g$ on multiplikatiivinen funktio.* ([12], s. 212)

Todistus. Oletamme, että $(m, n) = 1$, sekä $d|m$ ja $e|n$. Silloin jos $m \neq 0$, niin

$$\frac{[m(p) + n(p)]!}{[d(p) + e(p)]![m(p) + n(p) - d(p) - e(p)]!} = \frac{m(p)!n(p)!}{d(p)![m(p) - d(p)]!e(p)![n(p) - e(p)]!},$$

jos ja vain jos $n = 0$. Samoin jos $n \neq 0$, niin $m = 0$. Tästä saamme, että

$$\binom{m(p) + n(p)}{d(p) + e(p)} = \binom{m(p)}{d(p)}\binom{n(p)}{e(p)},$$

kun $m(p) \neq 0 \Rightarrow n(p) = 0$ ja kun $n(p) \neq 0 \Rightarrow m(p) = 0$. Siis

$$B(mn, de) = B(m, d)B(n, e). \tag{2.5}$$

Lauseesta 1.2 tunnemme, että K-konvoluutio säilyttää multiplikatiivisuuden, jos ja vain jos

$$K(mn, de) = K(m, d)K(n, e),$$

kaikilla m, n, d, e, joille $d|m$ ja $e|n$, sekä $(m, n) = 1$. Tällöin voimme todeta, että ehto (2.5) toteutuu ja multiplikatiivisten funktioiden $f \circ g$ on multiplikatiivinen. $\square$

Lause 2.7. *Jos f on multiplikatiivinen, niin f^{-1} on multiplikatiivinen.* ([12], s. 212)

Todistus. On samankaltainen kuin K-konvoluutiossa lauseen 1.7 todistus. $\square$

Määritelmä 2.4. Multiplikatiivisen funktion f generoiva funktio kannan p suhteen on

$$f_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)x^k,$$

missä p on alkuluku. ([12], s. 212).

Tällöin multiplikatiivinen funktio on täysin määritelty generoivien funktioiden avulla, kun kanta käy läpi kaikki alkuluvut. Määrittelemme seuraavaksi apuvälineitä sarjojen käsittelyyn.

Määritelmä 2.5. Olkoon $A(x)$ ja $B(x)$ *formaaleja potenssisarjoja* siten, että

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)x^k \qquad ja \qquad B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)x^k.$$

Tällöin määrittelemme, että

$$\begin{aligned}
&A(x) = B(x), \text{ jos ja vain jos } a(k) = b(k) \text{ kaikilla } k \geq 0,\\
&A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a(k) + b(k))x^k \text{ ja}\\
&A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a(n)b(k-n)\right)x^k.
\end{aligned}$$

([1], s. 41)

Merkintä generoivasta funktiosta on hyvin käytännöllinen työkalu tutkittaessa Dirichlet´n konvoluutiota.

Lause 2.8. *Kahdelle aritmeettiselle funktiolle f ja g, sekä niiden Dirichlet´n konvoluutiolle $f * g$ on voimassa ehto*

$$f_p(x)g_p(x) = (f * g)_p(x). \tag{2.6}$$

([1], s. 44)

Todistus. Todistus on suoraviivainen

$$\begin{aligned}
f_p(x)g_p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)x^k \sum_{k=0}^{\infty} g(p^k)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} f(p^n)g(p^{k-n}) \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{d|p^k} f(d)g(\frac{p^k}{d}) \right) x^k \qquad (d = p^n,\ 0 \leq n \leq k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f * g)(p^k)x^k \\
&= (f * g)_p(x). \ \square
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.6. *Eksponentiaalinen generoiva funktio* (eg-funktio) on generoivaa funktiota vastaava käsite binomikonvoluutiossa. Multiplikatiiviselle funktiolle f, *eg-funktio* määritellään

$$\widehat{f}_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)\frac{x^k}{k!},$$

missä p on alkuluku. ([12], s. 212).

