Noora Haljoki

RESIPROOKKIMATRIISEISTA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Huhtikuu 2024

Tiivistelmä

Noora Haljoki: Resiprookkimatriiseista
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2024

Tässä tutkielmassa käsitellään resiprookkimatriiseja, niiden ominaisuuksia ja niihin liittyviä sovelluksia. Tutkielman tavoitteena on antaa lukijalle käsitys siitä, mitä resiprookkimatriisit ovat ja miten niitä voidaan hyödyntää. Koska tutkielma perustuu kokonaisuudessaan resiprookkimatriiseihin, edellytetään lukijalta matriisilaskennan alkeita sekä peruslaskutoimitusten hallintaa.

Tutkielman alussa luvussa 2 määritellään resiprookkimatriisi ja käydään läpi sen tärkeimmistä ominaisuuksista konsistenttius ja λ-konsistenttius. Näiden määritelmien avulla voidaan tarkistaa, toteuttaako resiprookkimatriisi konsistenttiuden tai λ-konsistenttiuden ehtoja. Määritelmien sisäistämisen helpottamiseksi käydään läpi konkreettisia esimerkkejä molemmista.

Luvussa 3 käsitellään niitä resiprookkimatriisin ominaisuuksia, jotka liittyvät Hadamardin tuloon ja Hadamardin potenssiin. Käydään läpi molempien määritelmät sekä Hadamardin tulon ominaisuuksia. Lisäksi luvussa esitetään useita resiprookkimatriiseihin liittyviä lauseita todistuksineen.

Luvussa 4 käydään lyhyesti läpi analyyttinen hierarkiaprosessi (AHP) ja sen vaiheet. Aiheen ymmärtämisen helpottamiseksi käydään läpi myös esimerkki AHP:sta. Lisäksi luvussa määritellään konsistenssi-indeksi ja konsistenssisuhde, joiden avulla voidaan tehdä päätelmiä siitä, voidaanko AHP:n mukainen päätöksentekoprosessi hyväksyä.

Lopuksi luvussa 5 esitetään yksi sovellusesimerkki resiprookkimatriiseihin liittyen. Sovelluksen aiheena on eri maiden valuuttakurssit ja niiden ilmaiseminen toisiinsa nähden resiprookkimatriisin avulla. Luvussa myös tulkitaan eri valuuttakursseista muodostettua resiprookkimatriisia.

Avainsanat: resiprookkimatriisit, konsistenttius, λ-konsistenttius, Hadamardin tulo, Hadamardin potenssi, analyyttinen hierarkiaprosessi

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehtyä resiprookkimatriiseihin, niiden ominaisuuksiin ja niihin liittyviin sovelluksiin. Koska tutkielma perustuu kokonaisuudessaan resiprookkimatriiseihin, edellytetään lukijalta matriisilaskennan alkeita sekä peruslaskutoimitusten hallintaa.

Luvussa 2 määritellään resiprookkimatriisi ja käydään läpi sen tärkeimmistä ominaisuuksista konsistenttius ja λ-konsistenttius. Konsistenttiuden molempiin määritelmiin liittyen käydään läpi useita esimerkkejä, jotta lukijan on helpompi sisäistää ne ja ymmärtää niiden eroja.

Luvussa 3 käsitellään niitä resiprookkimatriisin ominaisuuksia, jotka liittyvät Hadamardin tuloon ja Hadamardin potenssiin. Käydään läpi molempien määritelmät sekä Hadamardin tulon ominaisuuksia. Lisäksi luvussa esitetään useita resiprookkimatriiseihin liittyviä lauseita todistuksineen.

Luvussa 4 käydään lyhyesti läpi analyyttinen hierarkiaprosessi (AHP) ja sen vaiheet. AHP on yksinkertaisuutensa takia levinnyt laajasti eri toimialoille, kuten taloustieteen ja lääketieteen aloille. Aiheen ymmärtämisen helpottamiseksi käydään läpi yksi esimerkki AHP:sta. Lisäksi luvussa määritellään konsistenssi-indeksi ja konsistenssisuhde, joiden avulla voidaan tehdä päätelmiä siitä, voidaanko AHP:n mukainen päätöksentekoprosessi hyväksyä.

Lopuksi luvussa 5 esitetään yksi sovellusesimerkki resiprookkimatriiseihin liittyen. Sovelluksen aiheena on eri maiden valuuttakurssit ja niiden ilmaiseminen toisiinsa nähden resiprookkimatriisin avulla. Luvussa myös tulkitaan eri valuuttakursseista muodostettua resiprookkimatriisia eli käydään läpi, mitä huomioita muodostetusta resiprookkimatriisista voidaan tehdä.

Tutkielman päälähteinä on käytetty M. Daigon, T. Obatan & S. Shiraishin artikkelia Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP [2] sekä Thomas L. Saatyn ja Luis G. Vargasin kirjaa Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy, 2nd ed. [7]. Hadamardin tulon ja potenssin lähteinä on käytetty E. Millionin artikkelia The Hadamard Product [4] sekä T. Jainin artikkelia Hadamard powers of some positive matrices [3]. Näiden lisäksi on käytetty muutamia muita lähteitä tukemaan ja laajentamaan päälähteiden sisältöä.

2 Resiprookkimatriisin määrittely ja perusominaisuuksia

2.1 Tarvittavien käsitteiden määritelmiä

Luvussa 2 esitetään pääaiheen kannalta olennaisia määritelmiä. Tässä pykälässä määritellään resiprookkimatriisi (vrt. [2, s. 405]).

Määritelmä 2.1. Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reaalinen matriisi. Matriisi on positiivinen, jos

$$a_{ji} > 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Positiivinen matriisi on resiprookkimatriisi, jos

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Lause 2.1. *Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ resiprookkimatriisi. Tällöin*

1. *resiprookkimatriisin $\boldsymbol{A}$ diagonaalialkiot ovat kaikki ykkösiä ja*

2. *resiprookkimatriisin $\boldsymbol{A}$ transpoosi $\boldsymbol{A^T}$ on myös resiprookkimatriisi.*

Todistus. Todistetaan ensin ensimmäinen kohta ja sen jälkeen toinen kohta.

1. Määritelmän 2.1 mukaan matriisi on resiprookkimatriisi, jos ja vain jos

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

   Jos $i = j$, saadaan yhtälö muotoon

$$a_{ii} = \frac{1}{a_{ii}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

   Ratkaisemalla tästä a_{ii}, saadaan

$$a_{ii}^2 = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

   Edelleen $a_{ii} = \sqrt{1} = 1$. On siis todistettu, että resiprookkimatriisin diagonaalialkiot ovat kaikki ykkösiä.

2. Resiprookkimatriisit ovat yleisesti muotoa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tällöin resiprookkimatriisin $\boldsymbol{A}$ transpoosi $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ on muotoa

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_{12}} & \dots & \frac{1}{a_{1n}} \\ a_{12} & 1 & \dots & \frac{1}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

joka on myös resiprookkimatriisi (määritelmä 2.1).

