Tampereen yliopisto

Katri Airas

L’HÔPITALIN SÄÄNTÖ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Tammikuu 2024

Tiivistelmä

Katri Airas: L'Hôpitalin sääntö
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Tammikuu 2024

Funktion raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin tietyn pisteen c läheisyydessä. Raja-arvo voidaan ratkaista tutkimalla funktion arvoja tämän pisteen c oikealla ja vasemmalla puolella. Jos funktion arvot saadaan mielivaltaisen lähelle arvoa L, kun muuttujalle x annetaan arvoja riittävän läheltä lukua c sen oikealta ja vasemmalta puolelta, niin funktiolla on raja-arvo L pisteessä c.

Raja-arvon ratkaisussa oletuksena on, että funktio on määritelty pisteen c ympäristössä, eli tutkittavalla avoimella välillä mahdollisesti lukuunottamatta pistettä c. Jos funktiolla on epäoleellinen epäjatkuvuuskohta, eli funktiota ei ole määritelty pisteessä c, niin raja-arvoa ratkaistaessa päädytään määrittelemättömään muotoon. Määrittelemättömät muodot voidaan usein lausua kahden funktion osamääränä, jossa lauseke saa muodon $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$. Ranskalainen matemaatikko Guillaume de l'Hôpital kehitti säännön, jonka mukaan lausekkeen osoittajasta ja nimittäjästä voidaan ottaa derivaatat, minkä jälkeen funktion raja-arvo voidaan ratkaista tämän uuden lausekkeen avulla. Jotta derivaattaa ja l'Hôpitalin sääntöä voidaan käyttää raja-arvon ratkaisemiseen, niin funktioiden on oltava jatkuvia suljetulla välillä tutkittavan pisteen c ympäristössä ja derivoituvia tutkittavalla avoimella välillä lukuunottamatta pistettä c. Tutkielmassa polynomi-, eksponentti-, logaritmi- ja trigonometristen funktioiden jatkuvuusominaisuudet on oletettu tunnetuiksi.

Tutkielmassa todistetaan l'Hôpitalin sääntö Cauchyn väliarvolauseen avulla ja esitellään tarkemmin l'Hôpitalin säännön käyttöä sekä $\frac{0}{0}$ että $\frac{\infty}{\infty}$ -muotoisten raja-arvojen ratkaisussa. Lisäksi perehdytään muihin määrittelemättömiin muotoihin, joihin raja-arvoja ratkaistaessa voidaan päätyä. Tällaisia ovat 0^0, 1^∞, ∞^0, $0 \cdot \infty$ ja $\infty - \infty$ -muotoiset raja-arvot. Näissä tapauksissa lauseke voidaan muokata $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$ -muotoon, jonka jälkeen l'Hôpitalin sääntöä voidaan soveltaa. Tutkielmassa esitellään lausekkeen muodon muokkaamiseen tarvittavia menetelmiä, kuten muuttujanvaihdosta ja polynomi-, potenssi-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden laskusääntöjen hyödyntämistä.

Avainsanat: l'Hôpitalin sääntö, raja-arvo, derivaatta, määrittelemätön muoto

Sisällys

1 Johdanto

Funktion raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin tietyn pisteen c läheisyydessä. Oletuksena on, että funktio on määritelty pisteen c ympäristössä mahdollisesti lukuunottamatta pistettä c. Jos funktiota ei ole määritelty pisteessä c, niin ratkaistaessa päädytään määrittelemättömään muotoon, jolloin raja-arvoa ei voida ratkaista suoraan, vaan on käytettävä muita keinoja. Tässä tutkielmassa esitellään l'Hôpitalin sääntö, jota voidaan hyödyntää määrittelemättömien muotojen ratkaisemiseen.

Luvussa 2 esitellään toispuoleisten raja-arvojen määritelmä ja l'Hôpitalin säännön 3.1 todistamiseen tarvittavia lauseita. Ensin esitellään Rollen lause 2.1, jota käyttämällä on saatu yleistetty väliarvolause kahdelle jatkuvalle ja derivoituvalle funktiolle. Yleistetyn väliarvolauseen 2.2 todistus on esitelty, jotta nähdään mistä Cauchyn väliarvolause 2.3 saadaan.

Luvussa 3 todistetaan l'Hôpitalin sääntö Cauchyn väliarvolauseen avulla. Tämän jälkeen havainnollistetaan sääntöä ja sen käyttöä esimerkkien avulla.