Tällöin multiplikatiivinen funktio f on täysin määritelty eg-funktioiden toimesta, kun kanta käy läpi kaikki alkuluvut. Eg-funktio on käytännöllinen tutkittaessa binomikonvoluutiota.

Lause 2.9. *Kahden multiplikatiivisen funktion f ja g eg-funktioiden tulo on näiden funktioiden binomikonvoluution eg-funktio. Toisin sanoen*

$$\widehat{f}_p(x)\ \widehat{g}_p(x) = (\widehat{f \circ g})_p(x). \tag{2.7}$$

([12], s. 213).

Todistus. Todistus on samoin suoraviivainen.

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_p(x)\ \widehat{g}_p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{k!} x^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(p^k)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{f(p^n)}{n!} \frac{g(p^{k-n})}{(n-k)!} \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p^n|p^k} \frac{k!}{n!(n-k)!} f(p^n) g(\frac{p^k}{p^n}) \right) \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p^n|p^k} \binom{k}{n} f(p^n) g(\frac{p^k}{p^n}) \right) \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p^n|p^k} B(p^k, p^n) f(p^n) g(p^{k-n}) \right) \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{d|p^k} B(p^k, d) f(d) g(\frac{p^k}{d}) \right) \frac{x^k}{k!},\ \textit{missä}\ d = p^n,\ 0 \le n \le k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ g)(p^k) \frac{x^k}{k!} \\
&= (\widehat{f \circ g})_p(x). \ \square
\end{aligned}
$$

Esimerkki 2.1. Koska Möbiuksenfunktio μ on multiplikatiivisen funktion ζ käänteisfunktio, niin se on myös multiplikatiivinen. Silloin sen eg-funktio on

$$\widehat{\mu}_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(p^k) \frac{x^k}{k!} = 1 - x.$$

Täten

$$\widehat{\mu}_p^{-1}(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{x^k}{k!}.$$

Nyt määritelmästä 2.6 seuraa, että $\mu^{-1}(p^k) = k!$ kaikilla alkulukupotensseilla p^k. Ja koska μ on multiplikatiivinen, niin lauseen 1.7 nojalla μ^{-1} on myös multiplikatiivinen, joten

$$\mu^{-1}(n) = \prod_p [n(p)]!\ \textit{kaikilla}\ n.$$

2.3 Yhteys sarjojen binomikonvoluutioon

Multiplikatiivisten funktioiden binomikonvoluutio on sama kuin lukujonojen binomikonvoluutio kombinatoriikassa. Kahden lukujonon $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ja $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ binomikonvoluutio on lukujono $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, missä

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Jos f ja g ovat multiplikatiivisia funktioita, niin niiden binomikonvoluutio $f \circ g$ on multiplikatiivinen ja siten funktiot f, g ja $f \circ g$ on mahdollista esittää alkulukupotenssien p^n avulla.

Valitaan alkuluku p. Olkoon $f(p^n) = a_n$ ja $g(p^n) = b_n$ kaikilla $n \geq 0$. Silloin

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(p^n) &= \sum_{p^k | p^n} B(p^n, p^k) f(p^k) g(\frac{p^n}{p^k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(p^k) g(p^{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \\
&= c_n.
\end{aligned}$$

Samoin voidaan myös tulkita, että multiplikatiivisten funktioiden Dirichlet´n konvoluutio on sama kuin tavallinen Cauchyn konvoluutio lukujonoille. Dirichlet´n konvoluutio multiplikatiivisille funktioille f ja g alkuluku potenssilla p^n on $\sum_{k=0}^{n} f(p^k) g(p^{n-k})$, kun Cauchyn konvoluutio lukujonoille $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ja $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ kohdassa n on $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

2.4 Käänteislause ja Liouvillen funktio

Määritelmä 2.7. *Liouvillen funktio* λ *määritellään, siten että*

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)},$$

missä $\Omega(n)$ *tarkoittaa luvun* n *alkulukutekijöiden lukumäärää, jotka lasketaan kertalukunsa mukaan ja oletuksella* $\Omega(1) = 0$. ([12], s. 213).

