Tampereen yliopisto

Laura Heikkilä

EMATHSTUDIO-OPPIMISALUSTAN HYÖDYNTÄMINEN MATEMAATTISESSA TODISTAMISESSA

Diplomityö
Teknis-luonnontieteellinen tiedekunta
Tarkastajat: yliopistonlehtori Terhi Kaarakka
yliopisto-opettaja Jani Hirvonen
yliopistonlehtori Johanna Rämö
Elokuu 2023

TIIVISTELMÄ

Laura Heikkilä: eMathStudio-oppimisalustan hyödyntäminen matemaattisessa todistamisessa
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen DI-ohjelma
Elokuu 2023

Tässä diplomityössä tutkittiin eMathStudio-nimisen oppimisalustan käyttöä matemaattisessa todistamisessa. Opiskelijat kokevat usein matemaattisen todistamisen vaikeana. Opetuksessa käytetään nykyisin paljon matemaattisia ohjelmistoja, mutta erityisiä todistamiseen liittyviä ohjelmistoja ei usein käytetä. eMathStudion matemaattinen tausta perustuu rakenteisiksi päättelyketjuiksi kutsuttuun menetelmään, joka voi auttaa opiskelijoita todistamisessa. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten opiskelijat suoriutuivat todistustehtävistä eMathStudiota käyttäen, miten opiskelijat oppivat eMathStudion käytön ja millainen kokemus opiskelijoille jäi eMathStudiosta.

Tutkimus toteutettiin yliopiston syventävällä matematiikan opintojaksolla, jonka aikana opiskelijat tekivät tutkimukseen kuuluvia todistustehtäviä eMathStudiolla. Heille opetettiin seitsemän viikon ajan eMathStudion käyttöä kerran viikossa, ja he vastasivat 1-3 todistustehtävään viikoittain. Tutkimukseen osallistui 11 Tampereen yliopiston opiskelijaa. Tutkimukseen käytettiin aineistolähtöistä sisällönanalyysiä. Aineisto koostui kyselyistä ja opiskelijoiden antamista vastauksista todistustehtäviin.

Tutkimustulosten perusteella opiskelijat osasivat tehdä todistustehtäviä matemaattisesti hyvin, mutta niin kutsutussa kielentämisessä heillä oli ongelmia. Muutama opiskelija ei oppinut käyttämään eMathStudiota erityisen hyvin, mutta suurin osa ymmärsi, miten sinne voi lisätä monipuolisesti erilaisia rakenteisten päättelyketjujen osia tai miten käyttää eMathChecker-tarkastinta. Opiskelijat kokivat, että eMathStudion hyviä puolia olivat muun muassa tarkastamismahdollisuus ja sen vaatima rakenne. Toisaalta opiskelijat kokivat, etteivät aina tienneet, miten tulkita tarkastimen antamaa vihjettä ja miten korjata heidän vastaustaan. Osa opiskelijoista koki, että eMathStudion opettelusta voi olla tulevaisuudessa hyötyä muiden ohjelmien opetteluun, ja osan mielestä siitä oli hyötyä todistamistehtävien tekemiseen.

eMathStudio toimi yliopiston todistamistehtävissä hyvin. Vaikka opiskelijat kokivatkin ongelmia oppimisalustan käytössä, niin useimmat pystyivät käyttämään sitä tehtäviin vastaamiseen. eMathStudiota käytetään pääasiassa yläkouluissa ja lukioissa, mutta tämän tutkimuksen perusteella sitä voi hyödyntää myös yliopistoissa.

Avainsanat: eMathStudio, oppimisalusta, tarkastaminen, todistaminen, analyyttinen geometria, rakenteiset päättelyketjut

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Laura Heikkilä: Utilizing the learning platform eMathStudio for mathematical proving
Master's Thesis in Technology
Tampere University
Master's Programme in Science and Engineering
August 2023

This thesis examines the use of a learning platform called eMathStudio for mathematical proving. Students often find mathematical proving difficult. Mathematical software are used a lot in teaching today, but software specialized in proving are not often used. The mathematical background of eMathStudio is based on a method called structured derivations which can help students in proving. The purpose of the study was to find out how students performed their proving exercises using eMathStudio, how students learned to use eMathStudio and what kind of opinion students had about eMathStudio.

The study was carried out in an advanced university mathematics course, during which the students did the study-related proving exercises with eMathStudio. For seven weeks, they were taught how to use eMathStudio once a week and they answered 1-3 proving exercises weekly. 11 students from the University of Tampere participated in the study. Data-driven content analysis was used for the study, and the material consisted of questionnaires and answers given by students to the proving exercises.

According to the study results, the students were able to do proving exercises mathematically well, but they had problems with so called languaging. A few students did not learn how to use eMathStudio particularly well, but most of them understood how to add a variety of different parts of the structured derivations there and how to use the eMathChecker. Students felt that the possibility of checking and the structure eMathStudio required were some of the good things about eMathStudio. However, the students felt that they did not always know how to interpret the hints given by the checker and how to correct their answers. Some of the students felt that learning eMathStudio could be useful in the future for learning other programs and some felt that it was useful for doing proving exercises.

eMathStudio worked well in university level proving exercises. Even though the students had problems using the learning platform, most of them were still able to use it to answer the exercises. eMathStudio is mainly used in middle schools and high schools, but based on this study, it can be utilized in university level as well.

Keywords: eMathStudio, learning platform, checking, proving, analytic geometry, structured derivations

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Ajattelin, että toisella kerralla opinnäytetyön tekeminen olisi helpompaa, mutta aina asiat eivät mene niin kuin etukäteen suunnittelisi. Aloitin diplomityön tekemisen syksyllä 2021, ja tarkoituksena oli tehdä pedagoginen matematiikan työ. Sain TTMOT-tutkimusryhmältä valmiin idean kesällä 2021 eMathStudioon liittyvästä diplomityöstä ja päätin tarttua haasteeseen.

eMathStudio osoittautui oppimisalustana haastavaksi, ja moneen kertaan minulta meinasi usko loppua sen opettelemisesta sekä tehtävien laatimisesta. Kiitän Ida Rönnlundia ja Ralph-Johan Backia eMathStudion käyttämisen ohjaamisesta ja neuvomisesta. Heidän avullaan eMathStudion käyttöni parani vähitellen, ja sain diplomityön tutkimuksen toteutettua.

Kiitän ohjaajiani Terhi Kaarakkaa, Jani Hirvosta sekä Johanna Rämöä, jotka auttoivat motivoimisessa pitkän ja välillä uuvuttavan mutta antoisan diplomityön eteenpäin viemisessä. Kiitoksia myös niille opiskelijoille, jotka osallistuivat opintojaksolle ja antoivat luvan vastauksiensa tutkimuskäyttöön. Kiitän myös läheisiäni työn oikolukemisesta ja ystäviäni, Hiukkasella ja muualla, ajatusten pois viemisestä välillä muihin asioihin.

Tampereella, 28. elokuuta 2023

Laura Heikkilä

SISÄLLYSLUETTELO

KUVALUETTELO

TAULUKKOLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$\mathbb{B}$	Boolen algebran joukko: $\{0, 1\}$, totuusarvot tosi ja epätosi
CAS	matemaattinen ohjelmisto symboliseen laskentaan (engl. Computer Algebra System)
F	väite on epätosi (engl. False)
$f(x)$	funktion f arvo muuttujalla x
GeoGebra	avoimen lähdekoodin matematiikkaohjelmisto
L	suora
$L(x, y)$	kahden muuttujan lineaarifunktio
LaTeX	ladontajärjestelmä tieteelliseen kirjoittamiseen
Lean	avoimen lähdekoodin ohjelma, interaktiivinen väitteen todistaja (engl. interactive theorem prover)
Moodle	avoimen lähdekoodin oppimisalusta (engl. Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment)
$\mathbb{N}$	luonnolliset luvut
OAJ	opetusalan ammattijärjestö
Q	kartioleikkaus
$Q(x, y)$	toisen asteen polynomifunktio
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
r	ympyrän säde
STACK	verkkoarviointijärjestelmä (engl. System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel)
T	väite on tosi (engl. True)
TIM	avoimen lähdekoodin oppimisalusta (engl. The Interactive Material)
URL	verkkosivun osoite (engl. Uniform Resource Locator)
x	x-koordinaatti
$\mathbf{x}$	vektori
y	y-koordinaatti
$\mathbb{Z}$	kokonaisluvut

1. JOHDANTO

Todistaminen koetaan yleisesti vaikeaksi matematiikan osa-alueeksi. Ball ym. (2002) toteavat, että todistaminen voi olla opiskelijoille vain rutiini, mutta sen syvällisempää tarkoitusta todistamiselle ei välttämättä synny. Moore (1994), Stavrou (2014) sekä Clement (2019) toteavat, että opiskelijoilla on vaikeuksia käyttää määritelmiä oikein. Toisaalta Clement toteaa lisäksi, että opiskelijoilla voi olla todistuksissa merkintöjä tai käsitteitä, joita he eivät määrittele.

Yliopistoissa käytetään usein erilaisia matemaattisia ohjelmistoja, mutta myös erilaisia oppimisympäristöjä ja -alustoja. Monet matemaattiset ohjelmistot, esimerkiksi Stack ja MathCheck, on todettu toimiviksi opetuksessa (Rasila ym. 2007) (Patana 2017) (Kaarakka ym. 2019) (Myllykoski ym. 2018). Ohjelmistojen käytössä voi kuitenkin olla vaikeuksia. Pantzar (2004) on sitä mieltä, että jos oppimisympäristön käyttö on liian vaikeaa, niin käyttäjän motivaatio voi laskea ja jopa oppiminen vaarantua. Todistamiseen liittyviä oppimisalustoja on olemassa, mutta Hanna ja Yan (2021) ovat sitä mieltä, että niitä ei juuri käytetä opetuksessa. Tässä tutkimuksessa käytetään eMathStudio-nimistä oppimisalustaa, joka toimii myös todistustehtävissä.

Tässä tutkimuksessa käytettiin eMathStudio-nimistä sähköistä oppimisalustaa. eMathStudio sisältää eMathChecker-tarkastimen, jolla voidaan testata yksittäisiä laskun välivaiheita. Tarkastin käyttää hyväkseen menetelmää, jota kutsutaan rakenteisiksi päättelyketjuiksi. Ne ovat jono peräkkäisiä päättelyaskeleita, jotka voivat olla esimerkiksi oletuksia, määritelmiä, laskuja tai tehtäviä. eMathChecker tarkastaa, että kaikki askeleet seuraavat edellisistä askeleista. Menetelmän yksi tarkoituksista on auttaa muun muassa matemaattisten todistusten tekemisessä.

eMathStudio on oppimisalusta, jossa opiskelija voi tehdä tehtäviä, kirjoittaa muistiinpanoja ja lukea opettajan luomaa materiaalia. Opettaja voi luoda materiaalia tekstin, taulukoiden, kaavioiden, kuvien ja matemaattisten tehtävien avulla. Hän voi seurata opiskelijoiden edistymistä kotitehtävissä, arvostella vastauksia ja kirjoittaa palautetta opiskelijoille. eMathStudio on Four Ferries -nimisen yrityksen kehittämä, ja se palkittiin vuonna 2021 Suomen eOppimiskeskus ry:n antamalla eEemeli-palkinnolla (Suomen eOppimiskeskus ry 2021).

Tässä tutkimuksessa opiskelijat tekivät todistamistehtäviä, jotka tehtiin eMathStudiolla, ja joissa hyödynnettiin eMathChecker-tarkastinta. Se toteutettiin Tampereen yliopistossa eräällä syventävällä matematiikan opintojaksolla, ja tämän diplomityön tekijä toimi opintojaksolla opetusassistenttina ja opetti tutkimukseen osallistujille eMathStudio-oppimisalustan käytön. Opiskelijat vastasivat alkukyselyyn, tehtävien oheen liitettyihin kysymyksiin ja erilliseen loppukyselyyn. Kyselyiden tarkoituksena oli selvittää, mitä mieltä opiskelijat olivat yleisesti matemaattisista ohjelmistoista ja erityisesti eMathStudiosta. Opiskelijoiden vastausten avulla selvitettiin, miten opiskelijat suoriutuivat todistustehtävistä ja miten he käyttivät eMathStudiota. Tarkemmat tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

1. Millä tavoin opiskelijat suoriutuivat todistamistehtävistä, ja millaisia matemaattisia virheitä vastauksissa esiintyi?
2. Miten opiskelijat oppivat eMathStudion käytön?
3. Millaista hyötyä opiskelijat kokevat matematiikan ohjelmistoista olevan matematiikan opetuksessa, ja mikä oli heidän kokemuksensa eMathStudiosta?

Ensimmäiseen kysymykseen luokiteltiin opiskelijoiden tekemien virheiden eri tyyppejä ja tutkittiin, miten opiskelijat todistivat annettuja väitteitä. Toisessa kysymyksessä tarkasteltiin, millä tavoin opiskelijat eMathStudiota käyttivät. Tätä varten tutkittiin opiskelijoiden vastauksista niin sanottujen erilaisten rakenteisten päättelyketjujen osien käyttöä ja oppimisalustaan kuuluvan eMathChecker-tarkastimen hyödyntämistä. eMathStudiossa rakenteinen päättelyketju luodaan eri osien avulla, ja osa voi esimerkiksi olla Lasku-, Esittely- tai Oletus-osa. Kolmanteen kysymykseen tarkasteltiin opiskelijoiden vastauksia kyselyihin koskien yleisesti matemaattisia ohjelmistoja ja eMathStudiota.

Luvussa 2 esitellään tarkemmin työn tausta ja tavoitteet sekä kerrotaan tutkimuskysymykset. Luvussa 3 kerrotaan ensin oppimisalustoista ja esitellään esimerkkeinä matemaattiset ohjelmistot Stack ja MathCheck. Viimeisenä käsitellään matemaattista todistamista lyhyesti ja mitä virheitä opiskelijat tyypillisesti todistamisessa tekevät. Luvussa 4 perehdytään ensin rakenteisiin päättelyketjuihin ja kerrotaan niihin liittyvistä aiemmista tutkimuksista. Viimeisenä esitellään kaksi analyyttiseen geometriaan liittyvää esimerkkiä ja esitellään esimerkkeihin liittyvä matemaattinen teoria. Luvussa 5 esitellään eMathStudio ja eMathChecker-tarkastin. Lisäksi esitellään eMathStudion muita ominaisuuksia. Luvussa 6 esitellään tutkimuksen tarkempi toteutus, aineistonkeruu ja kuvaillaan aineiston analyysimenetelmä. Luvussa 7 käydään läpi tulokset ja tulosten analyysi tutkimuskysymyksittäin. Viimeisessä luvussa luodaan ensin yhteenveto saaduista tuloksista, pohditaan, miten tutkimus onnistui ja arvioidaan tulosten luotettavuutta. Viimeisenä esitellään ehdotuksia miten eMathStudiota voisi tutkia ja hyödyntää jatkossa.

2. OPPIMISALUSTAT JA TODISTAMISEN VAIKEUS

Tässä luvussa tarkastellaan lyhyesti oppimisympäristöjä ja oppimisalustoja, jonka jälkeen tutustutaan tarkemmin Stack- ja MathCheck-nimisiin matematiikan ohjelmistoihin, joita voidaan käyttää oppimisympäristöjen kanssa. Lisäksi tarkastellaan lyhyesti matemaattista todistamista ja etsitään syitä siihen, miksi todistaminen koetaan vaikeaksi.

Digitaalinen oppimisympäristö on vain yksi mahdollinen termi verkossa toimiville ohjelmistoille. Maailmanlaajuisesti ei ole yksikäsitteistä määritelmää oppimisympäristölle tai oppimisalustalle (Piotrowski 2010). Nimityksiä ovat englanniksi esimerkiksi: *learning management system, virtual learning environment, managed learning environment* ja *learning platform*. Suomenkielisiä sanoja ovat esimerkiksi *digitaalinen oppimisympäristö, verkko-oppimisympäristö, oppimisalusta* ja *verkkoympäristö*. Näille sanoille ei ole yksiselitteistä eroa siitä, miten oppimisympäristö ja oppimisalusta eroavat toisistaan.

Piotrowski (2010) määrittelee oppimisalustalle (engl. e-learning platform) seuraavat kuusi aktiviteettia:

- Luominen: tuotetaan oppimateriaaleja.
- Organisaatio: aineiston järjestäminen esimerkiksi kursseiksi tai moduuleiksi.
- Toimitus: aineiston julkaisua oppilaille/opiskelijoille.
- Viestintä: tietokoneiden välinen viestintä opiskelijoiden kesken sekä opettajan ja opiskelijan kesken.
- Yhteistyö: opiskelijat työstävät yhdessä projektia tai tiedostoa. Lisäksi opettajien välinen yhteistyö.
- Arviointi: oppimisen edistymisen ja tulosten arviointia, johon kuuluu mukaan myös palaute.

Jos nämä ovat Piotrowskin mukaan voimassa, niin ohjelma voidaan luokitella oppimisalustaksi. Toisaalta esimerkiksi Tanhua-Piiroinen ym. (2016) määrittelevät, että digitaalinen oppimisympäristö heidän selvityksessään tarkoittaa "digitaalista sovellusta, palvelua, järjestelmää tai kokoelmaa erilaisia yksittäisiä ratkaisuja, joissa voidaan digitaalisesti toteuttaa esimerkiksi oppisisältöjen omaksumista, tehtävien suorittamista ja keskustelua perinteisen luokkahuoneen sijaan tai sitä täydentävästi." Toisaalta Tanhua-Piiroinen ym. määrittävät, että oppimisalusta sisältää digitaalisia työkaluja, ja että siinä voi tehdä tehtäviä ja säilyttää kurssimateriaalia. Toisaalta esimerkiksi tällöin sen ei tarvitse sisältää viestintämahdollisuutta, kuten Piotrowski on määrittänyt.

Digitaalisia oppimisympäristöjä hyödynnetään nykyisin paljon opetuksessa. OAJ:n (Opetusalan ammattijärjestö) tekemän selvityksen (Hietikko ym. 2016) mukaan vuonna 2015 sähköisiä verkko-oppimisympäristöjä käytettiin toisen asteen oppilaitoksissa ja korkeakouluissa. Uusimmassa lukion opetussuunnitelmassa (LOPS 2019) mainitaan, että "Opiskelijaa ohjataan hyödyntämään digitaalisia opiskeluympäristöjä". Tikkanen (2016) kertoi raportissaan, että suomalaisissa yliopistoissa käytettiin vuonna 2016 vaihtelevasti erilaisia digitaalisia oppimisympäristöjä. Yksi käytetyimmistä oppimisympäristöistä koko Suomessa oli tällöin Moodle.

Oppimisympäristöjen käyttö voi tuoda sekä hyötyjä että haittoja opetukseen. Tiitu (2017) väittää, että verkko-oppimisympäristöjä käyttämällä voidaan ainakin saavuttaa yhtä hyviä oppimistuloksia kuin perinteisellä opetustavalla. Lisäksi hän mainitsee, että opettajan työmäärä voi vähentyä. Toisaalta OAJ:n tekemän selvityksen mukaan (Hietikko ym. 2016) opettajat kokevat tarvitsevansa täydennyskoulutusta verkko-oppimisympäristöjen pedagogiseen käyttöön. Pantzar (2004) toteaa, että niiden käyttöönotossa tulee harkita opettajan ja oppijan edellytyksiä käyttää ympäristöä. Usein havaitaan, että tekniset osaamisvaatimukset koetaan liian haastavina. Hän ottaakin esille sen, että jos ympäristön käyttö on vaikeaa tai teknisesti haastavaa, voi käyttäjän motivaatio laskea ja oppiminen vaarantua.

2.1 Stack ja MathCheck

Tampereen yliopistossa on testattu aiemmin esimerkiksi matematiikan ohjelmistoja Stack ja MathCheck. Kumpikaan näistä ei ole sellaisenaan oppimisalusta, mutta Stackia käytetään esimerkiksi Moodle-oppimisalustan kanssa (Sangwin ja Hunt 2023) ja MathCheckiä TIM-oppimisalustan kanssa (Mathcheck-asentaminen 2023). Molemmat ohjelmat toimivat oikeellisuuden tarkastamisessa, joka on myös tässä työssä käytetyn eMathStudion eMathChecker-tarkastimen idea. eMathStudiosta kerrotaan enemmän kappaleessa 4.

Stack on avoimen lähdekoodin verkkoarviointijärjestelmä, ja sitä voidaan erityisesti käyttää matematiikassa (Stack 2023). Stackia käytetään ympäri maailman. Sen avulla opiskelijat voivat vastata Stack-tehtäviin matemaattisesti, ja se arvioi vastauksia hyödyntäen Maxima CAS-laskentaohjelmistoa (engl. Computer Algebra System). Stackin tekee monipuoliseksi muun muassa se, että siinä kysymykset voidaan satunnaistaa, jolloin opiskelijat saavat eri kysymyksiä tai eri lukuja kysymyksiin. Se tarkastaa, että opiskelijan vastaus on pätevä eli se validoi vastauksen. Opiskelijan vastauksen ei tarvitse olla tarkalleen oikeaksi määritelty, vaan ohjelmisto käyttää matemaattisia työkaluja vastauksien vertailuun. Opettaja voi itse määrittää, missä muodossa haluaa opiskelijoiden vastaavan. Opiskelijat saavat vastauksistaan palautetta, ja ohjelma kertoo, onko vastaus oikein vai väärin.

Stack-tehtävät on yleisesti todettu toimiviksi, ja opiskelijat kokevat niihin vastaamisen hyvänä (Rasila ym. 2007) (Patana 2017). Lisäksi Mäkelä (2015) että Rasila ym. (2007) totesivat tutkimuksissaan, että opiskelijat tekivät Stack-tehtäviä perinteisiä laskuharjoituksia aktiivisemmin. Mäkelä (2015) ja Panula (2012) totesivat tutkimustensa perusteella, että opiskelijoiden mielestä paras ominaisuus Stack-tehtävissä on välitön tarkastus ja palaute. Rasila ym. (2007) löysi myös ilmiön, että opiskelijat kokivat verkkoperusteiset Stack-tehtävät helpompina kuin perinteiset tehtävät. Samaa toteaa myös Panula (2012) ja lisää, että opiskelijat mielsivät Stack-tehtävät perinteisiä laskuharjoituksia täydentäviksi tehtäviksi.