Siis on todistettu, että resiprookkimatriisin diagonaalialkiot ovat kaikki ykkösiä ja resiprookkimatriisin transpoosi on myös resiprookkimatriisi. □

2.2 Resiprookkimatriisin ominaisuuksia

Edellisessä pykälässä 2.1 määriteltiin resiprookkimatriisi. Nyt tutustutaan resiprookkimatriisin ominaisuuksiin paremmin ja etenkin perehdytään matriisin konsistenttiuteen. Tässä pykälässä esitetään useampi tapa, jonka avulla voi todistaa matriisin konsistenttiuden, sekä annetaan esimerkkejä eri tavoista.

Määritelmä 2.2 (vrt. [2, s. 405])**.** Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ resiprookkimatriisi. Matriisin $\boldsymbol{A}$ sanotaan olevan konsistentti, jos

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik} \qquad \forall i, j, k = 1, \dots, n.$$

Seuraavaksi käydään läpi kaksi esimerkkiä matriisin konsistenttiudesta. Ensimmäisen esimerkin matriisi on inkonsistentti ja toisen esimerkin konsistentti.

Esimerkki 2.1. Tutkitaan, onko matriisi

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{4} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

konsistentti. Huomataan, että

$$a_{12}a_{23} = 4 \cdot 2 \neq 3 = a_{13}.$$

Siis matriisi $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ ei ole konsistentti määritelmän 2.2 mukaan.

Esimerkki 2.2. Matriisi

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}526 & 0{,}208 \\ 1{,}902 & 1 & 0{,}395 \\ 4{,}815 & 2{,}532 & 1 \end{pmatrix}$$

on likimain konsistentti (vrt. [1, s. 3973]). Huomataan, että

- $a_{12}a_{21} = 0{,}526 \cdot 1{,}902 \approx 1 = a_{11} \approx 0{,}208 \cdot 4{,}815 = a_{13}a_{31}$,
- $a_{12}a_{22} = 0{,}526 \cdot 1 = 0{,}526 = a_{12} \approx 0{,}208 \cdot 2{,}532 = a_{13}a_{32}$,
- $a_{13}a_{33} = 0{,}208 \cdot 1 = 0{,}208 = a_{13} \approx 0{,}526 \cdot 0{,}395 = a_{12}a_{23}$,
- $a_{21}a_{11} = 1{,}902 \cdot 1 = 1{,}902 = a_{21} \approx 0{,}395 \cdot 4{,}815 = a_{23}a_{31}$,
- $a_{21}a_{12} = 1{,}902 \cdot 0{,}526 \approx 1 = a_{22} \approx 0{,}395 \cdot 2{,}532 = a_{23}a_{32}$,
- $a_{23}a_{33} = 0{,}395 \cdot 1 = 0{,}395 = a_{23} \approx 1{,}902 \cdot 0{,}208 = a_{21}a_{13}$,
- $a_{31}a_{11} = 4{,}815 \cdot 1 = 4{,}815 = a_{31} \approx 2{,}532 \cdot 1{,}902 = a_{32}a_{21}$,
- $a_{32}a_{22} = 2{,}532 \cdot 1 = 2{,}532 = a_{32} \approx 4{,}815 \cdot 0{,}526 = a_{31}a_{12}$ ja
- $a_{31}a_{13} = 4{,}815 \cdot 0{,}208 \approx 1 = a_{33} \approx 2{,}532 \cdot 0{,}395 = a_{32}a_{23}$.

Siis määritelmän 2.2 mukaan matriisi $A_{3\times 3}$ on konsistentti.

Matriisin konsistenttiuden määrittäminen edellä esitetyllä tavalla voi olla työlästä. Alun perin konsistenttius onkin määritelty toisella tavalla, minkä takia esitetään myös tämä tapa. Seuraavaksi esitetyn määritelmän 2.3 ja lauseen 2.2 avulla voi kenties todistaa helpommin, onko matriisi konsistentti vai ei. Käydään myös läpi kaksi esimerkkiä näihin liittyen.

Määritelmä 2.3 (vrt. [2, s. 405])**.** Resiprookkimatriisi $A_{n\times n}$ on λ-konsistentti, jos sen suurin ominaisarvo on yhtäsuuri kuin n eli $\lambda_{\max} = n$.

Lause 2.2. *Olkoon $A_{n\times n}$ positiivinen resiprookkimatriisi. Tällöin $A_{n\times n}$ on konsistentti, jos ja vain jos matriisin $A_{n\times n}$ karakteristinen polynomi on muotoa*

$$P_{A_{n\times n}}(\lambda) = \lambda^n - n \cdot \lambda^{n-1}.$$

Todistus (vrt. [2, s. 405]). Todistetaan ensin implikaatio vasemmalta oikealle. Oletetaan siis, että matriisi $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ on konsistentti. Tällöin

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= a_{21}\dots a_{n1} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{12}(1-\lambda) & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{12} & \dots & a_{1n}(1-\lambda) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} n-\lambda & n-\lambda & \dots & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (n-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (n-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1} \\
&= \pm(\lambda^n - n\cdot\lambda^{n-1}).
\end{aligned}$$

Eli karakteristinen yhtälö on muotoa $\pm(\lambda^n - n\cdot\lambda^{n-1}) = 0$ ja edelleen karakteristinen polynomi on muotoa $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_{n\times n}}(\lambda) = \pm(\lambda^n - n\cdot\lambda^{n-1})$.

Myös käänteinen implikaatio on voimassa, mutta sen todistus joudutaan sivuuttamaan. $\square$

Lause 2.3. *Jokainen (määritelmän 2.2 mielessä) konsistentti matriisi on myös λ-konsistentti.*

Todistus. Todistetaan implikaatio vasemmalta oikealle. Oletetaan, että matriisi $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ on konsistentti, jolloin sen karakteristinen polynomi on lauseen 2.2 mukaan muotoa $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_{n\times n}}(\lambda) = \lambda^n - n\cdot\lambda^{n-1}$. Tällöin karakteristisella yhtälöllä $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}_{n\times n}}(\lambda) = 0$ on ratkaisut $\lambda = 0$ ja $\lambda = n$. Siis matriisin $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ suurin ominaisarvo on n, mistä seuraa, että $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ on λ-konsistentti (määritelmä 2.3).

Myös käänteinen implikaatio on voimassa, mutta sen todistus joudutaan sivuuttamaan. □

Esimerkki 2.3. Tutkitaan esimerkin 2.1 matriisia uudelleen. Siis

$$\boldsymbol{A}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{4} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aikaisemmin todistettiin, että matriisi ei ole konsistentti määritelmän 2.2 mukaan. Nyt tarkoituksena on tutkia, onko matriisi λ-konsistentti käyttämällä määritelmää 2.3. Aloitetaan muodostamalla matriisin karakteristinen polynomi. Saadaan

$$\begin{aligned}\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{3\times 3}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -3 \\ -\frac{1}{4} & \lambda - 1 & -2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)(\lambda - 1) + 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] + 4\left[-\tfrac{1}{4}(\lambda - 1) + 2\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)\right] \\ &\quad - 3\left[-\tfrac{1}{4}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3}(\lambda - 1)\right] \\ &= \lambda^3 - 3\cdot\lambda^2 - \tfrac{25}{24}.\end{aligned}$$

Ratkaistaan seuraavaksi karakteristisen polynomin juuret, mikä tapahtuu karakteristisen yhtälön avulla. Siis karakteristinen yhtälö on muotoa

$$\lambda^3 - 3\cdot\lambda^2 - \tfrac{25}{24} = 0.$$

Ratkaisemalla karakteristisen yhtälön nollakohdat, suurimmaksi ominaisarvoksi saadaan $\lambda \approx 3{,}1078 \neq 3$, joten matriisi $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ ei ole λ-konsistentti määritelmän 2.3 mukaan.