Luvussa 4 esitellään vielä muita määrittelemättömiä muotoja, joihin raja-arvotarkasteluissa voidaan päätyä. Luvun aliluvuissa esitellään jokaiseen määrittelemättömään muotoon 0^0, 1^∞, ∞^0, $0 \cdot \infty$ ja $\infty - \infty$ liittyvät ratkaisutavat. Viimeisessä aliluvussa 4.4 pohditaan, milloin l'Hôpitalin sääntö ei helpota raja-arvon ratkaisua ja millaisia ratkaisuvaihtoehtoja tällöin voidaan hyödyntää.

Lukijalta edellytetään raja-arvon ja derivaatan käsitteiden tuntemista sekä erilaisten funktioiden laskusääntöjen hallitsemista. Päälähteinä tutkielmassa on käytetty Saturnino L. Salaksen et al. kirjaa Calculus: One and Several Variables ja Pertti Koiviston luentomonistetta Analyysi B.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Luvussa 2 esitellään lyhyesti toispuoleisten raja-arvojen määritelmä ja muutamia pääaiheen käsittelyssä tarvittavia lauseita.

Määritelmä 2.1. ([3, s. 80]) Olkoon funktio f määritelty välillä $[c, c+h]$, kun $h > 0$. Jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad c < x < c + \delta,$$

niin tällöin funktiolla f on *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä c. Tätä merkitään

$$\lim_{x \to c+} f(x) = L.$$

Määritelmä 2.2. ([3, s. 79]) Olkoon funktio f määritelty välillä $[c - h, c]$, kun $h > 0$. Jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad c - \delta < x < c,$$

niin tällöin funktiolla f on *vasemmanpuoleinen raja-arvo* pisteessä c. Tätä merkitään

$$\lim_{x \to c-} f(x) = L.$$

Lause 2.1 (Rollen lause)**.** *Oletetaan, että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja $f(a) = f(b)$. Tällöin avoimella välillä $]a, b[$ on sellainen piste r siten, että $f'(r) = 0$.*

Todistus (Ks. [2, s. 36]). □

Rollen lauseen avulla saadaan Yleistetty väliarvolause kahdelle jatkuvalle funktiolle.

Lause 2.2 (Yleistetty väliarvolause)**.** *Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituvia avoimella välillä $]a, b[$. Tällöin suljetulla välillä $[a, b]$ on sellainen piste r, että*

$$g'(r)[f(b) - f(a)] = f'(r)[g(b) - g(a)].$$

Todistus (vrt. [2, s. 38–39]). Olkoon

$$G(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Tällöin G on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a,b[$. Nyt

$$\begin{aligned} G(a) &= f(a)[g(b)-g(a)] - g(a)[f(b)-f(a)] \\ &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} G(b) &= f(b)[g(b)-g(a)] - g(b)[f(b)-f(a)] \\ &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a), \end{aligned}$$

joten $G(a) = G(b)$.

Siis Rollen lauseen mukaan välillä $[a,b]$ on piste r, jolle pätee $G'(r) = 0$, eli

$$f'(r)[g(b)-g(a)] - g'(r)[f(b)-f(a)] = 0. \qquad \square$$

Tehdään edellä esiteltyyn lauseeseen 2.2 lisäoletus $g'(x) \neq 0$, jolloin saadaan Cauchyn väliarvolause 2.3.

Lause 2.3 (Cauchyn väliarvolause)**.** *Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituvia avoimella välillä $]a,b[$. Jos $g' \neq 0$ välillä $[a,b]$, niin on olemassa sellainen piste r, että*

$$\frac{f'(r)}{g'(r)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, \quad \textit{missä } r \in [a,b].$$

Todistus (Ks. [3, s. 613–614]). $\square$

Käytetään Cauchyn väliarvolausetta l'Hôpitalin säännön 3.1 todistamiseen luvussa 3.1.

3 Määrittelemättömät muodot ja l'Hôpitalin sääntö

Funktion raja-arvon määrittäminen ei onnistu aina suoraan, jolloin sen määrittämiseen voidaan käyttää muita keinoja. Raja-arvo osamäärästä $\frac{f(x)}{g(x)}$ aiheuttaa määrittelemättömän muodon $\frac{0}{0}$, jos funktioiden $f(x)$ sekä $g(x)$ raja-arvot lähestyvät samanaikaisesti nollaa. Tätä merkitään $f(x) \to 0$ ja $g(x) \to 0$. [3, s. 611]. Sama pätee raja-arvoille $f(x) \to \pm\infty$ ja $g(x) \to \pm\infty$. [3, s. 616]. Tällöin päädytään määrittelemättömään muotoon $\frac{\infty}{\infty}$. Luvussa 3 tutustutaan l'Hôpitalin sääntöön, jonka avulla päästään ratkaisemaan näitä määrittelemättömiä muotoja.