Suurimmat haasteet Stackin käytössä erilaisissa tutkimuksissa näkyvät syntaksiongelmissa. Esimerkiksi Panula (2012) toteaa, että tutkimuksen opiskelijat tekivät syntaksin suhteen virheitä, mutta ne paljastuivat heille vasta vastauksen validoinnin yhteydessä. Patana (2017) toteaa myös, että opiskelijat kokivat ongelmaksi erityisesti sen, että he eivät tienneet, missä formaatissa vastaus tulisi antaa. Tämä Patanan mielestä johtuu siitä, että opiskelijat eivät tienneet tai lukeneet ohjeita huolellisesti. Rasila ym. (2007) mainitsee, että monimutkaisten vastauksien, esimerkiksi pitkien algebrallisten lausekkeiden antamisessa oli välillä hankaluuksia, minkä toteaa myös Mäkelä (2015).

Vaikka Stack onkin todettu hyödylliseksi ohjelmistoksi matematiikassa, niin Myllykoski ym. (2018) ovat sitä mieltä, että huonoa siinä on, että se tarkastaa vain lopullisen vastauksen. Opettaja ei voi tietää opiskelijan ajatusprosessia tehtävää tehdessä, eikä opiskelija näin ollen voi saada apua tehtävän tekemiseen. Matematiikkaan ja logiikkaan suunnattu MathCheck-kaavantarkastin tukee erilaista filosofiaa Stackiin verrattuna. Sen tarkoitus on antaa opiskelijalle palautetta jokaisesta laskun välivaiheesta, eikä se keskity pelkästään lopputulokseen (Valmari ja Kaarakka 2016). Valmari ja Kaarakka kertovat, että MathCheck-ohjelmaa on alun perin kehitetty Tampereen teknillisessä yliopistossa, ja nykyisin sen kehitys tapahtuu Jyväskylän yliopistossa (Valmari 2021).

Valmari (2016) tarkentaa, että MathCheck pystyy käsittelemään matematiikkaan liittyviä asioita, kuten neliöjuuren, potenssin, erilaiset funktiot ja niiden derivaatat. Se pystyy tutkimaan päättelyketjuja, jotka sisältävät relaatiomerkkejä, käsittelemään erilaisia lukuja ja hyödyntämään kirjaimia muuttujina. MathCheckille voi antaa oletuksia, esimerkiksi $x \neq 0$, ja se tarkastaa, onko väite totta annetuilla oletuksilla. Jos se ei pysty osoittamaan tätä, se pyrkii löytämään vastaesimerkin, joka todistaa, että väite ei ole totta. Valmari ja Rantala (2019) mainitsevat, että vaikka MathCheckiin lisättiin myöhemmin tenttiversio, sen alkuperäinen tarkoitus ei ole antaa pisteitä opiskelijoille vaan palautetta. MathCheck ei tallenna käyttäjän vastauksia, eikä siihen tarvitse erikseen kirjautua, mutta jos MathCheckiä käyttää jonkun oppimisympäristön, esimerkiksi TIM-järjestelmän kautta, niin tällöin se tallentaa tietoa esimerkiksi pisteistä ja käyttäjästä.

Kaarakka ym. (2019) kertovat, että MathCheck-tarkastinta on testattu erilaisissa tutkimuksissa Suomessa vuodesta 2015 lähtien. Kaarakka ym. (2019) sekä Myllykoski ym. (2018) ovat tekemiensä tutkimusten perusteella sitä mieltä, että MathCheckin käyttö oli pääasiassa hyödyksi opiskelijoille ja opettajille. Myllykoski ym. tarkentavat vielä, että sen voidaan ajatella edistävän opiskelijan matemaattista ajattelua sähköisissä tehtävissä. Kaarakka ym. kertovat myös, että opiskelijat, jotka käyttivät MathCheckiä, suoriutuivat tehtävistä paremmin kuin ne, jotka käyttivät WolframAlphaa tai eivät mitään työkalua. Opettajien näkökulmasta Kaarakka ym. ovat sitä mieltä, että alusta vähensi opettajien työtaakkaa, sillä se pystyi näyttämään opiskelijalle virheen tarkan sijainnin eikä opettajan tarvinnut tätä tehdä. Toisaalta opettaja pystyi myös hyödyntämään alustaa ja saattoi nopeammin löytää opiskelijan vastauksesta virheen käyttämällä MathCheckiä.

Valmari ja Kaarakka (2016) saivat tulokseksi, että ensimmäisen vuoden opiskelijoiden matematiikan opintojaksolla 53 opiskelijaa piti alustaa hyödyllisenä ja 48 ei. Myös Kaarakka ym. (2019) kertovat, että tutkimusten perusteella kaikki opiskelijat eivät pitäneet alustaa hyödyllisenä. Valmari ja Kaarakka tarkentavat, että ensimmäisessä tutkimuksessa osa tehtävistä oli liian helppoja eivätkä ne vaatineet välivaiheiden tarkastamista. Toisaalta osa opiskelijoista ei ollut ymmärtänyt MathCheckin toimintaa, vaan luulivat saavansa MathCheckin kautta tiedon lopullisen vastauksen oikeellisuudesta. Syntaksi oli myös aiheuttanut ongelmia joissain tutkimuksissa. Kaarakka ym. mainitsevat lisäksi, että alustaan tehtiin muutoksia tutkimusten edetessä ja alustaa pyrittiin kehittämään opiskelijoiden palautteen mukaisesti.

On myös olemassa todistamiseen liittyviä ohjelmistoja. Hanna ja Yan (2021) kertovat, että nämä voidaan jakaa interaktiivisiin väitteiden todistajiin (engl. interactive theorem provers) ja automaattisiin väitteiden todistajiin (engl. automated theorem provers). Hanna ja Yan tarkentavat, että monissa eri matematiikan osa-alueissa opetuksessa hyödynnetään digitaalisia välineitä. Ne ovat osoittautuneet arvokkaiksi, mutta todistamisessa niitä ei juuri käytetä. Niitä ei ole suunniteltu opetuskäyttöön, mutta Hanna ja Yan kokevat, että niistä voisi olla hyötyä opiskelijoille. Esimerkiksi ohjelma Lean on interaktiivinen väitteen todistaja (Jekyll+Skinny Bones 2023), mutta Thoma ja Iannone (2022) olivat tutkimuksensa perusteella sitä mieltä, että opiskelijoilla oli hankala käyttää ohjelmaa ja sen syntaksia.

2.2 Opiskelijoiden vaikeudet matemaattisissa todistuksissa

Matemaattisen todistaminen on lähtöisin antiikin Kreikasta (Lehtinen 2009). Aristoteles ja Eukleides olivat ensimmäisiä, jotka käyttivät ns. aksiomaattis-deduktiivista päättelyä, jossa todistaminen aloitetaan tunnetuista lähtökohdista. Ne voivat olla aksioomia, postulaatteja tai sitten oletuksia, jotka oletetaan alussa todeksi. Matemaattinen todistus sisältää peräkkäisiä väitteitä, joista viimeinen on johtopäätös (Levin 2019). Jos jokainen välivaihe on totta, on tällöin myös johtopäätös totta. Todistustyylejä ovat suora todistus, epäsuora todistus (joka voidaan jakaa kontrapositio ja ristiriita todistukseen), induktiotodistus ja todistus vastaesimerkillä. Näistä viimeinen ei varsinaisesti ole todistus, vaan sillä kumotaan joku väite. Doerr ja Levasseur (2023) kertovat, että todistukselle on seuraavat vaatimukset:

- Todistuksen pitää sisältää äärellinen määrä päättelyaskelia.
- Jokaisen askeleen pitää olla joko oletus tai väite, joka seuraa aiemmista askeleista käyttäen hyväksyttyä ekvivalenssia tai implikaatiota.
- Suoralle todistukselle viimeisen askeleen pitää olla johtopäätös. Epäsuoralle todistukselle viimeinen askel on ristiriita (paitsi kontrapositio todistuksessa).

He myös kertovat, että olennaista todistamisessa on löytää oletus (tai oletukset) ja väite sekä erottaa ne toisistaan. Yksi tapa tähän heidän mukaansa on, että jokainen väite voidaan esittää muodossa "jos P niin C". Tall (1989) kertoo, että todistamiseen vaaditaan kaksi tärkeää asiaa: selkeästi muodostetut määritelmät ja väitteet sekä hyväksytyt menettelytavat, joilla voidaan päätellä yhden väitteen totuus toisesta. Doerr ja Levasseur huomauttavat, että todistus voi olla erilainen riippuen siitä, kenelle se esitetään: matematiikan tutkijalle se voi olla muutaman välivaiheen todistus, mutta esimerkiksi opiskelijoillle pitkä ja yksityiskohtainen. Levin (2019) kuvailee todistamista taiteeksi, eli tarvitaan inspiraatio mutta myös tekniikan osaamista.

Todistaminen koetaan yleisesti vaikeaksi matematiikan osa-alueeksi. Aihetta on tutkittu niin opiskelijoiden kuin opettajienkin keskuudessa. Ball ym. (2002) toteavat, että monille opiskelijoille todistukset ovat ilman tarkoitusta oleva rituaali. He noudattavat tiettyä kaavaa ja joskus pelkkiä matemaattisia symboleita kirjoittaessaan todistuksia. J. Selden ja A. Selden (2009) kertovat, että jollain opiskelijoilla ei ole tietoa siitä, miten kirjoittaa todistus käyttäen matematiikan kieltä. Jones (2000) kertoo, että opettajilla ei ole tarpeeksi tietotaitoa opettaa todistamista. Hän tarkentaa, että opettajaksi valmistuvilla opiskelijoilla on todistamisen suhteen vaikeuksia ymmärtää, arvostaa tai luoda niitä. Kyyrönen (2018) toteaa, että opiskelijat kokevat, etteivät saa koulutuksessaan tarvittavia välineitä todistamisen opettamiseen, mutta jo valmistuneet opettajat ovat eri mieltä. Kyyrönen mainitsee myös, että tutkittavat opiskelijat ja jo valmistuneet opettajat ovat sitä mieltä, että todistaminen vaatii oppilailta uuden tyyppistä ajattelua.

Opiskelijat tekevät todistustehtävissään erilaisia virheitä. Moore (1994) listasi oman tutkimuksensa perusteella seuraavat seitsemän merkittävintä virhelähdettä:

1. määritelmiä ei tunnettu
2. käsitteistä oli liian vähän intuitiivista ymmärrystä
3. käsitteiden hahmottaminen ei riittänyt todistusten tekemiseen
4. esimerkkejä ei osattu tai haluttu käyttää
5. todistuksen rakenteen luomisessa ei tiedetty, miten käyttää määritelmiä

6. matemaattista kieltä ja merkintöjä ei osattu käyttää
7. todistuksen kirjoittamista ei osattu aloittaa

Yllä olevista ensimmäisessä ja viidennessä mainitaan määritelmien ymmärtäminen ja käyttäminen. Myös Stavrou (2014) ja Clement (2019) tekivät omissa tutkimuksissaan havainnon, että opiskelijat käyttävät määritelmiä väärin tai eivät ollenkaan. Mooren listaamissa eri virheissä kuudennessa mainitaan matemaattisten merkintöjen käyttö. Myös Clement havaitsi tutkimuksensa perusteella, että opiskelijat käyttävät todistuksissaan merkintöjä tai käsitteitä, joita he eivät ole määritelleet. Toinen virhe, jonka hän löysi, oli, että oletuksia ja väitteitä ei selkeästi eroteta toisistaan. Stavrou (2014) tulkitsi, että yksi tyypillisimmistä virheistä on, että väite todistetaan vain esimerkkejä käyttäen. Myös Ball ym. (2002) mainitsee esimerkkien käytön virheellisenä vastauksena todistamiseen. Stavroun mukaan lisäksi virheitä ovat, että käytetään oletuksena sitä johtopäätöstä, joka pitäisi todistaa, tai että ekvivalenssitodistuksissa opiskelija todistaa vain toisen suunnan.

Todistustehtäviin liittyy olennaisesti matematiikan kielen käyttäminen. Joutsenlahti (2010) määrittelee, että niin sanottu kielentäminen matematiikassa tarkoittaa ajattelun ilmaisemista suullisesti tai kirjallisesti kielen avulla. Hän määrittelee matematiikan sanallisten tehtävien sisältävän kolmea eri kieltä: 1. matematiikan kieltä, 2. luonnollista kieltä ja 3. kuviokieltä. Kuviokieli kuuluu erityisesti geometriaan, jossa opiskelija vastaa erilaisten kuvioiden tai kuvaajien avulla. Morgan (2001) on sitä mieltä, että kielentäminen kehittää opiskelijan matemaattista ymmärrystä, edistää matematiikan oppimista ja helpottaa opettajia arvioimaan opiskelijoiden vastauksia. Joutsenlahden lukiolaisille suunnatussa tutkimuksessa suurin osa opiskelijoista ymmärtää kielentämisen auttavan heitä ajattelun jäsentelyssä, mutta he kokevat sen vievän paljon aikaa, ja vastaukset pitenevät. Yliopisto-opiskelijoille suunnatussa tutkimuksessa Joutsenlahti ym. (2013) totesivat myös, että opiskelijat kokivat kielentämisen auttavan ymmärryksessä.

Seuraavassa luvussa tutustutaan tarkemmin menetelmään nimeltä rakenteiset päättelyketjut. Menetelmä toimii esimerkiksi matemaattisessa todistamisessa, mutta myös muilla matematiikan osa-alueilla (Back 2016). Menetelmässä tarkastellaan päättelyketjun jokaista askelta yksi kerrallaan, ja tässä työssä käytetty eMathStudio-oppimisalusta hyödyntää näitä rakenteisia päättelyketjuja.

3. RAKENTEISET PÄÄTTELYKETJUT JA ANALYYTTINEN GEOMETRIA

Tässä luvussa kerrotaan ensin rakenteisista päättelyketjuista ja niiden kehittämisestä. Lisäksi tutustutaan aiempiin tutkimuksiin rakenteisten päättelyketjujen käytöstä, ja siihen oliko niiden käytöllä vaikutusta opiskelijoiden oppimiseen. Viimeisenä tutustutaan analyyttiseen geometriaan kahden tutkimukseen liittyvän esimerkin avulla.

Back, Grundy ym. (1997) sekä Back ja von Wright (1998) kehittivät 1990-luvulla rakenteisiksi laskennallisiksi todistuksiksi (engl. structured calculational proof) kutsutun muotoilun. He muokkasivat aiemmin käytössä olleita mm. Dijkstran, Feijenin ja van Gasteren laskennallisia todistuksia (engl. calculational proofs) ja yhdistivät ne luonnolliseen päättelyyn. (Four Ferries 2021)

Laskennallisten todistusten alkuperäinen idea on tuoda selvyyttä todistamisen välivaiheisiin sekä määritelmien ja lauseiden käyttöön (Gasteren 1990). Niissä pyritään siihen, että lukijan ei tarvitse ottaa kynää ja paperia selvittääkseen, mitä jossain välivaiheessa tapahtuu.

Alunperin laskennallinen todistus näytti esimerkiksi lyhyesti seuraavalta:

$$
\begin{aligned}
& A \wedge P \\
\equiv\ & \{\text{selitys miksi } P \equiv Q\} \\
& A \wedge Q \\
\equiv\ & \{\text{selitys miksi } A \equiv B\} \\
& B \wedge Q \\
\equiv\ & \{\text{selitys miksi } B \wedge Q \equiv D\} \\
& D.
\end{aligned}
$$

Back, Grundy ym. (1997) lisäsivät muotoiluun alitodistukset. Yllä olevassa todistuksessa kokonaisuutena todistetaan, että $A \wedge P \equiv D$, mutta alitodistuksina todistetaan, että $P \equiv Q$ ja $A \equiv B$. Alitodistuksiin otettiin käyttöön merkintä • todistuksen aloitukselle ja merkintä · todistuksen lopetukselle.

Näillä merkinnöillä edellinen todistus voidaan muokata seuraavaksi:

$$
\begin{aligned}
& A \wedge P \\
\equiv\ & \{\text{muunna } P\} \\
& \quad \bullet\ P \\
& \quad \equiv\ \{\text{selitys miksi } P \equiv Q\} \\
& \quad\ \ \ Q \\
\cdot\ & A \wedge Q \\
\equiv\ & \{\text{muunna } A\} \\
& \quad \bullet\ A \\
& \quad \equiv\ \{\text{selitys miksi } A \equiv B\} \\
& \quad\ \ \ B \\
\cdot\ & B \wedge Q \\
\equiv\ & \{\text{selitys miksi } B \wedge Q \equiv D\} \\
& D.
\end{aligned}
$$

Alitodistusten idea on selkeyttää kokonaisuudessaan todistusta. Ne ovat mukana vastauksessa, mutta ne voidaan tarvittaessa piilottaa, jos halutaan tarkastella isompaa kokonaisuutta (Back, Grundy ym. 1997). Myöhemmin termi rakenteinen laskennallinen todistus muutettiin muotoon rakenteinen päättelyketju (joissain lähteissä rakenteellinen päättelyketju, eng. structured derivation).

3.1 Rakenteiset päättelyketjut

Tämän kappaleen lähteenä on käytetty pääasiassa Backin kirjaa Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin (Back 2016). Lisäksi tietoja on tarkennettu puhelinkeskustelussa Backin kanssa (Back 2022). Kappaleessa esiintyviä esimerkkejä käytettiin opintojakson toteutuksella, jossa tämän diplomityön tutkimus tehtiin.

Rakenteiset päättelyketjut on tapa selvittää matemaattinen ongelma askel askeleelta. Askel kuvastaa päättelyketjussa edellisestä vaiheesta seuraavan siirtymistä, ja matemaattisissa ongelmissa on aina jokin perustelu askeleelle. Ennen kuin päästään rakenteisiin päättelyketjuihin, aloitetaan käsittely rakenteisesta laskusta. Rakenteinen lasku kirjoitetaan eri tavalla verrattuna perinteiseen tapaan. Backin mukaan perinteinen tapa kirjoittaa lasku on esimerkiksi:

$$
\begin{aligned}
(a-b)(a+b) &= a^2 + ab - ab + b^2 \\
&= a^2 - b^2.
\end{aligned}
$$

Tässä muodossa askeleiden perusteluja ei kirjoiteta välttämättä lainkaan tehtävän ratkaisuun. Lukijan pitää itse päätellä, mitä niissä tapahtuu. Toisaalta jos kirjoitetaan perusteluja, ne mahtuvat vain lyhyesti samalle riville, jolloin ne voivat olla lukijalle vaikeaselkoisia. Rakenteisissa laskuissa perustelujen kirjoittaminen on olennainen osa tehtävään vastaamista. Back (2016) toteaa, että pedagogiselta kannalta on tärkeää, että opiskelija kirjoittaa perustelut näkyville. Tällöin opiskelija itse pystyy paremmin ymmärtämään, mitä jokaisessa askeleessa tapahtuu. Opettaja pystyy silloin myös paremmin ymmärtämään, mitä opiskelija on tehnyt ja ajatellut.

Rakenteisissa laskuissa jokainen askel ja jokaisen askeleen perustelu tulee omalle rivilleen. Laskut kirjoitetaan kahteen sarakkeeseen. Ensimmäisessä sarakkeessa on jokin merkki, joka kertoo, mistä laskun vaiheesta on kyse. Toisessa sarakkeessa on joko laskun vaihe tai perustelu siitä, miten päästään edellisestä vaiheesta seuraavaan. Laskun ensimmäinen vaihe tulee ensimmäiselle riville, ja ensimmäiseen sarakkeeseen tulee merkki $\bullet$. Tätä merkkiä käytetään laskun aloituksessa. Tämän jälkeen seuraavalle riville kirjoitetaan perustelu sille, miten vaiheesta t_0 seuraa vaihe t_1 käyttäen relaatiota $\sim_1$. Perustelun vasemmalle puolelle ensimmäiseen sarakkeeseen tulee relaatiomerkki $\sim_1$. Kolmannelle riville ensimmäiseen sarakkeeseen ei tule mitään, toiseen sarakkeeseen taas tulee laskun seuraava vaihe t_1. Vastaavalla tavalla jatketaan, kunnes päädytään haluttuun lopputulokseen t_n, ja viimeiseksi merkiksi ensimmäiseen sarakkeeseen kirjoitetaan $\square$, joka päättää laskun. Merkillä tarkoitetaan, että näillä relaatioilla voidaan todistaa, että vaiheesta t_0 seuraa lopputulos t_n.

Rakenne näyttää kokonaisuutena seuraavalta:

$$
\begin{array}{ll}
\bullet & t_0 \\
\sim_1 & \{\text{perustelu väitteelle } t_0 \sim_1 t_1\} \\
& t_1 \\
\sim_2 & \{\text{perustelu väitteelle } t_1 \sim_2 t_2\} \\
\vdots & \\
& t_{n-1} \\
\sim_n & \{\text{perustelu väitteelle } t_{n-1} \sim_n t_n\} \\
& t_n. \\
\square &
\end{array}
$$

Relaationa voidaan esimerkiksi käyttää identtisyysmerkkiä $\equiv$, ekvivalenssinuolta $\Leftrightarrow$, implikaationuolia $\Rightarrow$ ja $\Leftarrow$ sekä järjestysrelaatioita $=, <, >, \leq, \geq$. Useimmiten käytetään transitiivista relaatiota, koska muuten yllä oleva päättelyketju ei välttämättä pidä paikkaansa. Tästä esimerkkinä on erisuuruusmerkki $\neq$, sillä jos $a \neq b$ ja $b \neq c$, niin tällöin ei välttämättä $a \neq c$. Esimerkiksi silloin, kun $a = 2$, $b = 3$ ja $c = 2$.

Katsotaan rakenteista laskua tarkemmin helpon esimerkin avulla.

Esimerkki 3.1. Todista, että suorat $y = -\frac{1}{4}x+3$ ja $-16x+4y = 3000$ ovat ortogonaalisia.

Tehtävän vastaus vaatii ensin rakenteisen laskun, jossa muutetaan jälkimmäinen suora muotoon $y = kx+b$. Rakenteisena laskuna se voi esimerkiksi näyttää tällöin seuraavalta:

$\bullet$ $-16x + 4y = 3000$

$\iff$ {lisätään $16x$ yhtälön molemmille puolille}

$4y = 3000 + 16x$

$\iff$ {jaetaan luvulla 4}

$y = 750 + 4x$

$\iff$ {vaihdetaan termin $4x$ ja luvun 750 järjestystä}

$y = 4x + 750.$

$\square$

Näin on saatu esimerkin ensimmäinen osa tehtyä. Seuraavaan osaan eli todistukseen tarvitaan kuitenkin enemmän merkintöjä.

