

Kristiina Kytöharju

# KIINALAINEN POSTINKANTAJAONGELMA

# Tiivistelmä

Kristiina Kytöharju: Kiinalainen postinkantajaongelma

Kandidaattitutkielma

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma

Huhtikuu 2024

---

Kiinalaisessa postinkantajaongelmassa (engl. Chinese Postman Problem) etsitään lyhintä mahdollista reittiä, joka postinkantajan täytyy kulkea, jotta hän voi jakaa postin alueensa jokaiselle kadulle ja palata lopuksi takaisin aloituspisteeseen. Tässä tutkielmassa tarkastellaan kiinalaista postinkantajaongelmaa optimointiongelmana ja esitetään yksi tapa löytää siihen ratkaisu.

Ennen ongelman käsittelyä esitellään graafiteorian peruskäsitteitä ja tutkielman aiheen kannalta keskeisimpiä määritelmiä, kuten graafi, multigraafi, painotettu graafi, solmun aste ja solmujen välinen reitti. Lisäksi esitellään Eulerin graafin määritelmä ja todistetaan tutkielman kannalta olennainen tulos, jonka mukaan graafi on Eulerin graafi, jos ja vain jos sen jokaisen solmun aste on parillinen.

Kolmannessa luvussa taustoitetaan tutkielman aihetta esittelemällä Königsbergin siltaongelma, joka voidaan tulkita myös kiinalaisen postinkantajaongelman erityistapaukseksi. Leonhard Euler esitti ensimmäisenä ratkaisun Königsbergin siltaongelmaan vuonna 1735, ja tätä pidetään usein koko graafiteorian alkuna.

Tutkielman pääluvussa esitellään kiinalainen postinkantajaongelma ja sen määrittely optimointiongelmana. Tämän jälkeen esitellään ongelman algoritmisen ratkaisun idea yleisesti, minkä jälkeen esitetään ratkaisun eri vaiheissa käytettävät algoritmit ja esimerkit niiden käytöstä. Ratkaisun ensimmäisessä vaiheessa graafin paritonasteisten solmujen väliset reitit ja niiden pituudet etsitään Dijkstran algoritmilla. Toisessa vaiheessa etsitään pienimmän mahdollisen painon sovitus unkarilaisella algoritmilla. Lopuksi kolmannessa vaiheessa etsitään Eulerin piiri, joka on ongelman ratkaisu. Kaikkia ratkaisun vaiheita havainnollistetaan esimerkkien lisäksi kuvien avulla.

Avainsanat: graafiteoria, optimointiongelma, Dijkstran algoritmi, unkarilainen algoritmi

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Esitiedot</b>	<b>6</b>
2.1	Peruskäsitteitä . . . . .	6
2.2	Eulerin piiri . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Königsbergin siltaongelma</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Kiinalainen postinkantajaongelma</b>	<b>9</b>
4.1	Ongelman määrittely . . . . .	9
4.2	Ratkaisun idea . . . . .	12
4.3	Lyhimpien reittien etsiminen Dijkstran algoritmilla . . . . .	13
4.4	Pienimmän mahdollisen painon sovituksen etsiminen unkarilaisella algoritmilla . . . . .	15
4.5	Eulerin piirin löytäminen . . . . .	18
	<b>Lähteet</b>	<b>21</b>

# 1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan niin kutsuttua kiinalaista postinkantajaongelmaa (engl. Chinese Postman Problem) ja esitetään yksi mahdollinen tapa ratkaista se algoritmisesti.

Luvussa 2 lukijalle esitellään tämän tutkielman kannalta keskeisimpiä graafiteoreettisia käsitteitä ja määritelmiä, kuten graafi, multigraafi, solmun aste ja solmujen välinen reitti. Lisäksi esitellään Eulerin graafin määritelmä ja todistetaan tutkielman kannalta keskeinen tulos, jonka mukaan graafi on Eulerin graafi, jos ja vain jos sen jokaisen solmun aste on parillinen.

Seuraavassa luvussa 3 taustoitetaan tutkielman aihetta käsittelemällä graafiteorian syntyyn johtanutta Königsbergin siltaongelmaa, joka voidaan myös tulkita kiinalaisen postinkantajaongelman erityistapaukseksi.

Luvussa 4 siirrytään käsittelemään kiinalaista postinkantajaongelmaa ja aloitetaan esittelemällä ongelman sanallinen ja matemaattinen määrittely. Tämän jälkeen aliluvussa 4.2 esitellään ongelman ratkaisun idea ja sen eri vaiheissa tässä tutkielmassa käytettävät algoritmit.

Aliluvussa 4.3 esitetään Dijkstran algoritmi ja esimerkki sen käytöstä solmujen välisten lyhimpien reittien etsimisessä. Aliluvussa 4.4 esitellään unkarilainen algoritmi ja annetaan esimerkki sen käytöstä, kun etsitään pienimmän mahdollisen painon sovitusta. Viimeiseksi aliluvussa 4.5 esitetään algoritmi Eulerin piirin etsimiseen ja annetaan esimerkki sen käytöstä kiinalaisen postinkantajaongelman ratkaisun viimeisessä vaiheessa.

Tutkielmassa käytetyt graafiteoreettiset merkinnät ja määritelmät perustuvat Diestelin teokseen Graph Theory. Kiinalaisen postinkantajaongelman ratkaisuperiaate perustuu Roberts ja Tesmanin kirjassa Applied combinatorics esitettyyn ratkaisuun. Ratkaisussa käytettävien algoritmien lähteenä on käytetty Applied combinatorics -kirjan lisäksi Kocayn ja Kreherin teosta Graphs, algorithms, and optimization.

## 2 Esitiedot

Tässä luvussa esitellään lyhyesti graafiteorian peruskäsitteitä ja tutkielman aiheen kannalta olennaisia määritelmiä. Toisessa aliluvussa perehdytään Eulerin piirin käsitteeseen ja todistetaan siihen liittyvä lause. Luku perustuu Diestelin kirjaan Graph Theory [2, s. 1–3, 5–6, 10, 21–22, 33] lukuun ottamatta muutamaa määritelmää, joiden lähteisiin on viitattu erikseen.

