Aleksi Ketola

EKSPONENTTIFUNKTION MÄÄRITTELYJÄ

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Simo Ali-Löytty
Maaliskuu 2024

TIIVISTELMÄ

Aleksi Ketola: Eksponenttifunktion määrittelyjä
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Maaliskuu 2024

Tässä työssä käsitellään eksponenttifunktion kahta eri määritelmää ja eksponenttifunktion tärkeimpiä ominaisuuksia. Työn tavoitteena on antaa lukijalle syvällinen katsaus eksponenttifunktion kahteen määritelmään sekä perustella määritelmien avulla eksponenttifunktion tärkeimmät ominaisuudet. Lisäksi näytetään, että eksponenttifunktion tärkeimmät ominaisuudet ovat voimassa määritelmästä riippumatta.

Luvussa 2 määritellään eksponenttifunktio luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktiona. Logaritmifunktio määritellään integraalin avulla ja sen tärkeimmät ominaisuudet esitellään ja todistetaan. Eksponenttifunktion olemassaolo sekä tärkeimmät ominaisuudet perustellaan logaritmifunktion ominaisuuksien avulla ja käänteisfunktion määritelmää hyödyntämällä. Lisäksi tutkitaan luonnollisen logaritmifunktion ja eksponenttifunktion yhteyttä toisiinsa graafisesti.

Luvussa 3 määritellään eksponenttifunktio potenssisarjana. Eksponenttifunktion tärkeimmät ominaisuudet perustellaan suppenevien potenssisarjojen laskusääntöjen avulla. Lisäksi eksponenttifunktion jatkuvuutta perustellaan potenssisarjan suppenemisen ja suppenemissäteen avulla. Potenssisarjan avulla havainnollistetaan myös, mistä eksponenttifunktiolle käytettävä notaatio e^x on johdettu.

Työn neljännessä luvussa määritellään eksponenttifunktion derivaattafunktio. Logaritmifunktion käänteisfunktiona määritellylle eksponenttifunktiolle derivaattafunktio määritellään käänteisfunktion derivaatan avulla. Potenssisarjana määritellylle eksponenttifunktiolle derivaattafunktio johdetaan erotusosamäärää hyödyntäen. Tämän ohella tutkitaan eksponenttifunktion sileyttä derivaattafunktion avulla. Eksponenttifunktion sileyden tutkimisen yhteydessä havainnollistetaan luonnollisen logaritmifunktion ja eksponenttifunktion derivaattafunktioiden käyttäytymistä.

Avainsanat: eksponenttifunktio, luonnollinen logaritmi, potenssisarja

ALKUSANAT

Tämän kandidaatintyön kirjoitusprosessi alkoi joulukuussa 2023 ja tuli päätökseen maaliskuussa 2024. Kandidaatintyön kirjoittaminen oli välillä raskasta, mutta opettavaista ja mielenkiintoista.

Haluan kiittää kandidaatintyön ohjaajaa Simo Ali-Löyttyä työn ohjaamisesta sekä hyvästä ja rakentavasta palautteesta läpi kirjoitusprosessin. Lisäksi haluan kiittää perhettäni kannustuksesta ja painostuksesta. Erityiskiitokset ystävälleni Onnille henkisestä tuesta.

Tampereella, 14. maaliskuuta 2024

Aleksi Ketola

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

e^x	Eksponenttifunktio
$\exp(x)$	Eksponenttifunktio
ln	luonnollinen logaritmi
L(x)	Luonnollinen logaritmifunktio
l(x)	Luonnollisen logaritmifunktion derivaattafunktio
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
TAU	Tampereen yliopisto (engl. Tampere University)

1. JOHDANTO

Eksponenttifunktio on yksi tärkeimmistä funktioista matematiikassa. Eksponenttifunktiot ovat oleellinen osa kompleksilukuja ja trigonometrisiä funktioita käsiteltäessä ja määrittäessä. Maailman kauneimmaksi yhtälöksikin kutsuttu Eulerin identiteetti $e^{i\pi} + 1 = 0$ perustuu eksponenttifunktioon [8].

Työn tarkoituksena on määritellä eksponenttifunktio kahdella eri tavalla ja tarkastella eksponenttifunktion tärkeimpiä ominaisuuksia. Työn tavoitteena on antaa lukijalle syvällinen katsaus eksponenttifunktion määritelmiin ja tärkeimpiin ominaisuuksiin. Työ käsittelee reaalisia eksponenttifunktioita, mutta antaa hyvät lähtökohdat myös kompleksisten eksponenttifunktioiden käsittelyyn. Lukijalta odotetaan yliopistomatematiikan analyysin perusteiden hallintaa.

Luvussa 2 käsitellään aluksi luonnollista logaritmifunktiota ja todistetaan sen tärkeimmät ominaisuudet. Luonnollisen logaritmifunktion ominaisuuksien perusteella voidaan määritellä käänteisfunktio, joka on eksponenttifunktio. Lisäksi havainnollistetaan, mitä käänteisfunktio tarkoittaa.

Työn kolmannessa luvussa keskitytään eksponenttifunktion määrittelyyn sarjakehitelmän avulla. Luvussa perustellaan, miksi sarjakehitelmä on olemassa ja näytetään, että eksponenttifunktioin tärkeimmät ominaisuudet toteutuvat silloinkin, kun käsitellään potenssisarjoja.

Neljännessä luvussa tarkistellaan eksponenttifunktion derivaattafunktiota. Lukijalle osoitetaan ja perustellaan, miten derivaattafunktio muodostetaan ja miksi se on olemassa. Tämän ohessa käsitellään eksponenttifunktion sileyttä. Funktion sileydellä kuvataan funktion jatkuvaa derivoituvuutta [4]. Yhteenvedossa kootaan yhteen tärkeimmät tulokset ja niihin liittyvät pohdinnat.

2. MÄÄRITELMÄ LOGARITMIFUNKTION AVULLA

Määritellään eksponenttifunktio hyödyntäen luonnollista logaritmifunktiota. Oletetaan integraalin ominaisuudet tunnetuiksi. Protter [6] määrittelee luonnollisen logaritmifunktion integraalin avulla.

Määritelmä 2.1. Olkoon x positiivinen reaaliluku. *Luonnollinen logaritmifunktio* ln määritellään integraalin avulla.