Laajennetaan rakenteinen lasku seuraavaksi rakenteiseksi tehtäväksi. Tällöin tehtävään tulee laskun lisäksi haluttu tehtävä/väite ja mahdolliset oletukset. Tämä on käytännöllinen esimerkiksi todistustehtäviin. Rakenteisessa tehtävässäkin merkit tulevat aina ensimmäiseen sarakkeeseen, ja toiseen sarakkeeseen kirjoitetaan oletus, perustelu tai väite riippuen siitä, mistä tehtävän kohdasta on kyse. Tehtävä tai väite kirjoitetaan toiseen sarakkeeseen merkin $\bullet$ jälkeen kuten rakenteisessa laskussa. Tämän jälkeen listataan oletukset, jotka kirjoitetaan merkin $-$ jälkeen. Todistuksen alkuun kirjoitetaan merkki $\Vdash$, ja toiseen sarakkeeseen kirjoitetaan perustelu sille, että siitä alkava todistus on pätevä todistamaan annettu tehtävä. Loppuosa kirjoitetaan samalla tavalla kuin rakenteisessa laskussakin.

Yleisesti rakenne näyttää seuraavalta:

$\bullet$ Tehtävä/väite

$-$ oletus$_1$

$\vdots$

$-$ oletus$_n$

$\Vdash$ {perustelu sille, että päättelyketju ratkaisee tehtävän annetuilla oletuksilla}

t_0

$\sim_1$ {perustelu väitteelle $t_0 \sim_1 t_1$}

t_1

$\sim_2$ {perustelu väitteelle $t_1 \sim_2 t_2$}

$\vdots$

t_{n-1}

$\sim_n$ {perustelu väitteelle $t_{n-1} \sim_n t_n$}

$t_n.$

$\square$

Edellä oleva on perusmuoto rakenteisille tehtäville, ja se toimii useimmilla laskuilla sellaisenaan. Se on yksinkertainen rakenteinen päättelyketju, joka sisältää usein yhden laskun oletuksineen tai lyhyen todistuksen.

Aiempien merkintöjen lisäksi rakenteisissa tehtävissä voidaan käyttää myös loogisia merkintöjä, esimerkiksi konjunktiota $\wedge$, disjunktiota $\vee$, negaatiota $\neg$, universaalikvanttoria $\forall$ tai eksistenssikvanttoria $\exists$. Lisäksi päättelyketjun vaiheeksi t_x voidaan merkitä T eli tosi tai F eli epätosi. Todistustehtävissä voidaan siten päätyä lopulta päättelyyn, jossa $t_n = T$. Tällöin ollaan saatu todistettua, että $t_0 \equiv T$, mikä tarkoittaa, että alkuperäinen väite on ekvivalentti totuusarvon T kanssa.

Jatketaan aiempaa esimerkkiä 3.1.

Esimerkki 3.2. Tutkitaan nyt, ovatko suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $y = 4x + 750$ ortogonaalisia. Suorat ovat ortogonaalisia silloin, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1. Muotoillaan tehtävän vastaus uudestaan niin, että tehtävänä on osoittaa, että $k_1 \cdot k_2 = -1$, missä k_1 ja k_2 ovat annettujen suorien kulmakertoimet. Ratkaistaan tämä rakenteisena tehtävänä:

- Osoita, että suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $y = 4x + 750$ ovat ortogonaalisia

$-$ $k_1 = 4$

$-$ $k_2 = -1/4$

$\Vdash$ suorat ovat ortogonaalisia, kun $k_1 \cdot k_2 = -1$

$k_1 \cdot k_2 = -1$

$\iff$ {sijoitetaan oletukset}

$4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$

$\iff$ {sievennetään kertolasku}

$-1 = -1$

$\iff$ {-1 on ekvivalentti -1:n kanssa}

$T.$

$\square$

Siten saatiin todistettua, että $k_1 \cdot k_2 = -1 \iff T$ kun $k_1 = 4$ ja $k_2 = -1/4$.

Tarkastellaan vielä, miten rakenteinen tehtävä laajennetaan lopulta rakenteiseksi päättelyketjuksi. Aiemmin meillä oli käytössä oletukset ja tehtävät. Nyt otetaan käyttöön vielä rakenteisten päättelyketjujen määritelmät, merkinnät ja faktat, joita kaikkia merkitään ensimmäiseen sarakkeeseen $+$ -merkillä. Nämä sisältävät määrittelyitä, perusteluita ja väitteitä.

Määritelmä 3.1.

1. Rakenteisten päättelyketjujen *määrittely* tarkoittaa seuraavaa lauseketta

$$c_1 \in A_1, \ldots, c_m \in A_m,$$

   missä $c_1, \ldots, c_m$ voivat olla esimerkiksi lukuja, muuttujia tai funktioita ja $A_1, \ldots, A$ ovat joukkoja.

2. *Väite* on matemaattinen lause, jolla on totuusarvona joko tosi tai epätosi. (Levin 2019, s. 4)
3. *Perustelun* tarkoitus on kertoa miten väite seuraa aiemmista oletuksista tai havainnoista.

Määritelmä 3.2.

1. Rakenteisten päättelyketjujen *määritelmä* on lauseke, joka sisältää määrittelyn, perustelun ja väitteen. Tällöin sen muoto näyttää seuraavalta:

   $+$ Määrittele $c_1 \in A_1, \ldots, c_m \in A_m$

   $\{$perustelu$\}$

   väite

2. Rakenteisten päättelyketjujen *fakta* on lauseke, jossa ei ole määrittelyä vaan ainoastaan perustelu ja väite. Tällöin se näyttää seuraavalta:

   $\{$perustelu$\}$

   väite

3. Rakenteisten päättelyketjujen *merkintä* on lauseke, jossa on ainoastaan määrittely.

Jatkossa lausekkeesta, jossa on vain määrittely, tullaan käyttämään vain merkintä-termiä. Määrittely-sanaa käytetään, kun tarkoitetaan rakenteisten päättelyketjujen määritelmän ensimmäistä riviä.

Rakenteisten päättelyketjujen määritelmä voi olla esimerkiksi funktion esittely. Tällöin määrittely sisältää tiedon funktion nimestä ja funktioon liitetyistä määrittely- ja maalijoukosta. Perustelu sisältää taas selityksen sille, mikä funktio on tai mitä se esittää. Väite taas sisältää funktion lausekkeen.

Kokonaisuudessaan siis:

$+\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\{$Funktio f kuvaa suoraa$\}$

$f(x) = 2x + 1.$

Rakenteisten pättelyketjujen fakta voi olla kuvasta päätelty tieto: suorakulmaisen kolmion kateetit ovat a ja b, joten $\sin x = \frac{a}{b}$. Toisaalta fakta voi olla myös matemaattinen lauseke, esimerkiksi Pythagoraan lause, jolloin väite on $a^2 + b^2 = c^2$. Tällöin se voi näyttää seuraavalta:

$\{$kuvan kolmio on suorakulmainen eli sille toimii Pythagoraan lause$\}$

$a^2 + b^2 = c^2.$

Rakenteisten päättelyketjujen merkintä voi olla muuttujan esittely, esimerkiksi $x \in \mathbb{R}$.

Usein merkintää pitää käyttää ennen funktion määrittelyä, jolloin esitellään funktion muuttujaan liittyvä joukko. Tällöin kokonaisuus näyttää alussa seuraavalta:

$+\ x \in \mathbb{R}$

$+\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\{$Funktio f kuvaa suoraa$\}$

$f(x) = 2x + 1.$

Tätä ei kuitenkaan tule sekoittaa oletukseen, jossa muuttujaa rajataan jollain tavalla. Esimerkiksi jos edelliseen lisätään vielä ehto, että muuttuja x ei ole nolla, näyttää kokonaisuus seuraavalta:

$+\ x \in \mathbb{R}$

$-\ x \neq 0$

$+\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\{$Funktio f kuvaa suoraa$\}$

$f(x) = 2x + 1.$

Rakenteinen päättelyketju, jossa on mukana faktoja, voi kokonaisuudessaan näyttää esimerkiksi tältä:

- Tehtävä/väite

$-$ oletus$_1$

$\vdots$

$-$ oletus$_n$

$\{$perustelu faktalle$\}$

fakta$_1$

$\vdots$

$\{$perustelu faktalle$\}$

fakta$_n$

$\Vdash$ $\{$perustelu sille, että päättelyketju ratkaisee tehtävän annetuilla oletuksilla$\}$

t_0

$\sim_1$ $\{$perustelu väitteelle $t_0 \sim_1 t_1\}$

t_1

$\sim_2$ $\{$perustelu väitteelle $t_1 \sim_2 t_2\}$

$\vdots$

t_{n-1}

$\sim_n$ $\{$perustelu väitteelle $t_{n-1} \sim_n t_n\}$

t_n.

$\square$

Määritelmän, faktan ja merkinnän sijoittelu riippuu siitä, mikä yhteys niillä on oletuksiin. Joskus määritelmät, faktat ja merkinnät pitää kirjoittaa jo ennen oletuksia.

Aiempi esimerkki 3.2 voidaan myös kirjoittaa niin, että siihen otetaan merkintä alkuun. Tällöin se näyttää seuraavalta:

- Osoita, että suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $y = 4x + 750$ ovat ortogonaalisia

$+$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$-$ $k_1 = 4$

$-$ $k_2 = -1/4$.

Tämän jälkeen tehtävän ratkaiseminen jatkuisi kuten aiemminkin.

Rakenteinen päättelyketju voi lisäksi sisältää alitehtäviä, alilaskuja tai alipäättelyjä, jotka itsessään voivat vielä sisältää esimerkiksi alilaskuja ja uusia tehtäviä tai päättelyjä. Ratkaisua ei kuitenkaan kannata rakentaa sisältämään liian monta sisennystasoa, sillä tällöin sen lukeminen voi olla hankalaa. Sisäkkäisten päätelmien idea on, että tällöin ei tarvitse tehdä ollenkaan erillistä laskua, vaan kaikki muodostavat yhtenäisen loogisen ratkaisukokonaisuuden.

Esimerkit 3.1 ja 3.2 voidaan laajentaa yhdeksi kokonaiseksi päättelyketjuksi esimerkiksi seuraavalla tavalla hyödyntäen alilaskua ja alitehtävää:

Esimerkki 3.3. Osoitetaan, että suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $-16x + 4y = 3000$ ovat ortogonaalisia. Tehdään ratkaisu rakenteisena päättelyketjuna.

- Osoita, että suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $-16x + 4y = 3000$ ovat ortogonaalisia

  $\{$esitetään jälkimmäisen suoran ratkaistu yhtälömuoto $y = kx + b\}$

  - $-16x + 4y = 3000$

  $\Longleftrightarrow$ $\{$lisätään $16x$ yhtälön molemmille puolille$\}$

  $4y = 3000 + 16x$

  $\Longleftrightarrow$ $\{$jaetaan luvulla $4\}$

  $y = 750 + 4x$

  $\Longleftrightarrow$ $\{$vaihdetaan termin $4x$ ja luvun 750 järjestystä$\}$

  $y = 4x + 750.$

  $\square$

  - Osoita, että suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $y = 4x + 750$ ovat ortogonaalisia

  $+$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

  $-$ $k_1 = 4$

  $-$ $k_2 = -1/4$

  $\Vdash$ suorat ovat ortogonaalisia, kun $k_1 \cdot k_2 = -1$

  $k_1 \cdot k_2 = -1$

  $\Longleftrightarrow$ $\{$sijoitetaan oletukset$\}$

  $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$

  $\Longleftrightarrow$ $\{$sievennetään kertolasku$\}$

  $-1 = -1$

  $\Longleftrightarrow$ $\{$Luku -1 on yhtä suuri luvun -1 kanssa$\}$

  $T.$

  $\square$

$\square$

Huomioitavaa yllä olevassa esimerkissä on se, että tämä ei ole ainut tapa kirjoittaa kyseistä ratkaisua. Oppimisalusta eMathStudiota käsittelevässä luvussa esimerkissä 4.1 on sama esimerkki kirjoitettu eMathStudiolla hieman eri tavalla.

Päättelyketju on jono peräkkäisiä päättelyaskeleita, jotka voivat olla oletuksia, merkintöjä, faktoja, määritelmiä tai tehtäviä. Niiden järjestys voi vaihdella. Päättelyketju on vain osa tehtävän ratkaisua. Opiskelijalta voi edellyttää lisäksi esimerkiksi pohdinnan kirjoittamista, taulukoiden, kuvaajien ja kuvioiden piirtämistä tai muita tehtävään liittyviä havaintoja.

3.2 Aiemmat tutkimukset rakenteisista päättelyketjuista

Rakenteiset päättelyketjut ovat aiempien tutkimusten perusteella saaneet pääasiassa positiivista palautetta. Opiskelijoiden osaamista on tutkittu muun muassa vertailemalla opiskelijoiden arvosanoja ja tutkimalla tehtävien vastauksissa tehtyjen virheiden tyyppejä ja yleisyyttä. Opiskelijat ovat lisäksi antaneet positiivista ja negatiivista palautetta rakenteisten päättelyketjujen menetelmästä.

Arvosanojen ja tutkittujen virheiden määrien perusteella rakenteiset päättelyketjut auttavat opiskelijoita. Vuosina 2001–2005 suomalaisessa lukiossa vertailtiin opiskelijoiden pitkän matematiikan arvosanoja rakenteisia päättelyketjuja käyttävän testiryhmän, ja normaaleilla menetelmillä käyttävän kontrolliryhmän välillä (Peltomäki ja Salakoski 2004) (Peltomäki ja Back 2009). Kahdelle eri vuosikurssille tehtyjen tulosten perusteella testiryhmän ja kontrolliryhmän arvosanojen keskiarvojen välinen ero oli pienempi yläkoulussa kuin suurimmassa osassa lukiokursseista tai ylioppilaskirjoituksissa. Lisäksi testiryhmässä oli opintojen keskeyttäneitä paljon vähemmän kuin kontrolliryhmässä. Peltomäki ja Back vertasivat lisäksi aiemman vuosikurssin (2000-2003) vastaavan testiryhmän arvosanoja testiryhmien 2001–2004 ja 2002–2005 arvosanoihin. Vuosikurssien 2001–2004 ja 2002–2005 testiryhmien arvosanat olivat keskimäärin paremmat kuin aiemman vuosikurssin. Perusteluissa käytettyjen virheiden tyyppejä ja yleisyyttä tutkittiin lukio-opiskelijoilla keväällä 2007 (Mannila ja Wallin 2009). Tulosten mukaan virheiden määrä kaikissa kurssikokeissa oli pieni, vain noin 15-20 %. Mannila ja Wallin olivat tulosten mukaan sitä mieltä, että rakenteiset päättelyketjut paransivat opiskelijoiden taitoa perustella ratkaisujaan.

Opiskelijoiden mielestä yksi merkittävä hyöty rakenteisista päättelyketjuista on, että ne selkiyttävät ratkaisua. Keväällä 2007 tehdyssä tutkimuksessa kyseltiin lukio- ja yliopisto-opiskelijoiden ajatuksia rakenteisten päättelyketjujen hyödyistä (Back, Mannila ym. 2010). Selkeyden kasvaminen sai tutkimuksessa suurimman kannatuksen (60 % kaikista opiskelijoista). Mannila ja Wallin (2009) saivat tulokseksi, että lukio-opiskelijoista jopa 77 % oli sitä mieltä, että menetelmä selkeytti ratkaisuja enemmän kuin aiemmin. Lisäksi Sallasmaa ym. (2011) totesivat keväällä 2010 yhdeksäsluokkalaisille tehdyn tutkimuksen mukaan, että rakenteiset päättelyketjut toimivat myös suurimman osan mielestä selkiyttävänä piirteenä ratkaisuihin (56 % oppilaista).

Rakenteisten päättelyketjujen käytössä kaksi suurinta haittaa opiskelijoiden mielestä on, että niiden käyttäminen vie enemmän aikaa ja vastausten pituus kasvaa. Back, Mannila ym. (2010) mukaan lukio-opiskelijoista ja yliopisto-opiskelijoista melkein puolet vastaajista koki suurimmaksi haitaksi, että aikaa menee enemmän ja 30 % on sitä mieltä, että vastusten pituus on haitta. Mannila ja Wallin (2009) totesivat, että lukio-opiskelijoista 55 % oli sitä mieltä, että menetelmä vie enemmän aikaa, ja 32 % oli sitä mieltä, että menetelmä tekee vastuksista pidempiä.

Mannila ja Wallin (2009) sekä Back, Mannila ym. (2010) ovat sitä mieltä, että näkemykset, joiden mukaan rakenteiset päättelyketjut vievät enemmän aikaa ja vastausten pituus suurenee, ovat ymmärrettäviä. Tarkkojen perustelujen kirjoittaminen pidentää vastauksia, ja niiden kirjoittamiseen menee opiskelijoilla enemmän aikaa kuin perinteisessä tavassa. Back, Mannila ym. huomasivat lisäksi heille yllättävän asian: Lukio-opiskelijat luulivat, että perustelut eivät kuulu perinteiseen tapaan tehdä tehtäviä. Tämä voi osalta selittää opiskelijoiden näkemystä ajan käytöstä ja vastauksien pituudesta. Mannila, Peltomäki ym. (2014) kokosivat kaikkien aiempien tutkimusten yhteenvetona, että lukio-opiskelijoilla ei välttämättä ole tarkkaa käsitystä siitä, miten perustella ratkaisujaan, ja he saattavat näin kokea ne myös turhaksi kirjoittaa. Opiskelijat kuitenkin ymmärtävät jo yhdenkin opetetun kurssin perusteella, että rakenteisista päättelyketjuista voi olla hyötyä esimerkiksi ratkaisuja selkeyttävänä menetelmänä.

3.3 Analyyttinen geometria

Tarkastellaan seuraavaksi kahta analyyttisen geometrian tehtävää, joita käytettiin tutkimuksessa. Ensimmäinen tehtävä liittyy kulmapuolittajiin ja niiden yhdistettyyn yhtälöön. Sitä varten määritellään analyyttiseen geometriaan liittyviä peruskäsitteitä, määritellään kulmanpuolittajat ja yhdistetty yhtälö. Viimeisenä ennen ensimmäistä esimerkkiä kerrotaan kulmapuolittajien yhdistetystä yhtälöstä. Toista esimerkkiä varten määritellään säännöllinen parametrisointi.

Tämän luvun lähteenä on toiminut Elementary Euclidean Geometry -kirja (Gibson 2003).

Määritelmä 3.3. Olkoon lineaarifunktio $L(x,y) = kx + ly + m$, missä $k, l, m \in \mathbb{R}$ ja kertoimet k ja l eivät ole samanaikaisesti nollia. Tällöin lineaarifunktion nollajoukkoa

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : L\left(x,y\right) = 0\right\}$$

kutsutaan *suoraksi*. Muoto tunnetaan myös normaalimuotona, sillä vektori $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ on suoran normaalivektori.

Kun tässä työssä puhutaan suorasta L, tarkoitetaan lineaarifunktion $L(x,y)$ nollajoukkoa, vaikka tätä nollaa ei merkittäisi. Lisäksi suorasta käytetään merkintää $L(x,y)$ tai pelkästään L riippuen siitä, halutaanko tekstiä pitää luettavampana vai onko tärkeää kertoa, mitkä argumentit ovat.

Määritelmä 3.4. Suoran L yhtälön vektorimuoto on $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$, missä $\mathbf{p}$ on suoralle L kuuluva piste, $\mathbf{d} \neq 0$ on suoran L suuntavektori ja $t \in \mathbb{R}$. Suoran yhtälön *parametrimuoto* on vektorimuoto esitettynä komponenteittain.

Esimerkki 3.4. Jos suoran vektorimuoto on

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

niin sen parametrimuoto on

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 3.5. Olkoon toisen asteen polynomifunktio

$$Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c,$$

missä $a, h, b, g, f, c \in \mathbb{R}$ ja missä kertoimet a, b ja h eivät kaikki voi olla nollia. *Kartioleikkaus* on polynomifunktion nollajoukko eli

$$\left\{ \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : Q(x, y) = 0 \right\}.$$

Kun tässä työssä puhutaan kartioleikkauksesta Q, tarkoitetaan polynomifunktion $Q(x, y)$ nollajoukkoa, vaikka tätä nollaa ei merkittäisi.

Lause 3.6. *Olkoon suora L ja kartioleikkaus Q. Tällöin ne voivat leikata toisensa joko:*

- *yhdessä yksittäisessä pisteessä tai*
- *kahdessa erillisessä pisteessä tai*
- *ne eivät leikkaa ollenkaan.*

Jos mikään näistä ei ole voimassa, niin tällöin suoran L jokainen piste kuuluu kartioleikkaukseen Q.

Todistus. Tarkastellaan lineaarifunktiota $L(x, y) = kx + ly + m$ ja polynomifunktiota

$$Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

sekä näiden määrittämää suoraa ja kartioleikkausta. Määritelmän 3.3 mukaan suoran yhtälön kertoimista k tai l vähintään toisen pitää olla nollasta eroava. Tehdään todistus kahdessa eri osassa, jossa ensimmäisessä oletetaan, että $l \neq 0$ ja toisessa $l = 0$.

$\boldsymbol{l \neq 0}$:

Ratkaistaan suoran yhtälö muuttujan y suhteen:

$$\begin{aligned} & kx + ly + m = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & ly = -kx - m \\ \Longleftrightarrow\ & y = -\frac{k}{l}x - \frac{m}{l}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla yllä oleva suoran yhtälö kartioleikkauksen yhtälöön voidaan tarkastella niitä x-koordinaatteja, joilla suora leikkaa kartioleikkausta. Tällöin saadaan toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisujen määrää tarkastellaan. Siten

$$\begin{aligned} & ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & ax^2 + 2hx(-\frac{k}{l}x - \frac{m}{l}) + b(-\frac{k}{l}x - \frac{m}{l})^2 + 2gx + 2f(-\frac{k}{l}x - \frac{m}{l}) + c = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & ax^2 - \frac{2kh}{l}x^2 - \frac{2hm}{l}x + \frac{k^2b}{l^2}x^2 + \frac{2kbm}{l}x + \frac{m^2b}{l^2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2gx - \frac{2fk}{l}x - \frac{2fm}{l} + c = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \Big(a - \frac{2kh}{l} + \frac{k^2b}{l^2}\Big)x^2 + 2\Big(-\frac{hm}{l} + \frac{kbm}{l} - \frac{fk}{l} + g\Big)x + \frac{m^2b}{l^2} - \frac{2fm}{l} + c = 0. \end{aligned}$$

Jos toisen asteen kerroin on eri suuri kuin nolla, niin tällöin yhtälöllä on joko nolla, yksi tai kaksi reaalista ratkaisua Algebran peruslauseen nojalla. Jos toisen asteen kerroin on nolla, mutta ensimmäisen asteen kerroin on eri suuri kuin nolla, niin tällöin yhtälöllä on joko nolla tai yksi reaalinen ratkaisu. Jos toisen ja ensimmäisen asteen kertoimet ovat nollia, mutta vakio on eri suuri kuin nolla, niin yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.

