Tampereen yliopisto

Matias Selin

AUTOMAATTITEORIAA ÄÄRETTÖMILLÄ SANOILLA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Huhtikuu 2024

Tiivistelmä

Matias Selin: Automaattiteoriaa äärettömillä sanoilla
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Huhtikuu 2024

Matematiikassa *automaattiteoria* tutkii *automaateiksi* kutsuttuja abstrakteja koneita, jotka lukevat merkkijonoja eli *sanoja* ja joko hyväksyvät tai hylkäävät ne tiettyjen sääntöjen perusteella. Tässä tutkielmassa tarkastellaan erityisesti syötesanojen pituuden äärellisyyden ja äärettömyyden vaikutusta erilaisten automaattiluokkien kykyyn *tunnistaa* eli hyväksyä täsmälleen tietynlaisia sanojen joukkoja eli *kieliä*.

Tutkielmassa esitetään ensin luvussa 2 formaalien kielten ja sanojen keskeisiä määritelmiä sekä äärellisiä sanoja lukevat *äärelliset automaatit*. Luvussa 3 taas tarkastellaan *Büchin automaatteja*, eli erästä äärellisten automaattien yleistystä äärettömille sanoille. Lukujen päätuloksina osoitetaan näiden eri automaattiluokkien tunnistamien kielten samankaltaisuus *säännöllisyyden* käsitteen avulla, sekä vertaillaan automaattien laskennan *deterministisyyden* vaikutusta niiden tunnistusvoimaan.

Tutkielman lopussa luvussa 4 tarkastellaan *hajautettuja automaatteja* ja niiden tietyn rajoitetun alaluokan eli *unohtavien* hajautettujen automaattien vastaavuutta äärellisten automaattien ja Büchin automaattien kanssa. Uutena tuloksena osoitetaan, että unohtavat hajautetut automaatit voivat tunnistaa kaikki determinististen Büchin automaattien tunnistamat kielet.

Avainsanat: automaattiteoria, äärelliset automaatit, Büchin automaatit, hajautetut automaatit

Sisällys

1 Johdanto

Automaatit ovat yksinkertaisia abstrakteja koneita, jotka lukevat merkkijonoja eli *sanoja* merkki kerrallaan ja joko hyväksyvät tai hylkäävät ne. Erilaisten automaattien luokilla on eri *tunnistusvoima*, eli kyky hyväksyä tietynlaiset sanat ja hylätä muut. Tässä tutkielmassa tarkastelemme sitä, miten automaattien tunnistusvoimaan vaikuttaa se, ovatko syötesanat äärellisen vai äärettömän pituisia.

Aloitamme käsittelyn luvussa 2 esittämällä lyhyesti *äärellisten automaattien* teoriaa äärellisen pituisilla sanoilla. Määritelmien ja esimerkkien ohella todistamme, että *deterministiset* ja *epädeterministiset* äärelliset automaatit tunnistavat täsmälleen samat sanojen joukot eli *kielet*; toisin sanoen ne ovat tunnistusvoimaltaan yhtä voimakkaat.

Luvussa 3 yleistämme äärellisten automaattien laskentaa sallimalla niille syötteeksi äärettömän pituiset sanat eli *ω-sanat*, jolloin puhutaan *ω-automaateista*. Erilaiset ω-automaattien luokat hyväksyvät ω-sanat eri ehdoilla, mutta tässä tutkielmassa tarkastelemme vain niin kutsuttuja *Büchin automaatteja*. Luvun päätuloksina osoitamme, että Büchin automaatit tunnistavat tietyllä tavalla samankaltaiset kielet kuin äärelliset automaatit, mutta Büchin automaattien deterministisyys vaikuttaa niiden tunnistusvoimaan.

Lopuksi luvussa 4 tarkastelemme *hajautettuja automaatteja*, jotka voivat laskea mielivaltaisilla *suunnatuilla graafeilla*, ja ovat näin äärellisiä automaatteja yleisempiä laskennan malleja. Tässä tutkielmassa keskitymme kuitenkin niiden käyttöön sanojen tunnistamisessa. Osoitamme, että niin kutsutut *unohtavat* hajautetut automaatit ovat äärellisillä sanoilla yhtä tunnistusvoimaisia kuin äärelliset automaatit. Lisäksi tutkimme unohtavien hajautettujen automaattien laskentaa äärettömillä sanoilla ja osoitamme uutena tuloksena, että tällöin ne ovat tunnistusvoimaltaan ainakin yhtä voimakkaita kuin deterministiset Büchin automaatit.

Lukijalta edellytetään joukko-opin ja diskreetin matematiikan alkeiden ja perusmerkintöjen osaamista, mutta muita välttämättömiä esitietoja ei ole.

Tutkielmassa merkitsemme luonnollisten lukujen joukkoa $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Äärellisten sanojen kieliä merkitään symboleilla $L, K, \dots$ ja ω-kieliä symboleilla $U, V, \dots$. Äärellisiä automaatteja merkitään isoilla kirjaimilla $A, B, \dots$ ja Büchin automaatteja kaunokirjoitetuilla kirjaimilla $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$.

2 Äärelliset automaatit

Tässä luvussa käymme läpi äärellisten automaattien teorian yleisiä merkintöjä ja niiden tunnistusvoimaan liittyviä perustuloksia.

2.1 Määritelmiä

Seuraavat määritelmät pohjautuvat lähteen [1] esitykseen.

Määritelmä 2.1. *Aakkosto* Σ on äärellinen epätyhjä joukko. Kutsumme aakkoston alkioita *symboleiksi*.

Määritelmä 2.2. Aakkoston Σ *äärellinen sana* on sen symboleista muodostettu äärellinen jono. Merkitsemme usein sanaa $w = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \Sigma^n$ lyhyesti $w = a_0 \ldots a_{n-1}$. *Tyhjä sana* on yksikäsitteinen pituutta 0 oleva sana, jota merkitään λ.

Määritelmä 2.3. Merkitsemme aakkoston Σ kaikkien äärellisten sanojen joukkoa Σ^*. Aakkoston Σ *kieli* on osajoukko $L \subseteq \Sigma^*$.

Määritelmä 2.4. Olkoot $w = a_0 \ldots a_{n-1}$ ja $w' = b_0 \ldots b_{m-1}$ aakkoston Σ sanoja. Sanojen w ja w' *katenaatio* on aakkoston Σ sana

$$ww' = a_0 \ldots a_{n-1} b_0 \ldots b_{m-1}.$$

Erityisesti määritellään $w\lambda = \lambda w = w$ kaikilla $w \in \Sigma^*$.

Määritelmä 2.5. Sanan $w \in \Sigma^*$ *toistamista n kertaa* merkitään

$$w^n = \overbrace{w \ldots w}^{n \text{ kappaletta}},$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Sana w^0 tulkitaan tyhjäksi sanaksi λ.

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan aakkostoa $\Sigma = \{a, b\}$ ja sen kieltä

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = a(b^n) \text{ jollain } n \in \mathbb{N}\}.$$

Kieli L siis koostuu niistä sanoista, jotka alkavat täsmälleen yhdellä symbolilla a, jota mahdollisesti seuraavat symbolit ovat kaikki b. Esimerkiksi $a \in L$ ja $abb \in L$, mutta $aba \notin L$, $aab \notin L$ ja $\lambda \notin L$.

Äärellinen automaatti voidaan ajatella yksinkertaisena koneena, joka lukee syötteenä annettua sanaa merkki kerrallaan. Kukin luettu merkki saa koneen siirtymään sen senhetkisestä tilasta riippuen johonkin toiseen tilaan, kunnes koko sana on luettu. Tällöin viimeinen tila, johon automaatti jää, määrittää, hyväksyykö automaatti syötesanan vai ei. Sanomme lisäksi, että äärellinen automaatti *tunnistaa* jonkin kielen, jos se hyväksyy täsmälleen tuohon kielen kuuluvat sanat. Määritellään seuraavaksi nämä käsitteet formaalisti.

Määritelmä 2.6. *Äärellinen automaatti* on rakenne $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, missä

1. Q on äärellinen epätyhjä joukko *tiloja*,
2. Σ on aakkosto,
3. $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ on *siirtymärelaatio*,
4. $q_0 \in Q$ on *alkutila* ja
5. $F \subseteq Q$ on *hyväksyvien tilojen* joukko.

Määritelmä 2.7. Äärellinen automaatti on *deterministinen*, jos sen siirtymärelaatio δ on funktio, ja *epädeterministinen*, jos se on relaatio.