Esimerkki 2.4. Matriisi

$$\boldsymbol{A}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

on λ-konsistentti määritelmän 2.3 mukaan. Osoitetaan tämä ratkaisemalla matriisin $\boldsymbol{A}_{4\times 4}$ ominaisarvot. Muodostetaan ensin matriisin karakteristinen polynomi laskemalla matriisin $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{4\times 4}$ determinantti.

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{4\times 4}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \lambda - 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \lambda - 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \overbrace{(\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{2}{3} & \lambda - 1 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \lambda - 1 \end{vmatrix}}^{(2.1)} + \overbrace{2 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{3} & \lambda - 1 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \lambda - 1 \end{vmatrix}}^{(2.2)}$$

$$\underbrace{- 3 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & -2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix}}_{(2.3)} + \underbrace{4 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \lambda - 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix}}_{(2.4)}.$$

Lasketaan erikseen jokaisen saadun 3×3 -matriisin determinantti:

$$\begin{aligned}(2.1) \quad &= (\lambda - 1) \cdot \Big((\lambda - 1)\big[(\lambda - 1)(\lambda - 1) + \tfrac{4}{3} \cdot \big(-\tfrac{3}{4}\big)\big] + \tfrac{3}{2}\big[-\tfrac{2}{3}(\lambda - 1) + \tfrac{4}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\big)\big] \\ &\qquad - 2\big[-\tfrac{2}{3} \cdot \big(-\tfrac{3}{4}\big) + \tfrac{1}{2}(\lambda - 1)\big]\Big) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.2) \quad &= 2 \cdot \Big(-\tfrac{1}{2}\big[(\lambda - 1)(\lambda - 1) + \tfrac{4}{3} \cdot \big(-\tfrac{3}{4}\big)\big] + \tfrac{3}{2}\big[-\tfrac{1}{3} \cdot (\lambda - 1) + \tfrac{4}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{4}\big)\big] \\ &\qquad - 2\big[-\tfrac{1}{3} \cdot \big(-\tfrac{3}{4}\big) + \tfrac{1}{4}(\lambda - 1)\big]\Big) = -\lambda^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.3) \quad &= -3 \cdot \Big(-\tfrac{1}{2}\big[-\tfrac{2}{3}(\lambda - 1) + \tfrac{4}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\big)\big] - (\lambda - 1)\big[-\tfrac{1}{3}(\lambda - 1) \\ &\qquad + \tfrac{4}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{4}\big)\big] - 2\big[-\tfrac{1}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\big) + \tfrac{2}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{4}\big)\big]\Big) = -\lambda^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.4) \quad &= 4 \cdot \Big(-\tfrac{1}{2}\big[-\tfrac{2}{3} \cdot \big(-\tfrac{3}{4}\big) + \tfrac{1}{2}(\lambda - 1)\big] - (\lambda - 1)\big[-\tfrac{1}{3} \cdot \big(-\tfrac{3}{4}\big) \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}(\lambda - 1)\big] - \tfrac{3}{2}\big[-\tfrac{1}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\big) + \tfrac{2}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{4}\big)\big]\Big) = -\lambda^2.\end{aligned}$$

Nämä yhdistämällä saadaan alkuperäisen matriisin $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{4\times 4}$ determinantiksi

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{4\times 4}) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3.$$

Ratkaistaan yhtälöstä $\lambda^4 - 4\lambda^3 = 0$ matriisin $\boldsymbol{A}_{4\times 4}$ ominaisarvot ja todetaan matriisin λ-konsistenttius sitä kautta. Koska

$$\begin{gathered}\lambda^4 - 4\lambda^3 = 0\\ \lambda^3 \cdot (\lambda - 4) = 0\\ \lambda = 0 \quad \text{tai} \quad \lambda = 4,\end{gathered}$$

$\lambda_{\max} = 4 = n$, joten matriisi $\boldsymbol{A}_{4\times 4}$ on λ-konsistentti määritelmän 2.3 mukaan.

Matriisin konsistenttiuden voi todeta myös tutkimalla sen pääalimatriisien determinanttia. Seuraava lause 2.4 kertoo tavan matriisin konsistenttiuden määrittämiseen 3×3-pääalimatriisien determinantin avulla.

Lause 2.4 (vrt. [5, s. 1841])**.** *Resiprookkimatriisi* $\boldsymbol{A}$ *on konsistentti, jos ja vain jos sen jokaisen* 3×3*-pääalimatriisin determinantti on nolla.*

Todistus. Todistetaan ensin implikaatio vasemmalta oikealle. Oletetaan matriisin $\boldsymbol{A}$ olevan konsistentti ja tarkastellaan sen mielivaltaista 3×3-pääalimatriisia

$$\boldsymbol{A}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ \frac{1}{a_{ij}} & 1 & a_{jk} \\ \frac{1}{a_{ik}} & \frac{1}{a_{jk}} & 1 \end{pmatrix},$$

joka on saatu matriisista $\boldsymbol{A}$ poistamalla siitä kaikki muut rivit ja sarakkeet paitsi ne, joiden järjestysnumero on i, j tai k. Tällöin sen determinantiksi saadaan

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}_{3\times 3} &= 1\big(1 \cdot 1 - a_{jk} \cdot \tfrac{1}{a_{jk}}\big) - a_{ij}\big(\tfrac{1}{a_{ij}} \cdot 1 - a_{jk} \cdot \tfrac{1}{a_{ik}}\big) + a_{ik}\big(\tfrac{1}{a_{ij}} \cdot \tfrac{1}{a_{jk}} - 1 \cdot \tfrac{1}{a_{ik}}\big)\\ &= 1 - 1 - 1 + \tfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \tfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} - 1\\ &= \tfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \tfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} - 2.\end{aligned}$$

Määritelmän 2.2 mukaan matriisi $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ on konsistentti, jos $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$. Kun sijoitetaan yllä olevaan lausekkeeseen tämä, saadaan

$$\tfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \tfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} - 2 = \tfrac{a_{ik}}{a_{ik}} + \tfrac{a_{ik}}{a_{ik}} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Todistetaan seuraavaksi implikaatio oikealta vasemmalle. Oletetaan siis, että resiprookkimatriisin $\boldsymbol{A}$ kaikkien 3×3-pääalimatriisien determinantti on nolla. Valitaan mielivaltaiset indeksit i, j ja k, missä $1 \leq i, j, k \leq n$. Tarkastellaan matriisin $\boldsymbol{A}$ pääalimatriisia $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$, joka on saatu matriisista $\boldsymbol{A}$ poistamalla siitä kaikki muut rivit ja sarakkeet paitsi ne, joiden järjestysnumero on i, j tai k. Samaan tapaan kuin edellä, saadaan determinantiksi

$$\det \boldsymbol{A}_{3\times 3} = \tfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \tfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} - 2 = 0.$$