Jos reaalisia ratkaisuja on nolla, niin suora ei leikkaa kartioleikkausta missään pisteessä. Jos reaalisia ratkaisuja on yksi, suora leikkaa kartioleikkausta yhdessä pisteessä, ja jos reaalisia ratkaisuja on kaksi niin, leikkauspisteitä on myös kaksi. Muussa tapauksessa jos kaikki kertoimet ovat nollia, niin kaikki suoran pisteet kuuluvat kartioleikkaukseen, koska kaikki parit (x, y) toteuttavat molemmat yhtälöt.

$\boldsymbol{l = 0}$ **:**

Koska $l = 0$, niin Määritelmän 3.3 mukaan $k \neq 0$. Siten suoran yhtälö on muotoa

$$\begin{aligned} & kx + m = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & kx = -m \\ \Longleftrightarrow\ & x = -\frac{m}{k}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä kartioleikkauksen yhtälöön tutkitaan niitä y-koordinaatteja, joissa suora ja kartioleikkaus leikkaavat.

Tällöin

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \\
\iff & a\Big(-\frac{m}{k}\Big)^2 + 2h\Big(-\frac{m}{k}\Big)y + by^2 + 2g\Big(-\frac{m}{k}\Big) + 2fy + c = 0 \\
\iff & by^2 + 2\Big(-\frac{hm}{k} + f\Big)y - 2\Big(\frac{gm}{k}\Big) + \frac{am^2}{k^2} + c = 0.
\end{aligned}
$$

Vastaavalla tavalla tämä on myös toisen asteen yhtälö, joten sen reaalisten ratkaisujen määrä on joko nolla, yksi tai kaksi. Jos kaikki kertoimet ovat nollia, niin tällöin suora kuuluu kartioleikkaukseen kaikissa suoran pisteissä.

Todistus voidaan tehdä samalla tavalla olettaen, että $k \neq 0$ tai $k = 0$. Tällöin tapauksessa $k \neq 0$ tutkittaisiin y-koordinaatteja ja x-koordinaatteja tapauksessa $k = 0$.

Saatiin siis todistettua, että suora L ja kartioleikkaus Q voivat leikata yhdessä pisteessä, leikata kahdessa pisteessä, olla leikkaamatta ollenkaan tai suoran L jokainen piste kuuluu kartioleikkaukseen Q. □

Seuraavassa lauseessa käsitellään lineaarista riippumattomuutta. Lisätietoja käsitteestä esimerkiksi Linear Algebra -kirjassa (Poole 2014, s. 93).

Lause 3.7. *Olkoon vektorit $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ nollasta eroavia vektoreita. Tällöin vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ne eivät ole yhdensuuntaisia.*

Todistus. Todistetaan molemmat suunnat erikseen.

"$\Rightarrow$" Oletetaan ensin, että vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Todistetaan, että tällöin vektorit eivät ole yhdensuuntaisia. Tehdään todistus kontrapositiolla.

Oletetaan, että vektorit ovat yhdensuuntaisia. Tällöin $\mathbf{v_1} = r\mathbf{v_2}$ jollain vakiolla $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tämä tarkoittaa sitä, että $\mathbf{v_1} - r\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$ eli löytyy nollasta eroavat vakiot $x_1 = 1$ ja $x_2 = -r$, joille $x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$. Tämä tarkoittaa sitä, että vektorit ovat lineaarisesti riippuvia ja siten kontrapositio todistus todistaa alkuperäisen väitteen.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että vektorit eivät ole yhdensuuntaisia ja todistetaan, että vektorit ovat tällöin lineaarisesti riippumattomia. Todistetaan tämäkin väite kontrapositiolla.

Oletetaan, että vektorit ovat lineaarisesti riippuvia. Yhtälölle $x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$ löytyy silloin jokin muukin ratkaisu kuin $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$. Jos oletetaan, että ainakin $x_1 \neq 0$ niin tällöin $x_1\mathbf{v_1} = -x_2\mathbf{v_2} \iff \mathbf{v_1} = -\frac{x_2}{x_1}\mathbf{v_2}$. Siten saadaan vakio $r = -\frac{x_2}{x_1}$ ja vektorit ovat siten yhdensuuntaisia. Todistus voidaan tehdä vastaavalla tavalla jos $x_1 = 0$, jolloin $x_2 \neq 0$ ja saadaan, että vektorit ovat tällöinkin yhdensuuntaisia. Kontrapositio todistaa alkuperäisen väitteen.

□

Määritellään seuraavaksi mitä yhdistetty yhtälö tarkoittaa. Sen jälkeen päästään lauseeseen, jossa kerrotaan kahden origon kautta kulkevan suoran yhdistetystä yhtälöstä.

Määritelmä 3.8. Jos on olemassa sellaiset suorat L ja L', joille $Q = LL'$, niin tällöin L ja L' ovat kartioleikkauksen Q *komponentteja*, ja kartioleikkaus Q on suorien L ja L' *yhdistetty yhtälö*.

Tarkastellaan seuraavaksi sellaisia lineaarifunktioita (ja suoria), jotka kulkevat origon kautta. Tällöin Määritelmän 3.3 mukaan lineaarifunktio on $L(x, y) = kx + ly$.

Lause 3.9. *Kahden origon kautta kulkevan suoran yhdistetty yhtälö on polynomifunktio*

$$Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2.$$

Sen nollajoukko on tällöin kartioleikkaus $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.

Todistus. Olkoon origon kautta kulkevat suorat L ja L'. Tällöin niiden lineaarifunktion yhtälöt voidaan esittää Määritelmän 3.3 mukaan $L(x, y) = kx + ly$ ja $L'(x, y) = sx + ry$, missä vakiot $k, l, s, r \in \mathbf{R}$. Niiden yhdistetty yhtälö Määritelmän 3.8 mukaan on

$$Q = LL' = (kx + ly)(sx + ry) = ksx^2 + (kr + ls)xy + lry^2 = 0.$$

Merkitään, että $a = ks$,$b = lr$ ja $2h = kr + ls$, jolloin saadaan, että suorien yhdistetty yhtälö on muotoa

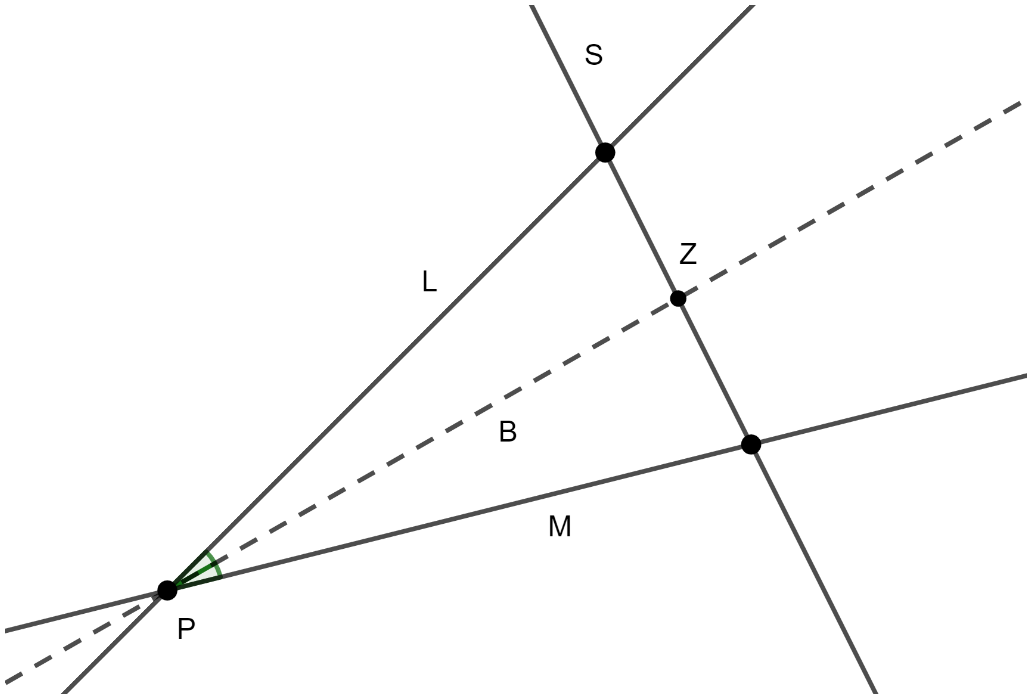
$$Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2.$$

□

Tutustutaan seuraavaksi kulmanpuolittajiin ja suorien kanoniseen muotoon. Tämän muodon avulla pystymme sen jälkeen määrittämään suorien kulmanpuolittajien yhtälöt.

Määritelmä 3.10. Tarkastellaan suoria L ja M, jotka leikkaavat pisteessä P. Olkoon lisäksi B suora, joka kulkee pisteen P kautta, mutta ei ole suora L tai M. Suoraa B kohtisuorassa oleva suora S leikkaa suorat L ja M joissakin pisteissä. Jos suorien B ja S leikkauspiste Z on suoran S ja suorien L ja M leikkauspisteiden muodostaman janan keskipiste niin tällöin suora B on suorien L ja M *kulmanpuolittaja*.

Kuvassa 3.1 on tilannetta hahmoteltu geometrisesti.



Kuva 3.1. *Kuvassa suora B on suorien L ja M kulmanpuolittaja.*

Määritelmä 3.11. Suoran $L(x, y) = kx+ly+m$ sanotaan olevan *kanonisessa muodossa* jos suoran normaalivektori $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ on yksikkövektori. Jos näin ei ole, suora voidaan muokata kanoniseen muotoon jakamalla se vektorin $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ pituudella.

Lause 3.12. *Olkoot L ja M kanonisessa muodossa olevia suoria, jotka leikkaavat pisteessä P. Tällöin suorien väliset kulmanpuolittajat ovat $L + M$ ja $L - M$.*

Todistus. Olkoot suorat

$$L(x, y) = kx + ly + m = 0 \qquad \text{ja} \qquad M(x, y) = sx + ry + u = 0$$

kanonisessa muodossa olevia suoria, missä suorien normaalivektorit $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}$ ovat eri yksikkövektoreita. Tällöin suorat eivät ole yhdensuuntaisia, ja siten Lauseen 3.7 mukaan ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Lineaarialgebran mukaan ne muodostavat tällöin tason.

Oletetaan, että suorat leikkaavat pisteessä $P = (p, q)$. Tällöin tämä piste toteuttaa myös suorien yhtälöt eli

$$L(p, q) = kp + lq + m = 0 \qquad \text{ja} \qquad M(p, q) = sp + rq + u = 0. \tag{3.1}$$

Yhdistämällä suorien yhtälöt saadaan suorat ilmoitettua muodossa

$$L(x,y) = k(x-p) + l(y-q) = 0 \quad \text{ja} \quad M(x,y) = s(x-p) + r(y-q) = 0.$$

Olkoon lisäksi kolmas suora B sellainen, joka kulkee myös pisteen P kautta. Vastaavalla tavalla sillekin saadaan samanlainen muoto kuin suorille L ja M, ja näin kaikille kolmelle suoralle muodot ovat:

$$\begin{aligned} L(x,y) &= k(x-p) + l(y-q) = 0, \\ M(x,y) &= s(x-p) + r(y-q) = 0 \quad \text{ja} \\ B(x,y) &= v(x-p) + w(y-q) = 0. \end{aligned}$$

Koska suorat L ja M muodostavat tason, niin tälle tasolle kuuluvan näistä suorista poikkeavan suoran normaalivektori voidaan ilmoittaa näiden kahden suoran normaalivektorien lineaarikombinaationa. Siten suoran B normaalivektorille $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ pätee, että

$$\alpha \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix},$$

joillekin nollasta poikkeaville vakioille $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, jotka eivät molemmat ole nollia. Siten saadaan, että

$$\begin{aligned} \alpha L(x,y) + \beta M(x,y) &= \alpha[k(x-p) + l(y-q)] + \beta[s(x-p) + r(y-q)] \\ &= v(x-p) + w(y-q) \\ &= B(x,y). \end{aligned}$$

Tuloksena saadaan siis, että

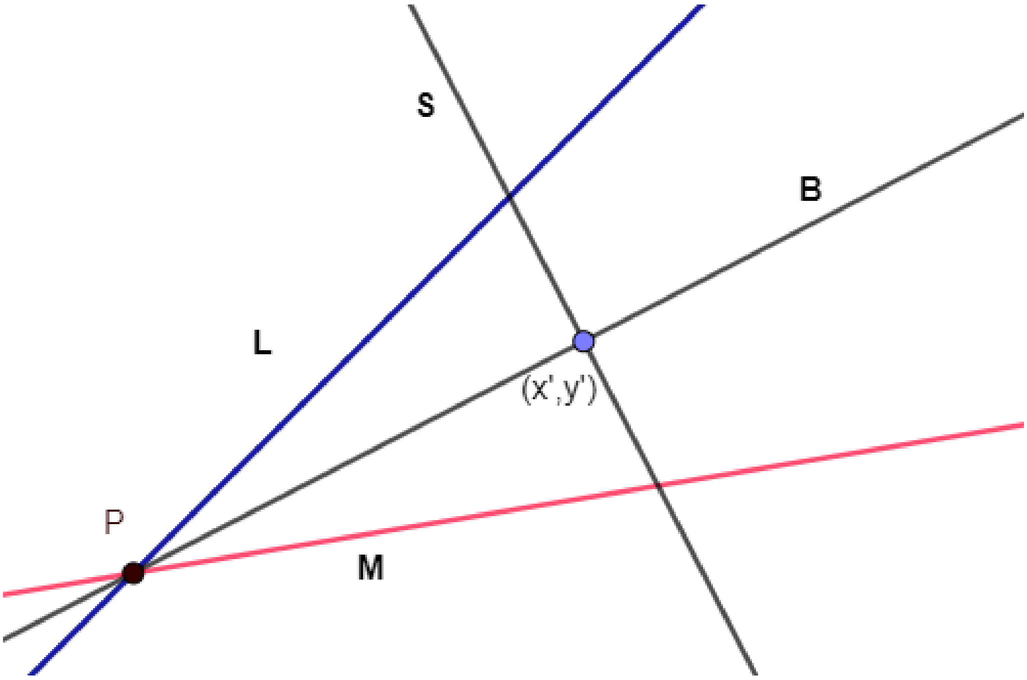
$$B(x,y) = \alpha L(x,y) + \beta M(x,y) = 0.$$

Määritetään seuraavaksi sellaiset nollasta poikkeavat kertoimet α, β, että suora B on suorien L ja M kulmanpuolittaja. Olkoon $(x', y') \neq (x, y)$ suoralle $B(x,y)$ kuuluva piste, jolloin

$$B(x', y') = \alpha L(x', y') + \beta M(x', y') = 0. \tag{3.2}$$

Olkoon $S(x, y)$ pisteen (x', y') kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa $B(x, y)$ vastaan.

Kuvassa 3.2 on havainnollistettu tilannetta.



Kuva 3.2. *Kuvassa suora B on suorien L ja M kulmanpuolittaja pisteen P kautta ja suora S suoran B normaali pisteen (x',y') kautta.*

Tarkoituksena on Määritelmän 3.10 mukaisesti todistaa, että piste (x', y') on suoran S ja suorien L ja M leikkauspisteiden muodostaman janan keskipiste.

Koska suora S on kohtisuorassa suoraa B vastaan, niin myös suoran S suuntavektorille $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ pätee, että

$$\alpha \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Tällöin suoran S parametrimuoto on Määritelmän 3.4 mukaan

$$\begin{cases} x = x' + ct \\ y = y' + dt, \end{cases} \quad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Jotta piste (x', y') olisi keskipiste, niin pitää löytyä nollasta poikkeava vakio t, jolle

$$L(x' + ct, y' + dt) = 0 \qquad \text{ja} \qquad M(x' - ct, y' - dt) = 0,$$

sillä tällöin kuljetaan keskipisteestä (x', y') sama matka suoralle L ja suoralle M. Sijoitetaan nämä suorien yhtälöihin (3.1), jolloin saadaan

$$\begin{cases} 0 = k(x' + ct) + l(y' + dt) + m = L(x', y') + t(kc + ld) \\ 0 = s(x' - ct) + r(y' - dt) + u = M(x', y') - t(sc + rd). \end{cases} \tag{3.3}$$

Koska $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}$ ovat yksikkövektoreita niin tällöin $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = 1$ ja $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} = 1$ ja siten

$$\begin{aligned} kc + ld &= \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \cdot \left(\alpha \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha + \beta \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} sc + rd &= \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \cdot \left(\alpha \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} + \beta. \end{aligned}$$

Sijoitetaan yllä olevat lausekkeet yhtälöihin (3.3) ja jatketaan muokkaamista, jolloin

$$\begin{cases} L(x', y') = -t\left(\alpha + \beta \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right) \\ M(x', y') = t\left(\alpha \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} + \beta \right). \end{cases}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (3.2), ja koska oletetaan, että $t \neq 0$, niin

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(-t\left(\alpha+\beta\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s\\r\end{bmatrix}\right)\right)+\beta\left(t\left(\alpha\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s\\r\end{bmatrix}+\beta\right)\right)=0\\
\iff\ & -t\alpha^2-\alpha\beta t\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s\\r\end{bmatrix}+\beta\alpha t\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s\\r\end{bmatrix}+t\beta^2=0\\
\iff\ & t(-\alpha^2+\beta^2)=0\\
\iff\ & \beta=\pm\alpha.
\end{aligned}$$

Olkoon ensin $\alpha = \beta$.

Kun tutkitaan suoran B normaalivektoria $\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix}$, niin

$$\alpha\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}s\\r\end{bmatrix}=\alpha\left(\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s\\r\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix},$$

huomataan, että se muodostuu nyt suorien L ja M normaalivektorien summa kerrottuna vakiolla α. Koska α kertoimena käy läpi kaikki mahdolliset luvut nollaa lukuun ottamatta, muodostuu siten suora B suorien L ja M summana. Tällöin saadaan siis, että

$$B(x,y)=L(x,y)+M(x,y).$$

Toisaalta kun $\alpha = -\beta$ niin vastaavalla tavalla päättelemällä saadaan, että

$$B(x,y)=L(x,y)-M(x,y).$$

Lopputuloksena siten B on suorien L ja M kulmanpuolittaja, ja se on joko $L+M$ tai $L-M$.

$\square$

Viimeisenä ennen ensimmäistä esimerkkiä kerrotaan kulmapuolittajien yhdistetystä yhtälöstä.

Lause 3.13. *Olkoon kahden origon kautta kulkevien suorien yhdistetty yhtälö* $Q(x,y) = ax^2+2hxy+by^2$. *Tällöin näiden suorien kulmanpuolittajien yhdistetty yhtälö on*

$$B(x,y)=hx^2+(b-a)xy-hy^2.$$

Todistus. Olkoot L ja M origon kautta kulkevia suoria, joille $L(x,y) = kx+ly$ ja $M(x,y) = sx+ry$, missä vakiot $k,l,s,r \in \mathbf{R}$. Oletetaan lisäksi, että mikään vakioista ei ole nolla. Suorien yhdistetty yhtälö Lauseen 3.9 todistuksen mukaan on

$$Q(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2,$$

missä $a = ks$,$b = lr$ ja $2h = kr + ls$.

Oletetaan, että suorien yksikkövektorit $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}$ ovat erisuuret, koska muuten niillä ei ole kulmanpuolittajia. Nyt Lauseen 3.12 mukaan näiden suorien kulmanpuolittajat ovat suorat $L+M$ ja $L-M$, jos suorat ovat kanonisessa muodossa. Todistusteknisistä syistä merkitään nyt, että kanonisessa muodossa suorat ovat

$$\frac{kx+ly}{\sqrt{k^2+l^2}} \quad \text{ja} \quad \frac{sx+ry}{\sqrt{s^2+r^2}}.$$

Määritelmän 3.8 mukaan suorien yhdistetty yhtälö on suorien tulo, joten lasketaan nyt kulmanpuolittajien $L+M$ ja $L-M$ yhdistetty yhtälö $(L+M)(L-M)$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}
&(L+M)(L-M) = 0 \\
\iff &L^2 - M^2 = 0 \\
\iff &\Big(\frac{kx+ly}{\sqrt{k^2+l^2}}\Big)^2 - \Big(\frac{sx+ry}{\sqrt{s^2+r^2}}\Big)^2 = 0. \\
\iff &\frac{(kx+ly)^2}{k^2+l^2} - \frac{(sx+ry)^2}{s^2+r^2} = 0.
\end{aligned}$$

Lavennetaan termit samanimisiksi ja kerrotaan nimittäjä pois. Tämä voidaan tehdä, koska oletettiin, että mikään vakioista k,l,s,r ei ole nolla, jolloin $(k^2+l^2)(s^2+r^2) \neq 0$.

Jatketaan yhtälön muokkausta, jolloin

$$\begin{aligned}
\iff &(s^2+r^2)(kx+ly)^2 - (k^2+l^2)(sx+ry)^2 = 0 \\
\iff &(s^2+r^2)((kx)^2 + 2kxly + (ly)^2) - (k^2+l^2)((sx)^2 + 2sxry + (ry)^2) = 0 \\
\iff &x^2((s^2+r^2)k^2 - (k^2+l^2)s^2) + y^2(l^2(s^2+r^2) - r^2(k^2+l^2)) \\
&\quad + 2xy(kl(s^2+r^2) - sr((k^2+l^2)) = 0 \\
\iff &x^2(k^2r^2 - l^2s^2) + y^2(l^2s^2 - k^2r^2) + 2xy(klr^2 - srl^2 - srk^2 + kls^2)) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff x^2(k^2r^2 - l^2s^2) - y^2(-l^2s^2 + k^2r^2) + 2xy(lr(kr - ls) - ks(kr - ls)) = 0 \\
&\iff (x^2 - y^2)((kr)^2 - (ls)^2) + 2xy((lr - ks)(kr - ls)) = 0 \\
&\iff (x^2 - y^2)(kr - ls)(kr + ls) + 2xy((lr - ks)(kr - ls)) = 0.
\end{aligned}
$$

Huomataan, että molemmissa yhtälön termeissä on tekijä $kr-ls$. Jos todetaan, että tämä termi on erisuuri kuin nolla, voidaan yhtälön molemmat puolet jakaa sillä.

