Santeri Ora

IMPLISIITTISTEN FUNKTIOIDEN DERIVAATTA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Maaliskuu 2024

Tiivistelmä

Santeri Ora: Implisiittisten funktioiden derivaatta
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Maaliskuu 2024

Tässä tutkielmassa tarkastellaan implisiittisiä funktioita ja niiden derivointia. Tarkemmin sanottuna tutkielmassa esitellään, mitä implisiittinen derivointi on ja mihin se perustuu. Tutkielman tarkoituksena on syventää lukijan derivaatan osaamista koskemaan implisiittisiä funktioita. Lukijalta oletetaan vahvaa yliopistomatematiikan hallintaa derivaatan ja matemaattisen analyysin osalta.

Tutkielmassa esitetään kaksi merkittävää implisiittisten funktioiden derivoinnin lausetta. Näiden lauseiden todistamisessa mainitut lauseet ovat esitetty esitietoina tutkielman toisessa luvussa. Lisäksi esitietoihin on sisällytetty viidennessä luvussa tarvittavia määritelmiä matriisilaskennan tueksi.

Tutkielman virallisen aiheen käsittely alkaa kolmannesta luvusta. Luvussa esitellään yleisesti määritelmien avulla, mitä implisiittisellä derivoinnilla tarkoitetaan ja mihin sitä tarvitaan. Lisäksi luvussa havainnollistetaan implisiittistä derivointia ja sen tarvetta käytännön esimerkkien avulla. Luku keskittyy käsittelemään kahden muuttujan implisiittisiä funktioita, mutta esitetyt määritelmät ovat myös yleistettävissä vielä useamman muuttujan funktioille. Yleisesti luku toimii alustuksena tutkielman myöhemmille luvuille, joissa käydään läpi tarkemmin, miksi implisiittinen derivointi on matemaattisesti mahdollista.

Tutkielman neljäs luku jatkaa kahden muuttujan implisiittisten funktioiden käsittelyä. Luvussa esitellään ja todistetaan Dinin lause, joka perustelee, miksi implisiittinen derivointi on mahdollista kahden muuttujan funktioille. Viidennessä luvussa esitellään ja todistetaan yleinen implisiittisten funktioiden lause, joka yleistää Dinin lauseen koskemaan useamman muuttujan funktioita. Molemmissa luvuissa neljä ja viisi esiteltyjen lauseiden käyttöä havainnollistetaan esimerkkien avulla lukujensa lopussa. Yleisesti luvut tarjoavat kattavan käsityksen implisiittisen derivoinnin teoriasta ja valmiuden laajentaa osaamista aiheen sovellusten pariin.

Avainsanat: Implisiittinen funktio, implisiittinen derivointi, Dinin lause, yleinen implisiittisten funktioiden lause

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Derivointi on matemaattisen analyysin perusmenetelmä, jota käytetään monenlaisiin tarkoituksiin. Tässä tutkielmassa laajennetaan derivoinnin käsitettä perinteisistä eksplisiittisistä funktioista implisiittisiin funktioihin. Tämä mahdollistaa funktion derivoinnin monissa tapauksissa, joissa se ei muuten olisi mahdollista.

Tutkielmassa käsitellään implisiittistä derivointia sekä kahden että usean muuttujan funktioille. Tutkielman tarkoituksena on avata lukijalle, mitä implisiittinen derivointi on ja mihin se matemaattisesti perustuu. Tutkielma koostuu määritelmistä ja lauseista, joita on havainnollistettu esimerkkien avulla. Esitietoihin lukuun kaksi on kerätty lukijalle avuksi tutkielmassa käsiteltävien lauseiden todistuksiin tarvittavia lauseita ja määritelmiä.

Kolmannessa luvussa esitetään implisiittinen derivointi kahden muuttujan funktioille määritelmien ja esimerkkien avulla. Luku toimii johdatuksena myöhempiin lukuihin, joissa perehdytään tarkemmin, miksi implisiittinen derivointi on matemaattisesti mahdollista.