Määritelmä 2.8. Äärellisen automaatin $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *laskenta* syötteellä $w = a_0 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$ on jono tiloja $q_0 \dots q_n \in Q^{n+1}$, missä q_0 on automaatin alkutila ja $(q_i, a_i, q_{i+1}) \in \delta$, kun $0 \leq i \leq n-1$. Jos $w = \lambda$, niin laskenta tulkitaan alkutilaksi q_0.

Määritelmä 2.9. Äärellinen automaatti $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *hyväksyy* sanan $w \in \Sigma^*$, jos on olemassa sen laskenta $q_0 \dots q_n$ syötteellä w siten, että $q_n \in F$. Muutoin sanotaan, että automaatti *hylkää* sanan w.

Määritelmä 2.10. Äärellinen automaatti A *tunnistaa* kielen $L \subseteq \Sigma^*$, jos

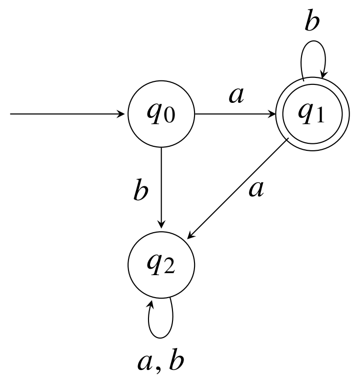
$$A \text{ hyväksyy sanan } w \iff w \in L.$$

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan esimerkin 2.1 kieltä

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = a(b)^n \text{ jollain } n \in \mathbb{N}\}$$

ja muodostetaan äärellinen automaatti, joka tunnistaa sen.

Äärellisten automaattien toimintaa on helppo havainnollistaa seuraavalla suunnattuun graafiin perustuvalla struktuurilla eli niin kutsutulla *siirtymäkaaviolla*. Kaaviossa automaatin tilat $q \in Q$ tulkitaan graafin solmuiksi, joista hyväksyvät tilat $q \in F$ piirretään kaksinkertaisella reunalla. Siirtymärelaatio δ kuvataan solmuja yhdistävillä nuolilla; erityisesti alkutilaan q_0 osoittaa nuoli "tyhjästä".



Kuva 2.1. Kielen L tunnistava äärellinen automaatti A.

Formaalisti ilmaistuna tämä äärellinen automaatti on siis viisikko $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, missä

$$\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2\}, \\
\Sigma &= \{a, b\}, \\
\delta &= \{(q_0, a, q_1), (q_0, b, q_2), (q_1, a, q_2), \\
&\quad (q_1, b, q_1), (q_2, a, q_2), (q_2, b, q_2)\} \text{ ja} \\
F &= \{q_1\}.
\end{aligned}$$

On helppo nähdä, että automaatti A hyväksyy sanan w jos ja vain jos $w \in L$. Jos sana alkaa symbolilla b tai sisältää jossain kohtaa symbolin b jälkeen symbolin a, automaatti siirtyy niin kutsuttuun *virhetilaan* q_2, josta se ei voi enää päästä hyväksyvään tilaan q_1. Myös jos $w = \lambda$, niin sana hylätään, sillä alkutila q_0 ei ole hyväksyvä tila. Toisaalta jos $w \in L$, niin selvästi automaatti pyörii hyväksyvässä tilassa q_1 sanan loppuun asti.

Huomataan lisäksi, että koska jokaisesta tilasta lähtee täsmälleen yksi nuoli jokaista aakkoston symbolia kohti, niin siirtymärelaatio δ on funktio. Automaatti A on siis deterministinen.

2.2 Äärellisten automaattien deterministisyys

Tässä aliluvussa tavoitteenamme on osoittaa, että deterministisyys ei vaikuta äärellisten automaattien tunnistusvoimaan. Toisin sanoen jokainen kieli $L \subseteq \Sigma^*$ voidaan tunnistaa jollain deterministisellä äärellisellä automaatilla jos ja vain jos se voidaan tunnistaa jollain epädeterministisellä äärellisellä automaatilla.

Tämä on mahdollista, jos voimme muodostaa mistä tahansa epädeterministisestä automaatista deterministisen version, joka simuloi täydellisesti alkuperäisen automaatin laskentaa. Onnistumme tässä tarkastelemalla laskentaa yksittäisten tilojen sijaan *tilojen joukoilla*, jolloin yksi deterministisen laskennan askel voi kuvastaa useita mahdollisia epädeterministisen laskennan askelia.

Määritelmä 2.11. [1, s. 44] Olkoon $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ epädeterministinen äärellinen automaatti. Sen *potenssijoukkokonstruktio* on deterministinen äärellinen automaatti $B = (\Sigma', Q', \{q_0\}, \delta', F')$, joka muodostetaan seuraavan prosessin avulla:

1. Automaatin B alkutila on $\{q_0\}$, missä q_0 on automaatin A alkutila.

2. Jokaisella symbolilla $a_i \in \Sigma$ siirtymäfunktio δ' siirtää automaatin tilasta $\{q_0\}$ niiden tilojen $q_i \in Q$ joukkoon, joilla pätee $(q_0, a_i, q_i) \in \delta$.

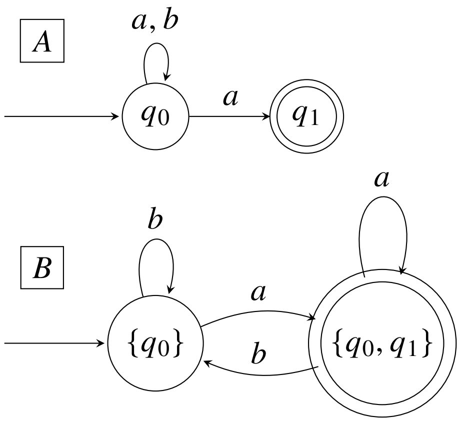
3. Jokaisessa edellisessä vaiheessa luodussa tilassa $X \in Q'$ symbolilla $a_i \in \Sigma$ siirtymäfunktio δ' siirtää automaatin tilasta X niiden tilojen $q_i \in Q$ joukkoon, joilla pätee $(q_X, a_i, q_i) \in \delta$ jollain $q_X \in X$.

4. Toistetaan vaihetta 3, kunnes uusia tiloja $X \in Q'$ ei enää luoda.

5. Hyväksymisjoukko F' on niiden tilojen $X \in Q'$ joukko, jotka sisältävät jonkin hyväksyvän tilan $q \in F$.

Ennen kuin todistamme, että potenssijoukkokonstruktio todella simuloi täydellisesti alkuperäistä automaattia, otamme käyttöön joitain merkintöjä, jotka helpottavat automaattien laskennasta puhumista.

Määritelmä 2.12. [1, s. 44-45] Olkoot $L \subseteq \Sigma^*$ kieli ja $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ äärellinen automaatti.



Kuva 2.2. Epädeterministinen automaatti A ja sen deterministinen potenssijoukkokonstruktio B. Automaatit tunnistavat saman kielen, eli niiden aakkoston $\{a, b\}$ sanojen joukon, jotka päättyvät symboliin a.

1. Jos laskennansa aikana automaatti A on tilassa $q_i \in Q$ ja sillä on vielä luettavana syöte $w \in \Sigma^*$, merkitään (q_i, w). Erityisesti jos automaatti on lukenut koko sanan ja päätynyt tilaan q_n, merkitään (q_n, λ).

2. Jos $(q_i, a_i, q_j) \in \delta$, merkitään $(q_i, aw) \vdash_A (q_j, w)$. Erityisesti kaikilla $q \in Q$ merkitään $(q, \lambda) \vdash_A (q, \lambda)$.

3. Jos $(q_i, w_i) \vdash_A (q_j, w_j) \cdots \vdash_A (q_n, w_n)$, merkitään $(q_i, w_i) \vdash_A^* (q_n, w_n)$.

Merkintä $(q_i, w_i) \vdash_A^* (q_n, w_n)$ siis tarkoittaa, että sanan w_i lukeminen (voi) aiheuttaa automaatin A siirtymisen tilasta q_i tilaan q_n. Huomataan, että tällöin A hyväksyy sanan $w \in \Sigma^*$ jos ja vain jos $(q_0, w) \vdash_A^* (q_F, \lambda)$ jollain $q_F \in F$.

Seuraava tekninen apulause osoittaa, että millä tahansa sanalla $w \in \Sigma^*$ potenssijoukkokonstruktion laskennan viimeinen tila sisältää täsmälleen alkuperäisen automaatin kaikkien laskentojen viimeiset tilat. Automaattien tunnistusvoiman ekvivalenttisuus on helppo seuraus tästä tuloksesta.