Muokataan yhtälöä eri muotoon, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\tfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \tfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} - 2 = 0 \\
&\tfrac{(a_{ij}a_{jk})^2}{a_{ik}a_{ij}a_{jk}} + \tfrac{a_{ik}^2}{a_{ik}a_{ij}a_{jk}} - \tfrac{2a_{ik}a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}a_{ij}a_{jk}} = 0 \\
&(a_{ij}a_{jk})^2 + a_{ik}^2 - 2a_{ik}a_{ij}a_{jk} = 0.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan ratkaista muuttuja a_{ik} käyttämällä toisen asteen ratkaisukaavaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
a_{ik} &= \frac{2a_{ij}a_{jk} \pm \sqrt{(-2a_{ij}a_{jk})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a_{ij}a_{jk})^2}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{2a_{ij}a_{jk} \pm \sqrt{0}}{2} \\
&= a_{ij}a_{jk}.
\end{aligned}$$

Koska $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ kaikilla indekseillä i, j ja k, resiprookkimatriisi on konsistentti määritelmän 2.2 mukaan. Siis on todistettu, että resiprookkimatriisi $\boldsymbol{A}$ on konsistentti, jos ja vain jos sen jokaisen 3×3-pääalimatriisin determinantti on nolla. $\square$

3 Hadamardin tulo ja potenssi

Luvussa 3 käsitellään niitä resiprookkimatriisin ominaisuuksia, jotka liittyvät Hadamardin tuloon ja Hadamardin potenssiin. Pykälässä 3.1 käydään läpi Hadamardin tulon määritelmä ja sen ominaisuuksia, kun taas pykälässä 3.2 keskitytään Hadamardin potenssiin.

3.1 Hadamardin tulo

Hadamardin tulo (tunnetaan myös nimellä Schurin tulo) on nimetty joko ranskalaisen matemaatikon Jacques Hadamardin tai saksalaisen matemaatikon Issai Schurin mukaan. Hadamardin tulo poikkeaa tavanomaisesta matriisien tulosta. Hadamardin tulo voidaan määritellä vain kahdelle samankokoiselle matriisille. Matriisien ei tarvitse olla neliömatriiseja, mutta niiden pitää olla keskenään samankokoisia. Hadamardin tulosta saatu matriisi $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ on myös samankokoinen, kuin alkuperäiset matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$.

Hadamardin tulo on liitännäinen ja distributiivinen. Toisin kuin tavanomaisten matriisien tulo, Hadamardin tulo on myös vaihdannainen. Nämä, ja muita ominaisuuksia, todistetaan alempana.

Määritelmä 3.1. (vrt. [4, s. 1]). Olkoon $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ja $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ reaalisia matriiseja. Hadamardin tulo on $n \times m$ -matriisi $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$, missä $[\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}]_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

Esimerkki 3.1. Matriisien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Hadamardin tulo on

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 0 \cdot (-5) & 5 \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-2) & 3 \cdot 4 & 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 15 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hadamardin tuloa ei voi määrittää matriiseille, joilla on eri dimensiot. Seuraava lause 3.1 kertoo lisää Hadamardin tulon ominaisuuksia.

Lause 3.1. *(vrt. [4, s. 1]). Olkoon $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{O} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ja $k \in \mathbb{R}$ skalaari. Tässä $\boldsymbol{J}$ on ykkösmatriisi, eli sen kaikki alkiot ovat ykkösiä, ja $\boldsymbol{O}$ on nollamatriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Tällöin Hadamardin tulolle on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

1. $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A}$,

2. $\boldsymbol{A} \circ (\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{C}$,

3. $\boldsymbol{A} \circ (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{C})$,

4. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C})$,

5. $(k\boldsymbol{A}) \circ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \circ (k\boldsymbol{B}) = k(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$,

6. $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J} \circ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,

7. $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} \circ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

Todistus. Nämä ominaisuudet saadaan todistettua määritelmän 3.1 ja kunnan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ominaisuuksien avulla.

1. $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = [a_{ij}b_{ij}] = [b_{ij}a_{ij}] = \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A}$,

2. $\boldsymbol{A} \circ (\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \circ [b_{ij}c_{ij}] = [a_{ij}(b_{ij}c_{ij})] = [(a_{ij}b_{ij})c_{ij}] = [a_{ij}b_{ij}] \circ \boldsymbol{C}$
   $= (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{C}$,

3. $\boldsymbol{A} \circ (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \circ [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}b_{ij} + a_{ij}c_{ij}] = [a_{ij}b_{ij}]$
   $+ [a_{ij}c_{ij}] = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{C})$,

4. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{C} = [a_{ij} + b_{ij}] \circ \boldsymbol{C} = [(a_{ij} + b_{ij})c_{ij})] = [a_{ij}c_{ij} + b_{ij}c_{ij}]$
   $= [a_{ij}c_{ij}] + [b_{ij}c_{ij}] = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C})$,

5. $(k\boldsymbol{A}) \circ \boldsymbol{B} = [(ka_{ij})b_{ij}] = [a_{ij}(kb_{ij})] = \boldsymbol{A} \circ (k\boldsymbol{B}) = [a_{ij}(kb_{ij})] = [k(a_{ij}b_{ij})]$
   $= k(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$,

6. $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{J} = [a_{ij} \cdot 1] = [1 \cdot a_{ij}] = \boldsymbol{J} \circ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,

7. $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{O} = [a_{ij} \cdot 0] = [0 \cdot a_{ij}] = \boldsymbol{O} \circ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. □

Lause 3.2. *Matriisien joukko $\mathbb{R}^{n \times m}$ varustettuna yhteenlaskulla ja Hadamardin tulolla muodostaa vaihdannaisen renkaan.*

Todistus. Määritetään matriisien yhteenlasku

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

ja skalaarikertolasku

$$k\boldsymbol{A} = k[a_{ij}] = [k \cdot a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Osoitetaan ensin, että $(\mathbb{R}^{n \times m}, +)$ on Abelin ryhmä:

i. laskutoimitus + on liitännäinen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}+[b_{ij}+c_{ij}] = [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}]+\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C},\end{aligned}$$

ii. laskutoimituksella $\circ$ on neutraalialkio $e \in \mathbb{R}^{n\times m}$: neutraalialkio on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia eli nollamatriisi $\boldsymbol{O}$, koska $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,

iii. matriisin $\boldsymbol{A}$ käänteisalkio on matriisi $-\boldsymbol{A} = [-a_{ij}]$, koska $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, missä matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $-\boldsymbol{A}$ ovat muotoa

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad -\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -\frac{1}{a_{12}} & -1 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{a_{1n}} & -\frac{1}{a_{2n}} & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

iv. laskutoimitus + on vaihdannainen: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = [a_{ij}+b_{ij}] = [b_{ij}+a_{ij}] = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