### 2.1 Peruskäsitteitä

Merkintä  $[V]^2$  tarkoittaa joukkoa, joka koostuu järjestämättömistä pareista  $\{v_i, v_j\}$ , missä  $v_i \neq v_j$  ja  $v_i, v_j \in V$ .

**Määritelmä 2.1.** *Graafi* on pari  $G = (V, E)$  siten, että  $V \neq \emptyset$  ja  $E \subseteq [V]^2$ . Joukon  $V$  alkiot ovat graafin *solmuja* ja joukon  $E$  alkiot graafin *särmiä*. Graafin  $G$  solmujoukkoa merkitään  $V(G)$  ja särmäjoukkoa vastaavasti  $E(G)$ .

**Määritelmä 2.2.** Solmuja  $v_i$  ja  $v_j$ , joita yhdistää särmä, kutsutaan toistensa *vierus-solmuiksi* tai *naapureiksi* ja särmän  $e = \{v_i, v_j\}$  *päätesolmuiksi*. Särmiä  $e = \{v_i, v_j\}$ , joka yhdistää solmut  $v_i$  ja  $v_j$ , voidaan merkitä lyhyesti  $v_i v_j$ .

**Määritelmä 2.3** (vrt. [4, s. 7]). *Multigraafi* on yksinkertaisen graafin yleistys, jossa kahden solmun välillä voi olla useampi kuin yksi särmä. Tällöin särmäjoukko  $E$  on järjestämättömistä pareista koostuva *multijoukko*, jossa sama alkio voi esiintyä useammin kuin kerran.

**Määritelmä 2.4** (vrt. [4, s. 9]). *Painotettu graafi* on graafi, jonka jokaiselle särmälle on annettu jokin numeerinen arvo, särmän *paino*. Merkitään särmän  $v_i v_j$  painoa  $c_{ij}$ .

**Määritelmä 2.5.** Solmun  $v_i$  *aste*  $\deg(v_i)$  on siitä lähtevien särmien lukumäärä.

**Määritelmä 2.6.** *Reitti* solmusta  $v_0$  solmuun  $v_k$  graafissa  $G$  on epätyhjä jono  $W = v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$ , missä  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  kaikilla  $i < k$ . Jos  $v_0 = v_k$ , niin kyseessä on suljettu reitti eli *piiri*. Merkitään solmujen  $v_i$  ja  $v_j$  välistä reittiä  $W_{ij}$ . Graafia  $G$  kutsutaan *yhtenäiseksi*, jos minkä tahansa kahden siihen kuuluvan solmun välille voidaan muodostaa reitti graafissa  $G$ .

**Määritelmä 2.7** (vrt. [4, s. 28]). Solmujen  $v_i$  ja  $v_j$  välinen *etäisyys*  $\text{dist}(v_i, v_j)$  on lyhimmän solmujen välisen reitin pituus. Painotetussa graafissa  $\text{dist}(v_i, v_j)$  on lyhimmän solmujen välisen reitin särmien yhteenlaskettu paino.

**Määritelmä 2.8.** Graafin  $G = (V, E)$  *sovitus*  $M$  on joukko graafin  $G$  särmiä siten, että särmillä ei ole yhteisiä päätesolmuja. Sovitus  $M$  on joukon  $U \subseteq V(G)$  sovitus, jos jokainen joukon  $U$  solmu on jonkin joukon  $M$  särmän vierussolmu. Tällöin joukon  $U$  solmuja kutsutaan *sovitetuiksi*.

## 2.2 Eulerin piiri

**Määritelmä 2.9.** Graafin  $G$  piiri on *Eulerin piiri*, jos se kulkee jokaisen graafin  $G$  särmän läpi täsmälleen kerran. Graafi  $G$  on *Eulerin graafi*, jos siinä on Eulerin piiri.

**Lause 2.1.** *Yhtenäinen graafi on Eulerin graafi, jos ja vain jos sen jokaisen solmun aste on parillinen.*

*Todistus.* Selvästi graafin jokaisen solmun asteen on oltava parillinen, että graafi voi olla Eulerin graafi: solmun, joka esiintyy Eulerin piirissä  $k$  kertaa (tai  $k + 1$  kertaa, mikäli se on piirin alku- ja loppupiste), asteen on oltava  $2k$ .

Olkoon  $G$  yhtenäinen graafi, jonka kaikkien solmujen aste on parillinen, ja olkoon

$$W = v_0, e_0, \dots, e_n, v_n$$

pisin reitti, jossa yhtäkään särmää ei kuljeta useammin kuin kerran. Koska reittiä  $W$  ei voida pidentää, se sisältää kaikki solmusta  $v_n$  lähtevät särvät. Oletuksen perusteella lähtevien särmien lukumäärä on parillinen. Siis  $v_n = v_0$ , joten  $W$  on piiri.

Oletetaan, että  $W$  ei ole Eulerin piiri. Tällöin graafissa  $G$  on särmä  $e$ , joka ei kuulu reittiin  $W$ , mutta jonka päätepisteenä on solmu, joka kuuluu reittiin  $W$ . Olkoon  $e = uv_i$ . Tällöin reitti

$$u, e, v_i, e_i, \dots, e_{n-1}, v_n, e_0, \dots, e_{i-1}, v_i$$

on pitempi kuin  $W$ , mikä on ristiriita. □

### 3 Königsbergin siltaongelma

Tässä luvussa esitellään Königsbergin siltaongelma, jota pidetään graafiteorian alkuna ja joka voidaan ymmärtää kiinalaisen postinkantajaongelman erikoistapaukseksi. Luku perustuu Benjaminin, Chartrandin ja Zhangin kirjaan *The fascinating world of graph theory* [1, s. 91–97, 102–104].

1700-luvulla Königsbergin kaupungissa Preussissa (nykyään Kaliningrad, Venäjä) oli seitsemän siltaa, jotka yhdistivät neljä eri maa-aluetta. Kaupungissa alettiin pohtia, oliko mahdollista ylittää jokainen silta tasan kerran ja päätyä samaan paikkaan kulkematta yhdenkään sillan ylitse useammin. Tämä tunnetaan nimellä Königsbergin siltaongelma.