Apulause 2.1. [1, s. 46] Olkoot $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ epädeterministinen äärellinen automaatti, $B = (\Sigma, Q', \{q_0\}, \delta', F')$ sen potenssijoukkokonstruktio, $w \in \Sigma^*$ ja $q_n \in Q$. Tällöin $(q_0, w) \vdash_A^* (q_n, \lambda)$ jos ja vain jos on olemassa $X \in Q'$ siten, että $q_n \in X$ ja $(\{q_0\}, w) \vdash_B^* (X, \lambda)$.

Todistus. Todistetaan ensin implikaatio vasemmalta oikealle induktiolla sanan w pituuden suhteen.

Alkuaskel. Oletetaan, että $(q_0, \lambda) \vdash_A^* (q_n, \lambda)$. Koska suoraan määritelmän 2.12 kohdan 2 nojalla $(\{q_0\}, \lambda) \vdash_B^* (\{q_0\}, \lambda)$, ja selvästi $q_0 \in \{q_0\}$, niin väite pätee.

Induktioaskel. Oletetaan, että väite pätee sanalla $w \in \Sigma^*$ ja tarkastellaan sanaa wa, missä $a \in \Sigma$. Oletuksesta $(q_0, wa) \vdash_A^* (q_n, \lambda)$ seuraa, että $(q_0, wa) \vdash_A^* (q_i, a) \vdash_A (q_n, \lambda)$ jollain $q_i \in Q$, joten $(q_0, w) \vdash_A^* (q_i, \lambda)$. Nyt induktio-oletuksen nojalla on olemassa $Y \in Q'$ siten, että $q_i \in Y$ ja $(\{q_0\}, w) \vdash_B^* (Y, \lambda)$. Edelleen koska $q_i \in Y$ ja $(q_i, a) \vdash_A (q_n, \lambda)$, niin siirtymäfunktion δ' määritelmän nojalla on olemassa $X \in Q'$ siten, että $q_n \in X$ ja $(Y, a) \vdash_B (X, \lambda)$. Tällöin $(\{q_0\}, wa) \vdash_B^* (Y, a) \vdash_B (X, \lambda)$, joka voidaan supistaa muotoon $(\{q_0\}, wa) \vdash_B^* (X, \lambda)$.

Todistetaan sitten implikaatio oikealta vasemmalle niin ikään induktiolla sanan w pituuden suhteen.

Alkuaskel. Oletetaan, että $(\{q_0\}, \lambda) \vdash_B^* (X, \lambda)$ jollain sellaisella $X \in Q'$, että $q_n \in X$. Nyt määritelmän 2.12 kohdan 2 nojalla $X = \{q_0\}$, joten koska $q_n = q_0$, niin $(q_0, \lambda) \vdash_A^* (q_n, \lambda)$ ja $q_0 \in \{q_0\}$, joten väite pätee.

Induktioaskel. Oletetaan jälleen, että väite pätee sanalla $w \in \Sigma^*$ ja tarkastellaan sanaa wa, missä $a \in \Sigma$. Oletetaan, että $(\{q_0\}, wa) \vdash_B^* (X, \lambda)$ jollain sellaisella $X \in Q'$, että $q_n \in X$. Tästä seuraa, että on olemassa $Y \in Q'$ siten, että $(\{q_0\}, wa) \vdash_B^* (Y, a) \vdash_B (X, \lambda)$, jolloin $(\{q_0\}, w) \vdash_B^* (Y, \lambda)$. Nyt induktio-oletuksen nojalla kaikilla $q_i \in Y$ pätee $(q_0, w) \vdash_A^* (q_i, \lambda)$ eli $(q_0, wa) \vdash_A^* (q_i, a)$. Koska $(Y, a) \vdash_B (X, \lambda)$, niin siirtymäfunktion δ' määritelmän nojalla $(q_j, a) \vdash_A (q_n, \lambda)$ jollain $q_j \in Y$, jolloin edellisen virkkeen perusteella $(q_0, wa) \vdash^* (q_j, a) \vdash (q_n, \lambda)$. Siis $(q_0, wa) \vdash^* (q_n, \lambda)$. □

Lause 2.1. *[1, s. 47] Kieli $L \subseteq \Sigma^*$ on tunnistettavissa deterministisellä äärellisellä automaatilla jos ja vain jos se on tunnistettavissa epädeterministisellä äärellisellä automaatilla.*

Todistus. Koska funktiot ovat relaatioita, niin jokainen deterministinen äärellinen automaatti on myös epädeterministinen äärellinen automaatti. Riittää siis todistaa, että jokainen epädeterministisen äärellisen automaatin tunnistama kieli on myös tunnistettavissa deterministisellä äärellisellä automaatilla.

Olkoot $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ epädeterministinen äärellinen automaatti ja $B = (\Sigma, Q', \{q_0\}, \delta', F')$ sen potenssijoukkokonstruktio. Jos $w \in \Sigma^*$, niin

$$\begin{aligned} A \text{ hyväksyy sanan } w &\iff (q_0, w) \vdash_A^* (q_F, \lambda) \text{ jollain } q_F \in F \\ &\iff q_F \in X \text{ ja } (\{q_0\}, w) \vdash_B^* (X, \lambda) \text{ joillain } q_F \in F \text{ ja } X \in Q' \\ &\iff B \text{ hyväksyy sanan } w, \end{aligned}$$

missä toinen ekvivalenssi seuraa apulauseesta 2.1. Koska A siis hyväksyy täsmälleen samat sanat kuin B, niin automaatit tunnistavat samat kielet. □

3 Büchin automaatit

Äärellisen automaatin toimintaa voidaan yleistää tarkastelemalla niiden laskentaa äärettömän pituisilla syötesanoilla, jolloin puhutaan ω-automaateista. Koska tällöin laskenta eli syötteen indusoima automaatin tilojen jono on myös äärettömän pituinen, syötteen hyväksyminen ja hylkääminen täytyy määritellä uudestaan. ω-automaatin hyväksymisehdolle on useita mahdollisia määritelmiä, joista tässä tutkielmassa tarkastelemme Büchin esittelemää vaihtoehtoa.

3.1 Määritelmiä

Määritelmä 3.1. [3, s. 2] Aakkoston Σ *ω-sana* on aakkoston Σ symboleista muodostettu ääretön jono, eli funktio $\alpha : \mathbb{N} \to \Sigma$. Kaikkien aakkoston Σ ω-sanojen joukkoa merkitään Σ^ω. Aakkoston Σ *ω-kieli* on osajoukko $U \subseteq \Sigma^\omega$.

Sanojen katenaation ja toistamisen käsitteet yleistyvät luonnollisella tavalla äärellisten sanojen ja ω-sanojen yhdistelmille. On kuitenkin huomioitava, että katenaatio toimii vain alla kuvailtuun suuntaan, eli sana αw ei ole hyvinmääritelty.

Määritelmä 3.2. Olkoot $w = a_0 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$ ja $\alpha \in \Sigma^\omega$. Tällöin

$$w\alpha = a_0 \dots a_{n-1}\alpha(0)\alpha(1) \dots \in \Sigma^\omega$$

ja

$$w^\omega = ww \dots \in \Sigma^\omega.$$

Lisäksi määritellään $\lambda\alpha = \alpha$ kaikilla $\alpha \in \Sigma^\omega$.

Määritelmä 3.3. [3, s. 3] ω-sanassa $\alpha \in \Sigma^\omega$ *äärettömän monta kertaa esiintyvien symbolien joukko* on joukko

$$\mathrm{Inf}(\alpha) = \{a \in \Sigma \mid \exists^\omega n \in \mathbb{N}(\alpha(n) = a)\}.$$

Tässä $\exists^\omega n \in \mathbb{N}(\varphi(n))$ on lyhenne kaavalle $\forall m \in \mathbb{N}(\exists n \in \mathbb{N}(n > m \land \varphi(n)))$. Kvanttori $\exists^\omega$ voidaan siis lukea "on olemassa äärettömän monta".

Määritelmä 3.4. [2, s. 4] Äärellisen automaatin $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ laskenta ω-sanalla $\alpha = \alpha(1)\alpha(2) \dots$ on ääretön jono tiloja $\rho = \rho(0)\rho(1) \dots \in Q^\omega$, missä

1. $\rho(0) = q_0$ ja
2. $\rho(i) \in \delta(\rho(i-1), \alpha(i))$, kun $i \geq 1$ jos A on epädeterministinen ja
3. $\rho(i) = \delta(\rho(i-1), \alpha(i))$, kun $i \geq 1$ jos A on deterministinen.