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \tag{2.1}$$

Analyysin peruslauseen avulla voidaan tarkemmin tutkia ja perustella määritelmän 2.1 mukaisen luonnollisen logaritmifunktion ominaisuuksia. Analyysin peruslause esitellään Protterin [6] teoksessa.

Lause 2.2. *Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Määritellään funktion f integraalifunktio F:*

$$F(x) = \int_a^c f(t)dt.$$

Tällöin funktio F on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva kaikissa pisteissä c, jotka ovat suljetulla välillä $[a, b]$

2.1 Luonnollisen logaritmifunktion ominaisuudet

Leblin [3] teoksessa on määritelty luonnolliselle logaritmifunktiolle ominaisuuksia, joiden avulla voidaan perustella logaritmifunktion olemassaolo.

Lause 2.3. *Funktio $\ln(x)$ on olemassa, jos se toteuttaa ehdot:*

1. *Funktion $\ln(x)$ määrittelyjoukko on $(0, \infty)$.*
2. $\ln(1) = 0$.
3. *Funktio $\ln(x)$ on derivoituva määrittelyjoukossaan ja $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$.*
4. *Funktio $\ln(x)$ on aidosti kasvava.*
5. *Funktion $\ln(x)$ maalijoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja*

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \text{ ja } \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty.$$

6. *Funktio $\ln(x)$ on bijektio.*

7. *Kaikilla luvuilla x ja y, jotka kuuluvat avoimelle välille* $(0, \infty)$ *on voimassa*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

8. *Jos luku q on rationaaliluku ja* $x > 0$*, niin* $\ln(x^q) = q\ln(x)$.

Todistetaan, että luonnollisen logaritmifunktion määritelmässä 2.1 esiintyvällä integraalilla on lauseen 2.3 ehdoissa määritetyt ominaisuudet. Todistamista varten otetaan käyttöön merkintä määritelmässä 2.1 esitellylle integraalille.

$$L(x) = \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \tag{2.2}$$

Lauseen 2.3 ensimmäinen ja kolmas ehto voidaan todistaa hyödyntämällä analyysin peruslausetta 2.2.

Todistus. Merkitään $l(t) = \frac{1}{t}$. Funktio $L(x)$ (2.2) on määritelty funktion $l(t)$ määrättynä integraalina. Funktio $l(t)$ on määritelty kaikkialla paitsi kohdassa $t = 0$. Rationaalifunktiona funktio $l(t)$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan eli kaikkialla paitsi kohdassa $t = 0$.

Tutkitaan nyt suljettua väliä $[x, 1]$, jossa $0 < x < 1$. Funktio $l(t)$ on jatkuva kyseisellä suljetulla välillä, koska se ei sisällä pistettä $t = 0$. Morganin [5] mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio on integroituva. Täten suljetulla välillä $[x, 1]$, jossa $0 < x < 1$, funktio $l(t)$ on integroituva.

Vastaavasti suljetulla välillä $[1, \infty]$ funktio $l(t)$ on jatkuva, koska se ei sisällä pistettä $t = 0$. Koska kyseessä on suljettu väli ja funktio $l(t)$ on jatkuva tällä välillä, voidaan Morganin [5] mukaan todeta, että funktio $l(t)$ on integroituva suljetulla välillä $[1, \infty]$.

Integraalifunktio $L(x)$ (2.2) on siis hyvin määritelty suljetuilla väleillä $[1, \infty]$ ja $[x, 1]$, jossa $0 < x < 1$. Analyysin peruslauseen 2.2 mukaan funktio $L(x)$ on jatkuva suljetuilla väleillä $[1, \infty]$ ja $[x, 1]$, jossa $0 < x < 1$. Lisäksi analyysin peruslauseen 2.2 nojalla funktio $L(x)$ (2.2) on derivoituva kaikissa pisteissä c, jotka sijaitsevat edellä mainituilla väleillä. Täten siis funktiolla $L(x)$ on ehdon 1 mukainen määrittelyjoukko ja se on derivoituva määrittelyjoukossaan.

Analyysin peruslauseen (2.2) avulla saadaan suoraan laskemalla osoitettua funktion $L(x)$ (2.2) derivaatta $L'(x)$.

$$L'(x) = \frac{d}{dx}L(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \frac{1}{x}$$

□

Lauseen 2.3 ehdon 3 tuloksesta seuraa, että ehto 4 toteutuu myös. Ehdossa 3 määritelty derivaattafunktio $L'(x) = \frac{1}{x}$ saa vain positiivisia arvoja määrittelyjoukossaan. Koska derivaattafunktio $L'(x)$ saa vain positiivisia arvoja, on se aidosti kasvava funktio.

Lauseen 2.3 ehto 2 voidaan todeta suoraan laskemalla hyödyntäen määrätyn integraalin ominaisuuksia.

$$L(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$$

Lebl [3] todistaa lauseen (2.3) seitsemännen ehdon suoraan laskemalla hyödyntäen integraalin perusominaisuuksia:

Todistus. Tutkitaan integraalia $L(x)$ (2.2) ja tehdään muuttujanvaihto $c = yt$. Tällöin $\frac{dc}{dt} = y$ ja määrätyn integraalin alaraja y ja yläraja xy.

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_y^{xy} \frac{y}{c}\,dt$$

Sijoitetaan $y = \frac{dc}{dt}$.

$$L(x) = \int_y^{xy} \frac{\frac{dc}{dt}}{c}\,dt = \int_y^{xy} \frac{1}{c}\,dc$$

Integraalin laskusääntöjen avulla saadaan haluttu lopputulos:

$$L(x) = \int_1^{xy} \frac{1}{c}\,dc - \int_1^{y} \frac{1}{c}\,dc = L(xy) - L(y)$$

Eli $L(xy) = L(x) + L(y)$ □

Todistetaan lauseen 2.3 viides ehto arvioimalla funktiota $L(x)$ (2.2) ylös- ja alaspäin sekä hyödyntämällä Arkhimedeen lausetta [3].