Ongelmaan saatiin ratkaisu vuonna 1735, kun sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler esitti ratkaisunsa Pietarin akatemian jäsenille. Ratkaisussaan ja seuraavana vuonna kirjoittamassaan artikkelissa Euler todisti, että oli mahdotonta löytää sellaista reittiä, joka olisi kulkenut jokaisen sillan yli tasan kerran.

Vaikka Euler käyttää latinankielisessä artikkelissaan termiä ”sijainnin geometria” (lat. *geometria situs*, engl. *geometry of position*), eikä sanaa ”graafi” esiinny siinä kertaakaan, on Königsbergin siltaongelma helppo nähdä graafiteoreettisena ongelmana, jossa sillat ovat graafin särmiä ja maa-alueet solmuja. Eulerin ratkaisua Königsbergin siltaongelmaan pidetään usein koko graafiteorian alkuna. Reittiä, joka kulkee jokaisen graafin särmän tasan kerran ja palaa aloituspisteeseen, kutsutaankin hänen mukaansa Eulerin piiriksi ja graafia, josta sellainen löytyy, Eulerin graafiksi.

Euler siis todisti tarvittavat ehdot sille, että graafin kaikki särmät voidaan kulkea tasan kerran ja päätyä samaan paikkaan. Tämä ei kuitenkaan tarjoa ratkaisua tilanteeseen, jossa tavoitteena on kulkea graafin jokainen särmä vähintään kerran eikä Eulerin piirin muodostaminen ole mahdollista.

Esimerkiksi postinkantaja saattaa kohdata tällaisen ongelman: hän aloittaa reitinsä postitoimistolta, jakaa postin alueensa jokaiselle kadulle ja palaa lopuksi takaisin toimistolle. Tarkoituksena on siis löytää mahdollisimman lyhyt reitti, jolla on sama alku- ja loppupiste ja joka kattaa reitin jokaisen kadun. Tästä päästään tutkielman aiheeseen, kiinalaiseen postinkantajaongelmaan, joka esitellään tarkemmin seuraavassa luvussa.



## 4 Kiinalainen postinkantajaongelma

Tässä luvussa esitellään kiinalainen postinkantajaongelma (engl. Chinese Postman Problem) ja esitetään yksi tapa löytää siihen ratkaisu.

### 4.1 Ongelman määrittely

Kiinalaisessa postinkantajaongelmassa etsitään mahdollisimman pienen kustannuksen reittiä, joka käy läpi kaikki painotetun graafin särmät vähintään kerran siten, että reitin alku- ja loppupiste on sama. Ongelman esitti vuonna 1962 kiinalainen matemaatikko Mei-Ko Kwan, ja myöhemmin Alan Goldman nimesi sen Kwanin mukaan ”kiinalaiseksi postinkantajaongelmaksi” [1, s. 103]. Ongelma voidaan muotoilla matemaattisesti seuraavasti:

Olkoon  $G = (V, E)$  painotettu graafi, jonka solmujen lukumäärä on  $n$  ja jokaisen särmän paino  $c_{ij}$  on epänegatiivinen. Olkoon  $x_{ij}$  särmän  $v_i v_j$  kulkukertojen lukumäärä siten, että luku  $x_{ij}$  sisältää vain ne kerrat, kun särmä  $v_i v_j$  kuljetaan solmusta  $v_i$  solmun  $v_j$  suuntaan. Tällöin särmän  $v_i v_j$  kulkukertojen todellinen lukumäärä on lukujen  $x_{ij}$  ja  $x_{ji}$  summa.

Tarkoituksena on minimoida särmien läpikäynnin yhteenlaskettu kustannus

$$(4.1) \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

ehdoilla

$$(4.2) \quad \sum_i x_{ik} - \sum_j x_{kj} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

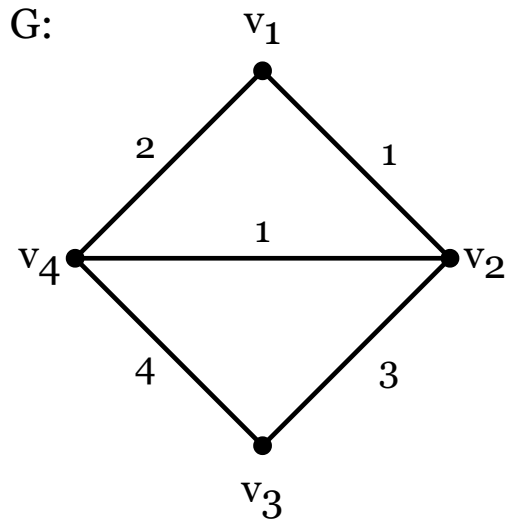
$$(4.3) \quad x_{ij} + x_{ji} \geq 1, \quad \text{kaikilla } v_i v_j \in E(G),$$

$$(4.4) \quad x_{ij} \geq 0 \text{ ja } x_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad \text{kaikilla } v_i v_j \in E(G).$$

Tällöin solmusta poistutaan yhtä monta kertaa kuin solmuun tullaan (4.2), jokainen särmä kuljetaan vähintään kerran (4.3) ja jokaisen särmän kulkukertojen lukumäärä on epänegatiivinen kokonaisluku (4.4).

Muotoilu perustuu hakuteosartikkeliin kirjassa Encyclopedia of Operations Research and Management Science [6, s. 162].

**Esimerkki 4.1.** Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan kiinalaista postinkantajaongelmaa lineaarisena optimointiongelmana. Tarkastellaan kuvan 4.1 graafia  $G$  ja



**Kuva 4.1.** Yksinkertainen graafi, jonka avulla havainnollistetaan kiinalaista postinkantajaongelmaa optimointiongelmana esimerkissä 4.1.

etsitään lyhintä reittiä, joka alkaa solmusta  $v_2$  ja käy läpi jokaisen särmän vähintään kerran.