Kun tarkastelemme äärellisten automaattien laskentaa ω-sanoilla, kutsumme niitä tässä tutkielmassa *Büchin automaateiksi*.

Huomataan, että jos jossain laskennassa ρ epädeterministinen automaatti päätyy tilaan q, jossa sen pitäisi lukea symboli $\alpha(i)$, mutta $\delta(q, \alpha(i)) = \emptyset$, niin tällöin ρ ei selvästi voisi olla ääretön jono. Tällaista jonoa ei siis määritelmän nojalla pidetä varsinaisena laskentana millään ω-sanalla, eikä se erityisesti ole hyväksyvä laskenta.

Huomautus. Büchin automaatin ja äärellisen automaatin rakenne on täsmälleen sama; ainoa ero automaattien välillä on se, tarkastellaanko niiden laskentaa äärellisillä vai äärettömillä syötteillä. Voimme siis helposti tulkita mielivaltaista äärellistä automaattia A Büchin automaattina $\mathcal{A}$ ja päinvastoin.

Seuraavassa määritelmässä on olennaista huomata, että Büchin automaatin tilojen joukko Q on äärellinen, joten se voidaan tulkita myös aakkostona. Tällöin laskenta ρ itse on ω-sana $\rho \in Q^\omega$ ja $\mathrm{Inf}(\rho)$ on laskennassa äärettömän monta kertaa esiintyvien tilojen joukko.

Määritelmä 3.5. [2, s. 5] Büchin automaatti $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *hyväksyy* ω-sanan $\alpha \in \Sigma^\omega$, jos on olemassa sen laskenta ρ ω-sanalla α siten, että

$$\mathrm{Inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset.$$

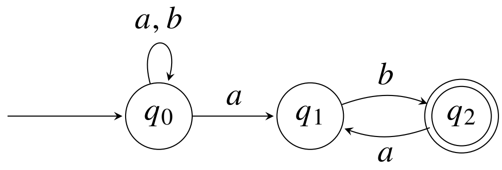
Büchin automaatti siis hyväksyy ω-sanan, jos automaatti käy jossain hyväksymisjoukon F tiloista äärettömän monta kertaa laskennan aikana. Sanomme lisäksi, että Büchin automaatti $\mathcal{A}$ *tunnistaa* ω-kielen $U \subseteq \Sigma^\omega$, jos

$$\mathcal{A} \text{ hyväksyy sanan } \alpha \iff \alpha \in U.$$

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan aakkoston $\Sigma = \{a, b\}$ ω-sanoja, jotka päättyvät äärettömään määrään symbolipareja ab. Esimerkiksi jonot $abab\ldots$ ja $bbabab\ldots$ kuuluvat tähän kieleen. Tarkasteltava kieli on siis täsmällisesti ilmaistuna

$$U = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \alpha = w(ab)^\omega, \text{ missä } w \in \Sigma^*\}.$$

Kieli U voidaan tunnistaa seuraavalla Büchin automaatilla.



Kuva 3.1. ω-kielen U tunnistava epädeterministinen Büchin automaatti.

Jos syötesana α kuuluu kieleen U, niin lukiessaan sanaa α kyseinen automaatti käy äärettömän monta kertaa tilassa $q_2 \in F$, joten se hyväksyy kyseisen sanan. Vastaavasti jos automaatti käy äärettömän monta kertaa tilassa q_2, niin sen laskenta kyseisellä sanalla on muotoa $\rho = \ldots q_1 q_2 q_1 q_2 \ldots$, jolloin $\alpha = \ldots abab \ldots$ eli $\alpha \in U$.

3.2 ω-säännöllisyys

Tunnetusti äärelliset automaatit tunnistavat täsmälleen niin sanotut *säännölliset* kielet, joiden varsinaista määritelmää ei tässä tutkielmassa tarkastella. Tavoitteenamme on nyt yleistää tämä karakterisaatio Büchin automaattien tunnistamiin ω-kieliin.

Määritelmä 3.6. Kieli $L \subseteq \Sigma^*$ on *säännöllinen*, jos se on tunnistettavissa äärellisellä automaatilla.

Määritelmä 3.7. [3, s. 6] Kielen $L \subseteq \Sigma^*$ *ω-iteraatio* on ω-kieli

$$L^\omega = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \alpha = w_0 w_1 \ldots, \text{ missä } w_i \in L \text{ ja } w_i \neq \lambda \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\}.$$

Lisäksi jos $L \subseteq \Sigma^*$ ja $U \subseteq \Sigma^\omega$, niin

$$LU = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \alpha = w\beta, \text{ missä } w \in L \text{ ja } \beta \in U\}.$$

Määritelmä 3.8. [3, s. 6] ω-kieli $U \subseteq \Sigma^\omega$ on *ω-säännöllinen* jos se on muotoa

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} L_i K_i^\omega,$$

missä $L_i, K_i \subseteq \Sigma^*$ ovat säännöllisiä kieliä, kun $1 \leq i \leq n$.

Kaikkien ω-säännöllisten kielten tunnistettavuus Büchin automaatilla on välitön seuraus seuraavista apulauseista.

Apulause 3.1. Jos kieli $L \subseteq \Sigma^*$ on säännöllinen eikä sisällä tyhjää sanaa, niin ω-kieli $L^\omega \subseteq \Sigma^\omega$ on tunnistettavissa Büchin automaatilla.

Todistus. Olkoon $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ kielen L tunnistava äärellinen automaatti. Muodostetaan siitä ensin ekvivalentti versio A', joka alkaa "valealkutilasta" $\perp$, johon ei voida palata. Siis täsmällisesti $A' = (Q \cup \{\perp\}, \Sigma, \delta', \perp, F)$, missä $\perp \notin Q$ ja

$$\delta' = \delta \cup \{(\perp, a, q') \mid (q_0, a, q') \in \delta \text{ joillain } a \in \Sigma \text{ ja } q' \in Q\}.$$

Koska $\lambda \notin L$, niin automaatti A' tunnistaa myös kielen L, sillä sen laskenta jokaisella sanalla $w \in \Sigma^*$ on ensimmäistä tilaa lukuunottamatta täsmälleen sama kuin automaatilla A.

Muodostetaan sitten automaatti A'' käynnistämällä automaatti A' uudelleen sen jokaisen hyväksytyn laskennan jälkeen ja asettamalla sen hyväksyväksi tilaksi uudelleenkäynnistystä kuvaava valealkutila $\perp$. Siis $A'' = (Q \cup \{\perp\}, \Sigma, \delta'', \perp, \{\perp\})$, missä

$$\delta'' = \delta' \cup \{(q, a, \perp) \mid (q, a, q_F) \in \delta' \text{ joillain } q \in Q \cup \{\perp\}, a \in \Sigma \text{ ja } q_F \in F\}.$$

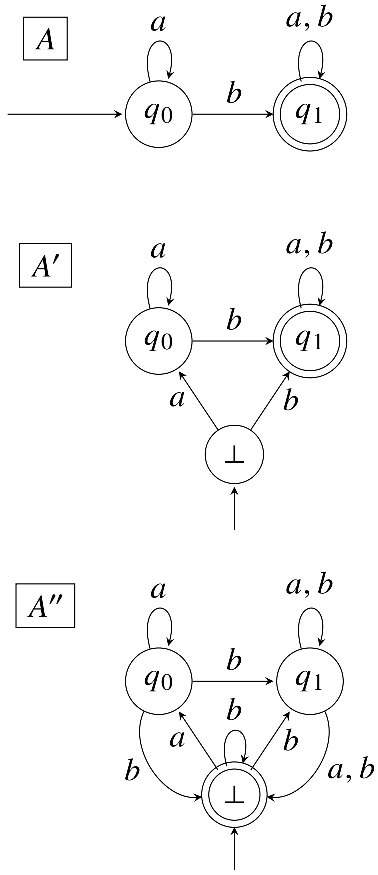
Nyt jos tarkastelemme automaatin A'' laskentaa Büchin automaattina, huomaamme, että se hyväksyy ω-sanan $\alpha \in \Sigma^\omega$ jos ja vain jos automaatti A' käynnistyy uudelleen tuolla sanalla äärettömän monta kertaa. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että α on ääretön jono kieleen L kuuluvia sanoja. Siis A'' tunnistaa ω-kielen L^ω. $\square$

Apulause 3.2. Jos kieli $L \subseteq \Sigma^*$ on säännöllinen ja ω-kieli $U \subseteq \Sigma^\omega$ on tunnistettavissa Büchin automaatilla, niin ω-kieli $LU \subseteq \Sigma^\omega$ on tunnistettavissa Büchin automaatilla.