Luvuissa neljä ja viisi käsitellään kaksi merkittävää implisiittisen derivoinnin lausetta. Neljännessä luvussa esitetään implisiittinen derivointi kahden muuttujan funktioille Dinin lauseen avulla. Viidennessä luvussa laajennetaan Dinin lausetta yleiseksi implisiittisten funktioiden lauseeksi koskemaan useamman muuttujan funktioita. Molempien lukujen lauseita havainnollistetaan esimerkkien avulla lukujensa lopussa.

Lukijalta oletetaan vahvaa yliopistomatematiikan osaamista derivaatan ja matemaattisen analyysin osalta, mutta osaamista implisiittisten funktioiden derivaatasta ei vaadita. Viidennessä luvussa lukijalta oletetaan myös perus osaamista matriisilaskennasta. Tutkielman päälähteenä on käytetty Patric M. Fitzpatrickin kirjaa Advanced Calculus: Second Edition. Lisäksi tutkielman kolmas luku perustuu Tunc Gevecin kirjaan Introductory Calculus: Understanding the Derivative.

2 Esitietoja

Tässä luvussa käydään läpi keskeisiä lauseita ja määritelmiä, joita oletetaan tunnetuiksi myöhemmin käsiteltävien lauseiden todistuksissa. Luvussa esitettävien lauseiden todistukset sivuutetaan, mutta ne ovat löydettävissä merkityistä lähteistä.

Lause 2.1 (Differentiaalilaskennan väliarvolause)**.** *Olkoon O avoin osajoukko joukossa $\mathbb{R}^n$ ja oletetaan, että kuvaus $f\colon O \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Jos pisteitä $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$ yhdistävä jana kuuluu joukkoon O, niin on olemassa sellainen luku θ, että $0 < \theta < 1$ ja*

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}), \boldsymbol{h} \rangle.$$

Todistus. Ks. [1, s. 368]. □

Lause 2.2 (Jatkuvien funktioiden väliarvolause)**.** *Oletetaan, että $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Olkoon luku c lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välillä, jolloin*

$$f(a) < c < f(b) \quad \textit{tai} \quad f(b) < c < f(a).$$

Tällöin on olemassa piste x_0 avoimella välillä (a,b), jolla $f(x_0) = c$.

Todistus. Ks. [1, s. 62–63]. □

Lause 2.3 (Weierstrassin lause)**.** *Olkoon A epätyhjä jonokompakti osajoukko joukossa $\mathbb{R}^n$ ja oletetaan, että funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tällöin funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ saavuttaa pienimmän ja suurimman arvonsa.*

Todistus. Ks. [1, s. 301]. □

Määritelmä 2.1 (vrt. [3, s. 52])**.** Olkoon kuvaus $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kun $m > 1$. Kuvaus kuvaa alkion $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ alkioksi $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Merkitään

$$F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))\,.$$

Reaaliarvoiset funktiot $f_1, f_2, \ldots, f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat funktion F koordinaattifunktioita.

Määritelmä 2.2 (vrt. [3, s. 58])**.** Olkoon funktion $F = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaikilla koordinaattifunktioilla f_j kaikki osittaisderivaatat $\frac{d}{dx_i} f_j$ pisteessä $\mathbf{x}$. Tällöin

$m \times n$-matriisia

$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1} f_1(\mathbf{x}) & \frac{d}{dx_2} f_1(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{d}{dx_n} f_1(\mathbf{x}) \\ \frac{d}{dx_1} f_2(\mathbf{x}) & \frac{d}{dx_2} f_2(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{d}{dx_n} f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dx_1} f_m(\mathbf{x}) & \frac{d}{dx_2} f_m(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{d}{dx_n} f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

kutsutaan funktion F derivaattamatriisiksi pisteessä $\mathbf{x}$.