Minimoitava funktio, eli kuljettavan reitin pituus, saadaan laskemalla yhteen jokaisen särmän kulkukertojen lukumäärä kerrottuna kyseisen särmän painolla. Tässä tapauksessa tavoitefunktioksi saadaan

$$x_{12} + 2x_{14} + x_{21} + 3x_{23} + x_{24} + 3x_{32} + 4x_{34} + 2x_{41} + x_{42} + 4x_{43}.$$

Seuraavaksi muodostetaan minimointiin tarvittavat ehdot. Jokaisesta solmusta täytyy poistua yhtä monta kertaa kuin solmuun mennään, joten tarvitaan kaavan 4.2 mukaiset ehdot. Kun  $k = 1$ , saadaan ehto

$$(x_{21} + x_{41}) - (x_{12} + x_{14}) = 0$$

ja vastaavat ehdot muodostetaan samaan tapaan myös lopuille  $k = 2, 3, 4$ .

Jokainen särmä on käytävä läpi vähintään kerran, jolloin kaavan 4.3 mukaisesti särmälle  $v_1v_2$  saadaan ehto

$$x_{12} + x_{21} \geq 1,$$

jota vastaavat ehdot muodostetaan kaikille graafin  $G$  särmille. Lisäksi jokaisen särmän kulkukertojen lukumäärän on oltava epänegatiivinen kokonaisluku (ehto 4.4).

Kun kaikki ehdot on muodostettu, ongelma saadaan muotoon

$$\text{minimoi} \quad x_{12} + 2x_{14} + x_{21} + 3x_{23} + x_{24} + 3x_{32} + 4x_{34} + 2x_{41} + x_{42} + 4x_{43}$$

$$\text{ehdoilla} \quad (x_{21} + x_{41}) - (x_{12} + x_{14}) = 0$$

$$(x_{23} + x_{43}) - (x_{32} + x_{34}) = 0$$

$$(x_{12} + x_{32} + x_{42}) - (x_{21} + x_{23} + x_{24}) = 0$$

$$(x_{14} + x_{24} + x_{34}) - (x_{41} + x_{42} + x_{43}) = 0$$

$$x_{12} + x_{21} \geq 1$$

$$x_{14} + x_{41} \geq 1$$

$$x_{23} + x_{32} \geq 1$$

$$x_{24} + x_{42} \geq 1$$

$$x_{34} + x_{43} \geq 1$$

$$x_{12} \geq 0 \text{ ja } x_{12} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{21} \geq 0 \text{ ja } x_{21} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{14} \geq 0 \text{ ja } x_{14} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{41} \geq 0 \text{ ja } x_{41} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{23} \geq 0 \text{ ja } x_{23} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{32} \geq 0 \text{ ja } x_{32} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{24} \geq 0 \text{ ja } x_{24} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{42} \geq 0 \text{ ja } x_{42} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{34} \geq 0 \text{ ja } x_{34} \in \mathbb{Z}$$

$$x_{43} \geq 0 \text{ ja } x_{43} \in \mathbb{Z}.$$

Yksi mahdollinen ratkaisu ongelmaan on  $x_{12} = 1$ ,  $x_{24} = 2$ ,  $x_{32} = 1$ ,  $x_{41} = 1$ ,  $x_{43} = 1$  ja  $x_{14} = x_{21} = x_{23} = x_{34} = x_{42} = 0$ . Tulos vastaa graafin  $G$  reittiä

$$W = v_2, e_{24}, v_4, e_{41}, v_1, e_{12}, v_2, e_{24}, v_4, e_{43}, v_3, e_{32}, v_2,$$

kun solmujen  $v_i$  ja  $v_j$  välistä särmää merkitään  $e_{ij}$ . Reitin  $W$  pituus on 12, ja graafin  $G$  yksinkertaisuuden vuoksi on helppoa nähdä, että se on lyhin mahdollinen solmusta  $v_2$  alkava piiri, joka kulkee jokaisen särmän läpi vähintään kerran.

## 4.2 Ratkaisun idea

Jos tarkasteltavasta graafista on mahdollista löytää Eulerin piiri, on se selvästi pienimmän kustannuksen piiri, joka kulkee jokaisen graafin särmän kautta vähintään kerran. Mikäli tarkasteltavassa graafissa on paritonasteisia solmuja, muodostetaan sen pohjalta sopivat särmät kopioimalla multigraafi, joka on Eulerin graafi, minkä jälkeen ratkaisu on myös tässä tapauksessa Eulerin piiri.

**Lause 4.1.** *Jos painotettu graafi tai multigraafi  $G$  on Eulerin graafi, pienimmän mahdollisen kustannuksen piiri, joka kulkee jokaisen graafin  $G$  särmän läpi vähintään kerran, on Eulerin piiri.*

*Todistus.* Olkoon  $G$  painotettu graafi tai multigraafi, joka on Eulerin graafi. Olkoon  $W$  piiri graafissa  $G$  siten, että se kulkee jokaisen graafin  $G$  särmän läpi vähintään kerran.

Jos piiri  $W$  on Eulerin piiri, jokaisen särmän  $v_i v_j$  läpi kulkemisesta aiheutuva kustannus on  $c_{ij}$ , koska jokaisen särmän läpi kuljetaan tasan kerran. Jos piiri  $W$  ei ole Eulerin piiri, särmän  $v_i v_j$  läpi voidaan kulkea useammin kuin kerran. Tällöin särmän läpi kulkemisesta aiheutuva kustannus on  $k c_{ij}$ , missä  $k$  on jokin positiivinen kokonaisluku.