Todistus. Olkoot $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_{0_A}, F_A)$ ja $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, \Sigma, \delta_\mathcal{B}, q_{0_\mathcal{B}}, F_\mathcal{B})$ kielet L ja U tunnistavat automaatit. Voimme yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $Q_A \cap Q_\mathcal{B} = \emptyset$, sillä voimme yksinkertaisesti nimetä tilat tarvittaessa uudelleen säilyttäen automaattien rakenteen.

Muodostetaan epädeterministinen automaatti C, joka ensin simuloi automaattia A ja sitten automaattia $\mathcal{B}$. Tämä toteutetaan lisäämällä jokaisesta automaatin A hyväksyvästä tilasta "vaihtoehtoiset" automaatin $\mathcal{B}$ alkutilaa simuloivat siirtymät. Siis täsmällisesti $C = (Q_A \cup Q_\mathcal{B}, \Sigma, \delta_C, q_{0_A}, F_\mathcal{B})$, missä

$$\delta_C = \delta_A \cup \delta_\mathcal{B} \cup \{(q_F, a, q) \mid q_F \in F_A \text{ ja } (q_{0_\mathcal{B}}, a, q) \in \delta_\mathcal{B} \text{ joillain } a \in \Sigma \text{ ja } q \in Q_\mathcal{B}\}.$$



Kuva 3.2. Apulauseen 3.1 konstruktion vaiheet. Automaatin A tunnistama kieli L on niiden aakkoston $\{a, b\}$ sanojen joukko, joissa esiintyy symboli b. Automaatti A' tunnistaa myös kielen L, ja Büchin automaattina tulkittuna A'' tunnistaa ω-kielen L^ω.

Tarkastellaan automaatin C laskentaa ω-sanalla $w\alpha \in \Sigma^*\Sigma^\omega$. Tällöin automaatti C voi jokaisen sanan $w \in L$ lopussa siirtyä suoraan suorittamaan automaatin $\mathcal{B}$ laskentaa. Jos tällainen siirtymä hyväksyvään sanan α laskentaan on mahdollinen, niin $w\alpha \in LU$. Täten C tunnistaa ω-kielen LU. □

Apulause 3.3. Jos ω-kielet $U_1, \ldots, U_n \subseteq \Sigma^\omega$ ovat tunnistettavissa Büchin automaatilla, niin myös ω-kieli $\bigcup_{i=1}^n U_i \subseteq \Sigma^\omega$ on tunnistettavissa Büchin automaatilla.

Todistus. Osoitetaan, että minkä tahansa kahden Büchi-tunnistettavissa olevan ω-kielen yhdiste on myös Büchi-tunnistettavissa. Induktiolla on tästä helppo osoittaa, että myös mielivaltaisen pitkä äärellinen yhdiste $\bigcup_{i=1}^n U_i$ on Büchi-tunnistettavissa.

Olkoot $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A}, \Sigma, \delta_\mathcal{A}, q_{0_\mathcal{A}}, F_\mathcal{A})$ ja $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, \Sigma, \delta_\mathcal{B}, q_{0_\mathcal{B}}, F_\mathcal{B})$ ω-kielet $U_\mathcal{A}$ ja $U_\mathcal{B}$ vastaavasti tunnistavat Büchin automaatit, ja oletetaan jälleen yleisyyttä rajoittamatta, että $Q_\mathcal{A} \cap Q_\mathcal{B} = \emptyset$. Koska Büchin hyväksymisehdossa laskennan ensimmäisellä askeleella eli alkutilalla q_0 ei ole merkitystä ω-sanan hyväksymisen kannalta, niin on mahdollista apulauseen 3.1 konstruktion ensimmäisellä vaiheella muodostaa automaateista ω-sanoilla täysin ekvivalentit versiot, joissa "valealkutilaan" ei voi palata. Voimme siis olettaa, että automaateissa $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ei ole siirtymää takaisin alkutilaan.

Muodostetaan nyt epädeterministinen Büchin automaatti C yhdistämällä automaatit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ja asettamalla sen alkutilaksi automaattien alkutilojen yhdistelmä. Täsmällisesti

$$C = (Q_{\mathcal{A}} \cup Q_{\mathcal{B}} \cup \{\perp\}, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}} \cup \delta_{\mathcal{B}} \cup \delta_{\perp}, \perp, F_{\mathcal{A}} \cup F_{\mathcal{B}}),$$

missä $\perp \notin Q_{\mathcal{A}} \cup Q_{\mathcal{B}}$ ja

$$\delta_{\perp} = \{(\perp, a, q) \mid (q_0, a, q) \text{ joillain } q_0 \in \{q_{0_{\mathcal{A}}}, q_{0_{\mathcal{B}}}\},\ a \in \Sigma \text{ ja } q \in Q_{\mathcal{A}} \cup Q_{\mathcal{B}}\}.$$

Tällöin automaatilla C on olemassa jokaisella syötteellä kaksi laskentaa, joista toinen simuloi automaattia $\mathcal{A}$ ja toinen automaattia $\mathcal{B}$. Koska siirtymää takaisin automaatteja yhdistävään alkutilaan $\perp$ ei ole, nämä laskennat ovat täysin erillisiä toisistaan. Täten C hyväksyy täsmälleen ω-kieliin $U_{\mathcal{A}}$ tai $U_{\mathcal{B}}$ kuuluvat ω-sanat, joten se tunnistaa ω-kielen $U_{\mathcal{A}} \cup U_{\mathcal{B}}$. □

Lause 3.1. *[3, s. 6] ω-kieli $U \in \Sigma^{\omega}$ on tunnistettavissa Büchin automaatilla jos ja vain jos se on ω-säännöllinen.*

Todistus. Koska ω-säännölliset kielet ovat muotoa $\bigcup_{i=1}^{n} L_i K_i^{\omega}$, apulauseista 3.1, 3.2 ja 3.3 seuraa, että ω-säännölliset kielet ovat tunnistettavissa Büchin automaatilla.

Olkoon siis $U \subseteq \Sigma^{\omega}$ Büchin automaatin $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tunnistama kieli ja osoitetaan, että U on ω-säännöllinen. Määritellään jokaiselle tilojen parille $q, q' \in Q$ niiden äärellisten sanojen joukko $L_{q,q'} \subseteq \Sigma^*$, joiden lukeminen (voi) aiheuttaa siirtymisen tilasta q tilaan q'. Täsmällisesti siis

$$L_{q,q'} = \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q', \lambda)\}.$$

Jokainen kieli $L_{q,q'}$ on säännöllinen, sillä sen tunnistaa äärellinen automaatti $A_{q,q'} = (Q, \Sigma, \delta, q, \{q'\})$. Nyt koska jokainen automaatin $\mathcal{A}$ hyväksyvä laskenta alkaa tilasta q_0 ja palaa äärettömän monta kertaa johonkin hyväksyvään tilaan q_F, niin

$$U = \bigcup_{q_F \in F} L_{q_0, q_F} L_{q_F, q_F}^{\omega},$$

joten U on ω-säännöllinen. □

3.3 Büchin automaattien deterministisyys

Kaikki äärellisten automaattien ominaisuudet eivät yleisty Büchin automaateille. Toisin kuin äärellisillä automaateilla, epädeterministisyyden salliminen Büchin automaateilla nimittäin aidosti laajentaa niiden tunnistusvoimaa. On siis olemassa ω-kieli U, joka voidaan tunnistaa epädeterministisellä Büchin automaatilla, mutta jota ei voida tunnistaa millään deterministisellä Büchin automaatilla. Todistamme tämän karakterisoimalla determinististen Büchin automaattien tunnistamat ω-kielet ja osoittamalla, että U ei täytä näitä ehtoja.

Määritelmä 3.9. [3, s. 5] Kielen $L \subseteq \Sigma^*$ *rajakieli* on ω-kieli

$$\lim(L) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \exists^\omega n \in \omega(\alpha[0..n] \in L)\},$$

missä $\alpha[0..n]$ merkitsee sanaa $\alpha(0) \dots \alpha(n) \in \Sigma^*$.

ω-sana siis kuuluu rajakieleen $\lim(L)$ jos ja vain jos siinä on äärettömän monta kieleen L kuuluvaa alkupätkää. Käy ilmi, että säännöllisten kielten rajakielet ovat täsmälleen ne kielet, jotka voidaan tunnistaa deterministisellä Büchin automaatilla.