Kohdista (i.–iv.) seuraa, että $(\mathbb{R}^{n\times m}, +)$ on Abelin ryhmä. Kertolaskun $\cdot$ vaihdannaisuus on osoitettu lauseen 3.1 kohdassa 1 ja liitännäisyys kohdassa 2. Joukon $\mathbb{R}^{n\times m}$ neutraalialkio/ykkösalkio kertolaskun suhteen on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, eli ykkösmatriisi $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, sillä $\boldsymbol{J} \circ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}$. Osittelulakien voimassaolo on osoitettu lauseen 3.1 kohdissa 3 ja 4. On todistettu, että joukko $\mathbb{R}^{n\times m}$ varustettuna yhteenlaskulla ja Hadamardin tulolla muodostaa vaihdannaisen renkaan. □

Matriiseilla, joissa yksikin alkio on nolla, ei ole käänteisalkiota Hadamardin tulon suhteen. Tämän takia $\mathbb{R}^{n\times m}$ varustettuna tavanomaisella yhteenlaskulla ja Hadamardin tulolla ei ole kunta.

3.2 Hadamardin potenssi

Hadamardin potenssiin korotus poikkeaa tavanomaisten matriisien potenssiin korotuksesta. Hadamardin α. potenssiin korotuksessa jokainen matriisin $\boldsymbol{A}$ alkio $a_{ij} \in \boldsymbol{A}$ korotetaan α. potenssiin, kun taas tavanomaisten matriisien α. potenssiin korotuksessa matriisia $\boldsymbol{A}$ kerrotaan itsensä kanssa α kertaa.

Määritelmä 3.2. (vrt. [3, s. 148]). Positiivisen matriisin $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}\alpha$. Hadamardin potenssi on $n \times m$ -matriisi $\boldsymbol{A}^{\circ\alpha}$, missä $[\boldsymbol{A}^{\circ\alpha}]_{ij} = a_{ij}^{\alpha}$, kun $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 3.2. Matriisin

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Hadamardin potenssi on muotoa

$$\boldsymbol{A}^{\circ 3} = \begin{pmatrix} 2^3 & 1^3 & 1^3 \\ 4^3 & 2^3 & 3^3 \\ 3^3 & 2^3 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 64 & 8 & 27 \\ 27 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

ja α. Hadamardin potenssi muotoa

$$\boldsymbol{A}^{\circ \alpha} = \begin{pmatrix} 2^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 4^\alpha & 2^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 2^\alpha & 1^\alpha \end{pmatrix}.$$

Lause 3.3. *Resiprookkimatriisien joukko $\boldsymbol{M}_{n,n}$ on suljettu Hadamardin tulon ja Hadamardin potenssiin korotuksen suhteen.*

Todistus. Resiprookkimatriisien joukko $\boldsymbol{M}_{n,n}$ on suljettu Hadamardin tulon suhteen, jos kahden resiprookkimatriisin Hadamardin tulo on myös resiprookkimatriisi. Olkoon

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n,n} \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \frac{1}{b_{12}} & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{b_{1n}} & \frac{1}{b_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n,n}.$$

Tällöin Hadamardin tulo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \frac{1}{b_{12}} & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{b_{1n}} & \frac{1}{b_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & a_{12} \cdot b_{12} & \dots & a_{1n} \cdot b_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} \cdot \frac{1}{b_{12}} & 1 \cdot 1 & \dots & a_{2n} \cdot b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} \cdot \frac{1}{b_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} \cdot \frac{1}{b_{2n}} & \dots & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}b_{12}} & 1 & \dots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}b_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}b_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n,n}.
\end{aligned}$$

On todistettu, että kahden resiprookkimatriisin Hadamardin tulo on myös resiprookkimatriisi. Siis resiprookkimatriisien joukko $\boldsymbol{M}_{n,n}$ on suljettu Hadamardin tulon suhteen. Todistetaan seuraavaksi, että resiprookkimatriisien joukko $\boldsymbol{M}_{n,n}$ on suljettu myös Hadamardin potenssiin korotuksen suhteen. Olkoon $\boldsymbol{A}$ sama kuin yllä. Tällöin Hadamardin potenssi on

$$\boldsymbol{A}^{\circ\alpha} = \begin{pmatrix} 1^\alpha & a_{12}^\alpha & \dots & a_{1n}^\alpha \\ \left(\frac{1}{a_{12}}\right)^\alpha & 1^\alpha & \dots & a_{2n}^\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{1}{a_{1n}}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{a_{2n}}\right)^\alpha & \dots & 1^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^\alpha & \dots & a_{1n}^\alpha \\ \frac{1}{a_{12}{}^\alpha} & 1 & \dots & a_{2n}^\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}{}^\alpha} & \frac{1}{a_{2n}{}^\alpha} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n,n}.$$

On todistettu, että resiprookkimatriisien joukko $\boldsymbol{M}_{n,n}$ on suljettu myös Hadamardin potenssiin korotuksen suhteen. Näin ollen lause 3.3 on todistettu. □

Lause 3.4. *Positiivisten resiprookkimatriisien joukko $\boldsymbol{M}_{n,n}$ varustettuna Hadamardin tulolla muodostaa Abelin ryhmän.*

Todistus. Merkitään positiivisten resiprookkimatriisien joukkoa $\boldsymbol{M}_{n,n}$. Rajoitutaan positiivisiin resiprookkimatriiseihin, sillä jos yksikin $a_{ij} = 0$, käänteisalkiota $\boldsymbol{A}^{\circ -1}$ ei ole olemassa.

Tarkoituksena on osoittaa, että $(\boldsymbol{M}_{n,n}, \circ)$ muodostaa Abelin ryhmän. Laskutoimituksen $\circ$ vaihdannaisuus on todistettu lauseen 3.1 kohdassa 1 ja liitännäisyys kohdassa 2. Laskutoimituksen $\circ$ neutraalialkio on ykkösmatriisi $\boldsymbol{J}$, mikä on todistettu lauseen 3.1 kohdassa 6. Enää tarvitsee osoittaa, että jokaisella positiivisella resiprookkimatriisilla on käänteisalkio. Olkoon $\boldsymbol{A}$ mikä tahansa positiivinen resiprookkimatriisi eli

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tällöin sen käänteisalkioksi saadaan

$$\boldsymbol{A}^{\circ -1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_{12}} & \dots & \frac{1}{a_{1n}} \\ a_{12} & 1 & \dots & \frac{1}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}},$$

sillä

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}^{\circ-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_{12}} & \dots & \frac{1}{a_{1n}} \\ a_{12} & 1 & \dots & \frac{1}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}.$$

On siis todistettu, että positiivisten resiprookkimatriisien joukko $\boldsymbol{M}_{n,n}$ varustettuna Hadamardin tulolla muodostaa Abelin ryhmän. □

Lause 3.5. *Konsistentit resiprookkimatriisit muodostavat ryhmän* $(\boldsymbol{M}_{n,n}, \circ)$ *aliryhmän.*

Todistus. Todistetaan lause käyttämällä aliryhmäkriteeriä.