Koska piirin  $W$  läpi kulkemisen kokonaiskustannus saadaan laskemalla kaikkien särmien läpi kulkemisistä aiheutuvat kustannukset yhteen, voidaan päätellä, että yhteenlaskettu kustannus on pienin mahdollinen, kun  $W$  on Eulerin piiri.  $\square$

Tässä työssä esitellään yksi tapa ratkaista kiinalainen postinkantajaongelma algoritmisesti. Ratkaisun vaiheet perustuvat Robertsinkin ja Tesmanin kirjassa Applied combinatorics [5, s. 717–718] esitettyyn ratkaisutapaan:

1. Mikäli tarkasteltavassa graafissa  $G$  on paritonasteisia solmuja, täytyy muodostaa graafin  $G$  aligraafi  $G'$ , jonka solmujoukko on graafin  $G$  paritonasteisten solmujen joukko ja jokaisesta solmusta on särmä kaikkiin muihin solmuihin siten, että särmän  $v_i v_j$  paino  $c_{ij}$  on solmujen  $v_i$  ja  $v_j$  välinen etäisyys. Lyhimmät reitit ja niiden pituudet etsitään Dijkstran algoritmilla.
2. Kun aligraafi  $G'$  on muodostettu, etsitään pienimmän mahdollisen painon sovitusta. Tällä tarkoitetaan sellaista painotetun graafin sovitusta, johon kuuluvien särmien yhteenlaskettu paino on mahdollisimman pieni. Tähän käytetään unkarilaista algoritmia. Tämän jälkeen kopioidaan löydettyyn sovitukseen kuuluvat

särmät siten, että lopputuloksena on multigraafi  $G_M$ , jonka jokaisen solmun aste on parillinen.

3. Lopuksi etsitään Eulerin piiri multigraafista  $G_M$ . Tässä työssä Eulerin piirin etsimiseen käytetään Kocayn ja Kreherin teoksessa *Graphs, algorithms, and optimization* [3, s. 59–61] esitettyä algoritmia.

Seuraavissa aliluvuissa esitetään yllämainitut algoritmit ja annetaan esimerkit niiden käytöstä kiinalaisen postinkantajaongelman ratkaisussa.

### 4.3 Lyhimpien reittien etsiminen Dijkstran algoritmilla

Tässä luvussa esitellään Dijkstran algoritmi ja esimerkki siitä, kuinka sitä hyödynnetään kiinalaisen postinkantajaongelman ratkaisussa, kun etsitään lyhimpiä reittejä paritonasteisten solmujen välillä. Tässä esitetty määritelmä on muotoiltu mukailien kirjassa *Graphs, algorithms, and optimization* [3, s. 35–36] esitettyä määritelmää.

**Määritelmä 4.1.** Dijkstran algoritmi. Olkoon  $G = (V, E)$  painotettu graafi siten, että  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  ja graafissa on  $n$  solmua. Etsitään lyhimmat mahdolliset reitit ja niiden pituudet solmusta  $v_j \in V(G)$  kaikkiin muihin graafin solmuihin. Olkoon  $A$  niiden solmujen joukko, joiden etäisyys solmusta  $v_j$  tunnetaan. Olkoon aluksi  $d(v_j, v_i) = \infty$  kaikilla  $i = 1, \dots, n$ . Merkitään solmujen  $v_j$  ja  $v_i$  välistä reittiä  $W_{ji}$ .

1. Merkitään  $d(v_j, v_j) = 0$  ja lisätään solmu  $v_j$  joukkoon  $A$ . Triviaalisti reitti  $W_{jj} = v_j$ .
2. Joukko  $A = \{v_j, \dots, v_k\}$ . Jokaiselle  $v_i$ , jolle  $v_k v_i \in E(G)$  ja  $v_i \notin A$ , määritellään:

$$d(v_j, v_i) = \min(d(v_j, v_i), d(v_j, v_k) + c_{ki}).$$

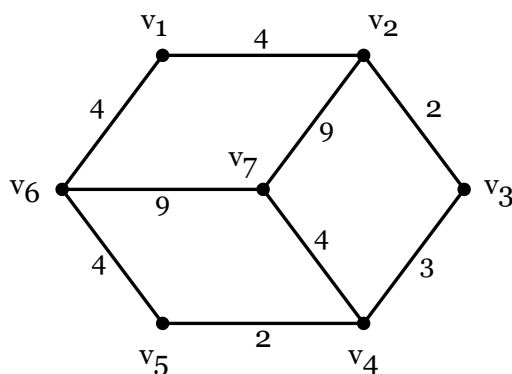
Jos ennen luvun  $d(v_j, v_i)$  uudelleenmäärittelyä  $d(v_j, v_i) < d(v_j, v_k) + c_{ki}$ , reitti  $W_{ji}$  pysyy samana, koska toistaiseksi lyhin reitti on jo löydetty. Muussa tapauksessa  $W_{ji} = W_{jk, v_k v_i, v_i}$ .

Valitaan sitten  $v$  siten, että  $v \notin A$  ja  $d(v_j, v)$  on mahdollisimman pieni. Lisätään  $v$  joukkoon  $A$ .

3. Toistetaan kohtaa 2, kunnes  $A = V(G)$ .

Nyt  $d(v_j, v_i) = \text{dist}(v_j, v_i)$  on lyhin etäisyys ja  $W_{ji}$  lyhin reitti solmusta  $v_j$  solmuun  $v_i$  kaikilla  $i = 1, \dots, n$ .

G:



**Kuva 4.2.** Graafi  $G$  ei ole Eulerin graafi, koska siinä on paritonasteisia solmuja.

**Esimerkki 4.2.** Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan lyhimpien solmujen välisten reittien etsimistä Dijkstran algoritmilla. Tarkastellaan kuvan 4.2 graafia  $G$ .

Kuvasta 4.2 nähdään, että graafissa  $G$  on neljä paritonasteista solmua, joten aligraafin  $G'$  solmujoukko on  $V(G') = \{v_2, v_4, v_6, v_7\}$ . Dijkstran algoritmilla etsitään siis näiden solmujen väliset lyhimät mahdolliset reitit ja niiden pituudet.

Valitaan aloitussolmuksi  $v_2$ . Tällöin Dijkstran algoritmi tuottaa reitit  $W_{2i}$  ja etäisyydet  $\text{dist}(v_2, v_i)$  kaikilla  $i = 1, \dots, 7$ . Tästä saadaan aligraafin  $G'$  muodostukseen tarvittavat etäisyydet  $\text{dist}(v_2, v_4)$ ,  $\text{dist}(v_2, v_6)$  ja  $\text{dist}(v_2, v_7)$ .