Lause 3.2. *[3, s. 6] ω-kieli $U \subseteq \Sigma^\omega$ on tunnistettavissa deterministisellä Büchin automaatilla jos ja vain jos $U = \lim(L)$ jollain säännöllisellä kielellä $L \subseteq \Sigma^*$.*

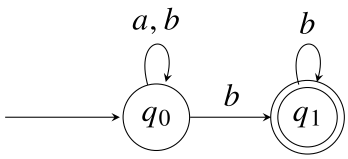
Todistus. Osoitetaan ensin, että kaikki säännöllisten kielten rajakielet ovat tunnistettavissa deterministisellä Büchin automaatilla. Olkoon kieli $L \subseteq \Sigma^*$ säännöllinen. Lauseen 2.1 nojalla on siis olemassa erityisesti *deterministinen* äärellinen automaatti $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, joka tunnistaa sen. Tarkastellessa automaatin A laskentaa ω-sanalla $\alpha \in \Sigma^\omega$ huomataan, että A on jossain hyväksyvässä tilassa $q_F \in F$ täsmälleen silloin, kun se on lukenut ω-sanasta α kieleen L kuuluvan alkupätkän. Nyt koska tiloja $q \in Q$ on äärellinen määrä, niin A käy jossain hyväksyvässä tilassa äärettömän monta kertaa laskennan aikana jos vain jos ω-sanassa α on ääretön määrä kieleen L kuuluvia alkupätkiä. Büchin automaattina tulkittuna A siis hyväksyy ω-sanan α jos ja vain jos $\alpha \in \lim(L)$, eli A tunnistaa kielen $\lim(L)$.

Osoitetaan sitten, että kaikki deterministisillä Büchin automaateilla tunnistettavissa olevat ω-kielet ovat säännöllisten kielten rajakieliä. Olkoon $U \subseteq \Sigma^\omega$ ω-kieli, jonka tunnistaa deterministinen Büchin automaatti $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Koska $\mathcal{A}$ hyväksyy täsmälleen ω-sanat $\alpha \in U$, niin sen jokainen laskenta näillä sanoilla käy äärettömän monta kertaa jossain hyväksyvässä tilassa $q_F \in F$. Toisin sanoen on olemassa äärettömän monta $n \in \mathbb{N}$, millä $(q_0, \alpha[0..n]) \vdash_{\mathcal{A}}^{*} (q_F, \lambda)$ jollain $q_F \in F$. Koska äärellisenä automaattina tulkittuna $\mathcal{A}$ tunnistaa näiden sanojen muodostaman kielen L, se on säännöllinen, minkä lisäksi $U = \lim(L)$. □

Lause 3.3. *[3, s. 4-6] On olemassa ω-kieli, joka voidaan tunnistaa epädeterministisellä Büchin automaatilla, mutta jota ei voida tunnistaa millään deterministisellä Büchin automaatilla.*

Todistus. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$ ja tarkastellaan ω-kieltä $U = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid a \notin \mathrm{Inf}(\alpha)\}$. Kieli koostuu siis ω-sanoista, joissa symboli a esiintyy vain äärellisen monta kertaa.

Muodostetaan epädeterministinen Büchin automaatti, joka tunnistaa kielen U. Automaatin ideana on pysyä aluksi tilassa q_0 ja "arvata" ω-sanan kohta, jossa a-symbolit loppuvat, minkä jälkeen se siirtyy hyväksyvään tilaan q_1.



Kuva 3.3. Kielen U tunnistava epädeterministinen Büchin automaatti.

Osoitetaan seuraavaksi, että U ei ole minkään kielen rajakieli. Tehdään vastaoletus, että $U = \lim(L)$ jollain $L \subseteq \Sigma^*$. Koska $b^\omega \in U$, niin on olemassa alkupätkä $b^{n_1} \in L$ jollain $n_1 \in \mathbb{N}$. Koska edelleen $b^{n_1}ab^\omega \in U$, niin on olemassa alkupätkä $b^{n_1}ab^{n_2} \in L$. Vastaavalla tavalla saadaan muodostettua ääretön määrä alkupätkiä, jotka ovat muotoa $b^{n_1}ab^{n_2}a \dots b^{n_{m-1}}ab^{n_m} \in L$ jollain $m \in \mathbb{N}$.

Tästä seuraa rajakielen määritelmän nojalla, että ω-sana $\beta = b^{n_1}ab^{n_2} \dots b^{n_i}ab^{n_{i+1}} \dots$ kuuluu kieleen $\lim(L) = U$. Mutta selvästi $a \in \mathrm{Inf}(\beta)$, joten kielen U määritelmän nojalla β ei kuulu kieleen U. Olemme päätyneet ristiriitaan, joten vastaoletus on epätosi; siis $U \neq \lim(L)$ jokaisella $L \subseteq \Sigma^*$. Täten lauseen 3.2 nojalla U ei ole tunnistettavissa millään deterministisellä Büchin automaatilla. □

4 Hajautetut automaatit

Viimeisenä automaattityyppinä tarkastelemme hajautettuja automaatteja. Hajautetun automaatin syöte koostuu toisistaan suunnatuilla särmillä yhdistetyistä solmuista eli *suunnatusta graafista*, jonka jokaiseen solmuun sijoitetaan kopio samasta automaatista. Kunkin solmun automaatin laskenta tapahtuu askel kerrallaan automaatin siirtymäfunktion ja naapurisolmujen automaattien tilojen perusteella.

4.1 Määritelmiä

Hajautetut automaatit voivat laskea millä tahansa r eri särmärelaatiota sisältävällä eli *r-relationaalisella* suunnatulla graafilla. Koska äärellisten sanojen tulkinta poluiksi vaatii vain yhden särmärelaation, tässä aliluvussa tarkastelemme vain 1-relationaalisia hajautettuja automaatteja.

Määritelmä 4.1. [4, s. 3] Olkoon Σ aakkosto. *Σ-merkitty suunnattu graafi* on rakenne $G = (V, E, \lambda)$, missä

1. V on äärellinen epätyhjä joukko *solmuja*,
2. $E \subseteq V \times V$ on joukko *särmiä* ja
3. $\lambda : V \to \Sigma$ on *merkintäfunktio*, joka liittää jokaiseen solmuun symbolin aakkostosta Σ.

Määritelmä 4.2. [4, s. 3-4] *Suunnattu polku* on suunnattu graafi (V, E), joka sisältää alkusolmun $v_\epsilon \in V$, johon pääsee muista solmuista täsmälleen yhdellä tavalla seuraamalla graafin särmiä päinvastaiseen suuntaan. Lisäksi jokaisella solmulla $v \in V$ on olemassa korkeintaan yksi edeltäjäsolmu ja korkeintaan yksi seuraajasolmu.

Huomautus. Jokaista sanaa $w \in \Sigma^*$ vastaa täsmälleen yksi Σ-merkitty suunnattu polku, jossa polun jokainen solmu on merkitty sanan vastaavassa kohdassa sijaitsevalla symbolilla. Kun puhumme hajautetun automaatin laskennasta sanalla

Kuva 4.1. Sana $aaba$ tulkittu Σ-merkittynä suunnattuna polkuna.

$w = a_0 \dots a_{n-1}$, puhumme siis täsmällisemmin sen laskennasta tätä sanaa vastaavalla Σ-merkityllä suunnatulla polulla.

Määritelmä 4.3. [4, s. 4] *Hajautettu automaatti* on rakenne $A = (Q, q_0, (\delta_a)_{a\in\Sigma}, F)$, missä

1. Q on äärellinen epätyhjä joukko tiloja,
2. $q_0 \in Q$ on alkutila,
3. $\delta_a : Q \times \mathcal{P}(Q) \to Q$ on *paikallinen siirtymäfunktio* symbolille $a \in \Sigma$ ja
4. $F \subseteq Q$ on hyväksyvien tilojen joukko.

Määritelmä 4.4. [4, s. 4] Hajautettu automaatti $A = (Q, q_0, (\delta_a)_{a\in\Sigma}, F)$ on *unohtava*, jos $\delta_a(q, S) = \delta_a(q', S)$ aina, kun $a \in \Sigma$, $q, q' \in Q$ ja $S \in \mathcal{P}(Q)$. Tällöin voimme merkitä siirtymäfunktiota lyhyemmin muodossa $\delta_a : \mathcal{P}(Q) \to Q$.