1. Todistetaan ensin, että kahden konsistentin resiprookkimatriisin Hadamardin tulo on konsistentti. Oletetaan, että matriisit $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{n,n}$ ja $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{n,n}$ ovat konsistentteja resiprookkimatriiseja määritelmän 2.2 mukaan. Tarkoituksena on osoittaa, että niiden Hadamardin tulo $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = [a_{ij}b_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{n,n}$ on konsistentti.

   Valitaan mielivaltaiset indeksit i, j ja k, missä $i, j, k \in 1, \dots, n$. Määritelmän 2.2 mukaan matriisi $\boldsymbol{A}$ on konsistentti, jos $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ ja $\boldsymbol{B}$ on konsistentti, jos $b_{ij}b_{jk} = b_{ik}$. Tällöin

   $$[\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}]_{ij}[\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}]_{jk} = (a_{ij}b_{ij})(a_{jk}b_{jk}) = (a_{ij}a_{jk})(b_{ij}b_{jk}) = a_{ik}b_{ik} = [\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}]_{ik},$$

   mikä on myös konsistentti määritelmän 2.2 mukaan. Siis on todistettu, että kahden konsistentin resiprookkimatriisin Hadamardin tulo on myös konsistentti.

2. Seuraavaksi todistetaan, että ryhmän neutraalialkio on konsistentti. Koska neutraalialkio on ykkösmatriisi $\boldsymbol{J}$, on sen konsistenttius triviaalia.

3. Lopuksi todistetaan, että konsistentin matriisin $\boldsymbol{A}$ Hadamardin inverssi eli matriisin $\boldsymbol{A}$ transpoosi on myös konsistentti. Koska

   $$a^{\boldsymbol{T}}_{ik}a^{\boldsymbol{T}}_{kj} = a_{ki}a_{jk} = a_{jk}a_{ki} = a_{ji} = a^{\boldsymbol{T}}_{ij},$$

   on konsistentin matriisin $\boldsymbol{A}$ transpoosi myös konsistentti.

Kohdista (1–3) seuraa, että konsistentit resiprookkimatriisit muodostavat ryhmän $(\boldsymbol{M}_{n,n}, \circ)$ aliryhmän. □

4 Analyyttinen hierarkiaprosessi

Luvussa 4 käsitellään Analyyttistä hierarkiaprosessia (Analytic Hierarchy Process, AHP). Lisäksi määritetään konsistenssi-indeksi (Consistency Index, CI) sekä konsistenssisuhde (Consistency Ratio, CR).

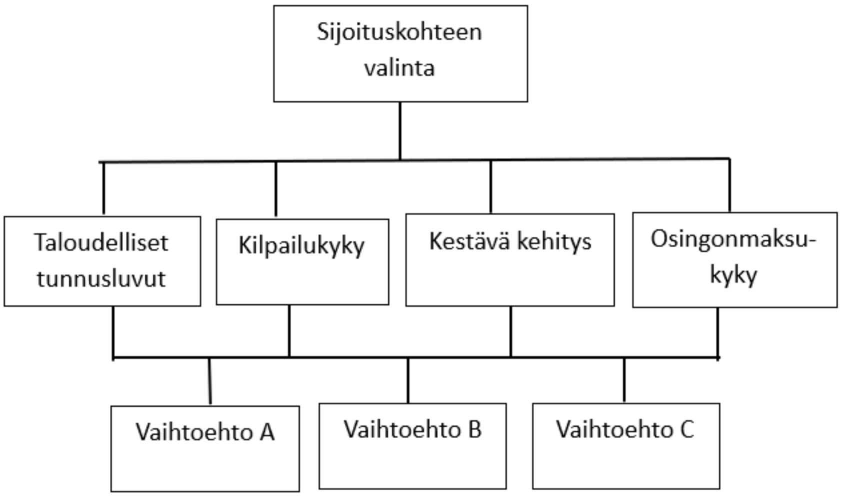
4.1 Analyyttisen hierarkiaprosessin vaiheet ja esimerkki

(Vrt. [7, s. 1–20]). AHP on Thomas L. Saatyn 1970-luvulla kehittämä päätöksentekomenetelmä, joka on yksinkertaisuutensa ja helppokäyttöisyytensä takia levinnyt laajasti eri toimialoille. AHP:n avulla voidaan ratkaista monimutkaisiakin ongelmia ottamalla huomioon kaikki tärkeimmät päätöksentekoon vaikuttavat kriteerit. AHP auttaa päätöksentekijöitä löytämään heille parhaan mahdollisen päätöksen, joka sopii heidän tavoitteeseensa ja ymmärrykseensä ongelmasta. Ongelma jäsennetään osiensa rakenteena ja välisinä suhteina, jotka kuvataan hierarkioiden avulla. Menetelmä jaetaan yleensä kolmeen eri vaiheeseen:

1. ongelman jakaminen osiin ja kuvaaminen hierarkian avulla,
2. hierarkiatason osien arviointi keskenään pareittain ja kriteerien painoarvojen laskeminen,
3. vaihtoehtojen paremmuusjärjestyksen laskeminen.

Otetaan seuraavaksi esimerkki AHP:n käytöstä sijoituskohteen valinnan apuna. Ensimmäisessä vaiheessa ongelma pitää jakaa osiin ja kuvata hierarkian avulla. Tämä on tehty kuvassa 4.1. Siinä on esitetty yksinkertainen esimerkki AHP:n hierarkiasta, jota käytetään avuksi sijoituskohteen valinnassa. Kuvassa päämääränä on sijoituskohteen valinta ja vaihtoehtoja on kolme kappaletta (A, B ja C). Päätökseen vaikuttavia tekijöitä ovat ensimmäisen kriteeritason muodostavat kriteerit, joita ovat

1. taloudelliset tunnusluvut: kertovat yrityksen nykyisestä ja tulevasta taloudellisesta tilanteesta, esimerkiksi tulos, tase, liikevoitto ja velkaantuneisuus,
2. kilpailukyky: miten yritys pärjää markkinoilla kilpailijoihinsa nähden,
3. kestävä kehitys: taloudellinen, sosiaalinen ja ekologinen kestävyys sekä
4. osingonmaksukyky: miten yritys kykenee maksamaan osinkoa osakkeenomistajilleen.



Kuva 4.1. AHP:n hierarkiatasot sijoituskohteen valinnassa.