3.1 $\frac{0}{0}$ -muodon ratkaisu

Lause 3.1 (L'Hôpitalin sääntö I)**.** *Oletetaan, että* $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*. Jos*

i) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0,$

ii) $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad$ *missä* $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$

niin

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Todistus (vrt. [1, s. 238–239] ja [3, s. 611, 614]). Tarkastellaan ensin oikeanpuoleista raja-arvoa. Oletetaan, että

$$\lim_{x\to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Tällöin $f'(x)$ ja $g'(x)$ on kumpikin määritelty välillä $[c, c+h[$ ja $g'(x) \neq 0$. Olkoot $f(c) = 0$ ja $g(c) = 0$. Varmistetaan, että f ja g ovat jatkuvia välillä $[c, c+h]$ ja derivoituvia välillä $]c, c+h[$. Käytetään Cauchyn väliarvolausetta 2.3 ja näytetään, että on olemassa luku c_h välillä $[c, c+h]$ niin, että

$$\frac{f'(c_h)}{g'(c_h)} = \frac{f(c+h) - f(c)}{g(c+h) - g(c)} = \frac{f(c+h)}{g(c+h)}.$$

Koska $h \to 0$ ja $c < c_h < c + h$, niin tällöin myös $c_h \to c$. Nyt funktion raja-arvon määritelmän perusteella voidaan kirjoittaa

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Tarkastellaan sitten vasemmanpuoleista raja-arvoa. Oletetaan, että

$$\lim_{x\to c-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Tällöin $f'(x)$ ja $g'(x)$ on kumpikin määritelty välillä $]c-h, c]$ ja edelleen $g'(x) \neq 0$, $f(c) = 0$ ja $g(c) = 0$. Varmistetaan, että f ja g ovat jatkuvia välillä $[c-h, c]$ ja derivoituvia välillä $]c-h, c[$. Nyt Cauchyn väliarvolauseen mukaan on olemassa luku $c_{h'}$ välillä $[c-h, c]$ niin, että

$$\frac{f'(c_{h'})}{g'(c_{h'})} = \frac{f(c) - f(c-h)}{g(c) - g(c-h)} = \frac{f(c-h)}{g(c-h)}.$$

Nyt

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(c-h)}{g(c-h)} = \lim_{x\to c-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Siis toispuoleisten raja-arvojen määritelmän ja Cauchyn väliarvolauseen 2.3 mukaan

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c-h)}{g(c-h)} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \qquad \square$$

Havainnollistetaan l'Hôpitalin sääntöä seuraavaksi esimerkin avulla.

Esimerkki 3.1. Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Kertomalla tekijät toistensa nimittäjillä raja-arvo saadaan muotoon

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

Funktiot $f(x) = x - \sin x$ ja $g(x) = x \sin x$ ovat jatkuvia ja derivoituvia. Huomataan, että

$$\lim_{x\to 0} (x - \sin x) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} x \sin x = 0.$$

Käytetään l'Hôpitalin sääntöä 3.1. Sääntöä voidaan käyttää tarvittaessa useita kertoja, kunnes löydetään etsitty raja-arvo. Saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

L'Hôpitalin sääntöä käyttämällä löydettiin haluttu raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

3.2 $\frac{\infty}{\infty}$ -muodon ratkaisu

Lause 3.2 (L'Hôpitalin sääntö II)**.** *Oletetaan, että* $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Jos*

i) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$,

ii) $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad$ *missä* $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

niin

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Todistus Ks. [3, s. 614, 616]. Todistuksessa sijoitetaan muuttuja $x = \frac{1}{t}$ ja tulos saadaan vastaavanlaisella käsittelyllä kuin lauseen 3.1 todistuksessa. □

Sovelletaan edellistä lausetta 3.2 seuraavissa esimerkeissä.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^3}.$$