Lause 2.4 (Käänteisfunktiolause)**.** *Olkoon O avoin osajoukko joukossa $\mathbb{R}^n$ ja oletetaan, että kuvaus $F\colon O \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva ja derivoituva. Olkoon $\boldsymbol{x}_0 \in O$ piste, jossa derivaattamatriisi $F'(\boldsymbol{x}_0)$ on kääntyvä. Tällöin on olemassa pisteen $\boldsymbol{x}_0$ ympäristö U ja sen kuvan $F(\boldsymbol{x}_0)$ ympäristö V siten, että kuvaus $F\colon U \to V$ on injektio ja surjektio. Tällöin käänteiskuvaus $F^{-1}\colon V \to U$ on myös jatkuva ja derivoituva. Lisäksi, jos $\boldsymbol{y} \in V$ ja piste $\boldsymbol{x} \in U$ toteuttaa ehdon $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, niin*

$$(F^{-1})'(\boldsymbol{y}) = [F'(\boldsymbol{x})]^{-1}.$$

Todistus. Ks. [1, s. 436–437]. □

Lause 2.5 (Ketjusääntö)**.** *Olkoon O avoin joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja oletetaan, että kuvaus $F\colon O \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva ja derivoituva. Oletetaan myös, että U on avoin joukon $\mathbb{R}^m$ osajoukko ja kuvaus $g\colon U \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Oletetaan, että kuvajoukko $F(O)$ sisältyy joukkoon U. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ F\colon O \to \mathbb{R}$ on myös jatkuva ja derivoituva. Lisäksi jokaisella pisteellä $\boldsymbol{x} \in O$ ja indeksillä i, missä $1 \le i \le n$, on voimassa*

$$\frac{d}{dx_i}(g \circ F)(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{dx_j} g(F(\boldsymbol{x})) \frac{d}{dx_i} f_j(\boldsymbol{x})$$

ja toisin sanoen

$$\nabla(g \circ F)(\boldsymbol{x}) = \nabla g(F(\boldsymbol{x}))F'(\boldsymbol{x}).$$

Todistus. Ks. [1, s. 414–415]. □

3 Implisiittinen derivointi

Tässä luvussa alustetaan implisiittisten funktioiden derivointia kahden muuttujan funktioiden avulla. Vaikka luvussa keskitytään käsittelemään vain kahden muuttujan funktioita, määritelmät ovat laajennettavissa myös useamman muuttujan tapauksiin. Tämän luvun määritelmät pohjautuvat Tunc Gevecin kirjaan Introductory Calculus: Understanding the Derivative sivuihin 125–127.

Määritelmä 3.1. Oletetaan, että $F(x, y)$ on funktio, joka sisältää muuttujat x ja y. Lisäksi olkoon C vakio. Tarkastellaan nyt yhtälöä $F(x, y) = C$. Oletetaan, että tästä yhtälöstä voidaan ratkaista y muuttujan x suhteen. Jos merkitään kyseistä funktiota kirjaimella f ja korvataan muuttuja y arvolla $f(x)$ yhtälössä $F(x, y) = C$, toteutuu yhtälö $F(x, f(x)) = C$ jokaisella muuttujan x arvolla valitulla välillä. Tässä tapauksessa voidaan sanoa, että funktio f on määritelty implisiittisesti muuttujan x suhteen yhtälössä $F(x, y) = C$.

Määritelmä 3.2. Implisiittiseksi derivoinniksi kutsutaan menetelmää, joka mahdollistaa derivaatan määrittämisen implisiittisesti määritellylle funktiolle, vaikka itse funktiota ei voitaisi ilmaista eksplisiittisesti.

Esimerkki 3.1. Ratkaistaan funktion $f(x) = x^x$ derivaattafunktio ja sen derivaatta pisteessä $x = \mathrm{e}$. Muutetaan funktio yhtälöksi $y = x^x$ ja muokataan se derivoitavaan muotoon ottamalla luonnollinen logaritmi yhtälön molemmilta puolilta

$$\begin{aligned} & y = x^x \\ \Leftrightarrow\ & \ln(y) = \ln(x^x) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(y) = x\ln(x). \end{aligned}$$

Koska yhtälö voidaan määritellä implisiittisesti $F(x, y) = \ln(y) - x\ln(x)$, kun $y = f(x)$, voidaan hyödyntää implisiittistä derivointia ja derivoida funktio F muuttujan x suhteen:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(\ln(y) - x\ln(x) = 0) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}(x\ln(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{y}\frac{d}{dx}y = x\frac{1}{x} + \ln(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{d}{dx}y = 1 + \ln(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}y = y(1 + \ln(x)).$$