Toisena vaiheena on kriteerien painoarvojen laskeminen, joka tapahtuu parivertailun kautta. Parivertailussa on käytössä numerot yhdestä yhdeksään. Numero yksi tarkoittaa kriteerien samanarvoisuutta ja numero yhdeksän puolestaan tarkoittaa sitä, että toinen kriteeri on merkittävästi tärkeämpi toiseen verrattuna. Jokainen kriteeri on itsensä kanssa tasaveroinen, joten vertailu itseensä saa automaattisesti arvon 1 (eli matriisin diagonaalialkiot ovat kaikki ykkösiä). Esimerkkinä saadaan seuraavanlainen matriisi

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \text{taloudelliset tunnusluvut} & \text{kilpailukyky} & \text{kestävä kehitys} & \text{osingonmaksukyky} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{taloudelliset tunnusluvut} \\ \text{kilpailukyky} \\ \text{kestävä kehitys} \\ \text{osingonmaksukyky} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}
\end{array} .$$

Matriisista huomataan, että esimerkiksi taloudelliset tunnusluvut ovat valittu kolme kertaa tärkeämmäksi arvoksi päätöksenteossa verrattuna kilpailukykyyn sekä osingonmaksukykyyn. Lisäksi taloudelliset tunnusluvut ovat valittu kaksi kertaa tärkeämmiksi kuin kestävä kehitys. Huomataan myös, että kilpailukyky ja osingonmaksukyky ovat valittu yhtä tärkeiksi arvoiksi sijoituskohteen valinnassa. Näiden valintojen perusteella päätöksenteossa suurin merkitys on taloudellisilla tunnusluvuilla.

Jatkossa matriisin murtoluvut on muutettu desimaaliluvuiksi. Seuraavana vaiheena on kriteerien painoarvojen laskeminen. Tämä tapahtuu siten, että lasketaan ensin matriisin jokaisen sarakkeen summa, minkä jälkeen matriisi normalisoidaan jakamalla matriisin jokainen alkio sarakekohtaisesti lasketulla summalla. Normalisoidun matriisin jokaisen sarakkeen summan pitäisi olla yksi. Kuvassa 4.2 on matriisi $\boldsymbol{A}$ ja siinä on myös laskettu matriisin $\boldsymbol{A}$ sarakkeiden summat. Kuvassa 4.3 on puolestaan esitetty normalisoitu matriisi, jossa esimerkiksi taloudellisten tunnuslukujen normalisoitu luku saadaan osamäärällä $\frac{1}{2{,}17} = 0{,}46$. Samalla tavalla saadaan laskettua jokaisen parivertailun normalisoidut luvut.

	taloudelliset tunnusluvut	kilpailukyky	kestävä kehitys	osingonmaksukyky
taloudelliset tunnusluvut	1	3	2	3
kilpailukyky	0,33	1	0,5	1
kestävä kehitys	0,5	2	1	3
osingonmaksukyky	0,33	1	0,33	1
summa	2,17	7,00	3,83	8,00

Kuva 4.2. Matriisi $\boldsymbol{A}$ ja sen sarakkeiden summat.

	taloudelliset tunnusluvut	kilpailukyky	kestävä kehitys	osingonmaksukyky
taloudelliset tunnusluvut	0,46	0,43	0,52	0,38
kilpailukyky	0,15	0,14	0,13	0,13
kestävä kehitys	0,23	0,29	0,26	0,38
osingonmaksukyky	0,15	0,14	0,09	0,13
summa	1,00	1,00	1,00	1,00

Kuva 4.3. Matriisin $\boldsymbol{A}$ normalisoitu matriisi ja sen sarakkeiden summat.

Normalisoidun matriisin avulla saadaan muodostettua ominaisvektori, joka näyttää suhteelliset painoarvot eri kriteereille. Ominaisvektorin arvot saadaan, kun lasketaan matriisin jokaisen rivin keskiarvo:

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}46 + 0{,}43 + 0{,}52 + 0{,}38 \\ 0{,}15 + 0{,}14 + 0{,}13 + 0{,}13 \\ 0{,}23 + 0{,}29 + 0{,}26 + 0{,}38 \\ 0{,}15 + 0{,}14 + 0{,}09 + 0{,}13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}14 \\ 0{,}29 \\ 0{,}13 \end{pmatrix}.$$

Kun siis tehdään päätöstä sijoituskohteen valinnasta, niin taloudellisten tunnuslukujen painoarvo on 45 %, kilpailukyvyn 14 %, kestävän kehityksen 29 % ja osingonmaksukyvyn 13 %.

Seuraavaksi ratkaistaan vaihtoehtojen paremmuusjärjestys. Kuvaan 4.4 on valittu esimerkkinä seuraavat luvut kuvaamaan kunkin kriteerin merkittävyyttä kullekin vaihtoehdolle eli toisin sanoen, kuinka hyvin jokainen kriteeri toteutuu eri vaihtoehtojen osalta. Kuvassa 4.5 matriisin alkiot on saatu kertomalla jokainen alkio sillä ominaisvektorin arvolla, joka vastaa matriisin sarakkeen kriteeriä. Esimerkiksi vaihtoehdon A taloudellisten tunnuslukujen arvo saadaan tulona $3 \cdot 0{,}45 = 1{,}34$, kilpailukyvyn arvo tulona $4 \cdot 0{,}14 = 0{,}55$, kestävän kehityksen arvo tulona $2 \cdot 0{,}29 = 0{,}58$ ja osingonmaksukyvyn arvo tulona $7 \cdot 0{,}13 = 0{,}89$. Samalla logiikalla saadaan laskettua matriisissa myös vaihtoehtojen B ja C alkiot.

	taloudelliset tunnusluvut	kilpailukyky	kestävä kehitys	osingonmaksukyky
Vaihtoehto A	3	4	2	7
Vaihtoehto B	5	5	5	6
Vaihtoehto C	3	2	8	2

Kuva 4.4. Vaihtoehdot A, B ja C sekä kriteerit.

	taloudelliset tunnusluvut	kilpailukyky	kestävä kehitys	osingonmaksukyky
Vaihtoehto A	1,34	0,55	0,58	0,89
Vaihtoehto B	2,23	0,69	1,44	0,76
Vaihtoehto C	1,34	0,28	2,30	0,25

Kuva 4.5. Vaihtoehdot A, B ja C sekä kriteerien suhteelliset painoarvot.

Eri vaihtoehtojen paremmuusjärjestys on nyt helppo selvittää laskemalla yhteen jokaisen rivin luvut. Tällöin saadaan selvitettyä jokaisen vaihtoehdon paino-arvo. Kuvassa 4.6 näkyy vaihtoehdoille lasketut arvot.

	yhteensä
Vaihtoehto A	3,36
Vaihtoehto B	5,13
Vaihtoehto C	4,18

Kuva 4.6. Vaihtoehtojen A, B ja C painoarvot.

Siis vaihtoehdon A arvoksi saadaan 3,36, vaihtoehdon B arvoksi 5,13 ja vaihtoehdon C arvoksi 4,18. Täten vaihtoehdoista paras olisi B, sen jälkeen C ja lopuksi A. Koska valituilla luvuilla vaihtoehdon B arvo on suurin, kannattaisi päätöksentekijän valita se sijoituskohteekseen AHP:n mukaan.

4.2 Konsistenssi-indeksi ja -suhde

(Vrt. [6, s. 25600]). Konsistenssi-indeksi, toisin sanoen CI-indeksi, mahdollistaa päättäjille vertailujen yhdenmukaisuuden. Se voidaan laskea seuraavalla kaavalla

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

missä $\lambda_{\max}$ on $n \times n$-resiprookkimatriisin suurin ominaisarvo ja n on matriisin koko (sarakkeiden ja rivien lukumäärä). Jos $\lambda_{\max} = n$, niin $CI = 0$ eli päätöksenteko on täysin konsistentti. Jos taas $\lambda_{\max} > 0$, niin päätöksenteko ei ole täysin konsistentti.