Todistus. Olkoon t jokin kokonaisluku suljetulta väliltä $[1, 2]$. Leblin mukaan [3] tällöin on selvää, että $1/t \geq 1/2$. Tämän nojalla voidaan myös todeta, että

$$L(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \geq \int_1^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Lebl [3] hyödyntää lauseen (2.3) ehdossa 7 esiteltyä ominaisuutta:

$$L(2^n) = L(2 \cdot 2 \cdots 2) = L(2) + \cdots + L(2) = nL(2). \tag{2.3}$$

Olkoon luku n epänegatiivinen kokonaisluku. On selvää, että

$$L(2^n) = nL(2) \geq L(2) \geq \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Olkoon y jokin positiivinen reaaliluku. Epäyhtälön (2.4) nojalla $L(2^n) > 0$. Tällöin Arkhimedeen lauseen mukaan on olemassa epänegatiivinen kokonaisluku n, joka toteuttaa epäyhtälön $L(2^n) = nL(2) > y$ [3]. Lebl [3] toteaa jatkuvien funktioiden väliarvolauseen nojalla, että funktio $L(x)$ saa arvot väliltä $(0, \infty)$, kun luku x valitaan väliltä $(1, 2^n)$. Väliarvolauseen mukaan funktio $L(x)$ saa tietyssä pisteessä c, joka kuuluu välille $(1, 2^n)$, arvon y. Kun luku n kasvaa, lähestyy tarkastellun välin yläraja ääretöntä. Lebl [3] määrittelee $x \geq 2^n$ ja näyttää, että

$$\lim_{x\to\infty} L(x) \geq \lim_{n\to\infty} L(2^n) = \infty.$$

Lebl [3] tutkii toista raja-arvoa määrittelemällä $L(x) = -L(\frac{1}{x})$ ja merkitsemällä $x = 2^{-n}$:

$$\lim_{x\to 0} L(x) = \lim_{x\to 0} -L\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} -L(x) = -\infty$$

Täten siis molemmat lauseen 2.3 raja-arvot ovat tosia ja funktion $L(x)$ maalijoukko on koko reaalilukujen joukko. □

Todistetaan vielä funktio $L(x)$ (2.2) bijektioksi lauseen (2.3) ehdon 6 täyttämiseksi. Jotta funktio on bijektiivinen, on sen oltava sekä injektio että surjektio[5]. Funktio $L(x)$ (2.2) voidaan todeta injektioksi, koska se on aidosti kasvava. Täten todistettavaksi jää surjektiivisuus.

Todistus. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen nojalla funktio $L(x)$ saavuttaa kaikki arvot väliltä $(-\infty, \infty)$, kun luku x valitaan määrittelyjoukosta $(0, \infty)$ [3]. Tällöin siis kuva-avaruus on sama kuin maalijoukko. Funktio $L(x)$ on siis surjektio. □

Lauseen 2.3 kahdeksas ehto voidaan todistaa hyödyntämällä jo aiemmin esiteltyä yhtälöä (2.3).

Todistus. Todistetaan ensin, että lauseen 2.3 kahdeksannen ehdon yhtälö pätee, kun luku q on positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku. Kun luku q on positiivinen kokonaisluku, pätee jo aiemmin käytetty yhtälö (2.3), jossa luku n on epänegatiivinen kokonaisluku.

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa eksponentti on negatiivinen. Merkitään $x^{-}q = \frac{1}{x^q}$, jossa q on positiivinen kokonaisluku. Leblin [3] mukaan $L(x) = -L(\frac{1}{x})$. Hyödyntämällä tätä tietoa saadaan:

$$L(x^{-q}) = L\left(\frac{1}{x^q}\right) = -L(x^q) = -qL(x)$$

Lopuksi olkoon luvut a ja b kokonaislukuja ja luku c rationaaliluku, joka määritellään lukujen a ja b osamääränä $\frac{a}{b}$. Lisäksi määritellään, että $b \neq 0$. Protterin [6] mukaan tällöin voidaan määritellä, että $y = x^{\frac{1}{b}}$. Tästä seuraa, että $x = y^b$. Koska jo aiemmin on näytetty, että lauseen 2.3 kahdeksannen ehdon yhtälö pätee kokonaisluvuilla, määrittelee Protter [6] seuraavat yhtälöt:

$$L(y^b) = bL(y) = L(x)$$

ja

$$x^c = x^{\frac{a}{b}} = (y^b)^{\frac{a}{b}} = y^a$$

Hyödyntämällä edellä esiteltyjä yhtälöitä, Protter [6] näyttää, että lauseen 2.3 kahdeksannen ehdon yhtälö pätee rationaaliluvuille.

$$L(x^c) = L(y^a) = aL(y)$$

Sijoitetaan $L(y) = \frac{L(x)}{b}$

$$L(x^c) = \frac{a}{b}L(x) = cL(x)$$

□

2.2 Logaritmifunktion käänteisfunktio

Logaritmifunktion käänteisfunktio voidaan perustella lauseen 2.3 kuudennen ehdon avulla. Aliprantis ja Burkinshaw [1] määrittelevät yhteyden funktion bijektiivisyyden ja käänteisfunktion välille.

Lause 2.4. *Jos funktio $f : X \to Y$ on bijektio, niin jokaiselle luvulle y joukosta Y on olemassa luku x joukosta X, joka toteuttaa yhtälön $f(x) = y$. Tällöin on olemassa funktio $f^{-1} : Y \to X$, joka määritellään $f^{-1}(y) = x$, kun $f(x) = y$. Funktio f^{-1} on funktion f käänteisfunktio*

Koska aiemmin todettiin, että luonnollinen logaritmifunktio (2.1) on bijektio, voidaan lauseen 2.4 nojalla todeta, että luonnollisella logaritmifunktiolla on käänteisfunktio.

Protter [6] määrittelee eksponenttifunktion luonnollisen logaritmifunktion 2.1 käänteisfunktiona.

Määritelmä 2.5. Logaritmifunktion (2.1) käänteisfunktio on *eksponenttifunktio*. Eksponenttifunktiota merkitään $\exp(x)$.

Leblin [3] teoksessa on määritelty eksponenttifunktion ominaisuuksia, joiden avulla voidaan perustella eksponenttifunktion yksikäsitteisyys ja olemassaolo. Lebl antaa ehdot eksponenttifunktion määrittely- ja maalijoukolle.

Lause 2.6. *Eksponenttifunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Eksponenttifunktion maalijoukko on avoin väli* $(0, \infty)$

Todistetaan nyt lauseen 2.6 väite.