Koska suorien yksikkövektoreiden oletettiin olevan erisuuret, niin suorat eivät esitä samaa suoraa. Toisaalta koska suorien on kuljettava origon kautta, ne eivät myöskään voi olla yhdensuuntaisia. Tällöin suorat ovat lineaarisesti riippumattomia Lauseen 3.7 mukaan. Lineaarisesti riippumattomien determinantin täytyy tällöin olla eri suuri kuin nolla. Suorien determinantti

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} k & l \\ s & r \end{vmatrix} \neq 0 \\
\iff &\ kr - ls \neq 0,
\end{aligned}
$$

jolloin yhtälö voidaan jakaa puolittain termillä $kr - ls$. Tämän jälkeen sijoitetaan tunnetut $a = ks$,$b = lr$ ja $2h = kr + ls$, jolloin

$$
\begin{aligned}
&\iff (x^2 - y^2)(kr + ls) + 2xy(lr - ks) = 0 \\
&\iff (x^2 - y^2)2h + 2xy(b - a) = 0 \\
&\iff hx^2 + (b - a)xy - hy^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Saatiin siis todistettua, että kulmanpuolittajien $L + M$ ja $L - M$ yhdistetty yhtälö

$$(L + M)(L - M) = hx^2 + (b - a)xy - hy^2 = 0.$$

□

Esimerkki 3.5. Osoita, että suorien $y = \lambda x$ ja $y = \mu x$ kulmanpuolittajien yhdistetty yhtälö on $(\lambda + \mu)\, x^2 + 2\,(\lambda\mu - 1)\, xy - (\lambda + \mu)\, y^2 = 0$.

Todistus. Aloitetaan todistus merkitsemällä suoria kahden muuttujan funktioilla eli $L\,(x,y) = \lambda x - y$ ja $S\,(x,y) = \mu x - y$. Koska suorat kulkevat origon kautta, niiden yhdistetty yhtälö $Q\,(x,y)$ saadaan laskettua niiden tulona eli $Q = LS$.

Tehdään esimerkki loppuun käyttäen rakenteisia päättelyketjuja.

Esittely	$+$	$x, y, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Oletus	$-$	$x \neq 0 \wedge y \neq 0$
Määritelmä	$+$	$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
		$\{$suora L$\}$
		$L(x, y) = \lambda x - y$
Määritelmä	$+$	$S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
		$\{$suora S$\}$
		$S(x, y) = \mu x - y$
Lasku	$\bullet$	$L(x, y)S(x, y)$
	$=$	$\{$suorien yhdistetty yhtälö$\}$
		$(\lambda x - y)(\mu x - y)$
	$=$	$\{$avataan sulut$\}$
		$\lambda\mu x^2 - y\mu x - y\lambda x + y^2$
	$=$	$\{$jäsennellään, jotta voidaan verrata yhtälöön $Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2\}$
		$\lambda\mu x^2 + 2\Big(-\frac{1}{2}(\mu + \lambda)\Big)yx + y^2$.
	$\square$	
Oletus	$-$	$a = \lambda\mu$ (luetaan edellisestä yhtälöstä)
Oletus	$-$	$b = 1$ (luetaan edellisestä yhtälöstä)
Oletus	$-$	$h = -\frac{1}{2}(\mu + \lambda)$ (luetaan edellisestä yhtälöstä)
Määritelmä	$+$	$B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
		$\{$kulmanpuolittajien yhdistetty yhtälö$\}$
		$B(x, y) = hx^2 + (b - a)xy - hy^2$
Oletus	$-$	$B(x, y) = 0$
Lasku	$\bullet$	$hx^2 + (b - a)xy - hy^2 = 0$
	$\Longleftrightarrow$	$\{$sijoitetaan a, b ja $h\}$
		$\Big(-\frac{1}{2}(\mu + \lambda)\Big)x^2 + (1 - \lambda\mu)xy - \Big(-\frac{1}{2}(\mu + \lambda)\Big)y^2 = 0$
	$\Longleftrightarrow$	$\{$sievennetään$\}$
		$(-(\mu + \lambda))x^2 + 2(1 - \lambda\mu)xy + ((\mu + \lambda)y^2 = 0$

$$\iff \quad \{\text{sievennetään}\}$$
$$(\mu+\lambda)x^2 + 2(\lambda\mu - 1)xy - (\mu+\lambda)y^2 = 0.$$

$\square$

Näin ollen suorien kulmanpuolittajien yhdistetty yhtälö on

$$(\mu+\lambda)x^2 + 2(\lambda\mu - 1)xy - (\mu+\lambda)y^2 = 0.$$

$\square$

Tutustutaan seuraavaksi toiseen esimerkkiin, jossa todistetaan parametrisoinnin olevan säännöllinen. Suoran parametrimuoto esitettiin Määritelmässä 3.4, ja käydään seuraavaksi läpi säännöllinen parametrisointi.

Määritelmä 3.14. Parametrisointi on *säännöllinen*, jos kaikilla parametreillä t vähintään toinen derivaatoista $x'(t)$, $y'(t)$ on nollasta poikkeava. Jos löydetään parametri t, jolle $x'(t) = 0$ ja $y'(t) = 0$, sanotaan parametrisointia *epäsäännölliseksi*.

Käydään viimeisenä läpi toinen esimerkki, jossa todistetaan erään parametrisoinnin olevan säännöllinen.

Esimerkki 3.6. Osoita, että $x\,(t) = 2r\cos^2 t$, $y\,(t) = 2r \sin t \cos t$, missä r kuvaa ympyrän sädettä, on säännöllinen parametrisointi.

Todistus. Parametrisointi on säännöllinen, jos kaikilla parametreillä t vähintään toinen derivaatoista $x'(t)$, $y'(t)$ on nollasta poikkeava. Tehdään tämäkin esimerkki rakenteisena päättelyketjuna.

Esittely	$+$	$t \in \mathbb{R}$ (muuttuja)
Oletus	$-$	$r > 0$ (ympyrän säde)
Määritelmä	$+$	$x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
		{ensimmäinen parametri}
		$x(t) = 2r\cos^2 t$
Määritelmä	$+$	$y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
		{toinen parametri}
		$y(t) = 2r \sin t \cos t$

Päätelmä $\quad +\quad$ $\{$Tutkitaan onko niin, että vähintään toinen derivaatoista on aina poikkeava nollasta eli $\frac{d}{dt}[x(t)] \neq 0 \vee \frac{d}{dt}[y(t)] \neq 0\}$

- $\frac{d}{dt}[x(t)] \neq 0 \vee \frac{d}{dt}[y(t)] \neq 0$

$\iff$ $\{$derivoidaan$\}$

$-4r\cos t \sin t \neq 0 \vee 2r\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) \neq 0$

$\iff$ $\{$sievennetään vakiot ja r pois, koska $r > 0\}$

$\cos t \sin t \neq 0 \vee \cos^2 t - \sin^2 t \neq 0$

$\iff$ $\{$käytetään tunnettuja yhtälöitä $2\cos t \sin t = \sin 2t$ ja $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t\}$

$\frac{1}{2}\sin 2t \neq 0 \vee \cos 2t \neq 0$

$\iff$ $\{$jaetaan ensimmäinen yhtälö vakiolla $\frac{1}{2}\}$

$\sin 2t \neq 0 \vee \cos 2t \neq 0$

$\iff$ $\{$Kun $n \in \mathbb{Z}$ niin $\sin 2t = 0$ kun $2t = -\frac{n\pi}{2}$ tai $2t = \frac{n\pi}{2}$ kun taas $\cos 2t = 0$ kun $2t = 0$ tai $2t = n\pi$ niin $\sin$ ja $\cos$ eivät ole yhtä aikaa nolla millään vakion $2t$ arvolla $\}$

$T.$

$\square$

$\ldots \quad \frac{d}{dt}[x(t)] \neq 0 \vee \frac{d}{dt}[y(t)] \neq 0 \iff T.$

Joten aina löytyy jokin muuttujan t arvo, jolle jompikumpi parametrin x tai y derivaatasta on erisuuri kuin nolla, ja saatiin todistettua, että tämä on aina tosi. Annettu parametrisointi on siis säännöllinen. $\square$

Esimerkki on tehty rakenteisena päättelyketjuna, ja se on tarkoituksella rakennettu hieman erikoisemmalla tavalla. Yllä oleva versio on sellainen, että se toimi eMathStudiossa tutkimuksen aikana. Helpompi lähestymistapa voisi olla, että tutkitaan, millä arvoilla toinen derivaatoista saa arvon nolla, ja todistaa, että tällöin toinen derivaatta on varmasti eri suuri kuin nolla. Tämä versio esimerkistä on esitetty liitteessä A, ja esimerkki on tehty kuten opiskelija saattaisi sen tehdä eMathStudiolla. Seuraavassa luvussa tutustutaan tarkemmin eMathStudioon, ja luvussa 4.4 kerrotaan tarkemmin tähän esimerkkiin liittyvistä ongelmista.

4. EMATHSTUDIO-OPPIMISALUSTA

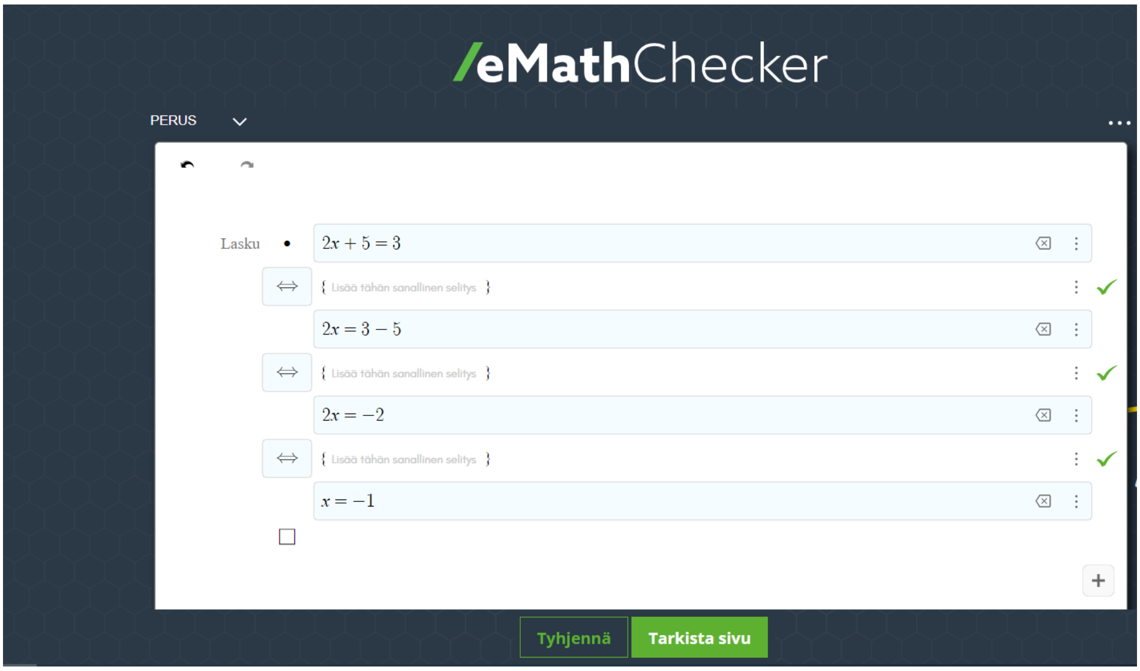
Tässä luvussa kerrotaan Four Ferries -yrityksen kehittämästä eMathStudio-nimisestä oppimisalustasta, jota käytettiin tutkimuksessa. Ensin tarkastellaan alustan ominaisuuksia, katsotaan miten eMathStudiossa rakenteiset päättelyketjut eroavat kappaleessa 3 esitetystä versiosta ja viimeisenä tarkastellaan joitain tutkimuksen aikana ilmenneitä ongelmia ohjelmiston käytössä.

Luvussa 2 esitettiin kaksi määritelmää oppimisalustalle. Ensimmäinen määritelmä sille, Piotrowskin (2010) mukaan, on muuten sopiva eMathStudiolle, mutta eMathStudiossa ei ole viestintämahdollisuutta opiskelijoiden välillä eivätkä opiskelijat pysty tekemään sillä yhteisprojektia. Tanhua-Piiroinen ym. (2016) esittivät toisenlaisen määritelmän, joka on sopiva eMathStudiolle, ja sen takia tässä työssä eMathStudiota kutsutaan oppimisalustaksi. eMathStudioon kirjaudutaan omilla käyttäjätunnuksilla, ja sen yhteydessä määritetään, onko käyttäjä opettaja vai oppilas/opiskelija. Oppimisalusta käyttää matemaattiseen kirjoittamiseen rakenteisia päättelyketjuja, ja se sisältää eMathChecker-tarkastimen.

4.1 eMathChecker-tarkastin

eMathStudion pääominaisuus on eMathChecker-tarkastin (eMathStudio 2021). Jatkossa tarkastimella tarkoitetaan eMathStudion eMathChecker-tarkastinta. Tarkastimen ideologia perustuu rakenteisiin päättelyketjuihin, joita käsiteltiin kappaleessa 3.1. Se tarkastaa jokaisen rakenteisen päättelyketjun askeleen matemaattisen oikeellisuuden.

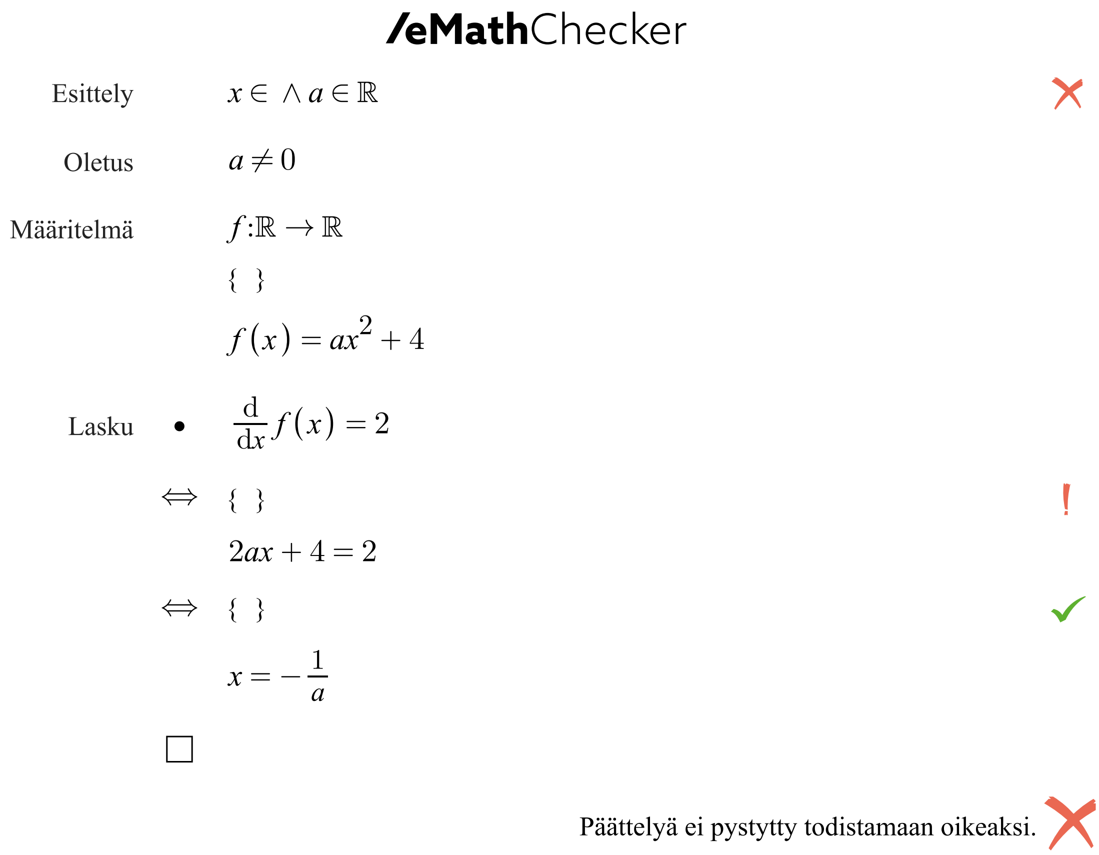
Kuvassa 4.1 on esimerkkinä yksinkertaisen yhtälön ratkaisu käyttäen tarkastinta. Rakenteisena päättelyketjuna se vastaa yksinkertaista rakenteista laskua, ja se on eMathStudiossa kirjoitettu Lasku-elementin Lasku-osaan. Yhtälö on kirjoitettu tarkastimeen rivi riviltä, ja sen jälkeen koko päättelyketju on tarkastettu. Tarkastin ilmoittaa oikeassa laidassa jokaisen relaatio-rivin kohdalla, onko se pystynyt todentamaan kyseisen askeleen kyseisellä relaatiolla.



Kuva 4.1. *Kuvassa esimerkkinä yhtälön ratkaisu tarkastimella muokkaustilassa*

Tarkastin ilmoittaa erilaisista virheellisistä askeleista kahdella eri tavalla: punaisella huutomerkillä ja punaisella rastilla. Punainen huutomerkki koskee päättelyaskeleita ja punainen rasti taas merkintöjä ja syntaksia. Four Ferries -yrityksen nettisivuilla (Four Ferries - 4f Checker 2023) kerrotaan, että tarkastin muotoilee jokaisen päättelyaskeleen teoreemaksi, jonka se sitten lähettää pilvipalvelun teoreematarkastimille. Back (2022) kertoi, että teoreematarkastimilla on käytössä tietty aika, jonka puitteissa se etsii tuloksia. Jos niitä ei löydy käytössä olevassa ajassa, ilmoittaa tarkastin punaisella huutomerkillä, että se ei pysty todentamaan kyseistä matemaattista relaatiota. Punainen rasti taas tulee esimerkiksi jos tarkastin ei ymmärrä merkintätapaa, ja silloin se kertoo ponnahdusikkunassa, miksi se ei ymmärrä kyseistä merkintätapaa. Back (2022) kertoi lisäksi, että eMathStudion tarkastimen täsmällisempi toimintaperiaate on Four Ferries -yrityksen liikesalaisuus.

Kuvassa 4.2 on näytetty, miten tarkastin ilmoittaa virheistä. Kuva on tässä esikatselutilassa (vertaa muokkaustilassa olevaan kuvaan 4.1). Kuvassa on ensin muokkaustilassa määritelty Lasku-elementin Esittely-osassa uudet muuttujat $x \in \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tästä on kuitenkin tarkoituksella jätetty x-muuttujalta pois $\mathbb{R}$, jolloin tarkastin ilmoittaa punaisen rastin kohdalla ponnahdusikkunassa, että "*Odottamaton lausekkeen loppu:* $x \in \square$ ". Kuvassa on Esittely-osan jälkeen Oletus-osa, jossa määritellään, että $a \neq 0$. Tämä on esimerkkinä Oletus-osan käytöstä. Tämän jälkeen Määritelmä-osassa on määritelty funktio $f(x)$, ja sen jälkeen Lasku-osassa lasketaan millä x:n arvolla funktion derivaatta saa arvon 2. Lasku-osassa ensimmäisellä rivillä derivaatta on tarkoituksella laskettu väärin. Tarkastin ilmoittaa tästä oikeassa laidassa punaisella huutomerkillä. Sen kohdalla ponnahdusruutu ilmoittaa "*Tämä askel ei ole todistettavissa saatavissa olevia todistustyökaluja käyttämällä.*". Viimeisellä rivillä yhtälö on laskettu oikein, mutta se olisi myös väärin, jos alussa ei olisi oletettu $a \neq 0$. Tarkastin merkitsee ainoastaan Lasku-osaan oikein merkit, joten tässä esimerkissä Oletus-osaan tai Määritelmä-osaan ei tule vihreitä oikein-merkkejä. Loppuun tulee vielä isompi punainen rasti, jos laskussa on missä tahansa kohdassa jokin kohta, jota tarkastin ei pysty toteamaan. Jos tarkastin pystyy totemaan jokaisen päättelyketjun askeleen todeksi, se ilmoittaa vastaavasti lopussa isommalla vihreällä merkillä, että "*Päättely todistettu oikeaksi.*"



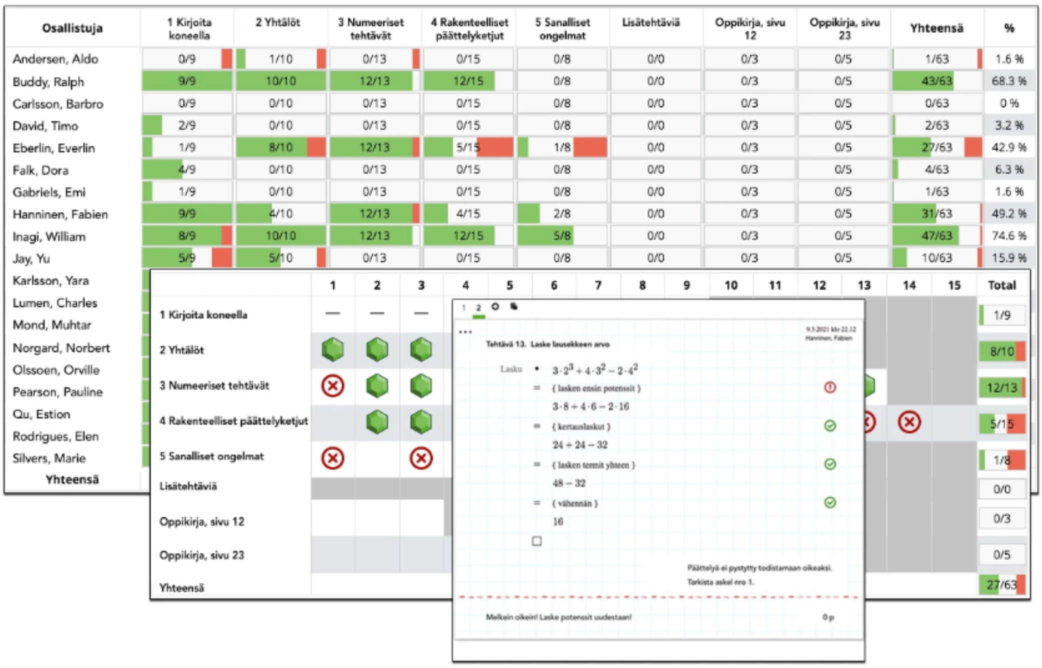
***Kuva 4.2.** Kuvassa esimerkkinä miten eMathChecker-tarkastin näyttää virheistä vastauksessa.*

Esittely-, Oletus-, Määritelmä- ja Lasku-osan lisäksi Lasku-elementtiin voi lisätä Päätelmä- ja Tehtävä-osan. Päätelmä-osa näkyy muun muassa myöhemmin esitettävässä Esimerkissä 4.1. Sitä voi käyttää niin, että siihen lisää alilaskun, jonka voi halutessaan piilottaa. Tällöin Päätelmä-osasta voidaan erikseen lukea se, mikä haluttiin päätellä, ja alilaskuna on perustelu päättelylle. Tehtävä-osa on kaikista osista monipuolisin, mutta myös vaikein. Tehtävä-osan voi aloittaa sanoilla: Todista, Laske, Sievennä, Ratkaise tai Päättele. Tämän tutkimuksen tuloksissa on näkyvissä eräs opiskelijan vastaus, jossa on käytetty Tehtävä-osan "Todista-tekstiä. Vastaus on esitetty luvussa 6 kuvassa 6.3. Jos aloittaa Tehtävä-osan esimerkiksi väitteellä $x = 0$, niin sanalla "Todista" voi tämänkaltaisen vastauksen aloittaa, mutta "Laske" sanalla ei. Tällöin tarkastin ilmoittaa punaisen rastin kohdalla ponnahdusikkunassa "*Lausekkeen $x = 0$ tyyppi on $\mathbb{B}$, mikä ei ole yhteensopi-*

va odotetun tyypin ℝ kanssa." Tämä tarkoittaa, että Tehtävä-osa vaatii tietyn tyyppisen lausekkeen millaista tehtävää ollaan ratkaisemassa. Erityisesti oikean tyyppisen lausekkeen valinta ja alkutekstin yhteensovittaminen saattaa tehdä tästä osasta hankalan käyttää.