Konsistenssin mittaamiseksi on määritelty konsistenssisuhde

$$CR = \frac{CI}{RI(n)},$$

missä RI on satunnaisindeksi. Konsistenssisuhde toimii parivertailumatriisien kriittisenä hyväksymis-hylkäysarvona. Sen hyväksyttävänä arvona pidetään 0,10 tai vähemmän. Edellisen esimerkin suurin ominaisarvo on 4,0458, jolloin konsistenssi-indeksin arvoksi saadaan

$$CI = \frac{4{,}0458 - 4}{4 - 1} = 0{,}0153.$$

Matrix size	Random consistency index (RI)
1	0.00
2	0.00
3	0.58
4	0.90
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45
10	1.49

Kuva 4.7. Satunnaisindeksin RI arvoja (Saaty, 1980).

Kuvassa 4.7 on esiteltynä satunnaisindeksin RI eri arvoja. Koska tutkitaan 4×4-matriisia, käytetään arvoa $RI = 0{,}90$. Konsistenssisuhteeksi saadaan tällöin

$$CR = \frac{0{,}0153}{0{,}90} = 0{,}0170.$$

Koska $0{,}0170 < 0{,}10$, voidaan tulosta pitää hyväksyttyvänä, ja täten AHP:n mukainen päätöksentekoprosessi voidaan hyväksyä.

5 Sovelluksia

Tässä luvussa käydään läpi yksi sovellus resiprookkimatriiseihin liittyen. Resiprookkimatriisien avulla voidaan esimerkiksi ilmaista eri maiden valuuttojen valuuttakursseja toisiinsa nähden.

Esimerkki 5.1. Valitaan esimerkkiin valuutoiksi euro (EUR), Yhdysvaltain dollari (USD), Iso-Britannian punta (GBP), Japanin jeni (JPY), Ruotsin kruunu (SEK), Intian rupia (INR) ja Meksikon peso (MXN). Jatkossa näistä käytetään lyhyemmin nimityksiä euro, dollari, punta, jeni, kruunu, rupia ja peso. Muodostetaan näistä valuuttakursseja kuvaava resiprookkimatriisi, joka on muotoa

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} \text{EUR} & \text{USD} & \text{GBP} & \text{JPY} & \text{SEK} & \text{INR} & \text{MXN} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{EUR} \\ \text{USD} \\ \text{GBP} \\ \text{JPY} \\ \text{SEK} \\ \text{INR} \\ \text{MXN} \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & a & b & c & d & e & f \\
\frac{1}{a} & 1 & g & h & i & j & k \\
\frac{1}{b} & \frac{1}{g} & 1 & l & m & n & o \\
\frac{1}{c} & \frac{1}{h} & \frac{1}{l} & 1 & p & q & r \\
\frac{1}{d} & \frac{1}{i} & \frac{1}{m} & \frac{1}{p} & 1 & s & t \\
\frac{1}{e} & \frac{1}{j} & \frac{1}{n} & \frac{1}{q} & \frac{1}{s} & 1 & u \\
\frac{1}{f} & \frac{1}{k} & \frac{1}{o} & \frac{1}{r} & \frac{1}{t} & \frac{1}{u} & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Matriisista nähdään, että esimerkiksi muuttuja a kuvaa euron ja dollarin välistä suhdetta, muuttuja m punnan ja kruunun välistä suhdetta ja muuttuja q jenin ja rupian välistä suhdetta. Sijoittamalla muuttujien $a - u$ paikoille niitä kuvaavat luvut, saadaan likimain konsistentti resiprookkimatriisi, joka on muotoa

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} \text{EUR} & \text{USD} & \text{GBP} & \text{JPY} & \text{SEK} & \text{INR} & \text{MXN} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{EUR} \\ \text{USD} \\ \text{GBP} \\ \text{JPY} \\ \text{SEK} \\ \text{INR} \\ \text{MXN} \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1{,}07 & 0{,}85 & 161{,}27 & 11{,}33 & 89 & 18{,}41 \\
0{,}933 & 1 & 0{,}793 & 150{,}521 & 10{,}57 & 83{,}069 & 17{,}182 \\
1{,}176 & 1{,}26 & 1 & 189{,}705 & 13{,}322 & 104{,}694 & 21{,}655 \\
0{,}006 & 0{,}007 & 0{,}005 & 1 & 0{,}07 & 0{,}552 & 0{,}114 \\
0{,}088 & 0{,}095 & 0{,}075 & 14{,}24 & 1 & 7{,}859 & 1{,}627 \\
0{,}011 & 0{,}012 & 0{,}01 & 1{,}812 & 0{,}127 & 1 & 0{,}207 \\
0{,}054 & 0{,}058 & 0{,}046 & 8{,}76 & 0{,}615 & 4{,}836 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Tästä huomataan valuuttakurssien suhteet. Yllä olevan matriisin valuuttakurssien arvot ovat katsottu Napsun valuuttamuuntimella 14.2.2024, joten ne ovat voineet muuttua jo tästä ajankohdasta hieman. Näiden tietojen mukaan esimerkiksi yhdellä eurolla saa 1 EUR = $1,07$ USD = $0,85$ GBP = $161,27$ JPY = $11,33$ SEK = 89 INR = $18,41$ MXN.

Näistä esimerkin valuutoista vahvin on punta, sillä yhdellä punnalla saa suhteessa enemmän mitä tahansa muita esimerkin valuuttoja. Seuraaviksi vahvimpia ovat euro ja dollari, jotka ovat aika tasavahvoja punnan kanssa. Esimerkin valuutoista selkeästi heikoin on jeni.

Lähteet

[1] J. Benitez, J. Izquierdo, R. Perez-Garcia & E. Ramos-Martinez. *A simple formula to find the closest consistent matrix to a reciprocal matrix*. Applied Mathematical Modelling, Vol. 38, Issues 15–16, Aug 2014, pp. 3968–3974. URL.

[2] M. Daigo, T. Obata & S. Shiraishi. *Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP*. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 41, No. 3, Sep 1998. URL.

[3] T. Jain. *Hadamard powers of some positive matrices*. Linear Algebra and its Applications, Vol. 528, 2017, pp. 147–158. URL.

[4] E. Million. *The Hadamard Product*. 2007. URL.

[5] J.I. Pelaez & M.T. Lamata. *A new measure of consistency for positive reciprocal matrices*. An International Journal computers & mathematics with applications, Vol. 46, Aug 2003, pp. 1839–1845. URL.

[6] J.I. Pelaez, E.A. Martinez & L.G. Vargas. *Consistency in Positive Reciprocal Matrices: An Improvement in Measurement Methods*. IEEE Access, Vol. 6, April 2018, pp. 25600–25609. URL.

[7] T.L. Saaty & L.G. Vargas. *Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy*, 2nd ed. International Series in Operations Research & Management Science, Vol. 175, 2012.