Koska $y = f(x)$, voidaan derivaatta esittää muuttujan x suhteen sijoittamalla siihen $y = x^x$, jolloin
$$\frac{d}{dx}y = x^x(1 + \ln(x)).$$

Lopuksi voidaan ratkaista derivaatta kohdassa $x = \mathrm{e}$, jolloin

$$\frac{d}{dx}f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}(1 + \ln(\mathrm{e})) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{e}}.$$

Esimerkki 3.2. Määritellään ellipsi $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, kun $-a < x_0 < a$ ja $-b < y_0 < b$. Ratkaistaan ellipsin kehän pisteeseen (x_0, y_0) piirretyn tangentin kulmakerroin. Ellipsi voidaan määritellä implisiittisesti yhtälöllä $F(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1$. Tällöin funktio F voidaan derivoida muuttujan x suhteen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{d}{dx}(1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{a^2}\frac{d}{dx}x^2 + \frac{1}{b^2}\frac{d}{dx}y^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{d}{dx}y = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2y}{b^2}\frac{d}{dx}y = -\frac{2x}{a^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx}y = \frac{-\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y}.
\end{aligned}
$$

Ellipsin kehän tangentin lausekkeesta voidaan nyt laskea kulmakerroin pisteessä (x_0, y_0), jolloin vastaukseksi saadaan

$$\frac{d}{dx}F(x_0, y_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

4 Dinin lause

Tässä luvussa tarkastellaan tarkemmin, mihin implisiittinen derivointi perustuu. Luvussa esitetään ja todistetaan Dinin lause, joka antaa matemaattisen pohjan implisiittiselle derivoinnille kahden muuttujan funktioiden tapauksissa.

Lause 4.1 (Dinin lause)**.** *Olkoon O avoin osajoukko tasosta $\mathbb{R}^2$. Lisäksi oletetaan, että funktio $f\colon O \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Valitaan piste $(x_0, y_0) \in O$, jolla $f(x_0, y_0) = 0$ ja*

$$\frac{d}{dy} f(x_0, y_0) \neq 0. \tag{4.1}$$

Tällöin on olemassa positiivinen luku r sekä avoimella välillä $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ määritelty sellainen jatkuva ja derivoituva funktio $g\colon I \to \mathbb{R}$, että

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \textit{kaikilla } x \in I \tag{4.2}$$

ja jolle on voimassa, että

$$\textit{kun} \quad |x - x_0| < r, \quad |y - y_0| < r \quad \textit{ja} \quad f(x, y) = 0, \quad \textit{niin} \quad y = g(x). \tag{4.3}$$

Lisäksi pätee, että

$$\frac{d}{dx} f(x, g(x)) + \frac{d}{dy} f(x, g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x) = 0 \quad \textit{kaikilla } x \in I. \tag{4.4}$$

Todistus. (vrt. [1, s. 442–444]). Oletetaan, että $\frac{d}{dy} f(x, y) > 0$. Koska O on avoin joukko ja derivaattafunktio $\frac{d}{dy} f\colon O \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja positiivinen pisteessä (x_0, y_0), voidaan valita positiiviset luvut a ja c siten, että suljettu neliö $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - a, y_0 + a]$ sisältyy joukkoon O ja

$$\frac{d}{dy} f(x, y) \geq c \quad \text{kaikilla pisteillä } (x, y) \in R. \tag{4.5}$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseesta (2.1) yhden muuttujan skalaarifunktioille saadaan, että

$$f(x, y_1) < f(x, y_2), \quad \text{jos } |x - x_0| \leq a \text{ ja } y_0 - a \leq y_1 < y_2 \leq y_0 + a. \tag{4.6}$$

Koska $f(x_0, y_0) = 0$, edellisestä seuraa, että $f(x_0, y_0 - a) < 0 < f(x_0, y_0 + a)$. Lisäksi funktio $f\colon O \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Tällöin voidaan valita positiivinen luku r, joka on pienempi kuin a siten, että valitulla välillä $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ pätee

$$f(x, y_0 - a) < 0 < f(x, y_0 + a) \quad \text{kaikilla } x \in I.$$

Olkoon x piste välillä I. Koska $f(x, y_0 - a) < 0$ ja $f(x, y_0 + a) > 0$, niin jatkuvien funktioiden väliarvolauseen (2.2) perusteella on olemassa jokin piste y pisteiden $y_0 - a$ ja $y_0 + a$ välillä, jolla $f(x, y) = 0$. Lisäksi kohdan (4.6) perusteella voidaan todeta, että on olemassa vain yksi tällainen piste. Määritellään $g(x)$ vastaamaan tätä pistettä. Tällöin kohtien (4.2) ja (4.3) ominaisuudet toteutuvat funktiolle $g\colon I \to \mathbb{R}$.