Liouvillen funktio λ toimii Möbiuksen funktiona binomikonvoluutiossa. Liouvillen funktio on myös multiplikatiivinen, sillä

$$\lambda(1) = (-1)^{\Omega(1)} = 1,$$

sekä

$$\lambda(ab) = (-1)^{\Omega(ab)} = (-1)^{\Omega(a)+\Omega(b)} = (-1)^{\Omega(a)}(-1)^{\Omega(b)} = \lambda(a)\lambda(b),$$

kun $(a, b) = 1$.

Lause 2.10. *Jos $\zeta(n) = 1$ kaikilla luvuilla n, niin $\zeta^{-1} = \lambda$.* ([12], s. 214)

Todistus. Koska ζ ja λ ovat multiplikatiivisia funktioita, niin voimme käyttää eg-funktio menetelmää. Koska

$$\widehat{\zeta}_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(p^k)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

niin

$$\widehat{\zeta}_p(x)(\widehat{\zeta^{-1}})_p(x) = 1 = e^x e^{-x}.$$

Ja, kun

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(p^k)\frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x)^k}{k!}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}, \\
&= e^{-x},
\end{aligned}$$

niin

$$(\widehat{\zeta^{-1}})_p(x) = \widehat{\lambda}_p(x). \ \square$$

Lause 2.11 (Käänteislause)**.** *Funktio*

$$f(n) = \sum_{d|n} B(n, d)g(d) \text{ kaikilla } n, \tag{2.8}$$

jos ja vain jos

$$g(n) = \sum_{d|n} B(n, d)f(d)\lambda(n/d) \text{ kaikilla } n. \tag{2.9}$$

([12], s. 214)

Todistus. Algebrallisilla notaatioilla voimme kirjoittaa

$$(2.8) \Leftrightarrow f = g \circ \zeta \Leftrightarrow g = f \circ \lambda \Leftrightarrow (2.9). \square$$

Jos f ja g ovat multiplikatiivisia, niin käänteismuunnoslause voidaan kirjoittaa

$$\widehat{f}_p(x) = e^x \widehat{g}_p(x) \Leftrightarrow \widehat{g}_p(x) = e^{-x} \widehat{f}_p(x). \tag{2.10}$$

Huomioitava, että (2.10) on klassinen kombinatoriikan binomikäänteismuunnos ([12], s. 214). Kiinteällä alkuluvulla p, olkoon $f(p^n) = a_n$ ja $g(p^n) = b_n$, kaikilla $n \geq 0$. Silloin (2.10) voidaan kirjoittaa myös

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k.$$

2.5 Täydellisesti multiplikatiiviset funktiot

Määritelmä 2.8. Multiplikatiivinen funktio on *täydellisesti multiplikatiivinen*, jos $f(1) = 1$ ja $f(mn) = f(m)f(n)$, kaikilla luvuilla m ja n. Täydellisesti multiplikatiivinen funktio f on täysin määritelty arvojensa $f(p)$ mukaan kaikilla alkuluvuilla p.

Lause 2.12. *Multiplikatiivinen funktio f on täydellisesti multiplikatiivinen, jos ja vain jos*

$$\widehat{f}_p(x) = e^{f(p)x}$$

kaikilla alkuluvuilla p. ([12], s. 214)

Todistus. Jos f on täydellisesti multiplikatiivinen, niin silloin määritelmän 2.8 nojalla $f(p^k) = f(p)^k$, joten

$$\widehat{f}_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(p)^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f(p)x)^k}{k!} = e^{f(p)x}.$$

Päinvastainen suunta voidaan todistaa samoin. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa se, että binomikonvoluutiolla on epätavallinen ominaisuus. Se säilyttää täydellisen multiplikatiivisuuden. ([12], s. 215)

Lause 2.13. *Jos funktiot f ja g ovat täydellisesti multiplikatiiviset, niin $f \circ g$ on myös täydellisesti multiplikatiivinen.* ([12], s. 215)