4.2 Muut ominaisuudet

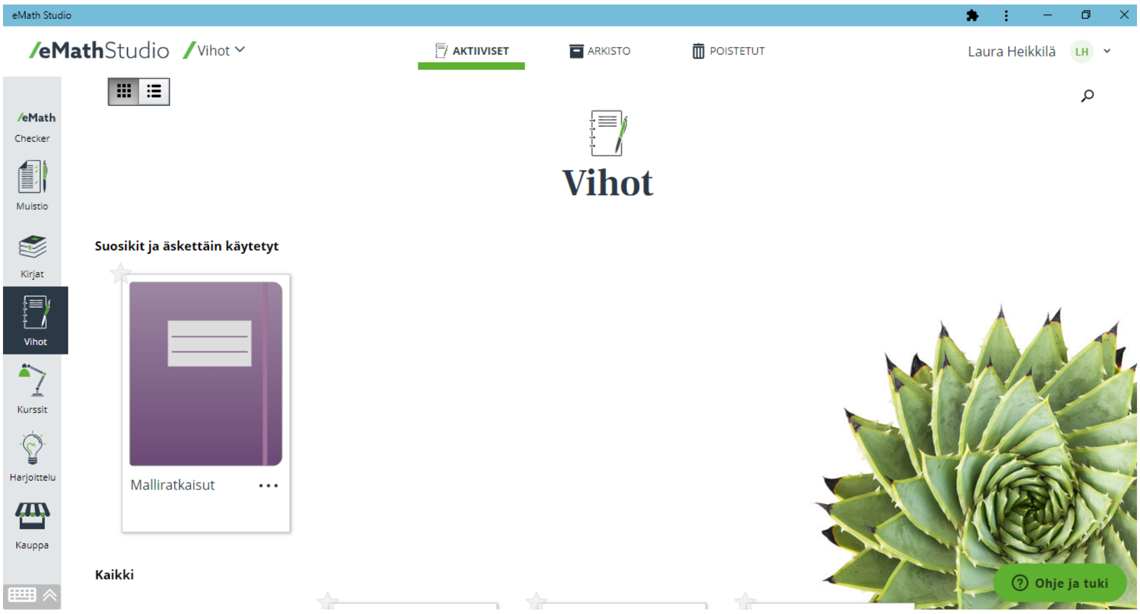
Tarkastimen lisäksi eMathStudiossa on muitakin ominaisuuksia opiskelijoille ja opettajille. Opettaja voi luoda eMathStudiossa Kurssit-näkymässä kurssin opiskelijoilleen. Hän voi käyttää valmiita lukioon ja yläkouluun suunnattuja oppikirjoja tai luoda kokonaan oman materiaalin. Materiaaliin pystyy liittämään monipuolisesti muun muassa tekstiä, kuvia, kaavioita, taulukoita ja tehtäviä rakenteisia päättelyketjuja hyödyntäen. Tehtävien ei tarvitse noudattaa rakenteisia päättelyketjuja, mutta tarkastin toimii ainoastaan niissä. Opettaja voi luoda kurssilleen tehtäviä ja seurata opiskelijoiden edistymistä. Opiskelijat liittyvät tai liitetään kurssille heidän käyttäjätunnuksillaan. Kuvassa 4.3 on esimerkkinä opettajan näkymä opiskelijoiden edistymisestä esimerkkikurssin tehtävissä.



Kuva 4.3. *Opettajan esimerkkinäkymä opiskelijoiden edistymisestä kurssilla, (eMathStudio 2021)*

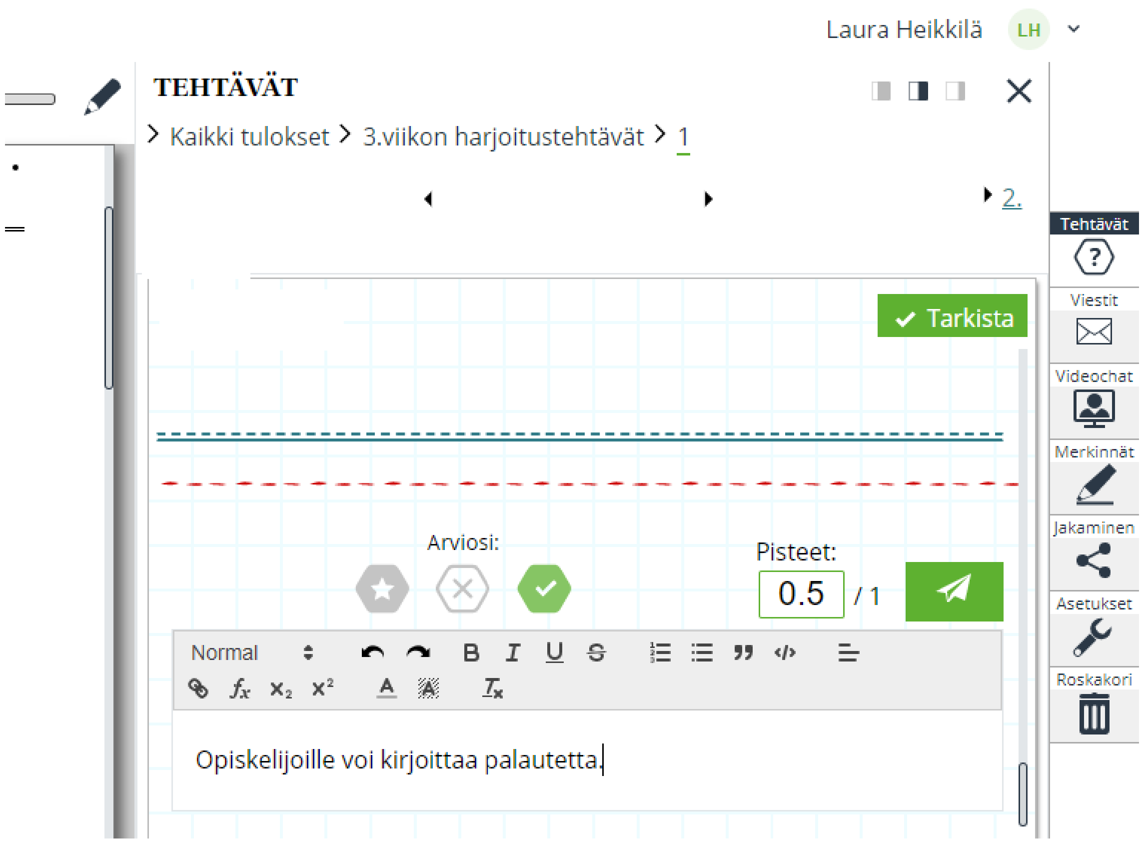
Liitteessä kuvassa B.1 on esitetty eMathStudion kurssinäkymä kokonaisuudessaan. Se on opettajan näkymä muokkaustilassa, ja sivun tekstit ovat tämän työn opintojakson toteutuksen ensimmäisen sivun alkuohjeita opiskelijoille. Oikean laidan valikoita lukuunottamatta kuvassa näkyvät ominaisuudet ovat samat kuin Vihot-näkymässä. Kuvasta B.1 nähdään, että alareunassa on erilaisia valikoita, joilla saa esimerkiksi lisättyä elementtejä materiaaliin. eMathStudiossa mahdollisia elementtejä ovat esimerkiksi Lasku-, Teksti-, Kuva-, Taulukko-, Funktiopiirturi- ja Yhtälöympäristö-elementti. Näppäimistön kuva antaa valikon erilaisista matemaattisista merkinnöistä. eMathStudiossa pystyy selaamaan kurssin sisällysluetteloa ja siirtymään lukujen välillä. Lisäksi siellä voi lisätä uusia lukuja, uusia sivuja ja poistaa näitä. Valikoista voi muun muassa nähdä opiskelijoiden edistymisen tehtävissä, voi viestittää kurssin muille jäsenille, voi jakaa kurssia, lisätä opiskelijoita tai opettajia kurssille ja muokata muita asetuksia.

Opettajilla ja opiskelijoilla on käytössä Muistiinpanot-näkymä, jossa voi tehdä lyhyitä muistioita. Sinne kirjoittaminen tapahtuu pääasiassa samalla tavalla kuin opettajan kurssimateriaalinkin luominen Kurssit-näkymässä. Muistiinpanoihin voi kirjoittaa tekstillä tai lisätä kuvia ja taulukoita. Lisäksi sinne voi kirjoittaa matemaattisella kaavaeditorilla ja hyödyntää rakenteisia päättelyketjuja ja tarkastinta. Lisäksi eMathStudiossa on käytössä Vihot-näkymä opettajille ja opiskelijoille. Se on muuten vastaava kuten Muistiinpanot, mutta toimii digitaalisena vihkona, johon voi lisätä uusia sivuja. Kuvassa 4.4 on Vihot-näkymä, ja siitä näkee myös miltä eMathStudio näyttää yleensä.



__Kuva 4.4.__ Kuva eMathStudion Vihot-näkymästä

Opettaja voi lisätä Kurssit-näkymässä kurssille esimerkiksi kotitehtäviä, joihin opiskelijat vastaavat. Opiskelijat voivat saada ratkaisuistaan pisteitä, jotka opettaja on määrittänyt. Lisäksi opettaja voi kirjoittaa opiskelijalle palautetta, jonka jälkeen opiskelija voi korjata ratkaisuaan ja palauttaa sen uudestaan. Kuvassa 4.5 on esimerkkinä näytetty, miltä näyttää tilanne, jossa opettaja voi kirjoittaa opiskelijalle palautetta ratkaisustaan ja antaa ratkaisusta pisteet.



Kuva 4.5. *Kuva opintojaksototeutukselta eMathStudiosta kohdasta, jossa voi arvioida opiskelijan ratkaisun ja kirjoittaa palautetta. Kuvasta on poistettu opiskelijoiden nimet ja palautetun ratkaisun päivämäärä.*

4.3 Päättelyketjut eMathStudiossa

Tässä luvussa verrataan eMathStudion päättelyketjuja luvussa 3 esitettyyn muotoon. Tämän kappaleen lähteenä on käytetty puhelinkeskustelua Backin (2022) kanssa.

eMathStudio käyttää hieman erilaista versiota rakenteisista päättelyketjuista kuin on esitetty kirjassa Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin (Back 2016). Kirjassa on alunperin ollut ajatus, että kaikki päättelyketjun askeleet rakentuvat merkin • ja annetun tehtävän/väitteen alle. Tällä tavalla kirjoittaminen ei kuitenkaan esimerkiksi lukiolaisille ole ollut kovin ymmärrettävä tapa, minkä takia eMathStudiossa luovuttiin siitä. eMathStudiossa voi kuvitella, että tämä ensimmäinen rivi on kirjoitettu alkuun mutta piilotettu. Käyttäjä kirjoittaa tällöin ainoastaan päättelyaskeleet, jotka tulevat sen jälkeen. eMathStudiossa on kuitenkin käytössä Tehtävä-osa, joka vastaa tätä rakennetta, ja sitä voi esimerkiksi käyttää alitehtäviä tehdessä.

Ennen kuin katsotaan eMathStudion rakenteisia päättelyketjuja tarkemmin, listataan termit, joita käytetään eMathStudiossa. Ne poikkeavat hieman kappaleessa 3.1 esitetyistä.

- *Lasku* on sama kuin rakenteinen lasku.
- *Oletus* on oletus.
- *Uusi muuttuja* tai *esittely* on merkintä (eli määritelmä ilman väitettä ja perustelua).
- *Uusi funktio* tai *määritelmä* on määritelmä (eli sisältää määrittelyn, perustelun ja väitteen).
- *Päätelmä* on sama kuin fakta (eli sisältää vain perustelun ja väitteen.
- *Tehtävä* on sama kuin rakenteinen tehtävä.

eMathStudiossa olennainen asia on esitellä ensin muuttujat ja oletukset. Sen jälkeen alkaa tehtävän laskeminen. Oletuksia ja muuttujia voi tulla lisää tehtävään vastaamisen aikana, ja ne voidaan kirjoittaa myös myöhempään kohtaan päättelyketjussa. Yleinen tapa on esimerkiksi kirjoittaa ensin muuttujat, niihin liittyvät oletukset, määritelmät ja tämän jälkeen laskea tehtävä loppuun päätelminä.

Katsotaan aiempaa esimerkkiä 3.3 ja tarkastellaan, miten sen voi kirjoittaa eMathStudiossa.

Esimerkki 4.1. Osoitetaan, että suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $-16x + 4y = 3000$ ovat ortogonaalisia. Tehdään ratkaisu kuten sen voi tehdä eMathStudiossa.

Esittely $\quad +\quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (suorien kulmakertoimet)

Oletus $\quad -\quad k_1 = -1/4$ (ensimmäisen suoran yhtälön kulmakerroin)

Päätelmä $\quad +\quad$ {esitetään jälkimmäinen suora muodossa $y = kx + b$ alilaskuna}

$$
\begin{array}{ll}
\bullet & -16x + 4y = 3000 \\
\iff & \{\text{lisätään termi } 16x \text{ yhtälön molemmille puolille}\} \\
 & 4y = 3000 + 16x \\
\iff & \{\text{jaetaan luvulla } 4\} \\
 & y = 750 + 4x \\
\iff & \{\text{vaihdetaan termin } 4x \text{ ja luvun } 750 \text{ järjestystä}\} \\
 & y = 4x + 750 \\
\square &
\end{array}
$$

$$\ldots \quad -16x + 4y = 3000 \iff y = 4x + 750.$$

Oletus	$-$	$k_2 = 4$ (yllä olevan yhtälön kulmakerroin)
Päätelmä		$\{$todistetaan alilaskuna, että suorat ovat ortogonaalisia osoittamalla, että $k_1 \cdot k_2 = -1\}$
	$\bullet$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
	$\Longleftrightarrow$	$\{$sijoitetaan oletukset$\}$
		$4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$
	$\Longleftrightarrow$	$\{$sievennetään kertolasku$\}$
		$-1 = -1$
	$\Longleftrightarrow$	$\{$yhtäsuuruus on voimassa$\}$
		T
	$\square$	
	$\ldots$	$k_1 \cdot k_2 = -1 \iff T$

Kun verrataan esimerkkien 3.3 ja 4.1 ratkaisuja, nähdään, että ensimmäisessä esimerkissä on näkyvissä tehtävänanto rakenteisen päättelyketjun alkuna. Kaikki muu rakennetaan sen alle niin sanottuina paikallisina esittelyinä ja oletuksina. Sen sijaan toisessa esimerkissä, eMathStudiolla tehdyssä versiossa, ei tehtävänantoa ole näkyvissä. eMathStudiossa voi kuitenkin päättelyketjun alkuun kirjoittaa tekstiä, joten tehtävänannon voi kirjoittaa erikseen. Liitteessä A.2 on tästä esimerkistä eMathStudiossa tehty versio, josta näkyy, kuinka tarkastin on tarkastanut kyseisen ratkaisun päättelyaskeleet, ja miten tehtävänannon voi kirjoittaa alkuun.

Päättelyketjun osien järjestys on eMathStudiossa vapaampi. Tässä esimerkissä toinen oletuksista $k_2 = 4$ listataan vasta, kun se on luettavissa suoran yhtälöstä. Jos Tehtävä-osan alla käytetään niin sanottua paikallista oletusta, niin sitä ei voida käyttää missään toisessa Tehtävä-osassa. Esimerkissä jokainen esittely ja oletus on paikallisen sijaan yleinen. Listaamalla esittelyt ja oletukset yleisinä, ovat ne sen jälkeen käytettävissä kaikissa mahdollisissa osissa. Esimerkiksi jos tehtävänä on laskea tietyillä muuttujilla ja oletuksilla monta eri laskua, niin eMathStudion rakenne on tällöin parempi kuin luvun 3 esitetty rakenne. Tällöin yleisiä muuttujia ja oletuksia voi käyttää kaikissa laskuissa, eikä niitä tarvitse kirjoittaa jokaista laskua varten uudestaan.

4.4 Ongelmat

eMathStudiota kehitetään ohjelmistona koko ajan paremmaksi. Tarkastellaan seuraavaksi muutamia tutkimuksen aikana opintojakson toteutuksella esiintyneitä ongelmia. Osa ongelmista ei välttämättä enää ole eMathStudiossa, vaan niitä on jo paranneltu tutkimuksen jälkeen. Oppimisalustan ongelmat ilmenivät esimerkiksi geometriaan liittyvissä asioissa tai merkinnöissä ja rakenteissa, jotka eivät ole lukiossa tavallisia. Jotkin ongelmista otettiin huomioon tutkimuksessa etukäteen, ja muutama tuli vastaan vasta tehtäviä tehdessä. Kappaleessa 6 käsitellään tarkemmin, miten nämä ongelmat ilmenivät opiskelijoiden vastauksissa ja näkemyksissä.

Esimerkki 3.6 tehtiin aiemmin niin, että se toimi eMathStudiolla tutkimuksen aikana eli tarkastin pystyi sen sellaisenaan tarkastamaan. Ratkaisussa vältettiin tarkoituksellisesti trigonometrisia yhtälöitä. Liitteessä A.1 on vaihtoehtoinen tapa tehdä kyseinen esimerkki. Esimerkki on toteutettu niin kuin opiskelija olisi sen saattanut yrittää ratkaista. Siitä huomataan, että tarkastin ei pystynyt tarkastamaan relaatioita $\sin 2t = 0 \iff t = n\pi \vee t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ tai $\cos 2t = 0 \iff t = \frac{\pi}{4} + n\pi \vee t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$. Vastaavasti se ei pystynyt tarkastamaan tutkimuksen aikana muitakaan trigonometrisia yhtälöitä. Tämä johtuu siitä, että eMathStudiolla ei ollut tiedossa kaikkia olemassa olevia trigonometrisia kaavoja. Opintojaksototeutuksella tämä virhe havaittiin vasta kun opiskelijat jo laskivat tehtävää. Tämä osaltaan saattoi vaikuttaa opiskelijoiden motivaatioon ohjelman käyttöä kohtaan.

Tarkastin ei tunnistanut matriiseja tai determinatteja, joita käytetään paljon yliopistotason matematiikassa. Tämä onneksi tiedostettiin toteutuksella jo etukäteen, ja tämänkaltaiset kohdat tehtiin eMathStudiolla ilman tarkastinta. eMathStudiossa matemaattisen tekstin kirjoittaminen on suhteellisen helppoa, ja on mahdollista, että kaikki tehtävien ratkaisut pystyisi eMathStudiossa kirjoittamaan tekstinä ilman tarkastinta. Tätä ei kuitenkaan haluttu tehdä opintojaksototeutuksella, vaan opiskelijoita kehotettiin käyttämään tarkastinta mahdollisimman paljon.

Joissain erikoismerkkien käytössä tuli myös ongelmia. Esimerkiksi eMathStudio ei hyväksynyt merkintää $\frac{d}{dx}$, jossa kirjain d kirjoitetaan suoraan näppäimistöstä vaan se hyväksyi ainoastaan valikosta valitun muodon $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ tai sitten koodina tuli kirjaimen d sijaan kirjoittaa `\d`. Sama ongelma ilmeni myös totuusarvojen kirjoittamisessa T/F vai T/F. Lisäksi opiskelijat olivat tottuneet pitkälti kirjoittamaan esimerkiksi $\cos^2 x$, mutta eMathStudioon se piti kirjoittaa kuitenkin muodossa $(\cos x)^2$.

5. TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tässä luvussa kerrotaan ensin opintojakson ja siihen liittyvän tutkimuksen toteutuksesta. Tämän jälkeen kerrotaan lyhyesti tutkimukseen osallistujista ja eettisistä ratkaisuista. Aineistonkeruussa kerrotaan kyselyistä, joihin opiskelijat vastasivat tutkimuksessa, ja viimeisenä kerrotaan aineiston analyysi.

5.1 Opintojakson toteutus

Opintojakson toteutus (jatkossa käytetään termiä "toteutus") järjestettiin etäopetuksena käyttäen Microsoft Teams -ohjelmaa. Kaikki oppimistilaisuudet pidettiin sen välityksellä. Toteutuksen suoritti 14 opiskelijaa, ja opintojakso oli suunnattu aineenopettajaopiskelijoille. Toteutuksella käytettiin oppimateriaalina luentomonistetta, jonka lähteenä oli käytetty Elementary Euclidean Geometry -kirjaa (Gibson 2003). Toteutuksella opiskelijat tekivät matemaattisia tehtäviä viikoittain ja työstivät oppimisportfoliota. Toteutukseen kuului lisäksi tentti ja harjoitustyö.

Toteutuksella oli kahdentyyppisiä oppimistilaisuuksia: laskuharjoitustilaisuuksia ja pienryhmätilaisuuksia. Opiskelijat muodostivat oppimistilaisuuksia varten pienryhmät, ja niitä hyödynnettiin esimerkiksi tehtävien tekemiseen. Oppimistilaisuuksissa pienryhmät loivat omat kokoukset Microsoft Teams -ohjelmassa. Opiskelijat saivat auttaa pienryhmissä toisiaan tehtävien tekemisessä, mutta jokaisen piti itse vastata tehtäviin.