Osoitetaan nyt, että $g\colon I \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva sekä derivointikaava (4.4) pätee pisteessä x_0. Olkoon $x_0 + h$ piste välillä I. Tällöin määritelmän mukaan $f(x_0 + h, g(x_0 + h)) = 0$ ja $f(x_0, g(x_0)) = 0$ eli toisin muotoiltuna

$$f(x_0 + h, g(x_0 + h)) - f(x_0, g(x_0)) = 0.$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen (2.1) mukaan kahden muuttujan skalaarifunktioille on olemassa jokin piste janalla pisteiden $(x_0, g(x_0))$ ja $(x_0 + h, g(x_0 + h))$ välissä. Määritellään $p(h)$ täksi pisteeksi, jolloin

$$f(x_0 + h, g(x_0 + h)) - f(x_0, g(x_0)) = \frac{d}{dx} f(p(h))h + \frac{d}{dy} f(p(h))[g(x_0 + h) - g(x_0)].$$

Koska yhtälön vasen puoli on 0, niin

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = -\left[\frac{\frac{d}{dx} f(p(h))}{\frac{d}{dy} f(p(h))}\right] h. \tag{4.7}$$

Lisäksi, koska funktio $\frac{d}{dx} f\colon O \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja suljettu joukko R on jonokompakti osajoukko tasossa, voidaan valita Weierstrassin lauseen (2.3) perusteella sellainen positiivinen luku M, että

$$\left|\frac{d}{dx} f(x, y)\right| \leq M \quad \text{kaikilla pisteillä } (x, y) \in R.$$

Käyttämällä edellistä erisuuruutta kohdan (4.5) erisuuruuden kanssa seuraa kohdan (4.7) kaavasta, että

$$|g(x_0 + h) - g(x_0)| \leq \frac{M}{c}|h|, \quad \text{kun } x_0 + h \in I.$$

Tällöin funktio $g\colon I \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0. Koska piste $p(h)$ sijaitsee janalla pisteiden $(x_0, g(x_0))$ ja $(x_0 + h, g(x_0 + h))$ välissä, voidaan todeta, että

$$\lim_{h \to 0} p(h) = (x_0, y_0).$$

Jos nyt jaetaan yhtälö (4.7) puolittain muuttujalla h ja käytetään funktion $f\colon O \to \mathbb{R}$ ensimmäisen asteen osittaisderivaattojen jatkuvuutta pisteessä (x_0, y_0), kaavasta (4.7) seuraa, että

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = -\frac{\frac{d}{dx} f(x_0, y_0)}{\frac{d}{dy} f(x_0, y_0)}.$$

Tämä tarkoittaa, että g on derivoituva pisteessä x_0 ja kaava (4.4) pätee siinä pisteessä. Mutta myös mikä tahansa muu piste x välillä I täyttää samat oletukset kuin piste x_0, jolloin kohta (4.4) pätee kaikilla pisteillä välillä I. □

Esimerkki 4.1. Ratkaistaan yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ derivaatta muuttujan x suhteen pisteessä $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Määritellään jatkuva ja derivoituva funktio asettamalla

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dinin lauseen mukaan derivaatta voidaan laskea pisteessä (x, y), jos ja vain jos $f(x, y) = 0$ ja $\frac{d}{dy} f(x, y) \neq 0$. Lasketaan funktion f arvo pisteessä $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Saadaan

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Lisäksi derivaatat muuttujien x ja y suhteen ovat