Muokkaamalla raja-arvoa ja käyttämällä l'Hôpitalin sääntöä saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^3} &= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{x^3}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3x^2 e^{x^3}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6x \cdot e^{x^3} + 3x^2 \cdot 3x^2 e^{x^3}} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^{x^3}(9x^4 + 6x)} = 0.\end{aligned}$$

Esimerkki 3.3. Olkoon $s > 1$ ja $r \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{s^x} = 0.$$

i) Jos $r = 0$, niin

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{s^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{s^x} = 0.$$

ii) Jos $r < 0$, niin

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{s^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{s^x \cdot x^{-r}} = 0.$$

iii) Jos $r > 0$. Tarkastellaan ensin tapaus $r = 1$ ja käytetään l'Hôpitalin sääntöä:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^1}{s^x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{s^x \cdot \ln s} = 0.$$

Tarkastellaan sitten tapaus $r \neq 1$. Oletuksen mukaan $s > 1$. Huomataan, että x^r voidaan kirjoittaa luonnollisen logaritmin laskusääntöjen avulla muodossa

$$x^r = e^{r \cdot \ln x}.$$

Nyt derivoimalla saadaan

$$\frac{d}{dx}e^{r\cdot\ln x} = e^{r\cdot\ln x}\cdot r\cdot\frac{1}{x} = x^r\cdot r\cdot\frac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

Kun $0 < r < 1$, niin saadaan

$$\lim_{x\to\infty} rx^{r-1} = 0.$$

Kun $r > 1$, niin saadaan

$$\lim_{x\to\infty} rx^{r-1} = \infty.$$

Olkoon k on pienin positiivinen kokonaisluku, jolle pätee $k > r$. Kun tehdään k iteraatiota, niin saadaan muoto

$$\lim_{x\to\infty}(r(r-1)(r-2)\cdots(r-(k-1)))x^{r-k} = 0.$$

Edellisten huomioiden ja l'Hôpitalin säännön avulla saadaan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^r}{s^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{rx^{r-1}}{s^x\cdot\ln s} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{r(r-1)x^{r-2}}{s^x\cdot\ln s\cdot\ln s + s^x\cdot\frac{1}{s}}.$$

Kun sääntöä käytetään riittävän monesti, huomataan, että nimittäjä lähestyy aina kohti ääretöntä ja osoittaja kohti nollaa.
Saadaan siis

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^r}{s^x} = 0.$$

Kohdista i) – iii) seuraa, että

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^r}{s^x} = 0.$$

4 Muita määrittelemättömiä muotoja

Edellä käsiteltiin raja-arvotarkastelujen määrittelemättömiä muotoja $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$, joihin voitiin soveltaa suoraan l'Hôpitalin sääntöä. Näiden lisäksi on määrittelemättömiä muotoja, joihin sääntöä ei voida soveltaa suoraan. Seuraavaksi käsitellään 0^0, 1^∞, ∞^0, $0 \cdot \infty$ ja $\infty - \infty$ -muotoisia määrittelemättömiä muotoja raja-arvon ratkaisussa. Näissä kaikissa tilanteissa määrittelemätön muoto muutetaan ensisijaisesti muotoon $\frac{0}{0}$. Tarvittaessa voidaan käyttää myös muunnosta muotoon $\frac{\infty}{\infty}$. Tämän jälkeen raja-arvo voidaan ratkaista l'Hôpitalin säännön avulla.

Määrittelemättömän muodon muuntamiseen voidaan käyttää polynomi- ja potenssifunktioiden sekä eksponentti- ja logaritmifunktioiden laskusääntöjä tai muuttujanvaihdosta. Usein funktio muutetaan muodosta $y = [f(x)]^{g(x)}$ muotoon $\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x)\ln[f(x)]$ [3, s. 618]. Muuttujanvaihdoksessa [2, s. 52] voidaan kirjoittaa $t = \frac{1}{x}$, jolloin saadaan raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} f(t). \tag{4.1}$$

4.1 Muodot 0^0, 1^∞ ja ∞^0

Tutkitaan funktion G määrittelemättömiä muotoja, kun

$$G(x) = [f(x)]^{g(x)}.$$

Funktio G saa määrittelemätön muodon 0^0, kun $f(x) = 0$ ja $g(x) = 0$. Määrittelemätön muoto 1^∞ saadaan, kun $f(x) = 1$ ja $g(x) = \pm\infty$. Muotoon ∞^0 päädytään, kun $f(x) = \pm\infty$ ja $g(x) = 0$. Näissä tapauksissa funktio G voidaan muuttaa luonnollisen logaritmin avulla logaritmifunktioksi $G(x) = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$ ja ratkaista raja-arvo

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c} g(x)\ln(f(x))}. \tag{4.2}$$

Seuraavassa esimerkissä käytetään funktion muunnosta logaritmimuotoon ja luonnollisen logaritmin laskusääntöjä ∞^0 -muotoisen raja-arvon ratkaisussa.