Loput tarvittavat reitit ja etäisyydet saadaan samaan tapaan, joten niiden laskeminen sivuutetaan tässä esimerkissä.

- Olkoon  $A = \emptyset$  niiden solmujen joukko, joiden etäisyys solmusta  $v_2$  tunnetaan. Asetetaan aluksi  $d(v_2, v_i) = \infty$  kaikilla  $i = 1, \dots, 7$ .
- Siirrytään kohtaan 1. Nyt  $A = \emptyset$ . Merkitään  $d(v_2, v_2) = 0$  tunnetuksi ja lisätään solmu  $v_2$  joukkoon  $A$ . Triviaalisti  $W_{22} = v_2$ .
- Siirrytään kohtaan 2. Nyt  $A = \{v_2\}$ . Määritellään jokaiselle  $v_i$ , jolle  $v_2 v_i \in E(G)$  ja  $v_i \notin A$  seuraavasti:

$$d(v_2, v_1) = \min(d(v_2, v_1), c_{12}) = \min(\infty, 4) = 4, \quad W_{21} = v_2, v_2 v_1, v_1,$$

$$d(v_2, v_3) = \min(d(v_2, v_3), c_{23}) = \min(\infty, 2) = 2, \quad W_{23} = v_2, v_2 v_3, v_3,$$

$$d(v_2, v_7) = \min(d(v_2, v_7), c_{27}) = \min(\infty, 9) = 9, \quad W_{27} = v_2, v_2 v_7, v_7.$$

Valitaan nyt  $v = v_3$  ja lisätään se joukkoon  $A$ .

- Koska  $A = \{v_2, v_3\} \neq V(G)$ , toistetaan kohta 2. Määritellään jokaiselle  $v_i$ , jolle  $v_3v_i \in E(G)$  ja  $v_i \notin A$  seuraavasti:

$$d(v_2, v_4) = \min(d(v_2, v_4), d(v_2, v_3) + c_{34}) = \min(\infty, 2 + 3) = 5,$$

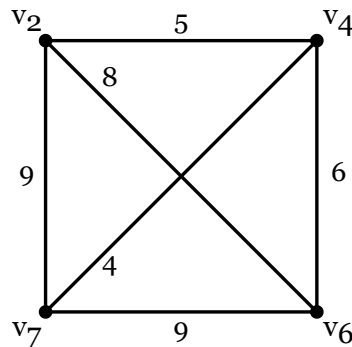
$$W_{24} = v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4.$$

Valitaan nyt  $v = v_1$  ja lisätään se joukkoon  $A$ .

- Toistetaan kohtaa 2, kunnes  $A = V(G)$ , jolloin kaikki reitit on löydetty. Loput solmut lisätään joukkoon  $A$  seuraavassa järjestyksessä:  $v_4, v_5, v_6$  ja  $v_7$ .

Nyt  $d(v_2, v_i) = \text{dist}(v_2, v_i)$  on lyhin solmujen välinen etäisyys ja  $W_{2i}$  lyhin niiden välinen reitti. Dijkstran algoritmilla saadaan etäisyydet  $\text{dist}(v_2, v_4) = 5$ ,  $\text{dist}(v_2, v_6) = 8$  ja  $\text{dist}(v_2, v_7) = 9$  ja reitit  $W_{24} = v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4$ ,  $W_{26} = v_2, v_2v_1, v_1, v_1v_6, v_6$  ja  $W_{27} = v_2, v_2v_7, v_7$ . Ks. esimerkkikuva 4.3.

$G'$ :



**Kuva 4.3.** Graafin  $G$  aligraafi  $G'$ , jonka solmujoukko on graafin  $G$  paritonasteiset solmut ja särmien painot ovat solmujen välisiä lyhimpiä etäisyyksiä graafissa  $G$ .

#### 4.4 Pienimmän mahdollisen painon sovituksen etsiminen unkarilaisella algoritmilla

Tässä luvussa esitellään unkarilainen algoritmi ja esitetään esimerkki sen käytöstä kiinalaisen postinkantajaongelman ratkaisussa. Algoritmin määritelmä perustuu kirjassa Applied Combinatorics [5, s. 721-722] esitettyyn määrittelyyn.

**Määritelmä 4.2.** Unkarilainen algoritmi. Olkoon  $C$   $n \times n$  kustannusmatriisi. Algoritmi tuottaa optimaalisen eli pienimmän mahdollisimman kustannuksen kohdistuksen.

1. Jokaiselle  $i$  olkoon  $p_i$  kustannusmatriisin  $C$  rivin  $i$  pienin alkio. Muodostetaan uusi matriisi  $C'$  siten, että kaikista rivin  $i$  alkioista vähennetään  $p_i$ , ja tehdään tämä jokaiselle riville  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
2. Jokaiselle  $j$  olkoon  $q_j$  matriisin  $C'$  sarakkeen  $j$  pienin alkio. Muodostetaan uusi matriisi  $C''$  siten, että kaikista sarakkeen  $j$  alkioista vähennetään  $q_j$ , ja tehdään tämä jokaiselle riville  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
3. Etsitään pienin mahdollinen joukko pysty- ja vaakaviivoja, joilla voidaan peittää kaikki matriisin  $C''$  nolla-alkiot.
  - Jos viivoja tarvitaan vähemmän kuin  $n$ , siirrytään kohtaan 4.
  - Jos viivoja tarvitaan  $n$  kappaletta, ohitetaan kohta 4 ja siirrytään kohtaan 5.
4. Käytetään kohdan 3 matriisia, jonka nolla-alkiot on peitetty viivoilla. Olkoon  $p$  pienin peittämätön alkio. Muodostetaan uusi matriisi  $\bar{C}$  siten, että vähennetään  $p$  jokaisesta peittämättömästä alkioista ja lisätään  $p$  jokaiseen alkioon, joka sijaitsee viivojen leikkauskohdassa. Palataan kohtaan 3.
5. Etsitään  $n$  nolla-alkiota siten, että jokaiselta riviltä ja jokaisesta sarakkeesta valitaan tasan yksi nolla-alkio. Muodostetaan ratkaisumatriisi  $X$  siten, että  $X_{ij} = 1$ , jos  $\bar{C}_{ij}$  on yksi näistä nolla-alkioista, ja muussa tapauksessa  $X_{ij} = 0$ . Tämä on etsitty ratkaisu.