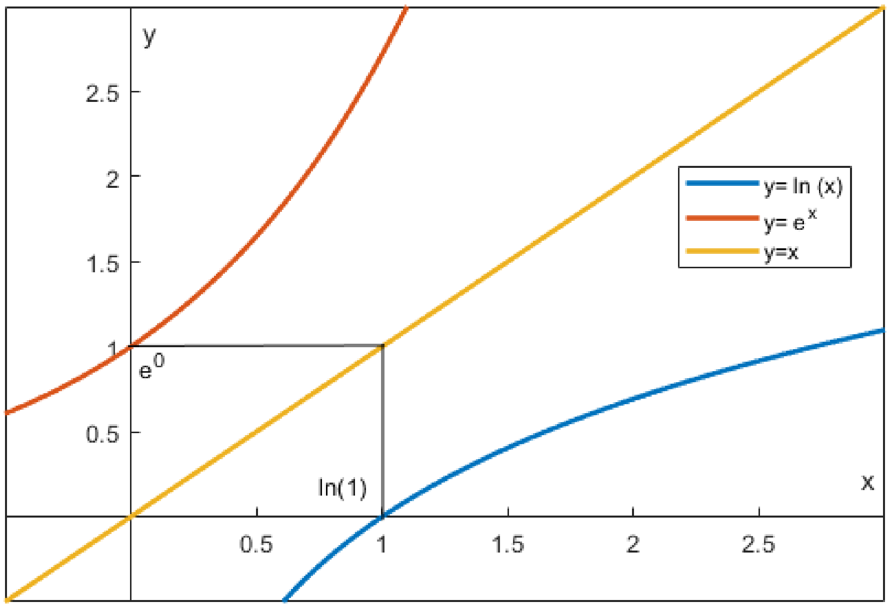
Todistus. Lauseen 2.3 mukaan luonnollisen logaritmifunktion määrittelyjoukko on avoin väli $(0, \infty)$ ja maalijoukko koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Lisäksi saman lauseen mukaan luonnollinen logaritmifunktio on bijektio. Lauseessa 2.4 on määritelty funktiolle, joka on bijektio, sen käänteisfunktion määrittely- ja maalijoukko.

Määritelmän 2.5 mukaan eksponenttifunktio on luonnollisen logaritmifunktion (2.1) käänteisfunktio. Tällöin lauseen 2.4 nojalla eksponenttifunktion määrittelyjoukko on luonnollisen logaritmifunktion maalijoukko eli koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Vastaavasti lauseen 2.4 mukaan eksponenttifunktion maalijoukko on luonnollisen logaritmifunktion maalijoukko eli avoin väli $(0, \infty)$. □

Erityisesti siis lauseen 2.3 toinen ehto pätee eksponenttifunktiolle päinvastaisesti lauseen 2.4 mukaan.

$$\exp(0) = 1, \text{kun} \ln(1) = 0. \tag{2.5}$$

Kuvasta 2.1 havaitaan, kuinka eksponenttifunktio käyttäytyy peilikuvan tavoin verrattuna luonnolliseen logaritmifunktioon. Yhtälössä (2.5) esitetty eksponenttifunktion yhteys luonnolliseen logaritmifunktioon on esitetty kuvassa 2.1 graafisesti. Kuvasta selkeästi nähdään, että logaritmifunktion (2.1) arvo on sama kuin eksponenttifunktion 2.5 argumentti.



Kuva 2.1. Luonnollinen logaritmifunktio ja eksponenttifunktio (mukaillen Protter [6]).

2.3 Käänteisfunktioiden tulo ja potenssiin korotus

Protterin [6] teoksessa määritellään eksponenttifunktioiden tulo.

Määritelmä 2.7. Olkoon luvut x ja y reaalilukuja. Tällöin on voimassa

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Näytetään, että määritelmä 2.7 on voimassa, kun eksponenttifunktio on määritelty luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktiona.

Todistus. Olkoon luvut x ja y reaalilukuja. Määritelmän 2.5 mukaan eksponenttifunktio on luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktio. Olkoon luvut a ja b sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $\exp(x) = a$ ja $\exp(y) = b$. Lauseen 2.4 nojalla

$$\ln(a) = ln(\exp(x)) = x \text{ ja } \ln(b) = \ln(\exp(y)) = y. \tag{2.6}$$

Tarkistellaan funktiota $\exp(x + y)$. Molemmat luvut x ja y voidaan ilmoittaa Leblin [3] mukaan logaritmifunktion avulla hyödyntäen yhtälöitä (2.6).

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(a) + \ln(b))$$

Lauseen 2.3 mukaan logaritmifunktioille on voimassa

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Tällöin voidaan merkitä

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)).$$

Lauseen 2.4 nojalla voidaan todeta, että $\exp(\ln(ab)) = ab$.

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x)\exp(y).$$

□

Protterin [6] teoksessa määritellään eksponenttifunktion potenssiin korotus.

Määritelmä 2.8. Olkoon luku x reaaliluku ja luku q rationaaliluku. Tällöin pätee

$$\exp(x^q) = (\exp(x))^q.$$

Todistetaan, että määritelmä 2.8 pätee, kun eksponenttifunktio on määritelty luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktiona.

Todistus. Olkoon luku x reaaliluku ja luku q rationaaliluku. Eksponenttifunktio $\exp(x)$ on määritelmän 2.5 mukaan luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktio. Olkoon luku y positiivinen reaaliluku. Määritelmän 2.4 mukaan $\ln(y) = x$, kun $\exp(x) = y$. Leblin [3] mukaan tällöin on voimassa

$$\exp(qx) = \exp((q\ln(y)).$$

Lauseessa 2.3 todettiin, että luonnolliselle logaritmifunktiolle on voimassa

$$\ln(y^q) = q\ln(y). \tag{2.7}$$

Leblin [3] mukaan voidaan yhtälöä (2.7) hyödyntäen todeta, että

$$\exp(qx) = \exp((q\ln(y)) = \exp(\ln(y^q)).$$

Lauseen 2.4 nojalla voidaan todeta, että

$$\exp(qx) = \exp((q\ln(y)) = \exp(\ln(y^q)) = y^q = (\exp(x))^q.$$

□

3. MÄÄRITELMÄ SARJAKEHITELMÄN AVULLA

Määritellään sarjakehitelmänä, Morgan Määritellään e, Morgan / Rudin Summa, jonka avulla saadaan osoitettua Lause 2.6 eli määrittelyjoukko sekä maalijoukko. Voidaan myös näyttää, miksi e^x pätevä merkintä

Eksponenttifunktio voidaan määritellä hyödyntäen potenssisarjoja. Morgan [5] määrittelee teoksessaan eksponenttifunktion.