Tässä sana *unohtava* viittaa siihen, että automaatin kopiot eivät voi "muistaa" omaa tilaansa laskennan askeleesta toiseen. Siis kunkin automaatin seuraavan tilan määrää ainoastaan sen naapuriautomaattien tilojen joukko.

Määritelmä 4.5. [4, s. 4] Olkoon $G = (V, E, \lambda)$ Σ-merkitty suunnattu polku. Hajautetun automaatin $A = (Q, q_0, (\delta_a)_{a\in\Sigma}, F)$ *laskenta* polussa G on ääretön jono $\rho = \rho_0\rho_1 \dots$ *konfiguraatioita* $\rho_t : V \to Q$, missä

1. $\rho_0(v) = q_0$ ja
2. $\rho_{t+1}(v) = \delta_{\lambda(v)}(\rho_t(v), \{\rho_t(u) \mid (u, v) \in E\})$,

kun $t \in \mathbb{N}$ ja $v \in V$. Käytämme lisäksi merkintää (A, i), kun puhumme solmussa $v_i \in V$ sijaitsevasta automaatin A kopiosta.

Määritelmä 4.6. [4, s. 4] Hajautettu automaatti $A = (Q, q_0, (\delta_a)_{a\in\Sigma}, F)$ *hyväksyy pisteytetyn suunnatun polun* (G, v), jos on olemassa sellainen $t \in \mathbb{N}$, että $\rho_t(v) \in F$. Hajautettu automaatti A *hyväksyy sanan* $w = a_0 \dots a_{n-1}$, jos se hyväksyy pisteytetyn suunnatun polun (W, a_{n-1}), missä W on sanaa w vastaava Σ-merkitty suunnattu polku.

4.2 Hajautetut automaatit äärellisillä sanoilla

Lause 4.1. *[4, s. 4] Kieli $L \subseteq \Sigma^*$, joka ei sisällä tyhjää sanaa, on tunnistettavissa unohtavalla hajautetulla automaatilla jos ja vain jos se on tunnistettavissa äärellisellä automaatilla.*

Todistus. Tarkoituksena on osoittaa, että mille tahansa äärelliselle automaatille voidaan muodostaa sen laskentaa simuloiva hajautettu automaatti ja päinvastoin. Tästä seuraa, että automaattityypit tunnistavat samat kielet.

Todistetaan ensin, että voimme simuloida äärellistä automaattia hajautetulla automaatilla. Olkoon $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti. Muodostetaan sitä simuloiva unohtava hajautettu automaatti $A = (Q \cup \{\perp\}, \perp, (\delta_a)_{a \in \Sigma}, F)$, missä

$$\delta_a(S) = \begin{cases} \delta(q_0, a) & \text{jos } S = \emptyset \\ \delta(q, a) & \text{jos } S = \{q\} \text{ jollain } q \in P \\ \perp & \text{muutoin.} \end{cases}$$

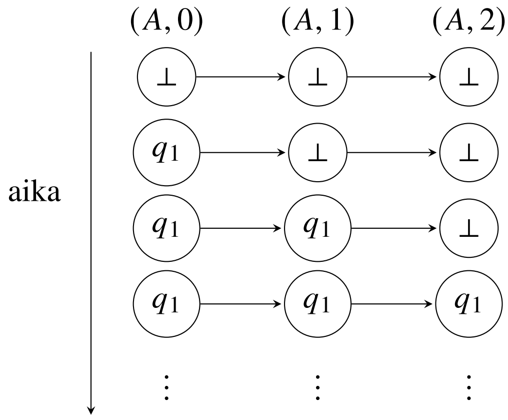
Tarkastellaan automaatin A laskentaa syötteellä $w = a_0 \dots a_{n-1}$ (eli tarkemmin sanaa vastaavaalla Σ-merkityllä suunnatulla polulla). Ensimmäinen automaatti $(A, 0)$ suorittaa laskennan ensimmäisen askeleen. Jokainen muu automaatti (A, i) alkaa odotustilasta $\perp$, jossa se odottaa kunnes sitä edeltävä automaatti $(A, i-1)$ on tilassa q_j, johon B olisi päätynyt juuri ennen solmun a_i symbolin lukemista. Tällöin (A, i) simuloi automaatin B laskentaa symbolilla a_i tilassa q_j.

Lopulta viimeinen automaatti $(A, n-1)$ päätyy siis tilaan, johon äärellinen automaatti B päätyisi luettuaan koko sanan w. Hajautettu automaatti A siis hyväksyy sanan w jos ja vain jos äärellinen automaatti B hyväksyy sen.

Todistetaan sitten, että voimme simuloida hajautettua automaattia äärellisellä automaatilla. Olkoon $A = (Q, q_0, (\delta_a)_{a \in \Sigma}, F)$ unohtava hajautettu automaatti. Muodostetaan sitä simuloiva äärellinen automaatti $B = (P, \Sigma, p_0, \tau, H)$, missä $P = \mathcal{P}(Q)$, $p_0 = \emptyset$, $H = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ ja

$$\tau(p, a) = \{q_0\} \cup \begin{cases} \{\delta_a(\emptyset)\} & \text{jos } p = p_0 \\ \{\delta_a(\{q\}) \mid q \in p\} & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Olkoon G Σ-merkitty suunnattu polku ja $w = a_0 \dots a_{n-1}$ sitä vastaava sana. Todistetaan induktiolla, että niiden tilojen joukko, joissa automaatti (A, i) käy laskennansa



Kuva 4.2. Esimerkin 2.2 äärellistä automaattia simuloivan hajautetun automaatin A laskenta sanalla abb. Koska viimeisen solmun automaatti $(A, 2)$ käy hyväksyvässä tilassa q_1, sana hyväksytään.

aikana, on sama kuin se tila, johon automaatti B siirtyy luettuaan sanan w symbolin a_i kaikilla $0 \leq i \leq n-1$.

Alkuaskel. Automaatti $(A, 0)$ aloittaa laskennansa tilasta q_0, minkä jälkeen se siirtyy pysyvästi tilaan $\delta_{a_0}(\emptyset)$, jolloin sen tilojen joukko on $\{q_0, \delta_{a_0}(\emptyset)\}$. Vastaavasti automaatti B siirtyy luettuaan symbolin a_0 tilaan $\tau(\emptyset, a_0) = \{q_0\} \cup \{\delta_a(\emptyset)\} = \{q_0, \delta_{a_0}(\emptyset)\}$.

Induktioaskel. Oletetaan, että väite pätee automaatilla (A, i) jollain $0 \leq i \leq n-2$. Automaatti $(A, i+1)$ aloittaa niin ikään laskennansa tilasta q_0 ja hetkellä $t+1$ siirtyy pysyvästi tilaan $\delta_{a_{i+1}}(\{q_t^i\})$, missä q_t^i on automaatin (A, i) tila hetkellä t. Induktio-oletuksen nojalla automaatin B tila sen luettua symbolin a_i on sama, kuin automaatin (A, i) laskennassansa käymien tilojen joukko; merkitään tätä joukkoa S. Tällöin $\tau(S, a_{i+1}) = \{q_0\} \cup \{\delta_{a_{i+1}}(\{q_t^i\}) \mid t \in \mathbb{N}\}$, joka on täsmälleen automaatin $(A, i+1)$ laskennassaan käymien tilojen joukko.

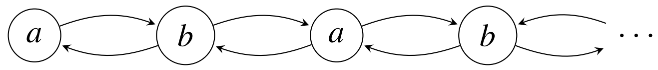
Tästä seuraa, että automaatti $(A, n-1)$ käy hyväksyvässä tilassa jos ja vain jos B siirtyy johonkin hyväksyvään tilaan $q \in H$ luettuaan symbolin a_{n-1}. Siis hajautettu automaatti A hyväksyy sanan w jos ja vain jos äärellinen automaatti B hyväksyy sen. $\square$

4.3 Hajautetut automaatit äärettömillä sanoilla

Äärellisten sanojen tulkintaa suunnattuina polkuina voidaan yleistää luonnollisella tavalla ω-sanoille tulkitsemalla ne äärettömiksi suunnatuiksi poluiksi. Hajautetut automaatit vaativat kuitenkin lisää rakennetta näille poluille, jotta automaattien laskenta pystyy saamaan tarpeeksi informaatiota sanan rakenteesta.