**Esimerkki 4.3.** Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan pienimmän mahdollisen painon sovituksen etsimistä unkarilaisella algoritmilla.

Muodostetaan ensimmäiseksi kustannusmatriisi  $C$  siten, että sen alkiot  $C_{ij}$  ovat kuvan 4.3 graafin  $G'$  solmujen välisiä etäisyyksiä. Koska etsitään sovitusta, asetetaan kustannusmatriisin lävistäjän arvoiksi  $\infty$ . Solmun etäisyys itseensä olisi 0, mutta tällöin algoritmi tuottaisi tuloksen, jossa jokainen solmu sovitettaisiin itsensä kanssa, mikä ei kelpaa vastaukseksi. Kustannusmatriisiksi saadaan

$$C = \begin{pmatrix} \infty & c_{24} & c_{26} & c_{27} \\ c_{42} & \infty & c_{46} & c_{47} \\ c_{62} & c_{64} & \infty & c_{67} \\ c_{72} & c_{74} & c_{76} & \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 8 & 9 \\ 5 & \infty & 6 & 4 \\ 8 & 6 & \infty & 9 \\ 9 & 4 & 9 & \infty \end{pmatrix}.$$



- Siirrytään kohtaan 1. Muodostetaan uusi matriisi  $C'$  vähentämällä riveiltä niiden pienimmät alkiot, kun  $p_1 = 5, p_2 = 4, p_3 = 6$  ja  $p_4 = 4$ :

$$C' = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 3 & 4 \\ 1 & \infty & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 0 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

- Siirrytään kohtaan 2. Muodostetaan uusi matriisi  $C''$  vähentämällä sarakeista niiden pienimmät alkiot, kun  $q_1 = 1, q_2 = 0, q_3 = 2$  ja  $q_4 = 0$ :

$$C'' = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \infty & 3 \\ 4 & 0 & 3 & \infty \end{pmatrix}.$$

- Siirrytään kohtaan 3. Peitetään kaikki matriisin  $C''$  nolla-alkiot mahdollisimman pienellä joukolla pysty- ja vaakaviivoja ja saadaan tulokseksi

$$C'' = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \infty & 3 \\ 4 & 0 & 3 & \infty \end{pmatrix}.$$

Huomataan, että viivoja tarvitaan vähemmän kuin 4, joten siirrytään vaiheeseen 4.

- Muodostetaan uusi matriisi  $\bar{C}$  vähentämällä  $p = 1$  kaikista peittämättömistä alkiosta. Tässä myös lisättäisiin  $p$  viivojen leikkauskohdan alkioon, mutta  $\infty + p = \infty$ , eli se ei tässä tapauksessa vaikuta lopputulokseen. Saadaan matriisi

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 2 \\ 3 & 0 & 2 & \infty \end{pmatrix}.$$

Peitetään kaikki matriisin  $\bar{C}$  nolla-alkiot mahdollisimman pienellä joukolla pysty- ja vaakaviivoja, jolloin saadaan tulokseksi

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 2 \\ 3 & 0 & 2 & \infty \end{pmatrix}.$$

Nyt kaikkien nolla-alkioiden peittämiseen tarvitaan  $n = 4$  viivaa, joten voidaan siirtyä kohtaan 5.

- Etsitään  $n$  nolla-alkiota siten, että jokaiselta riviltä ja jokaisesta sarakkeesta valitaan tasan yksi nolla-alkio, ja saadaan ratkaisumatriisi

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu tulkitaan siten, että kun  $X_{ij} = 1$ , niin solmut  $v_i$  ja  $v_j$  sovitetaan keskenään.

Siis solmut  $v_2$  ja  $v_6$  sovitetaan keskenään ja solmut  $v_4$  ja  $v_7$  keskenään. Koska alkuperäisessä graafissa lyhin solmujen  $v_2$  ja  $v_6$  välinen reitti on

$$W_{26} = v_2, v_2v_1, v_1, v_1v_6, v_6$$

ja lyhin solmujen  $v_4$  ja  $v_7$  välinen reitti on niiden välinen särmä  $v_4v_7$ , multigraafia muodostaessa kopioidaan särmät  $v_2v_1$ ,  $v_1v_6$  ja  $v_4v_7$ . Ks. esimerkkikuva 4.4.

## 4.5 Eulerin piirin löytäminen

Tässä luvussa esitellään eräs algoritmi, jolla voidaan löytää Eulerin piiri graafista, josta sellainen on mahdollista löytää. Määritelmä on muotoiltu kirjassa *Graphs, algorithms, and optimization* [3, s. 59–61] esitetyn algoritmin pohjalta.

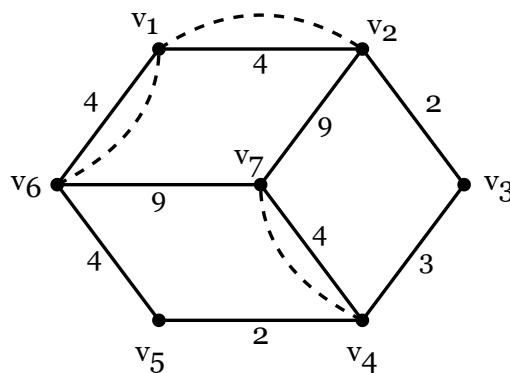
**Määritelmä 4.3.** Eulerin piiri -algoritmi. Olkoon  $G = (V, E)$  graafi, jonka jokaisen solmun aste on parillinen. Olkoon  $B$  läpikäytyjen särmien joukko ja  $W$  reitti, josta tulee etsitty Eulerin piiri.