Määritelmä 3.1. Olkoon luku x reaaliluku. Eksponenttifunktio on tällöin potenssisarja

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Potenssisarjan avulla voidaan helposti laskea numeerisia arvoja eksponenttifunktiolle. Rudin [8] määrittelee lisäksi erikseen tilanteen, jossa luku x on nolla.

Määritelmä 3.2. Olkoon eksponenttifunktio $\exp(x)$ määritelmän 3.1 mukainen potenssisarja. Kun muuttujan x arvo on nolla, saa eksponenttifunktio arvon yksi.

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

Morganin [5] teoksessa esitetään, että vakio e voidaan määritellä potenssisarjan avulla 3.1 numeerisesti.

Määritelmä 3.3. Vakio e voidaan määritellä eksponenttifunktion 3.1 avulla, kun valitaan muuttujan x arvoksi yksi.

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Numeerisesti vakiolle e saadaan arvoksi $e = \exp(1) \approx 2{,}718\ldots$.

3.1 Potenssisarjan suppeneminen ja jatkuvuus

Määritelmässä 3.1 eksponenttifunktio määriteltiin potenssisarjana. Tutkitaan nyt, suppeneeko potenssisarja. Potenssisarjan suppenemista voidaan tutkia suhdetestin avulla. Morgan [5] määrittelee suhdetestin.

Määritelmä 3.4. Olkoon sarja $\sum_n^\infty a_n$ ja sarjan jäsenien osamäärän raja-arvo äärettömyydessä

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Jos $\rho > 1$, sarja hajaantuu. Jos $\rho < 1$, sarja suppenee itseisesti. Jos $\rho = 1$ tai raja-arvoa ei ole olemassa, testin avulla ei voi olla varmoja suppeneeko sarja vai hajaantuuko sarja.

Todistetaan nyt, että määritelmän 3.1 mukainen potenssisarja suppenee itseisesti.

Todistus. Tutkitaan sarjaa $\exp(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$. Tarkistellaan suhdetestin 3.4 avulla, suppeneeko sarja.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right|$$

Sievennetään ja saadaan

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{xn!}{n!(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0 \tag{3.1}$$

Koska $\rho < 1$, suppenee sarja itseisesti määritelmän 3.4 nojalla. □

Morganin [5] teoksessa esitellään määritelmä suppenemissäteelle.

Määritelmä 3.5. Olkoon potenssisarja muotoa $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Potenssisarjalla on suppenemissäde $0 \leq R \leq \infty$, joka määrittää ne luvut x, joilla potenssisarja suppenee. Kun $|x| < R$, sarja suppenee itseisesti. Kun $|x| > R$, sarja hajaantuu. Kun $x = \pm R$, sarja voi olla suppeneva itseisesti, ehdollisesti tai sarja voi hajaantua.

Lisäksi Morganin [5] mukaan potenssisarja suppenee tasaisesti suppenemissäteen muodostamilla suljetuilla väleillä $[-R, R]$ ja on derivoituva termeittäin samaisella välillä.

Suhdetestin avulla todettiin jo aiemmin, että eksponenttifunktio 3.1 suppenee itseisesti. Yhtälöstä (3.1) huomataan, että suppeneminen ei ole riippuvainen muuttujan x arvosta, koska termi $| \left| \frac{1}{(n+1)} \right|$ lähestyy nollaa. Muuttuja x voi siis olla mikä tahansa reaaliluku eli tällöin suppenemissäde on $R = \infty$.

Koska suppenemissäde $R = \infty$, suppenee eksponenttifunktio 3.1 tasaisesti mielivaltaisesti valituilla suljetuilla väleillä koko reaalilukujen joukossa [5]. Samaisilla väleillä eksponenttifunktio 3.1 on termeittäin derivoituva eli eksponenttifunktio on derivoituva koko reaalilukujen joukossa. Koska eksponenttifunktio 3.1 on derivoituva koko reaalilukujen joukossa, on sen oltava jatkuva funktio koko reaalilukujen joukossa.

3.2 Potenssisarjojen tulo

Rudinin [7] mukaan kahden suppenevan potenssisarjan tulo voidaan ilmoittaa omana potenssisarjanaan.

Määritelmä 3.6. Olkoon potenssisarjat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ suppenevia. Tällöin on olemassa sarja c_n, joka määritellään sarjojen a_n ja b_n tulona.

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Hyödyntämällä määritelmää 3.6, voidaan laskea eksponenttifunktioiden tulo, koska eksponenttifunktion määrittelemä potenssisarja 3.1 suppenee itseisesti[8]. Luvussa 2 määriteltiin eksponenttifunktioiden tulolle kaava. Näytetään nyt, että määritelmä 2.7 on voimassa potenssisarjan avulla määritellylle eksponenttifunktiolle.

Todistus. Olkoon kaksi itseisesti suppenevaa potenssisarjaa $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ja $\exp(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}$. Tarkistellaan näiden potenssisarjojen tuloa ja hyödynnetään määritelmän 3.6 kaavaa.

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{k-n}}{(k-n)!}$$

Kerrotaan yhtälö termillä $\frac{k!}{k!}$ ja saadaan

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!} x^n y^{k-n}.$$

Siirretään termi $\frac{1}{k!}$ ensimmäisen summan ulkopuolelle ja saadaan

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} x^n y^{k-n}.$$

Hyödynnetään binomikaavaa $\frac{k!}{n!(k-n)!} x^n y^{k-n} = (x+y)^k$ [4].

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \exp(x+y)$$

On siis näytetty, että $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$. □

Näytetään vielä, että eksponenttifunktioiden tulon määritelmä 2.7 toimii, vaikka tulontekijöitä olisi useampi kuin 2.