Todistus. Ratkaisu seuraa suoraan lauseista 2.9 ja 2.12

$$(\widehat{f \circ g})_p(x) = \widehat{f}_p(x)\widehat{g}_p(x) = e^{((f(p)+g(p))x}. \qquad \square$$

Lause 2.14. *Jos f on täydellisesti multiplikatiivinen, niin $f^{-1} = \lambda f$.* ([12], s. 215)

Todistus. Selvästi lauseesta 2.12 seuraa, että

$$(\widehat{f^{-1}})_p(x) = \frac{1}{\widehat{f}_p(x)} = e^{-f(p)x}.$$

Samoin määritelmästä 2.7 ja lauseesta 2.12 seuraa, että

$$\begin{aligned}
(\widehat{\lambda f})_p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda f)(p^k)\frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(p^k) f(p^k)\frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f(p^k)\frac{x^k}{k!} \\
&= e^{-f(p)x}.
\end{aligned}$$

Siis $(\widehat{f^{-1}})_p(x) = (\widehat{\lambda f})_p(x)$. $\square$

Lause 2.15. *Jos f on täydellisesti multiplikatiivinen, niin f^{-1} on myös täydellisesti multiplikatiivinen.* ([12], s. 215)

Todistus. Todistus seuraa suoraan lauseesta 2.14, koska täydellisesti multiplikatiivisten funktioiden tulo on täydellisesti multiplikatiivinen. $\square$

Viitteet

[1] Apostol T. M. 1976, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York.

[2] Cohen E. 1960, *Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer*, Math. Z. 74, pp. 66 - 80.

[3] Davison T. M. K. 1966, *On arithmetic convolutions*, Canad. Math. Bull, 9. pp. 287 - 296.

[4] Fatino I. P. 1975, *Generalized convolution ring of arithmetical functions*, Pacific J. Math. 61, pp. 103 - 116.

[5] Ferrero M. 1980, *On generalized convolution ring of arithmetical functions*, Tsubuka J. Math. 4, pp. 161 - 176.

[6] Fredman M. L. 1970, *Arithmetical convolution products*, Duke Math. J. 37, pp. 231 - 242.

[7] Gessley M. D. 1967, *A generalized arithmetic convolutions*, Amer. Math. Monthly 69, pp. 1216 - 1217.

[8] Gioia A. A. 1965, *The K-product of arithmetic functions*, Canad. J. Math. 17, pp. 970 - 976.

[9] Gioia A. A. ja Subbarao M. V. 1962, *Generlized Dirichlet products of arithmetic functions*, Notices Amer. Math. Soc. 9, 305.

[10] Haukkanen P. 1988, *Some classes of quasi-fields having isomorphic additive and multiplicative groups*, Rend. Mat. Serie VII, Vol 7, pp. 181 - 192

[11] Haukkanen P. 1989, *On the davison convolution of arithmetical function*, Canad. Math. Bull. Vol 32, pp. 467 - 473, Ottawa.

[12] Haukkanen P. 1996, *On a binomial convolution of arithmetical functions*, Nieuw Arch. Wiskd. Vierde serie Deel 14 No. 2 juli, pp. 209 - 216.

[13] Haukkanen P. 2000, *On a generalized convolution of incidence functions*, Discrete Math. Vol 215, pp. 103 - 113, Elsevier, New York.

[14] Haukkanen P. 2003, *Lukuteoriaa*, Tampereen yliopiston opetusmoniste.

[15] McCarthy P. J. 1968, *Regular arithmetical convolutions*, Portugal. Math. 27, pp. 1 - 13.

[16] McCarthy P. J. 1986, *Introduction to arithmetical functions*, Springer-Verlag, New York.

[17] Narkiewicz W. 1963, *On a class of arithmetical convolutions*, Colloq. Math. 10, pp. 81 - 94.

[18] Priestley H. A. 1991, *Introduction to complex analysis*, Oxford Univ. Press.

[19] Suryanarayana Chari C. T. ja Subrahmanya Sastri V. V. 1998, *On K-quadratic functions*, Ranchi Univ. Math. J. Vol 29, pp. 21 - 27.