Määritelmä 4.7. *Σ-merkitty ääretön suunnattu polku* on rakenne $G = (V, E_r, E_l, \lambda)$ missä E_r ja λ ovat kuin Σ-merkityssä suunnatussa polussa, mutta solmujoukko V on ääretön, V ei sisällä päätesolmua ja $E_l = \{(b, a) \mid (a, b) \in E_r\}$.

Määritelmän ideana on käyttää molempiin suuntiin kulkevia särmiä siirtämään ääretön määrä tietoa ω-sanan rakenteesta alkusolmuun. Tällöin automaatin $(A, 0)$ laskentaan voidaan koostaa tieto "koko" laskennasta tuolla sanalla, ja hyväksymisehto voidaan määritellä helposti tuon automaatin tilojen perusteella.



Kuva 4.3. ω-sana $abab\ldots$ tulkittu äärettömänä Σ-merkittynä suunnattuna polkuna. Oikealle vievät särmät kuvaavat relaatiota E_r ja vasemmalle vievät relaatiota E_l.

Koska nyt käytössä on siis kaksi eri särmärelaatiota, tarkastelemme 2-relationaalisia hajautettuja automaatteja. Automaattien täytyy lisäksi pystyä erottamaan, mitkä tilat saapuvat vasemmalta ja mitkä oikealta. Niiden siirtymäfunktio on siksi muotoa $\delta_a : Q \times \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) \to Q$ ja unohtavien vastaavasti $\delta_a : \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) \to Q$, missä ensimmäinen joukko perheestä $\mathcal{P}(Q)$ kuvastaa vasemmalta (eli relaatiosta E_r) saapuvaa tilojen joukkoa ja toinen oikealta (eli relaatiosta E_l) saapuvaa tilojen joukkoa.

Määritelmä 4.8. 2-relationaalinen unohtava hajautettu automaatti

$$A = (Q, q_0, (\delta_a)_{a \in \Sigma}, F)$$

hyväksyy Σ-merkityn äärettömän suunnatun polun G, jos alkusolmun automaatti $(A, 0)$ käy äärettömän monta kertaa jossain hyväksyvässä tilassa $q \in F$.

Tällä lisärakenteella varustetut unohtavat hajautetut automaatit voivat simuloida deterministisiä Büchin automaatteja edellistä todistusta muistuttavalla tavalla.

Lause 4.2. *Jos ω-kieli $L \subseteq \Sigma^\omega$ on tunnistettavissa deterministisellä Büchin automaatilla, se on myös tunnistettavissa unohtavalla 2-relationaalisella hajautetulla automaatilla.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen Büchin automaatti. Muodostetaan sitä simuloiva hajautettu automaatti $A = (Q \cup \{\bot\}, \bot, (\delta_a)_{a \in \Sigma}, F)$, missä

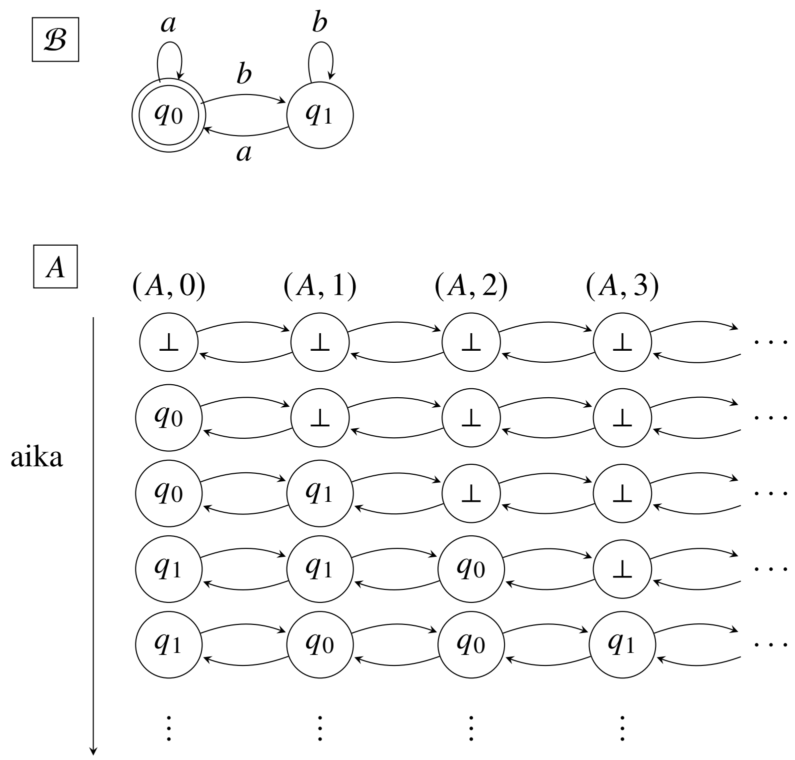
$$\delta_a(S_l, S_r) = \begin{cases} \delta(q_0, a) & \text{jos } S_l = \emptyset \text{ ja } S_r = \{\bot\} \\ q_r & \text{jos } S_l = \emptyset \text{ ja } S_r = \{q_r\} \text{ jollain } q \in Q \\ \bot & \text{jos } S_l = S_r = \{\bot\} \\ \delta(q_l, a) & \text{jos } S_l = \{q_l\} \text{ jollain } q_l \in Q \text{ ja } S_r = \{\bot\} \\ q_r & \text{jos } S_l \neq \emptyset \text{ ja } S_r = \{q_r\} \text{ jollain } q_r \in Q. \end{cases}$$

Siirtymäfunktion kaksi ensimmäistä ehtoa kuvaavat alkusolmun toimintaa: se suorittaa laskennan ensimmäisen askeleen, minkä jälkeen se yksinkertaisesti aina kopioi seuraavan automaatin tilan $q_r \in Q$. Viimeiset kolme ehtoa taas kuvaavat muita automaatteja: niiden tehtävänä on ensin odottaa, kunnes edeltävä automaatti on laskenut tilan q_l, sitten suorittaa sen ja oman solmun symbolin a perusteella yksi laskennan askel, ja lopuksi jäädä aina kopioimaan seuraavan automaatin tilaa $q_r \in Q$. Näin saamme palautettua kaiken tiedon automaatin $\mathcal{B}$ laskennan tiloista alkusolmuun.

On huomattava, että koska odotustilaa $\bot$ ei haluta kopioida, niin jokainen solmu suorittaa varsinaisen laskentansa teknisesti kaksi kertaa odottaessaan seuraavan solmun laskennan tulosta, mutta tämä "turha" askel ei kuitenkaan oleellisesti vaikuta laskennan lopputulokseen.

Koska millä tahansa syötteellä $\alpha \in \Sigma^\omega$ automaatin $(A, 0)$ laskennan tilojen joukko on siis sama kuin automaatin $\mathcal{B}$ laskennan tilojen joukko, niin A hyväksyy ω-sanan α jos ja vain jos $\mathcal{B}$ hyväksyy sen. Täten automaatit tunnistavat täsmälleen samat kielet. $\square$

Unohtavilla hajautetuilla automaateilla voitaisiin (sopivilla hyväksymisehdon muunnoksilla) samanlaisella tavalla simuloida muita äärellisiä automaatteja vastaavia ω-automaatteja, kuten deterministisiä Mullerin automaatteja, jotka ovat tunnistusvoimaltaan yhtä voimakkaita epädeterminististen Büchin automaattien kanssa. [2, s. 7]. Tällöin unohtavat hajautetut automaatit voisivat tunnistaa myös kaikki epädeterminististen Büchin automaattien tunnistamat kielet.



Kuva 4.4. Kielen $\{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid a \in \mathrm{Inf}(\alpha)\}$ tunnistava deterministinen Büchin automaatti $\mathcal{B}$ ja sitä simuloivan hajautetun automaatin A laskenta ω-sanalla $abab\ldots$. Koska alkusolmun automaatti $(A, 0)$ käy äärettömän monta kertaa hyväksyvässä tilassa q_0, sana hyväksytään.

Lähteet

[1] Anderson, J. *Automata Theory with Modern Applications*. Cambridge University Press, 2006.

[2] Farwer, B. *ω-Automata.* Teoksessa Automata, Logics, and Infinite Games: A Guide to Current Research (toim. Grädel, E., Thomas, W. ja Wilke, T.). Springer, 2002.

[3] Mukund, M. *Finite-state automata on infinite inputs*. Teoksessa Modern Applications of Automata Theory (toim. D'Souza, D. ja Shankar, P.). IISc Press, 2012.

[4] Kuusisto, A. ja Reiter, F. *Emptiness problems for distributed automata*. Information and Computation 272:2020. doi:10.1016/J.IC.2019.104503.