Todistus. Todistetaan induktiivisesti, että määritelmän 2.7 kaava eksponenttifunktioiden tulolle toimii, jos tulontekijöitä on $n > 2$ kappaletta. Olkoon x ja y reaalilukuja. Eksponenttifunktioille $\exp(x)$ ja $\exp(y)$ pätee määritelmän 2.7 nojalla

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

Luku y voidaan ilmoittaa summana $a + b$. Tällöin eksponenttifunktioiden tulo saa muodon

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x)\exp(a+b) = \exp(x)\exp(a)\exp(b) = \exp(x+a)\exp(b) = \exp(x+a+b).$$

Nähdään, että eksponenttifunktioiden tulolle määritelty kaava toimii, kun tulontekijöitä on kolme. Nyt ilmoitetaan luku y lukujen $c_1 \dots c_{n+1}$ summana, jolloin tulontekijöitä on $n + 1$ kappaletta. Tällöin eksponenttifunktioiden tulo on

$$\exp(x)\exp(a + c_1 + \cdots + c_{n+1}) = \exp(x)\exp(a)\exp(c_1 + \cdots + c_{n+1})$$

Jatkamalla eksponenttifunktion sisällä olevasta summasta yksittäisten termien poimimista tulontekijöiksi saadaan

$$\exp(x)\exp(a + c_1 + \cdots + c_{n+1}) = \exp(x)\exp(a)\exp(c_1)\cdots\exp(c_{n+1}).$$

Käytetään kaavaa 2.7 ensimmäisiin tulontekijöihin.

$$\exp(x)\exp(a+c_1+\cdots+c_{n+1}) = \exp(x)\exp(a)\exp(c_1)\cdots\exp(c_{n+1}) = \exp(x+a)\exp(c_1)\cdots\exp(c_{n+1})$$

Jatketaan kaavaan 2.7 hyödyntämistä tulontekijä kerrallaan ja saadaan

$$\exp(x)\exp(a + c_1 + \cdots + c_{n+1}) = \exp(x + a)\exp(c_1)\cdots\exp(c_{n+1}) = \exp(x + a + c_1 + \cdots + c_{n+1}).$$

Nähdään siis, että määritelmän 2.7 kaava toimii, vaikka tulontekijöitä olisi useampi kuin kaksi. □

Rudin [7] nostaa teoksessaan esiin myös erikoistapauksen, joka seuraa määritelmästä 2.7. Kun x on mikä tahansa reaaliluku, niin

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1.$$

Tästä seuraa, että eksponenttifunktio on eri suuri kuin nolla kaikilla reaaliluvuilla x [7].

3.3 Eksponenttifunktio vakion e avulla

Määritelmässä 3.3 todettiin, että vakio e saadaan määriteltyä eksponenttifunktion avulla laskemalla sen arvo, kun $x = 1$. Rudinin [7] mukaan eksponenttifunktiolle voidaan määritellä toinen esitysmuoto tarkistelemalla lauseketta $\exp(x_1 + \dots x_n) = \exp(x_1)\cdots\exp(x_n)$, jossa luku n on positiivinen kokonaisluku. Määrittelemällä $x_1 = \cdots = x_n = 1$ saadaan

$$\exp(n \cdot 1) = \exp(1 + \cdots + 1) = \exp(1)\cdots\exp(1) = (\exp(1))^n.$$

Määritelmän 3.3 mukaan voidaan siis todeta

$$\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n. \tag{3.2}$$

Näytetään erikseen, että yhtälö (3.2) on voimassa, kun luku n on rationaalinen tai negatiivinen.

Todistus. Olkoon luku $q = \frac{p}{q}$ rationaaliluku ja luvut p ja d positiivisia kokonaislukuja. Rudinin

[7] mukaan, tällöin on voimassa

$$(\exp(q))^d = \exp(q)\cdots\exp(q).$$

Potenssien laskusääntöjen perusteella tulontekijöitä on d kappaletta. Tällöin määritelmän 2.7 nojalla

$$(\exp(q))^d = \exp(q)\cdots\exp(q) = \exp(qd) = \exp(\frac{p}{q}q) = \exp(p).$$

Koska luku p on positiivinen kokonaisluku, voidaan Rudinin [7] mukaan merkitä

$$(\exp(q))^d = \exp(p) = e^p.$$

Potenssien laskusääntöjen sekä molempien puolien korottaminen potenssiin $\frac{1}{d}$ avulla saadaan

$$\exp(q) = e^{\frac{p}{d}} = e^q$$

On siis näytetty, että $\exp(q) = e^q$, kun luku q on rationaalinen.

Olkoon luku a positiivinen reaaliluku. Tällöin yhtälön (3.2) mukaan

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} = e^{-}a$$

Huomataan, että yhtälö (3.2) on voimassa myös negatiivisille reaaliluvuille. □

Koska yhtälö (3.2) pätee kaikille reaaliluvuille, voidaan sen avulla määritellä eksponenttifunktio ja käyttää merkintää e^x merkinnän $\exp(x)$ sijasta [8].

3.4 Eksponenttifunktion määrittely- ja maalijoukko

Luvussa 3.1 todettiin, että potenssisarjan avulla määritelty eksponenttifunktio 3.1 on jatkuva koko reaalilukujen joukossa, koska se on derivoituva koko reaalilukujen joukossa. Tämän perusteella voidaan siis todeta, että eksponenttifunktion 3.1 määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Luvussa 3.2 todettiin, että eksponenttifunktio ei voi saada arvoa nolla, koska yhtälö 3.2 on voimassa. Eksponenttifunktion määritelmästä 3.1 seuraa suoraan, että eksponenttifunktio saa vain positiivisia arvoja, kun luku x on positiivinen [7]. Kun luku x on nolla, määritelmän 3.2 mukaan eksponenttifunktio saa arvon yksi. Kun tarkistellaan negatiivisia lukuja, voidaan yhtälön (3.2) avulla näyttää, että

$$\exp(x)\exp(-x) = 1 \Leftrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Yhtälöstä (3.4) huomataan, että jos luku x on negatiivinen, on eksponenttifunktion arvo positiivinen, koska aiemmin on todettu, että $\exp(x) > 0$, kun $x > 0$. Voidaan siis todeta, että eksponenttifunktio 3.1 saa vain positiivisia arvoja.

Tutkitaan vielä erikseen raja-arvot. Kun luku x lähestyy ääretöntä, niin potenssisarjan 3.1 termit kasvavat rajatta eli eksponenttifunktion arvo lähestyy ääretöntä [7]. Tutkittaessa tilannetta, jossa x

lähestyy negatiivista äärettömyyttä, voidaan hyödyntää yhtälöä (3.4) [7].