Pienryhmätilaisuuksia oli toteutuksella yhteensä 14, ja niitä oli kaksi kertaa viikossa. Näiden tilaisuuksien opettajana toimi opintojakson vastuuopettaja. Tilaisuuksissa tehtiin tehtäviä perinteisesti kynällä ja paperilla, mutta myös ohjelmistoja käyttäen (esimerkiksi GeoGebra-ohjelmisto). eMathStudiota ei käytetty, ellei opiskelija sattunut hyödyntämään sitä omatoimisesti.

Laskuharjoitustilaisuuksissa opettajan roolissa opetusassistenttina toimi tämän diplomityön tekijä. Tilaisuuksissa käytettiin kahta eri ohjelmistoa, eMathStudiota ja GeoGebraa. Tilaisuuksien kulku oli seuraava:

1. Opettaja antoi ohjeita ja vinkkejä liittyen eMathStudioon tai GeoGebraan.
2. Opettaja kävi läpi edellisen viikon mahdollisia virheitä opiskelijoiden vastauksista.
3. Opiskelijat tekivät tehtäviä pienryhmissä eMathStudiolla tai GeoGebralla.

eMathStudion opettelu aloitettiin vähitellen. Ensimmäisellä ja toisella viikolla katsottiin esimerkkejä ja yleisiä ohjeita eMathStudion käytöstä. Kolmannesta viikosta eteenpäin ohjeet koskivat enemmän virheitä ja vinkkejä eMathStudion käytöstä. Ensimmäisellä viikolla käytiin eMathStudion osista läpi esimerkkien avulla Lasku-, Esittely-, Oletus- ja Määritelmä-osat. Viikon tehtävät vastasivat esimerkkejä. Toisella viikolla käytiin esimerkkien avulla läpi Päätelmä- ja Tehtävä-osat, ja vastaavasti tehtävät liittyivät myös näihin esimerkkeihin. Kolmannesta viikosta eteenpäin opiskelijat saivat itse päättää ja kokeilla mitä osia käyttävät vastauksissaan. Jos tehtävät jäivät kesken, opiskelijoiden oli tarkoitus tehdä ne valmiiksi viikon sisällä ennen seuraavaa laskuharjoitustilaisuutta.

eMathStudio-tehtävistä kahden ensimmäisen tilaisuuden tehtävät, (yhteensä kuusi) olivat lukion oppimäärän mukaisia. Ensimmäiset kolme tehtävää olivat laskennallisia, ja kolme jälkimmäistä olivat todistustehtäviä. Kolmannesta tilaisuudesta lähtien tehtävät liittyivät opintojakson aiheeseen, ja ne olivat kaikki rakenteeltaan todistustehtäviä. Viimeisen eMathStudio-tehtävän, jonka pistemäärä oli yhden pisteen sijaan 1,5 pistettä, saivat opiskelijat itse luoda ja laskea. Sen piti olla todistustehtävä, eikä se saanut olla mikään jo olleista tehtävistä edes muokattuna. Kaikki laskuharjoitustilaisuuksien tehtävät oli laatinut tämän tutkimuksen tekijä, ja ne olivat joko lukion analyyttisen geometrian kirjoista tai Elementary Euclidean Geometry -kirjasta (Gibson 2003).

Opiskelijat keräsivät toteutuksella pisteitä. Suurin mahdollinen kokonaispistemäärä oli 140 pistettä. Laskuharjoituksista sai pisteitä läsnäolosta ja tehtävistä. Oppimisportfolioon sisällytettiin muun muassa laskutehtäviä pienryhmätilaisuuksista, mutta ei laskuharjoituksista. Harjoitustyö tehtiin opintojakson aihepiireistä, ja toteutuksen lopussa oli tentti. Pisteet jakautuivat prosentuaalisesti neljään osioon:

- laskuharjoitukset 20 %
- oppimisportfolio 30 %
- harjoitustyö 20 %
- tentti 30 %

Laskuharjoitustilaisuuksien osuus 20 % 140 pisteestä oli 28 pistettä. Laskuharjoitustilaisuuksia oli kerran viikossa, ja jokaisesta osallistumiskerrasta opiskelija sai yhden pisteen. Yhteensä tilaisuuksia oli seitsemän koko toteutuksen aikana. Taulukossa 5.1 on esitetty miten 28 pistettä jakautui läsnolon, eMathStudio-tehtävien ja muiden tehtävien kesken:

	Läsnäolo	eMathStudio-tehtävät	Muut tehtävät	Yhteensä
Kappalemäärä	7	14	6	27
Pisteet	7	14,5	6,5	28

Taulukko 5.1. *Laskuharjoitusten pisteet*

Opiskelijoille oli tarjolla myös kaksi lisätehtävää kurssilla. Lisätehtävistä tarjottiin yhteensä yksi piste. Ne eivät vaikuttaneet toteutuksen maksimipistemäärään vaan ne laskettiin lisäksi. Kaikkien tehtävien tekeminen oli opiskelijoille vapaaehtoista. eMathStudio-tehtävistä oli siten mahdollista saada yhteensä 15,5 pistettä, joka vastasi noin 11 % toteutuksen 140 kokonaispisteestä. Ilman lisätehtäviä pistemäärä oli 14,5, joka vastasi noin 10 % kokonaispisteistä.

Tutkimukseen käytettiin ainoastaan eMathStudiolla tehtyjä tehtäviä, jotka liittyivät laskuharjoituksiin. Muita tehtäviä ei otettu huomioon. Pienryhmätilaisuudet, oppimisportfolio, harjoitustyö tai tentti eivät liittyneet tutkimukseen. Lisätehtäviä ei otettu mukaan tutkimukseen, koska opiskelijat eivät juurikaan vastanneet niihin.

5.2 Tutkimuksen osallistujat ja eettiset ratkaisut

Kaikki tutkimukseen osallistuneet opiskelijat olivat Tampereen yliopiston opiskelijoita. He olivat todennäköisesti vähintään kolmannen vuoden opiskelijoita, osa maisterivaiheessa. Heiltä ei kysytty tarkempia taustatietoja. Tutkimukseen osallistuneet eivät olleet ennen käyttäneet eMathStudiota, mutta muista sähköisistä matemaattisista ohjelmistoista heillä saattoi olla kokemusta. Opintojakson matemaattinen aihepiiri oli todennäköisesti heille myös uutta.

Tutkimusta varten yliopisto myönsi luvan tutkimukseen. Opiskelijoilta pyydettiin tutkimuslupaa alkukyselyn yhteydessä, ja opiskelijoiden tuli vastata siihen opintojaksototeutuksen alussa. Sen yhteydessä opiskelijoille kerrottiin, mistä tutkimuksessa oli kysymys, ja mitä aineistoa tutkimuksessa käytettiin. Osallistuminen tutkimukseen oli vapaaehtoista, ja ainoastaan luvan antaneet otettiin mukaan tutkimukseen. Tutkimukseen osallistui yhteensä 11 opiskelijaa. Aineistoa käsiteltiin pseudonyymisti, ja tuloksia varten jokainen opiskelija sai lyhenteen O1-O11. Ainoastaan tutkimuksen tekijä käsitteli opiskelijoiden henkilötietoja.

Opiskelijoille kerrottiin, mitä tietoja Four Ferries -yritys sai heidän luodessaan tunnuksen eMathStudio-oppimisalustalle, ja opiskelijoille kerrottiin yrityksen omasta tietosuojaselosteesta. Yliopisto teki tutkimusta varten Four Ferries -yrityksen kanssa henkilötietojen käyttöoikeussopimuksen, ja käyttöoikeussopimuksen eMathStudion käytöstä. Tutkimuksen päätyttyä kaikki tutkimukseen liittyvä aineisto hävitetään, niin tutkijan tiedoista kuin myös yrityksen palvelimilta.

5.3 Aineistonkeruu

Tutkimuksen aineistonkeruuna käytettiin kyselyjä ja opiskelijoiden vastauksia eMathStudiossa suoritettuihin kuuteentoista tehtävään, jotka tehtiin laskuharjoitustilaisuuksissa. Kyselyt koostuivat eMathStudio-tehtävien oheen liitetyistä kyselyistä, opintojaksototeutuksen alkukyselystä ja loppukyselystä.

Jokaisen eMathStudio-tehtävän oheen oli liitetty b)-kohdaksi neljä kysymystä, jotka olivat seuraavat:

1. Mitä hyötyä eMathStudion käytöstä oli, ja mitä opit sen käytöstä (opiskelijanäkökulma)?
2. Miten eMathStudion käyttö tukee tämän tehtävän matemaattista oppimista (opettajanäkökulma)?
3. Mikä oli vaikeinta tehtävään vastaamisessa, ja mitä matemaattista opit tehtävää tehdessäsi?
4. Mitä matemaattisia oivalluksia koit tehtävää tehdessä?

Kun opiskelija vastasi eMathStudio tehtävään laskuharjoitustilaisuudessa tai sen jälkeen kotitehtävänä, hänen oli tarkoitus viimeistellä ratkaisunsa vastaamalla näihin kysymyksiin. Jos opiskelija ei vastannut kysymyksiin, häneltä vähennettiin 0,25 pistettä tehtävään vastaamisesta.

Laskuharjoitustehtävien oheen liitettyjen kysymysten lisäksi tutkimuksen osallistujat täyttivät alku- ja loppukyselyn. Molemmat kyselyt tehtiin toteutuksen omalla Moodle-sivulla. Alkukyselyyn vastattiin opintojakson aloitusviikolla. Siinä kerrottiin tutkimuksen tutkimusseloste, pyydettiin opiskelijoilta lupaa tutkimukselle ja lisäksi siinä oli kaksi kysymystä. Ensimmäinen kysymys oli:

- Oletko ajatellut ryhtyä tulevaisuudessa matematiikan opettajaksi?

Siihen vastattiin joko kyllä tai ei. Toinen kysymys oli:

- Kerro lyhyesti mielipiteesi erilaisten ohjelmistojen tai oppimisympäristöjen hyödyntämisestä matematiikan opetuksessa. Voit miettiä esimerkiksi Matlabia, GeoGebraa, lukioissa käytettyjä laskinohjelmistoja tai muita, joita tiedät. Mitä hyötyä koet ohjelmistoista olevan? Miten ne auttavat oppimisessa? Mikä niiden käyttämisessä on helppoa/vaikeata?

Toiseen kysymykseen opiskelija saattoi antaa sanallisen vastauksen.

Loppukyselyyn vastattiin viimeisten oppimistilaisuuksien jälkeen ennen tenttiä. Se keskittyi kysymyksiltään enemmän eMathStudion käyttöön ja opiskelijoiden kokemukseen siitä. Loppukysely sisälsi seuraavat kysymykset:

1. Kerro kaksi positiivista asiaa eMathStudiosta.
2. Kerro kaksi negatiivista asiaa eMathStudiosta [Toteutuksen osaamistavoitteet].
3. Katso yltä toteutuksen osaamistavoitteet. Valitse niistä kaksi, ja kerro miten eMathStudio auttoi kyseisten tavoitteiden saavuttamisessa.

4. Kerro kokemuksiasi eMathStudio-oppimisalustan käytöstä. Kerro mikä oli helppoa, ja kerro mikä oli vaikeaa.
5. Mitä hyötyä eMathStudion opettelusta oli? Entä mitä haittaa?
6. Auttoiko eMathStudio hahmottamaan todistustehtävien kirjoittamista? Jos ei, niin miksi? Jos kyllä, niin miten?
7. Mitä hyötyä voisit ajatella eMathStudiosta olevan oppimisessa opettajuuden näkökulmasta?

Loppukyselyssä osaamistavoitteet laitettiin osaksi alkuperäiseen kyselyyn näkyviin. Kaikki kysymykset olivat avoimia, ja kaikkiin piti vastata.

5.4 Aineiston analyysi

Tutkimus oli kvalitatiivinen eli laadullinen tutkimus, ja tutkimuksen analyysimenetelmänä käytettiin aineistolähtöistä sisällönanalyysiä. Tuomi ja Sarajärvi (2009) kuvasivat aineistölähtöisen analyysin niin, että ensin aineisto pelkistetään, jolloin pyritään löytämään ainoastaan pääasiat aineistosta, joita halutaan tutkia, ja kaikki muu pyritään poistamaan aineistosta. Tämän jälkeen saadut asiat ryhmitellään, ja siihen käytetään apuna tietoa, halutaanko etsiä aineistosta samankaltaisuuksia vai erilaisuuksia. Löydetyt asiat joko luokitellaan, teemoitetaan tai tyypitellään. Viimeisenä tehdään teoreettisten käsitteiden luonti, jolloin alaluokille luodaan yläluokkia ja pääluokkia, ja lopulta saadaan vastaus tutkimustehtävään.

Analyysi tehtiin jokaiselle tutkimuskysymykselle erikseen, ja tutkimuskysymykset olivat:

1. Millä tavoin opiskelijat suoriutuivat todistamistehtävistä, ja millaisia matemaattisia virheitä vastauksissa esiintyi?
2. Miten opiskelijat oppivat eMathStudion käytön?
3. Millaista hyötyä opiskelijat kokevat matematiikan ohjelmistoista olevan matematiikan opetuksessa, ja mikä oli heidän kokemuksensa eMathStudiosta?

Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää opiskelijoiden suoriutumista todistustehtävissä ja niissä esiintyviä virheitä. Tätä varten tutkittiin opiskelijoiden vastauksia eMathStudiolla tehtyihin tehtäviin. Tehtävistä analysoitiin viikkojen 2-6 ratkaisut, sillä ensimmäisellä viikolla tehtävät eivät olleet vielä todistustehtäviä, ja viimeisellä viikolla tehtäviä ei ollut laatinut tutkimuksen tekijä, vaan opiskelijat saivat luoda tehtävänannot itse.

Tehtävien ratkaisuista etsittiin matemaattisia virheitä ja hyvään todistukseen liittyviä tekstipiirteitä. Virhettä etsiessä ei kiinnitetty huomiota tarkastimen toimintaan, vaan ainoastaan tekstiin, kieleen ja matemaattiseen sisältöön. Myöskään opiskelijan saamat pisteet tehtävän vastauksesta eivät määrittäneet virheitä. Virheitä tarkastellessa vertailtiin opiskelijoiden vastauksia aina yhdessä tehtävässä, ja pyrittiin löytämään tehtävän ratkaisun edellyttämät vaatimukset. Jos ne täyttyivät, niin ratkaisu tulkittiin oikeaksi. Vähitellen tehtävien vaatimuksia luodessa muokkautui lopullinen virheluokittelu, joka esitellään kappaleessa 6.

Vaatimuksien määrittelyyn käytettiin apuna eMathStudioon tehtyjä esimerkkejä viikolta 2 ja tehtävistä laadittuja esimerkkiratkaisuja. Yleisesti ottaen vaatimukset sisälsivät neljä kohtaa:

- Ratkaisussa piti selkeästi olla esitettynä teoria tai määritelmä millä tehtävä aloitetaan.
- Tarpelliset oletukset, funktiot ja kaavat piti esitellä.
- Jokainen välivaihe piti olla selitettynä.
- Ratkaisusta piti käydä ilmi, miksi tämä opiskelijan vastaus todistaa tehtävän väitteen. Yleensä tämä tarkoitti jonkinlaista loppupäätelmää.

Esimerkiksi tehtävälle 2.1. (ks. esim. 3.3 ja esim. 4.1) vastauksessa piti

- lukea, että kohtisuoruus osoitetaan sillä, että todetaan suorien kulmakertoimien tulon olevan -1
- käydä ilmi, että kulmakertoimia merkitään kirjaimilla k_1 ja k_2
- kertoa, että etsitään kulmakerrointa k_2
- laskea kulmakerroin k_2
- päätellä, että saadaan kulmakertoimeksi $k_2 = 4$
- laskea, että $k_1 \cdot k_2 = -1$, ja loppupäätelmänä todeta, että suorat ovat siten ortogonaalisia.

Kun vaatimukset oli selvillä kaikille tehtäville, ja siten virheluokittelu selvillä, käytettiin virheiden kirjoittamiseen Excel-taulukkoa, johon kirjattiin jokaisen opiskelijan tekemät virheet jokaisessa tehtävän vastauksessa. Jos vastauksesta ei löytynyt mitään virheitä, tulkittiin se täysin oikeaksi vastaukseksi. Lisäksi otettiin ylös tehtävät, joita opiskelijat eivät olleet tehneet.

Toisessa tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää, miten opiskelijat oppivat käyttämään eMathStudiota. Tätä varten tarkasteltiin opiskelijoiden kaikkia eMathStudiossa tehtyjä tehtäviä ja näiden oheen liitettyjen b)-kohdan kysymysten vastauksia. Tehtävien ratkaisuista etsittiin kahta eri asiaa. Ensimmäinen asia oli tutkia niin sanottujen rakenteisten päättelyketjujen osien käyttöä. Tämä tapahtui myös Excel-taulukolla, johon kirjoitettiin jokaisen ratkaisun kohdalta, mitä osia kyseinen opiskelija oli käyttänyt. Osat merkittiin eri väreillä, jotta ne oli helpompi huomata taulukosta. Toiseksi tutkittiin vastauksia, joissa tarkastin näytti joko punaista huutomerkkiä tai punaista rastia eli päättelyketjussa oli jokin väärin eMathStudion näkökulmasta. Jotta edellä mainittu ei sekottuisi ensimmäisen tutkimuskysymyksien virheiden kanssa, käytettiin näissä tilanteissa termiä *virheellinen päättelyaskel*.

Jokaisesta vastauksesta selvitettiin eMathStudiota käyttämällä syyt sille, miksi tarkastin ei hyväksynyt kaikkia päättelyaskelia. Tämän jälkeen Exceliin tehtiin taulukko kaikista vastauksista. Taulukkoon kirjattiin ensin, esiintyikö vastauksessa punainen huutomerkki, punainen rasti vai molemmat. Lisäksi taulukkoon kirjattiin vastauksista, mikä virheellinen päättelyaskel niissä esiintyi. Tutkimuskysymyksen analysointiin otettiin myös huomioon tehtävien b)-kohtien kysymyksien vastauksista ne kommentit, jotka liittyivät jollain tavalla osien käyttöön tai tarkastimen virhettä ilmaisevaan merkintään (punainen huutomerkki tai rasti). Kommentteja käytettiin esimerkkeinä vahvistamaan osien käytön valintaa tai tarkastimen merkintöjä. Tällä tavalla pyrittiin esimerkiksi löytämään syitä sille, miten opiskelija oli valinnut tiettyjen osien käytön tai miksi opiskelija arveli tarkastimen ilmoittavan virheellisestä päättelyaskeleesta. Kaikki opiskelijoiden vastaukset luettiin kertalleen, ja niistä poimittiin ne kommentit, jotka olivat eniten merkityksellisiä joko osien valinnan suhteen tai tarkastimen käytön suhteen.

Kolmannessa tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää, millaista hyötyä opiskelijat kokivat matematiikan ohjelmistoista olevan matematiikan opetuksessa ja millainen kokemus opiskelijoille jäi eMathStudiosta. Tuloksia tarkasteltiin alkukyselyn ja loppukyselyn perusteella. Molempien kyselyjen vastaukset siirrettiin Moodlesta Exceliin, ja vastauksista etsittiin samankaltaisuuksia.

Alkukyselyyn vastasivat kaikki 11 opiskelijaa. Alkukyselyssä samankaltaisuudet esiintyivät usein verbeinä tai subtantiiveina, esimerkiksi havainnollistaa, visualisoida tai tarkastaa. Samankaltaisuuden vähimmäismääränä pidettiin sitä, että ainakin kaksi opiskelijaa kommentoi asiasta, mutta useimmat samankaltaisuudet esiintyivät useammalla opiskelijalla. Muut asiat jätettiin analysoinnista kokonaan pois. Samankaltaisuuksista luokiteltiin neljä eri teemaa, jotka esitetään seuraavassa luvussa 6.

Loppukyselyyn vastasi 9 opiskelijaa, ja siitä tarkasteltiin kaikkia vastauksia. Lukemisen helpottamiseksi vastauksista etsittiin ensin positiiviset ja negatiiviset asiat, ja nämä merkattiin värikoodein. Tämän jälkeen värikoodein etsittiin vielä vastauksista toistuvia sanoja. Loppukyselyssä useimmat toistuvat asiat esiintyivät substantiiveina, esimerkiksi tarkastin, aika tai rakenne. Tässäkin samankaltaisuuden vähimmäismääränä pidettiin kahta opiskelijaa, mutta useimmissa teemoissa useampi opiskelija mainitsi asiasta. Lopulta vastauksista luokiteltiin kuusi eri teemaa, jotka esitetään myös luvussa 6.

6. TULOKSET JA NIIDEN TARKASTELU

Tässä luvussa tarkastellaan tutkimuksen tuloksia ja pyritään vastaamaan tutkimuskysymyksiin. Ensimmäistä ja toista kysymystä varten analysoitiin opiskelijoiden vastaukset eMathStudiolla tehtyihin todistustehtäviin ja niiden oheen liittyvien b)-kohdan kyselyjen vastaukset. Kolmatta tutkimuskysymystä varten analysoitiin opiskelijoiden vastaukset alkukyselyyn ja loppukyselyyn. Tuloksiin käytettiin aineistolähtöistä sisällönanalyysiä, joka kuvattiin luvussa 5.4.

6.1 Opiskelijoiden suoriutuminen todistamistehtävissä

Ensimmäistä tutkimuskysymystä varten analysoitiin opiskelijoiden vastauksia tehtäviin. Tarkasteluun otettiin mukaan ne viikkojen 2-6 todistustehtävät, jotka tehtiin eMathStudiossa. Opiskelijoiden vastauksista etsittiin matemaattisia virheitä, tarkasteltiin vastauksen luettavuutta ja tarkasteltiin sitä, onko vastaus kokonaisuutena hyvä todistus tehtävässä esitetylle väitteelle. Näitä tehtäviä oli opintojakson toteutuksella yhteensä 10. Toisen viikon tehtävät olivat lukioon liittyviä, ja sillä viikolla pääpaino oli enemmän eMathStudion opettelun puolella kuin kurssin matemaattisella puolella. Opiskelijoiden vastauksia viikkojen 2-6 tehtäviin tuli yhteensä 82 kappaletta, joista yksi jätettiin pois, sillä opiskelija oli vain aloittanut tehtävään vastaamisen eikä ollut tehnyt sitä kokonaan. Siten tuloksiin analysoitiin vastauksia 81 kappaletta.