Esimerkki 4.1. Ratkaistaan raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

Raja-arvo on muotoa ∞^0, joten tehdään muunnos (4.2)

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(\ln x)}.$$

Ratkaistaan seuraavaksi raja-arvo l'Hôpitalin säännön avulla

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln(\ln x)}} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x(\ln(\ln x))^2\cdot\ln x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(\ln x))^2\cdot\ln x}{x} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln(\ln x)\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x + (\ln(\ln x))^2\cdot\frac{1}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln(\ln x) + (\ln(\ln x))^2}{x} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\ln(\ln x)\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2 + 2\cdot\ln(\ln x)}{x\cdot\ln x} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x\cdot\ln x}}{\ln x + 1} = 0.$$

Koska e^x on jatkuva funktio, niin

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(\ln x)} = e^0 = 1.$$

Esimerkissä havainnollistettiin l'Hôpitalin säännön käyttöä ja raja-arvon muuntamista $\frac{0}{0}$ -muotoon. Tehtävän voisi ratkaista helpommin muuntamalla raja-arvon muotoon $\frac{\infty}{\infty}$.

4.2 Muoto $0\cdot\infty$

Funktio $G(x) = f(x)\cdot g(x)$ saa määrittelemättömättömän muodon $0\cdot\infty$, kun $f(x)\to 0$ ja $g(x)\to\pm\infty$. Muoto $0\cdot\infty$ saadaan muutettua muotoon $\frac{0}{0}$ käyttämällä polynomifunktioiden laskusääntöjä. [3, s. 618]. Funktio G voidaan muuttaa muotoon

$$G(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}. \tag{4.3}$$

Esimerkki 4.2. Ratkaistaan raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}, \qquad \text{kun } a\in\mathbb{R}.$$

Raja-arvo on muotoa 1^∞, joten muutetaan lauseke muotoon (4.2)

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{ax\cdot\ln(1+\frac{1}{x})}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi raja-arvoa

$$\lim_{x \to \infty} ax \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Nyt raja-arvo on muotoa $\infty \cdot 0$. Muutetaan lausekkeen muotoa käyttämällä polynomifunktion laskusääntöjä (4.3) ja ratkaistaan raja-arvo l'Hôpitalin säännön avulla

$$\lim_{x \to \infty} ax \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{ax}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{ax^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a}{1 + \frac{1}{x}} = a.$$

Koska e^x on jatkuva funktio, niin

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{\lim_{x \to \infty} ax \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^a.$$

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to 0+} \sin x^{\sin x}.$$

Huomataan, että raja-arvo on muotoa 0^0, joten muokataan lauseke logaritmimuotoon (4.2), jolloin saadaan

$$\lim_{x \to 0+} \sin x^{\sin x} = e^{\lim_{x \to 0+} (\sin x \cdot \ln(\sin x))}.$$

Nyt tarkasteltava raja-arvo

$$\lim_{x \to 0+} \sin x \cdot \ln(\sin x)$$

on muotoa $0 \cdot \infty$. Jos lausekkeen muuttaa muotoon $\frac{0}{0}$, niin derivoiminen on monimutkaista. Sovelletaan funktion osamäärän kaavaa (4.3) ja muokataan lauseke muotoon $\frac{\infty}{\infty}$. Tämän jälkeen raja-arvo voidaan ratkaista l'Hôpitalin säännön avulla

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} \sin x \cdot \ln(\sin x) &= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{-\cos x \cdot \sin x} \\ &= \lim_{x \to 0+} -\sin x = 0. \end{aligned}$$

Eksponenttifunktion jatkuvuudesta seuraa, että

$$\lim_{x \to 0+} \sin x^{\sin x} = e^{\lim_{x \to 0+} (\sin x \cdot \ln(\sin x))} = e^0 = 1.$$