$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{ja} \quad \frac{d}{dy} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Nyt Dinin lauseesta seuraa, että on olemassa positiivinen luku r sekä jatkuva ja derivoituva kuvaus $g\colon I \to \mathbb{R}$, missä $I = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - r, \frac{\sqrt{2}}{2} + r\right)$ on avoin väli ja

$$f(x, g(x)) = x^2 + g(x)^2 - 1 = 0 \quad \text{kaikilla } x \in I.$$

Lisäksi, jos $f(x, y) = 0$, kun $\left|x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| < r$ ja $\left|y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| < r$, niin $y = g(x)$. Tällöin $\frac{d}{dx} g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ voidaan määritellä, ja ratkaisuksi saadaan:

$$\begin{aligned}
& & \frac{d}{dx} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{d}{dy} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{d}{dx} g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{d}{dx} g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{d}{dx} g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1.
\end{aligned}$$

5 Yleinen implisiittisten funktioiden lause

Yleinen implisiittisten funktioiden lause laajentaa Dinin lauseen koskemaan yleisesti kuvauksia avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Lause siis perustelee, miksi implisiittinen derivointi on mahdollista yleisesti kaikille usean muuttujan funktioille. Luvun lopussa lauseen käyttöä havainnollistetaan esimerkkien avulla.

Lause 5.1 (Yleinen implisiittisten funktioiden lause)**.** *Valitaan positiiviset kokonaisluvut n ja k. Olkoon O avaruuden $\mathbb{R}^{n+k}$ avoin osajoukko. Oletetaan, että kuvaus $F\colon O \to \mathbb{R}^k$ on jatkuva ja derivoituva. Valitaan piste $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in O$. Oletetaan, että $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$ ja että $k \times k$-osittaisderivaattamatriisi*

$$F'_y(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \text{ on kääntyvä.} \tag{5.1}$$

Tällöin on olemassa positiivinen luku r sekä $\boldsymbol{x}_0$-keskeisessä ja r-säteisessä avoimessa pallossa $B = B_r(\boldsymbol{x}_0)$ määritelty sellainen jatkuva ja derivoituva kuvaus $G\colon B \to \mathbb{R}^k$, että

$$F(\boldsymbol{x}, G(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0} \quad \text{kaikilla } \boldsymbol{x} \in B \tag{5.2}$$

ja jolle on voimassa, että

$$\text{kun } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < r,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| < r \text{ ja } F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \text{ niin } \boldsymbol{y} = G(\boldsymbol{x}). \tag{5.3}$$

Lisäksi pätee, että

$$F'_x(\boldsymbol{x}, G(\boldsymbol{x})) + F'_y(\boldsymbol{x}, G(\boldsymbol{x})) \cdot G'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \text{kaikilla } \boldsymbol{x} \in B. \tag{5.4}$$

Todistus. vrt. [1, s. 450–452]. Määritellään apukuvaus $H\colon O \to \mathbb{R}^{n+k}$, missä

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad \text{jokaisella pisteellä } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in O.$$

Tällöin

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \text{jos ja vain jos } H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}). \tag{5.5}$$

Nyt $H\colon O \to \mathbb{R}^{n+k}$ on jatkuva ja derivoituva kuvaus kahden dimensioiltaan yhtäsuurten euklidisten avaruuksien välillä. Tällöin voidaan soveltaa käänteisfunktiolausetta (2.4) kuvauksen H kuvan analysoinnissa, ja kohdan (5.5) perusteella voidaan tutkia pisteitä $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, jolla $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Derivaattamatriisi $H'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ voidaan esittää 2×2-matriisina

$$H'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ F'_x(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & F'_y(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

jossa I_n on $n \times n$-identiteettimatriisi ja 0 on $n \times k$-nollamatriisi. Lause olettaa, että $F'_y(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ on kääntyvä $k \times k$-matriisi. Tästä oletuksesta seuraa, että derivaattamatriisi $H'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ on kääntyvä $(n+k) \times (n+k)$-matriisi. Tällöin voidaan käyttää käänteisfunktiolausetta (2.4) kuvaukselle $H\colon O \to \mathbb{R}^{n+k}$ pisteessä $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Siitä voidaan päätellä, että on olemassa pisteen $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ympäristö $U \in \mathbb{R}^{n+k}$ ja sellainen kuvavektorin $H(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{n+k}$ ympäristö V, että kuvaus $H\colon U \to V$ on injektiivinen ja surjektiivinen sekä käänteiskuvaus $H^{-1}\colon U \to V$ on jatkuva ja derivoituva.