1. Valitaan aloitussolmu  $v_1$ , merkitään se reittiin aloitussolmuksi ja kuljetaan johonkin sen vierussolmuun  $v_k$ . Nyt  $W = v_1, v_1v_k, v_k$ . Lisätään särmä  $v_1v_k$  läpikäytyjen särmien joukkoon  $B$ .
2. Kuljetaan johonkin solmun  $v_k$  vierussolmuun  $v_{k+1}$ , lisätään se reittiin  $W$  ja lisätään niiden välinen särmä joukkoon  $B$ . Toistetaan, kunnes tullaan takaisin aloitussolmuun.

3. On löydetty jokin graafin alipiiri  $W$ .

- Jos  $B = E(G)$ , niin kaikki graafin  $G$  särmät on käyty läpi ja  $W$  on etsitty Eulerin piiri.
- Jos  $B \neq E(G)$ , niin graafissa  $G$  on vielä särmiä, joita ei ole käyty läpi. Valitaan uudeksi aloitussolmuksi jokin reitissä  $W$  esiintyvä solmu  $v_k$  siten, että siitä lähtee läpikäymättömiä särmiä. Toistetaan kohtia 2 ja 3, kunnes Eulerin piiri on löydetty.

$G_M$ :



**Kuva 4.4.** Graafista  $G$  muodostettu multigraafi  $G_M$ , jossa osa särmistä on kopioitu siten, että graafin  $G_M$  jokaisen solmun aste on parillinen.

**Esimerkki 4.4.** Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan Eulerin piirin etsimisalgoritmin toimintaa.

Etsitään Eulerin piiriä kuvan 4.4 multigraafista  $G_M$ . Merkitään tässä solmujen  $v_i$  ja  $v_j$  välistä särmiä  $v_i v_j = e_{ij}$ . Jos solmujen välillä on useampia särmiä, merkitään alkuperäistä särmiä  $e_{ij}$  ja kopioituja särmiä  $e'_{ij}, e''_{ij}$  ja niin edelleen.

- Valitaan aloitussolmuksi  $v_1$  ja kuljetaan sen vierussolmuun  $v_2$ . Nyt  $W = v_1, e_{12}, v_2$ . Lisätään  $e_{12}$  läpikäytyjen särmien joukkoon  $B = \{e_{12}\}$ .
- Kuljetaan solmun  $v_2$  naapurisolmuun  $v_3$  ja lisätään kuljettu särmä joukkoon  $B$ . Saadaan reitti  $W_1 = v_1, e_{12}, v_2, e_{23}, v_3$ .
- Toistetaan algoritmin kohtaa 2, kunnes palataan takaisin solmuun  $v_1$ . Yksi mahdollinen reitti on

$$W_1 = v_1, e_{12}, v_2, e_{23}, v_3, e_{34}, v_4, e_{47}, v_7, e_{72}, v_2, e'_{12}, v_1.$$

Reittiin kuuluvat särmät on väritetty punaisella kuvassa 4.5.

- Selvästi  $W_1$  on piiri, mutta koska  $B = \{e_{12}, e_{23}, e_{34}, e_{47}, e_{27}, e'_{12}\} \neq E(G)$ , on graafissa vielä särmä, joita ei ole käyty läpi. Valitaan uudeksi aloitussolmuksi solmu  $v_4$ , josta lähtee vielä läpikäymättömiä särmä ja jonka kautta kuljetaan reitissä  $W_1$ . Siirrytään takaisin kohtaan 2.
- Toistetaan algoritmin kohtaa 2, kunnes palataan takaisin solmuun  $v_4$ . Saadaan

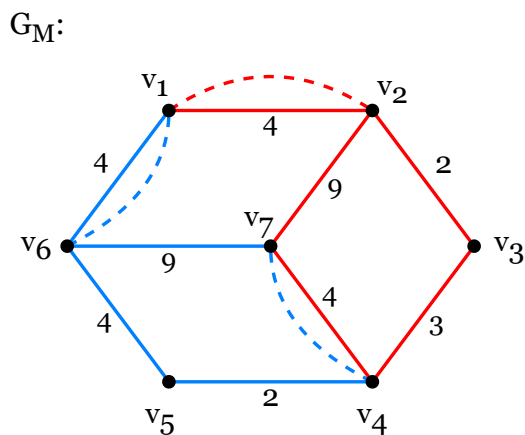
$$W_2 = v_4, e_{45}, v_5, e_{56}, v_6, e_{16}, v_1, e'_{16}, v_6, e_{67}, v_7, e'_{47}, v_4.$$

Reittiin kuuluvat särmät on väritetty sinisellä kuvassa 4.5.

- Nyt  $B = E(G)$ , eli kaikki graafin  $G_M$  särmät on käyty läpi. Kun yhdistetään reitit  $W_1$  ja  $W_2$  yhdeksi yhtenäiseksi reitiksi  $W$ , saadaan reitti

$$W = v_1, e_{12}, v_2, e_{23}, v_3, e_{34}, v_4, \dots, v_4, e_{47}, v_7, e_{27}, v_2, e'_{12}, v_1,$$

jonka pituus on 53. Tämä on etsitty Eulerin piiri ja ongelman ratkaisu.



**Kuva 4.5.** Multigraafi  $G_M$ , jossa esimerkin 4.4 reitti  $W_1$  on väritetty punaisella ja reitti  $W_2$  sinisellä.

# Lähteet

- [1] Benjamin, A., Chartrand, G., Zhang, P. *The fascinating world of graph theory*. 1st ed. Princeton: Princeton University Press, 2015.
- [2] Diestel, R. *Graph Theory*. 3rd ed. Berlin: Springer, 2006.
- [3] Kocay, W., Kreher, D. *Graphs, algorithms, and optimization*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005.
- [4] Koivisto, P., Niemistö, R., Kangaslampi, R. *Graafiteoriaa. Kurssimoniste*. 3. painos. Tampereen yliopisto, 2022.
- [5] Roberts, F., Tesman, B. *Applied combinatorics*. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2009.
- [6] Stewart, W. *Chinese Postman Problem*. Teoksessa: Gass, S., Fu, M. (editoijat) *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Boston, MA: Springer, 2013.