Liite 1 - K-konvoluution historiaa

A. A. Gioia ja M. V. Subbarao [9] esittelivät K-konvoluution ensimmäisenä vuonna 1962. He kuitenkin rajasivat esityksen tapauksiin, joissa $K(n, d)$ riippuu vain suurimmasta yhteisestä tekijästä $(d, \frac{n}{d})$, siis tapauksiin, joissa aritmeettinen funktio K' on sellainen, että $K(n, d) = K'((d, \frac{n}{d}))$ kaikilla järjestetyillä pareilla $< n, d >$. Jos $K' = \zeta$, niin heidän yleinen konvoluutionsa on Dirichlet'n konvoluutio, ja jos $K' = \delta$, niin se on unitaarikonvoluutio, jota on tutkinut E. Cohen [2] hieman aiemmin. Yleisesti he ovat olettaneet, että K' on multiplikatiivinen funktio ja että se toteuttaa ehdon (1.3) funktiolle K. He myös tutustuivat käänteislauseeseen, jonka heidän konvoluutionsa toteutti. A. A. Gioia [8] karakterisoi näitä aritmeettisia funktioita K', jotka olivat jo valmiiksi assosiatiivisia, ja hän sai ne sellaiseen muotoon, että ne olivat tutkielmassa esitetyssä mielessä assosiatiivisia. Näille funktioille käänteisfunktio ja multiplikatiivisten funktioiden konvoluutio ovat multiplikatiivisia.

K-konvoluution, siinä laajuudessa, missä se tässä tutkielmassa on esitetty, on ensimmäisenä esittänyt T. M. K. Davison [3]. Hän esitti tulokset ehdoista (1.1) - (1.3), ja todistuksen ehdolle (1.4) esitti M. D. Gessley [7]. Laajat tutkimukset K-konvoluutiosta ja aritmeettisten funktioiden assosiatiivisista renkaista esittivät I. P. Fantino [4] ja M. Ferrero [5]. Kuitenkin vielä yleisemmän konvoluution esitteli M. L. Fredman [6].

Sekä A. A. Gioia ja M. V. Subbarao [9] että T. M. K. Davison [3] esittivät julkaisuissaan Ramanujan summan analogian heidän esittämänsä yleisen konvoluution suhteen. E. Cohen [2] oli kuitenkin jo julkaissut aiemmin saman tuloksen unitaarikonvoluution suhteen.

Säännöllisen aritmeettisen konvoluution esitti ensimmäisenä W. Narkiewicz [17]. Hän todisti lauseet 1.10 ja 1.11. Lauseen 1.15 todistuksen ja määritelmät funktioille ϕ_A sekä $c_A(n, r)$ esitti P. J. McCarthy [15].

Kirjan julkaisun jälkeen aiheesta on kirjoittaneet P. Haukkanen [10], [11] ja [13] sekä Suryanarayana Chari ja Subrahmanya Sastri [19].

Historia on käännös lähdeteoksena olleesta kirjasta ([16], s. 181) ja keskustelusta Pentti Haukkasen kanssa.

Liite 2 - Omaa panosta

Lauseen 1.4 todistus on kirjoittajan oma, mutta se noudattaa edeltävien lauseiden tyyliä. Lauseen 1.5 todistus on kirjoittajan oma. Lauseen 1.6 todistus on kirjoittajan oma, mutta erikoistapaus Dirichlet´n konvoluutiosta löytyy ([14], s. 29). Lauseen 1.7 todistus on kirjoittajan oma, mutta erikoistapaus Dirichlet´n konvoluutiosta löytyy ([14], s. 30). Lauseen 1.8 todistus on kirjoittajan oma. Lauseen 1.9 todistus on kirjoittajan oma. Lauseen 1.12 todistus on kirjoittajan oma, mutta erikoistapaus binomikonvoluution osalta löytyy ([12], s. 214). Lauseen 1.14 todistus on kirjoittajan oma. Lauseen 2.9 todistus on kirjoittajan oma.