Määritellään käänteiskuvaus H^{-1} asettamalla

$$H^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (M(\mathbf{x}, \mathbf{y}), N(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \text{kun } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V.$$

Yhdistämällä kuvaus H ja sen käänteiskuvaus saadaan kaikki pisteet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V$ itselleen kuvaava identtinen kuvaus, jolloin kuvauksen H^{-1} määritelmän perusteella

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (H \circ H^{-1})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (M(\mathbf{x}, \mathbf{y}), F(M(\mathbf{x}, \mathbf{y}), N(\mathbf{x}, \mathbf{y}))). \tag{5.7}$$

Kun tutkitaan identiteettikuvauksen ensimmäistä komponenttia, huomataan, että

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \quad \text{kaikilla } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V.$$

Lisäksi, kun verrataan saman identiteettikuvauksen toisia komponentteja, saadaan

$$F(\mathbf{x}, N(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{kaikilla } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V. \tag{5.8}$$

Koska piste $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ kuuluu joukon $\mathbb{R}^{n+k}$ avoimeen osajoukkoon V, voidaan valita luku $r > 0$ siten, että piste $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ kuuluu joukkoon V, jos piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kuuluu joukkoon $B = B_r(\mathbf{x}_0)$, joka on $\mathbf{x}$-keskeinen ja r-säteinen avoin pallo joukossa $\mathbb{R}^n$. Määritellään kuvaus $G\colon B \to \mathbb{R}^k$ siten, että

$$G(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in B.$$

Tällöin kuvaus $G\colon B \to \mathbb{R}^k$ on jatkuva ja derivoituva. Lisäksi kohdasta (5.8) seuraa, että

$$F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in B. \tag{5.9}$$

Tällöin voidaan todeta, että yhtälö (5.2) pätee.

Kohdan (5.3) todistamiseen voidaan käyttää tietoa, että kuvaus $H\colon U \to V$ on injektio. Jos piste $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kuuluu joukkoon U ja $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, voidaan hyödyntää tietoa, että piste $(\mathbf{x}, N(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = H^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ kuuluu myös joukkoon U ja

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) = H(\mathbf{x}, N(\mathbf{x}, \mathbf{0})).$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{y} = N(\mathbf{x}, \mathbf{0}),$$

jolloin kohta (5.3) pätee.

Lopuksi todistetaan kohdan (5.4) kaava derivaattamatriisille. Jos esitetään kuvauksen F komponenttifunktiot muodossa $F = (F_1, ..., F_k)$, niin kohdan (5.9) yhtälö voidaan esittää komponenteittain, jolloin

$$F_i(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{kaikilla pisteillä } \mathbf{x} \in B \text{ ja indekseillä } i, \text{kun } 1 \leq i \leq k.$$

Ketjusäännön (2.5) avulla edellisen yhtälöryhmän komponentit voidaan derivoida muuttujan x_j suhteen. Tällöin saadaan

$$\frac{d}{dx_j} F_i(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) + \sum_{l=1}^{k} \frac{d}{dy_l} F_i(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) \frac{d}{dx_j} G_l(\mathbf{x}) = 0 \tag{5.10}$$

kaikilla pisteillä $\mathbf{x} \in B$ ja indeksipareilla i ja j, kun $1 \leq i \leq k$ ja $1 \leq j \leq n$. Tällöin matriisiyhtälö (5.4) saadaan, kun muodostetaan lineaarinen yhtälöryhmä kaikista kaavan (5.10) mukaisista yhtälöistä ja esitetään se matriisimuodossa. □

Esimerkki 5.1. Olkoon yksikköpallo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, kun $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tällöin funktio $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ on jatkuva ja derivoituva. Funktiolla on eräs ratkaisu pisteessä $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. Ratkaistaan funktion f derivaattamatriisi, jolloin