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$$

Eksponenttifunktio 3.1 arvot lähestyvät nollaa, kun luku x lähestyy negatiivista äärettömyyttä. Voidaan siis todeta, että eksponenttifunktion 3.1 maalijoukko on $(0, \infty)$.

4. EKSPONENTTIFUNKTION DERIVAATTA

Derivaatta voidaan yksinkertaisimmillaan määritellä erotusosamäärän avulla [2].

Määritelmä 4.1. Olkoon joukko I luvun x_0 eräs naapurusto ja funktio $f : I \to \mathbb{R}$ derivoituva tässä naapurustossa. Olkoon luku x jokin joukon I luku. Funktion f derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.1}$$

Määritelmässä 4.1 annettu yhtälö 4.1 voidaan Littlen et al. [4] mukaan ilmoittaa myös muodossa

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{4.2}$$

Rudin [8] määrittelee eksponenttifunktion derivaatan teoksessaan.

Määritelmä 4.2. Eksponenttifunktion $\exp(x) = e^x$ derivaattafunktio on

$$\exp'(x) = e^x.$$

Tarkistellaan vielä erikseen, päädytäänkö samaan tulokseen eksponenttifunktion eri määritelmien avulla.

4.1 Potenssisarjan derivaatta

Määritetään eksponenttifunktion derivaatta, kun eksponenttifunktio on määritelty potenssisarjana 3.1. Käytetään derivaatan määritelmää 4.1 ja yhtälöä (4.2). Rudinin [8] mukaan derivaattafunktio on tälllöin erotusosamäärä

$$\exp'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x + h) - \exp(x)}{h}.$$

Käytetään eksponenttifunktioiden tulon kaavaa 2.7 ja saadaan

$$\exp'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

Sijoitetaan eksponenttifunktion $\exp(h)$ paikalle määritelmän 3.1 mukainen potenssisarja.

$$\exp'(x) = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1}{h}$$

Potenssisarjan ensimmäinen termi on nolla, koska $\frac{h^0}{0!} = 1$. Muokataan lauseketta suorittamalla osoittajassa oleva vähennyslasku eli $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}$.

$$\exp'(x) = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1}{h} = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}}{h} = \exp(x) \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}$$

Sarjan ensimmäinen termi on luku yksi, joten se voidaan ottaa sarjasta erilleen. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{(n+1)!}.$$

Edelleen voidaan ottaa termi h ulos sarjasta, jolloin saadaan

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{(n+1)!} = 1 + h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{(n+1)!} = 1 + h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)!}.$$

Sijoitetaan nämä derivaattafunktioon.

$$\exp'(x) = \exp(x) \lim_{h\to 0} 1 + h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)!}$$

Kolmioepäyhtälön avulla voidaan todeta, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{h^n}{(n+2)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|h|^n}{n!} \leq e^{|h|}.$$

Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{h^n}{(n+2)!} \right|$ on kolmioepäyhtälön nojalla rajoitettu: Sarja on aina pienempi tai yhtä pieni kuin $e^{|h|}$, joka lähestyy lukua yksi, kun luku h lähestyy nollaa. Vastaavasti kun luku h lähestyy nollaa, on tulon $h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)!}$ lähestyttävä nollaa. Tästä saadaan, että

$$\exp'(x) = \exp(x) \lim_{h\to 0} 1 + h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)!} = \exp(x)(1+0) = \exp(x).$$

Eksponenttifunktion derivaatta on siis eksponenttifunktio itse.

4.2 Logaritmifunktion käänteisfunktion derivaatta

Määritellään eksponenttifunktion derivaatta, kun eksponenttifunktio on määritelty logaritmifunktion käänteisfunktiona 2.5. Leblin [3] mukaan derivaattafunktio voidaan määritellä hyödyntäen käänteisfunktion derivaattaa. Lebl [3] määrittelee teoksessaan käänteisfunktion derivaatan.

Määritelmä 4.3. Olkoon A ja B reaalilukuvälejä. Jos funktio $f : A \to B$ on aidosti jatkuva bijektio ja derivoituva reaalilukuvälille A kuuluvassa pisteessä x sekä derivaatan arvon käänteisluku pisteessä x on eri suuri kuin nolla, on tällöin käänteisfunktio f^{-1} derivoituva pisteessä $y = f(x)$. Käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'$ on

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

Jos funktio f on jatkuvasti derivoituva ja derivaattafunktio f' on aina eri suuri kuin nolla, niin käänteisfunktio f^{-1} on jatkuvasti derivoituva.

Tarkistellaan nyt määritelmän 2.5 mukaista eksponenttifunktiota. Luvun 2 lauseessa 2.3 määriteltiin, että luonnollinen logaritmifunktio on aidosti jatkuva bijektio ja se on derivoituva koko määrittelyjoukossaan. Määritelmän 2.3 mukaan luonnollisen logaritmifunktion derivaatta on

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \ln'(x) = \frac{1}{x}. \tag{4.3}$$

Vastaavasti logaritmifunktion derivaatan käänteisluku on

$$\frac{1}{\ln'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x. \tag{4.4}$$

Logaritmifunktion derivaattafunktiosta (4.3) nähdään, että sen on oltava aina eri suuri kuin nolla määrittelyjoukossaan, joka on lauseen 2.3 mukaan positiivisten reaalilukujen joukko. Derivaattafunktio on siis olemassa kaikissa määrittelyjoukon pisteissä. Määritelmän 4.3 ehdot täyttyvät luonnollisen logaritmifunktion tapauksessa. Leblin [3] mukaan eksponenttifunktion derivaatta pisteessä x hyödyntäen määritelmää 4.3 on

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x) \tag{4.5}$$

Eksponenttifunktion derivaattafunktio on siis eksponenttifunktio itse. Koska eksponenttifunktio saa vain positiivisia arvoja lauseen 2.6 mukaan, on eksponenttifunktion derivaattafunktio (4.5) määritelty kaikilla reaaliluvuilla x.

4.3 Funktion sileys

Morganin [5] teoksessa todetaan, että potenssisarja, joka suppenee aina kaikilla reaaliluvuilla, on jatkuvasti derivoituva. Luvussa 3.1 todettiin, että eksponenttifunktiolla suppenemissäde on ääretön eli se suppenee kaikkilla reaaliluvuilla. Little et al. [4] määrittelee teoksessaan sileän funktion.