4.3 Muoto $\infty - \infty$

Funktio $G(x) = f(x) - g(x)$ saa määrittelemättömättömän muodon $\infty - \infty$, kun $f(x) \to \infty$ ja $g(x) \to \infty$. Muoto $\infty - \infty$ saadaan muutettua muotoon $\frac{0}{0}$ käyttämällä polynomifunktioiden laskusääntöjä. Usein funktiot f ja g ovat osamäärämuodossa, jolloin ne voidaan kertoa toistensa nimittäjillä. [3, s. 618]

Esimerkki 4.4. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right).$$

Raja-arvo on muotoa $\infty-\infty$. Kerrotaan tekijät toistensa nimittäjillä ja ratkaistaan raja-arvo l'Hôpitalin säännön avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right) &= \lim_{x\to 0+}\frac{\arctan x - x}{x\cdot\arctan x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{\arctan x+\frac{x}{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{\frac{(1+x^2)\arctan x + x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{-x^2}{(1+x^2)\arctan x + x} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{-2x}{2x\arctan x+\frac{1+x^2}{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\arctan x - x}{x\cdot\arctan x} = 0.$$

4.4 L'Hôpitalin säännön käytöstä

Joskus l'Hôpitalin säännön käyttö tekee ratkaistavasta lausekkeesta vain monimutkaisemman. Tällöin raja-arvon ratkaisemiseen kannttaa soveltaa muita keinoja. Joissain tapauksissa lausekkeen muuntaminen muodosta $\frac{0}{0}$ muotoon $\frac{\infty}{\infty}$ tai päinvastoin helpottaa ratkaisua [2, s. 52]. Joskus taas voidaan soveltaa kokonaan eri menetelmää. Eri menetelmiä käytettäessä l'Hôpitalin sääntö voi kuitenkin olla toimiva tapa saadun ratkaisun tarkistamiseen.

Seuraavat esimerkit havainnollistavat tilanteita, joissa raja-arvon määrittämisessä voidaan hyödyntää muita keinoja l'Hôpitalin säännön lisäksi.

Esimerkki 4.5. Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}.$$

Käyttämällä suoraan l'Hôpitalin sääntöä lauseke monimutkaistuu. Muokataan raja-arvo muotoon

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Tehdään muuttujanvaihdos (4.1), $t=\frac{1}{x}$ ja ratkaistaan toispuoleiset raja-arvot

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t^2}\cdot 2t} = 0$$

ja

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{e^{t^2}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{t^2}\cdot 2t} = 0.$$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin raja-arvon määritelmän mukaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Esimerkki 4.6. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-\sin x},$$

ja ratkaistaan raja-arvo kahdella eri tavalla.

Tapa 1. Kertomalla osoittaja ja nimittäjä muuttujalla $\frac{1}{x}$ saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{\sin x}{x}} \overset{*}{=} 1.$$

*Huomataan, että $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Tapa 2. Käytetään suppiloperiaatetta, jolloin saadaan epäyhtälö

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x}{x-\sin x} \leq \frac{x}{x-1}.$$

Ratkaistaan raja-arvot l'Hôpitalin säännön avulla

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} 1.$$

Koska

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

niin suppiloperiaatteen mukaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-\sin x} = 1.$$

Esimerkki 4.7. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x!}.$$

Nyt l'Hôpitalin sääntöä ei voida soveltaa, joten käytetään muita keinoja. Kirjoitetaan raja-arvo sarjaesityksen avulla

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{k!}$$

ja tutkitaan sarjan suppenemista. Hajaantumistestistä tiedetään, että suppenevalle sarjalle pätee

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0.$$

Koska $x_k > 0$, kun $k \geq 1$, niin voidaan käyttää osamäärätestiä. Nyt kahdelle sarjan peräkkäiselle termille pätee

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{2(k+1)^2}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2k^2} = \frac{k+1}{k^2} = \frac{1+\frac{1}{k}}{k} \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Koska peräkkäisten termien osamäärä $\frac{x_{k+1}}{x_k} \to 0 < 1$, niin osamäärätestin mukaan sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{k!}$$

suppenee ja

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} \frac{2k^2}{k!} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x!} = 0.$$

Lähteet

[1] Al-Gwaiz, M. A., Elsanousi, S. A. *Elements of Real Analysis*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[2] Koivisto, P. *Analyysi B. Opintomoniste*. Tampereen yliopisto. 2021.

[3] Salas, S., Hille, E., Etgen G. J., *Calculus: One and Several Variables*. 9th ed. New York: Wiley & Sons, 2003.