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f(x, y, z) & \frac{d}{dy} f(x, y, z) & \frac{d}{dz} f(x, y, z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tällöin derivaattamatriisi pisteessä $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ on

$$f'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Koska osittaisderivaattamatriisi muuttujan z suhteen on kääntyvä, on olemassa funktio $g(x, y)$, jolla $f(x, y, z) = 0$, kun $z = g(x, y)$. Tällöin voidaan ratkaista derivaatta muuttujalle z muuttujan x suhteen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x,y,z(x,y))) &= \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dz}f\frac{d}{dx}z \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}z &= -\frac{\frac{d}{dx}f}{\frac{d}{dz}f}.\end{aligned}$$

Sama voidaan määritellä myös muuttujan y suhteen, jolloin

$$\frac{d}{dy}z = -\frac{\frac{d}{dy}f}{\frac{d}{dz}f}.$$

Lopuksi voidaan ratkaista derivaatta muuttujalle z muuttujien x ja y suhteen pisteessä $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, jolloin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{1} = -1 \\ \frac{d}{dy}z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 5.2. Olkoon piste $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ joukossa $\mathbb{R}^3$. Määritellään kaksi funktiota, jotka saavat arvon 0 tässä pisteessä:

$$\begin{aligned}F_1(x,y,z) &= \sin(z-y) - \mathrm{e}^{xy} + x + \cos(z) \quad \text{ja} \\ F_2(x,y,z) &= \cos(x+z) - \mathrm{e}^{\sin(y)} - \mathrm{e}^{z} - y + 1.\end{aligned}$$

Määritellään kuvaus $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kun

$$F(x,y,z) = (\sin(z-y) - \mathrm{e}^{xy} + x + \cos(z), \cos(x+z) - \mathrm{e}^{\sin(y)} - \mathrm{e}^{z} - y + 1).$$

Nyt on huomattavissa, että funktio F on jatkuva ja derivoituva. Ratkaistaan funktion derivaattamatriisi, joka on

$$\begin{aligned}F'(x,y,z) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}F_1(x,y,z) & \frac{d}{dy}F_1(x,y,z) & \frac{d}{dz}F_1(x,y,z) \\ \frac{d}{dx}F_2(x,y,z) & \frac{d}{dy}F_2(x,y,z) & \frac{d}{dz}F_2(x,y,z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{e}^{xy}y & -\cos(y-z) - \mathrm{e}^{xy}x & \cos(z-y) - \sin(z) \\ -\sin(x+z) & -\cos(y)\mathrm{e}^{\sin(y)} - 1 & -\sin(z+x) - \mathrm{e}^{z} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tällöin derivaattamatriisi pisteessä $(0, 0, 0)$ on

$$F'(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyt 2×2-derivaattamatriisi muuttujien x ja y suhteen on

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}F_1(0,0,0) & \frac{d}{dy}F_1(0,0,0) \\ \frac{d}{dx}F_2(0,0,0) & \frac{d}{dy}F_2(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matriisi on kääntyvä, jolloin voidaan hyödyntää yleistä implisiittisten funktioiden lausetta ratkaistaessa derivaatta muuttujan $z = 0$ ympäristössä, kun muuttujat x ja y ovat 0. Määritellään derivaattamatriisi muuttujan z suhteen asettamalla

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz}F_1(0,0,0) \\ \frac{d}{dz}F_2(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin yleisen implisiittisen funktioiden lauseen mukaan voidaan ratkaista derivaatta muuttujille x ja y muuttujan z suhteen. Koska A_1 on kääntyvä, saadaan sille käänteismatriisi

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tällöin derivaatta pisteessä $(x, y) = (0, 0)$ muuttujan $z = 0$ ympäristössä on

$$-A_1^{-1}A_2 = -\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Eli derivaatat muuttujille x ja y muuttujan z suhteen ovat $\frac{d}{dx}F(0,0,0) = -\frac{3}{2}$ ja $\frac{d}{dy}F(0,0,0) = -\frac{1}{2}$.

Lähteet

[1] Fitzpatrick, Patrick M. *Advanced Calculus: Second Edition*. American Mathematical Society, 2009.

[2] Geveci, Tunc. *Introductory Calculus: Understanding the Derivative*. Momentum Press, 2015.

[3] Kauhanen, Janne. *Usean muuttujan funktioiden differentiaali- ja integraalilaskentaa. Opintomoniste*. TTY Matematiikan laitos, 2018.