Määritelmä 4.4. Funktio f on sileä välillä I, jos kaikissa välin I pisteissä x funktio f on jatkuvasti derivoituva eli kaikille positiivisille kokonaisluvuille k on olemassa derivaattafunktio $f^{(k)}(x)$.

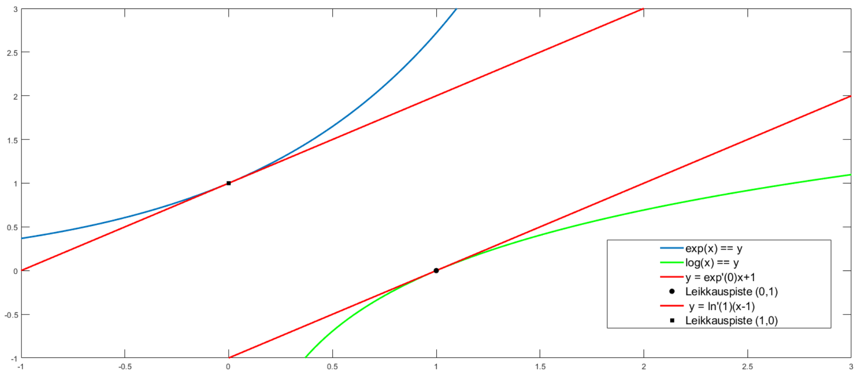
Nyt eksponenttifunktion tapauksessa huomataan, että määritelmä 4.4 toteutuu, koska derivaattafunktio on funktio itse ja tällöin se on selvästi jatkuvasti derivoituva. Jatkuvasti derivoituvuus voidaan perustella myös käänteisfunktion derivaatan määritelmän 4.3 avulla. Määritelmän mukaan eksponenttifunktion on oltava jatkuvasti derivoituva, koska sen käänteisfunktio eli luonnollinen logaritmifunktio on jatkuvasti derivoituva ja sen jokaisen kertaluvun derivaatta on eri suuri kuin nolla. Logaritmifunktion ensimmäisen kertaluvun derivaatta on

$$\ln^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Jos luku k on positiivinen kokonaisluku, on luonnollisen logaritmin kertaluvun k derivaatta

$$\ln^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}.$$

On siis selvää, että myös luonnollinen logaritmifunktio on jatkuvasti derivoituva määrittelyjoukossaan ja täten kyseessä on sileä funktio.



Kuva 4.1. *Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmifunktio sekä niiden tangenttisuorat.*

Kuvasta 4.1 huomataan, että tangenttisuoran $y = \exp'(0)x + 1$ kulmakerroin on sama kuin tangenttisuoran $y = \ln'(1)(x-1)$. Eksponenttifunktion sekä luonnollisen logaritmifunktion derivaattafunktiot määrittelevät kyseisten tangenttisuorien kulmakertoimet. Tämä siis osoittaa, että

$$\exp'(x) = \ln'(y), \text{ kun } y = \exp(x).$$

Koska eksponenttifunktion derivaatta on funktio itse ja se on sileä, voidaan kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k merkitä

$$\exp^k(x) = \ln'(y), \text{ kun } y = \exp^k(x).$$

5. YHTEENVETO

Eksponenttifunktio voidaan määritellä sekä logaritmifunktion käänteisfunktiona että potenssisarjana. Määritelmät muodostavat erilaiset lähtökohdat tarkistella eksponenttifunktiota. Kuitenkin määritelmät ovat ekvivalentteja, koska samat eksponenttifunktion ominaisuudet pätevät molemmissa tapauksissa. Eksponenttifunktion tärkeimpiä ominaisuuksia ovat jatkuvuus, eksponenttifunktioiden tulo sekä jatkuva derivoituvuus.

Eksponenttifunktion määritteleminen logaritmifunktion käänteisfunktiona vaatii logaritmifunktion olemassaolon. Eksponenttifunktion määritelmä perustuu luonnollisen logaritmifunktion lauseessa 2.4 esiteltyyn bijektiivisyyteen. Eksponenttifunktion ominaisuudet perustuvat luonnolliselle logaritmifunktiolle lauseessa 2.3 määriteltyihin ominaisuuksiin, jotka käänteisfunktion avulla voidaan johtaa eksponenttifunktiolle.

Sarjakehitelmän avulla määritelty eksponenttifunktio mahdollistaa helpon tavan laskea numeerisia arvoja eksponenttifunktiolle ja perustelee eksponenttifunktiolle yleisesti käytetyn merkinnän $\exp(x) = e^x$. Eksponenttifunktion määrittely potenssisarjalla perustuu potenssisarjan suppenemiseen ja äärettömään suppenemissäteeseen. Eksponenttifunktion tärkeimmät ominaisuudet pystytään perustelemaan suoraan suppenevien potenssisarjojen laskusäännöillä.

Eksponenttifunktion derivaattafunktio on eksponenttifunktio itse. Eksponenttifunktion derivaatta voidaan muodostaa molempien määritelmien avulla. Logaritmifunktion avulla määritetyn eksponenttifunktion tapauksessa hyödynnetään käänteisfunktion derivaatan määritelmää 4.3. Potenssisarjan avulla määritellylle eksponenttifunktiolle vastaavasti derivaattafunktio määritellään erotusosamäärän avulla hyödyntäen suppenevien potenssisarjojen laskusääntöjä sekä kolmioepäyhtälöä. Eksponenttifunktion derivaattafunktion avulla pystytään perustelemaan eksponenttifunktion sileys.

LÄHTEET

[1] C. D. Aliprantis ja B. Owen. *Principles of Real Analysis. 2. ed.* Academic Press, 1990.

[2] P. M. Fitzpatrick. *Advanced Calculus: Second Edition. 2nd ed. Vol. 5,* American Mathematical Society, 2009.

[3] J. Lebl. *Basic Analysis: Introduction to Real Analysis*. Jiří Lebl, 2020.

[4] C. H. C. Little, K. L. Teo ja B. van Brunt. *Real Analysis via Sequences and Series. 2015th ed.* Springer Nature, 2015.

[5] F. Morgan. *Real Analysis*. American Mathematical Society, 2005.

[6] M. H. Protter. *Basic Elements of Real Analysis*. Springer, 1998.

[7] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis. 2. ed.* McGraw-Hill, 1964.

[8] W. Rudin. *Real and complex analysis. 3rd ed.* McGraw-Hill, 1987.