Tulosten tarkastelu aloitettiin etsimällä ja luokittelemalla tehdyt virheet. Pääluokittelu jakautui kielentämiseen liittyviin piirteisiin ja matemaattisiin virheisiin. Kielentämiseen liittyvistä piirteistä muodostettiin kolme luokkaa. Ensimmäinen niistä liittyi määritelmiin, toinen välivaiheiden kielentämiseen ja kolmas johtopäätöksen kirjoittamiseen. Matemaattiset virheet jakautuivat kahtia laskuvirheisiin ja muihin virheisiin. Enempää luokkia näille ei tarvittu, sillä matemaattisia virheitä oli määrällisesti vähän. Matemaattisen osaamisen kannalta on tärkeää kertoa, mitä käytetyt muuttujat, funktiot ja muut merkinnät kuvastavat. Tästä syntyi vielä yksi luokka. Toiseksi viimeinen luokka otettiin vielä niille virheille, jotka eivät sopineet muihin luokkiin. Viimeinen luokka kuvastaa niitä opiskelijoiden vastauksia, joissa opiskelija ei ole osannut todistaa annettua väitettä.

Virheluokiksi tulivat siten seuraavat:

- T1: määritelmää tai muuta teoriaa ei esitetä vastauksen tueksi tai esitetyssä määritelmässä on virheitä
- T2: ei kerrota selkeästi, mitä tehdään seuraavaksi tai todistuksessa eri asioiden järjestys on väärä
- T3: loppupäätelmää tai johtopäätöstä ei esitetä
- K4: käytettyjä muuttujia tai funktioita ei määritetä tai ei selitetä, mitä ne esittävät
- M5: matemaattinen laskuvirhe
- M6: muu matemaattinen puute
- L7: jokin muu virhe
- V8: tehtävän vastaus väärin eli se ei pienillä korjauksilla todista annettua väitettä.

Virheet T1-T3 kuvastivat kielentämiseen eli tekstiin ja vastauksen luettavuuteen liittyviä virheitä. Niistä T1 kuvasti määritelmiin liittyviä virheitä. T2 esiintyi usein sellaisissa todistuksissa, mitkä olivat monivaiheisia. Niissä opiskelija ei selittänyt tekstillä välivaiheita eli ei kielentänyt niitä. Lisäksi tähän otettiin mukaan myös tilanteet, joissa vastauksessa esitettiin asioita väärässä järjestyksessä. T3 kuvasti niitä vastauksia, joissa ei kirjoitettu loppupäätelmää todistettavalle asialle. K4 kuvasti sitä, että opiskelija käytti vastauksissaan esimerkiksi muuttujaa tai funktiota, mutta ei kertonut, mitä kyseinen muuttuja tai funktio esitti. Virheet M5 ja M6 kuvastivat matematiikan kieleen liittyviä virheitä. M5 kuvasti pieniä laskuvirheitä ja M6 joitain muuta puutetta matematiikan kielessä. L7 kuvasti muita virheitä, joita oli vaikea sijoittaa muihin virheluokkiin. Suurimmassa osassa vastauksia laskennallinen osa oli tehty oikein, mutta näin ei ollut kaikissa. Virheluokkia T1-L7 käytettiin kuvastamaan sellaisia vastauksia, jossa tietyn yksittäisen asian korjaamalla, vastaus saatiin oikeaan muotoon. Virhe V8 kuvasti lisäksi sellaisia vastauksia, joissa esimerkiksi vastausidean virheellisyyden takia, vastausta ei olisi saatu oikeaksi pienillä muutoksilla.

Tarkastellaan ensin virheitä parilla esimerkillä opiskelijoiden vastauksista. Ensimmäisessä esimerkissä on enemmän tekstiin ja todistuskäytänteisiin liittyviä ongelmia, toinen taas on tekstiltään onnistunut, mutta sinne on päätynyt matemaattisia virheitä. Ensimmäinen esimerkki on erään opiskelijan vastaus tehtävään 4.2, joka on esitetty kuvassa 6.1. Kuvassa on lisäksi alussa tehtävänanto. Tästä vastauksesta kirjattiin viisi eri virhettä, T1, T2, T3, K4 ja L7. Tehtävä on esitetty luvussa 3.3 esimerkkinä 3.5. Opiskelija on kirjoittanut vastauksensa alkuun, että "...etsitään yhdistetty yhtälö origon kautta.", mutta hän ei määrittele miten tämä yhdistetty yhtälö ratkaistaan, joten hän tekee virheen T1. Hän ei myöskään laske tätä yhdistettyä yhtälöä, vaan kertoo suoraan laskun vastauksen. Tällainen virhe on sijoitettu virheluokkaan L7. Hän on myös kirjoittanut, että "lasketaan binäärinen neliö päinvastaisesti, jotta saadaan haluttu yhtälö". Termi "päinvastaisesti" ei kerro lukijalle mitä ollaan tekemässä, joten virhe on T2. Opiskelija ei ole kirjoittanut johtopäätöstä, joten hän tekee myös virheen T3. Virheen K4 opiskelija on tehnyt, kun ei ole ilmoittanut kirjaimille a, b ja h niitä arvoja, jotka sijoitetaan laskuun. Opiskelija on tehnyt viimeisen laskun yhdellä oikein tehdyllä välivaiheella, ja vastaus on myös oikein, joten varsinaisesti opiskelijan ratkaisu ei ole väärin.

Osoita, että suorien $y = \lambda x$ ja $y = \mu x$ kulman puolittajien yhdistetty yhtälö on
$(\lambda + \mu)x^2 + 2(\lambda\mu - 1)xy - (\lambda + \mu)y^2 = 0$.

Aluksi etsitään yhdistetty yhtälö origon kautta. Saadaan $\lambda\mu x^2 - (\lambda + \mu)xy + y^2$ ja sitten lasketaan binäärinen neliö päinvastaisesti, jotta saadaan haluttu yhtälö.

Lasku • $\frac{(\lambda+\mu)}{2}x^2 - (1 - \lambda\mu)xy + \frac{(\lambda+\mu)}{2}y^2 = 0$

$=$ { }

$(\lambda + \mu)x^2 + 2(\lambda\mu - 1)xy + (\lambda + \mu)y^2 = 0$

□

Kuva 6.1. *Kuvassa tehtävän 4.2 tehtävänanto ja erään opiskelijan vastaus siihen*

Toinen esimerkki on osa erään opiskelijan vastauksesta tehtävään 3.3. Kuvassa 6.2 on alussa tehtävänanto eli tehtävässä on tarkoitus todistaa annettujen pisteiden kuuluvan samalle ympyrälle. Kuvassa on sen jälkeen opiskelijan vastauksesta alku ja loppu. Siitä on jätetty välistä pois kolmen muun pisteen tarkastaminen. Viimeisen pisteen tarkastaminen on laitettu siihen, siinä esiintyvän virheellisen päättelyaskeleen takia. Vaikka vastauksessa ei esitetäkään kaavaa säteen laskemiselle, niin on oletettu, että kyseinen asia on opiskelijoille sen verran tuttu, ettei sitä tarvitse esittää. Vastaus kokonaisuudessaan on siis oikein tekstiin liittyvien virheiden kannalta, mutta tarkastimen käyttö antaa vihjeitä siitä, mikä vastauksessa on matemaattisesti väärin. Ensimmäinen laskuosa on luvuiltaan oikein, mutta välimerkkeinä ei kuuluisi käyttää ekvivalenssinuolia $\iff$ vaan välimerkkeinä pitäisi olla yhtäsuuruusmerkit $=$. Ympyrän yhtälö on kahden muuttujan funktio, joten se pitäisi määritellä niin, että määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eli kokonaisuudessaan $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lisäksi opiskelijalle on sattunut pieni laskuvirhe viimeiseen laskuosaan. Vastauksesta kirjattiin virheet M5 ja M6.

Pisteiden joukko on konsyklinen kun on olemassa ympyrä, joka kulkee jokaisen joukossa olevan pisteen kautta. Osoita, että pisteiden $(-3{,}11)$, $(5{,}9)$, $(8{,}0)$ ja $(6{,}8)$ joukko on konsyklinen ja, että ne sijaitsevat ympyrällä, jonka keskipiste on $(-1{,}2)$.

Tehtävän annossa kerrotaan, että pisteiden joukko on konsyklinen, jos ympyrä kulkee jokaisen joukon pisteen kautta. Muodostetaan siis ympyrän yhtälö ja osoitetaan, että jokainen piste toteuttaa ympyrän yhtälön (ts. kuuluu nollajoukkoon). Ympyrän yhtälö voidaan muodostaa, kun tiedetään keskipiste ja säde. Säde voidaan ratkaista keskipisteen ja jonkin joukon pisteen välisenä etäisyytenä.

Lasku • $\sqrt{(-3-(-1))^2+(11-2)^2}$ (Lasketaan säde r)

$\Leftrightarrow$ { }

$\sqrt{(-2)^2+(9)^2}$

$\Leftrightarrow$ { }

$\sqrt{4+81}$

$\Leftrightarrow$ { }

$\sqrt{85}$

$\square$

Määritelmä $f{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

{ Ympyrän yhtälö }

$f(x{,}y)=(x+1)^2+(y-2)^2-85$

Lasku • $f(6{,}8)$

$=$ { Tarkistetaan, kuuluuko piste (6,8) ympyrän nollajoukkoon }

$(6+1)^2+(8-2)^2-85$

$=$ { }

$(7)^2+(6)^2-85$

$=$ { } !

$49-36-85$

$=$ { } !

0

$\square$

Päättelyä ei pystytty todistamaan oikeaksi.

Nyt on osoitettu, että jokainen piste kuuluu ympyrän nollajoukkoon. Näin ollen pistejoukko on konsyklinen.

Kuva 6.2. *Kuvassa tehtävän 3.3 tehtävänanto ja osa erään opiskelijan vastauksesta siihen*

Taulukossa 6.1 on esitetty kaikkien opiskelijoiden yhteensä tekemät virheiden kappalemäärät kaikissa todistustehtävissä viikoilta 2-6. Ylärivillä on kuvattu eri virhekoodit, jotka olivat: T1: määritelmissä puutteita, T2: väliteksteissä puutteita, T3: johtopäätöksessä puutteita, K4: matemaattisia merkintöjä ei selitetä, M5: laskuvirhe, M6: muu matemaattinen virhe, L7: muu virhe ja V8: vastaus ei todista annettua väitettä. Taulukossa on lisäksi täysin oikein menneiden tehtävien vastauksien yhteismäärä, kuinka monta tehtävää opiskelijat tekivät yhteensä ja virheiden kokonaismäärä. Taulukon viimeinen sarake kuvaa virheiden määrää verrattuna tehtyjen tehtävien määrään. Taulukossa ei esitetä tuloksia opiskelijoittain erikseen, mutta jokaiselta opiskelijalta laskettiin myös heidän virheet ja virheiden määrä verrattuna kokonaismäärään. Esimerkiksi yksi opiskelija teki kahdeksan tehtävää, ja hänellä oli yhteensä seitsemän virhettä. Keskimäärin hänellä oli silloin $\frac{7}{8} = 0,875$ virhettä per tehtävä. Suurin osa tekstiin liittyvistä virheistä esiintyi toisen viikon tehtävien vastauksissa, kun opiskelijat vielä opettelivat eMathStudion käyttöä, ja tehtävät olivat lukion materiaalista. Tämän takia viimeiselle riville on laitettu virheet myös niin, että niihin ei ole huomioitu 2. viikon tehtävien vastauksissa esiintyviä virheitä.

	T1	T2	T3	K4	M5	M6	L7	V8	Oikein	Tehtyjen tehtävien lkm	Virheitä yhteensä	Virheitä per teht
yht.	30	29	23	19	3	6	2	7	23	81	119	1,47
yht. ilman vko 2	19	17	8	12	3	2	1	7	17	49	69	1,41

Taulukko 6.1. *Opiskelijoiden tekemät matemaattiset virheet tehtävien vastauksissa.*

Taulukosta 6.1 nähdään, että virheitä esiintyi yhteensä 119 kappaletta, ja suurin osa niistä todistustehtävien tekstiin liittyvissä asioissa. Eniten virheitä oli siinä, että opiskelijat eivät esittäneet vastauksissaan määritelmiä tai ne olivat virheellisiä. Lukumäärä on silti suurin, vaikka tarkasteltaisiinkin pelkästään viikkojen 3-6 tehtävien vastauksia. Toiseksi eniten esiintyi sitä, että opiskelijat eivät kielentäneet välivaiheitaan eli eivät esimerkiksi kertoneet, mitä laskevat seuraavaksi. Opiskelijoilta laskettiin myös heidän henkilökohtaiset virhemäärät. Kaikilta opiskelijoilta löytyi virheitä vastauksista. Osalla opiskelijoita ei ollut yhtään täysin oikeaa vastausta, ja heillä esiintyi eniten ongelmia vaadittujen tekstiosuuksien kirjoittamisessa. Opiskelija, joka teki vähiten virheitä tehtävissä, oli myös tehnyt tehtäviä vähiten.

Taulukon mukaan opiskelijat onnistuivat hyvin todistustehtävien laskuosuuksissa, sillä opiskelijoilla esiintyi matemaattisia virheitä ainoastaan yhdeksässä vastauksessa. Muutamalla opiskelijalla oli kolme tai neljä täysin oikeaa vastausta. Virhe V8 tarkoitti sitä, että vastauksen laskuosuus oli väärä, ja tällöin tehtävä voitiin tulkita väärin tehdyksi. Tällaisia vastauksia oli ainoastaan seitsemän kappaletta. Kaikki muut vastaukset olivat siis laskennallisesti täysin oikeita, ja ne todistivat annetun väitteen. Ainoastaan todistuksen esitystavassa saattoi olla puutteita. Keskimäärin opiskelijat tekivät virheitä 1,47 per tehtävä, ja ilman toisen viikon tehtäviä, virheitä tehtiin 1,41 per tehtävä. Suurin osa opiskelijoista teki virheitä tehtävissä keskimäärtä vähemmän, muutama selvästi enemmän.

Tämän tutkimuksen opiskelijoilla ei esiintynyt samanlaisia virheitä kuin luvussa 2 esitetyn todistamiseen liittyvän teorian mukaan. Stavrou (2014) kertoi, että yksi tyypillisimmistä virheistä oli, että opiskelija todistaa tehtävän vain esimerkkejä käyttäen. Tässä tutkimuksessa opiskelijat eivät yrittäneet todistaa väitteitä pelkillä esimerkeillä. Toisaalta Moore (1994), Stavrou (2014) sekä Clement (2019) kokivat, että opiskelijat käyttävät todistuksissa määritelmiä väärin tai eivät ollenkaan. Tässä tutkimuksessa opiskelijat osasivat käyttää määritelmiä, mutta eivät aina kirjoittaneet niitä näkyviin. Stavrou mainitsi myös eräaksi virheeksi sen, että opiskelija saattaa käyttää johtopäätöstä todistuksessa oletuksena. Tätäkään ei ollut havaittavissa tässä tutkimuksessa. Yksi yhteinen tekijä tämän tutkimuksen ja teorian väliltä kuitenkin löytyi, sillä Clement (2019) totesi, että opiskelijoilla oli ollut ongelmia siinä, että he eivät määritelleet merkintöjä tai käsitteitä todistuksissaan. Tässä tutkimuksessa se oli havaittavissa siinä, että opiskelijat käyttivät tehtäviin liittyviä käsitteitä oikein, mutta kaikki eivät määritelleet niitä. Virhettä K4 esiintyi suhteellisen monessa vastauksessa, mutta siitä huolimatta virheiden määrä kokonaisuudessaan jäi pieneksi.

Tulosten mukaan opiskelijat suoriutuivat todistamistehtävistä kielentämisen näkökulmasta huonommin kuin matemaattisten virheiden osalta, mutta siihen saattoi olla monia eri syitä. Luvussa 2.2 esitetyn teorian mukaan todistuksessa on olennaista löytää oletukset ja väite sekä kirjoittaa johtopäätös. Tämän tutkimuksen opiskelijat eivät aina kirjoittaneet johtopäätöstä selkeästi näkyviin. Joutsenlahti (2010) totesi tutkimuksensa perusteella, että opiskelijat kokevat kielentämisen hyvänä asiana, mutta se vie heidän mielestään myös aikaa. Ajan puute saattoi olla myös tämän tutkimuksen opiskelijoille yksi syy, miksi he eivät kielentäneet esimerkiksi määritelmiä tai johtopäätöksia vastauksiinsa. Ajankäyttö ilmenee myöhemmin kolmannen tutkimuskysymyksen tuloksissa, jossa opiskelijat kertovat kokemuksensa tarkastimen hitaudesta. Se, vähensikö eMathStudio kielentämisen määrää, on vaikea sanoa. Jos opiskelijat kokivat tarkastimen hitauden turhauttavana, on se voinut viedä heiltä motivaatiota kielentää vastauksiaan kunnolla.

Toinen selitys sille, miksi opiskelijat eivät kirjoittaneet tekstiosuuksia hyvin, voi olla, että he kokivat laskuosuuden kirjoittamisen olevan vastauksessa tärkeintä, koska vain siihen osuuteen käytettiin eMathChecker-tarkastinta. Opiskelijat saattoivat myös tehdä tehtävän vastauksen paperille ja kopioida sen eMathStudioon. Suurin osa tekstiin liittyvistä virheistä esiintyi tehtävissä 2.1-2.3. Tuolla viikolla käsiteltiin lukioon liittyviä todistustehtäviä, ja ne olivat suhteellisen helppoja opiskelijoille. Lisäksi silloin keskityttiin vielä eMathStudion käyttöön ja käytiin esimerkkejä läpi, ennen kuin opiskelijat aloittivat tehtävien tekemisen. Opiskelijat saattoivat siis ajatella, että nyt harjoitellaan (vain) eMathStudion käyttöä, ja tällöin formaalin ja hyvän todistuksen kirjoittaminen ei olisi välttämätöntä. Taulukon 6.1 mukaan virheitä per tehtävä ilman toisen viikon tehtäviä oli 1,41, joka on hieman pienempi kuin 1,47 kun toisen viikon tehtävät oli mukana. Tämä tulos vahvistaa sitä ajatusta, että opiskelijat eivät panostaneet todistustehtävien esitystapaan vielä toisella viikolla, ja siten tekstiin liittyviä virheitä esiintyi paljon.

Tulosten perusteella opiskelijat suoriutuivat todistustehtävistä matemaattisesti hyvin. Teoriaan nojaten opiskelijoilla ei esiintynyt merkittäviä virheitä tehtävien vastauksissa. He olivat pääasiassa saaneet tehtyä tehtävät oikein ja virheitä esiintyi vain yksittäisiä. Kielentämisessä opiskelijoilla oli puutteita, mutta se saattoi jäädä monista eri syistä tekemättä. Jos sitä olisi opiskelijoille painotettu enemmän, olisivat tulokset voineet olla erilaiset.

6.2 eMathStudion käyttö

Toiseen tutkimuskysymykseen tarkasteltiin opiskelijoiden ratkaisuja kaikista eMathStudiolla tehdyistä tehtävistä ja pyrittiin löytämään vastaus siihen, miten opiskelijat oppivat eMathStudion käytön. Vastauksista tarkastettiin ensimmäisenä, mitä osia (Lasku-, Esittely-, Oletus- jne.) opiskelija käytti niissä. Lisäksi heidän vastauksiaan tehtävien b)-kohdissa esitettyihin kysymyksiin käytettiin esimerkkeinä, jos niissä oli ajatuksia liittyen eri osien käyttöön. Toisena asiana tutkittiin niitä opiskelijoiden vastauksia, joissa tarkastin näytti punaista huutomerkkiä tai rastia. Näistä tehtävien vastauksista tulkittiin, oliko virhe matemaattinen vai eMathStudion syntaksiin liittyvä ongelma. Lisäksi opiskelijoiden vastauksiaan tehtävien b)-kohtien esitettyihin kysymyksiin käytettiin esimerkkeinä, jos niissä opiskelija ilmaisi ajatustaan tarkastimen käytöstä virheelliseen päättelyaskeleeseen.

Osien käyttöön katsotaan ensin esimerkkinä erään opiskelijan vastausta tehtävään 2.3, joka on esitetty kuvassa 6.3. Tehtävässä todistetaan arvo $x_0 = -\frac{b}{2a}$ paraabelin huipun x-koordinaatiksi. Opiskelijan vastaus on muutenkin mielenkiintoinen, sillä kaikki muut opiskelijat todistivat väitteen derivaattaa hyödyntäen, mutta tässä opiskelija on hyödyntänyt toisen asteen yhtälön nollakohtia ja niiden keskipistettä. Opiskelijalla on vastauksessaan matemaattisesti kaksi puutetta. Hän ei kerro tarkalleen, että aikoo laskea huippupisteen nollakohtien keskipisteestä. Lisäksi tarkastin on huomannut vastauksessa olevan matemaattisen virheen, koska opiskelija ei ole kirjannut oletusta siitä, että neliöjuuren sisällä olevan lausekkeen kuuluu olla suurempaa kuin nolla. Näillä muutoksilla tehtävän vastaus olisi ollut täysin oikein.

Pienistä matemaattisista puutteista huolimatta, vastaus toimii hyvänä esimerkkinä eri osien käytöstä. Opiskelija on käyttänyt siinä hyvin Esittely-, Oletus- ja Määritelmä-osaa sekä Lasku- ja Tehtävä-osaa. Oletus on hyvä esimerkki siitä, että opiskelija on ymmärtänyt, että nollalla ei saa jakaa jakolaskussa. Lisäksi tieto, että huipun koordinaatti on nollakohtien puolivälissä, on lisätty myös hyvin toiseksi oletukseksi. Tehtävä-osa näyttää myös, miten sitä voidaan käyttää "Todista”-tekstillä, ja sininen alaspäin oleva nuoli kertoo siitä, että kyseessä on alilasku. Nuolesta klikkaamalla saataisiin koko alilasku pois näkyvistä. Vastauksessa on myös hienoa, että opiskelija on osannut käyttää totuusarvoa T, vaikka tässä tehtävässä sitä ei olisi tarvinnut. Tehtävässä olisi myös voitu vain laskea loppupäätelmäksi $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Teht 2.3: Todista, että ylöspäin tai alaspäin aukeavan paraabelin huippupisteen x-koordinaatti on $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Todistus:

Olkoon paraabelin yhtälö $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ratkaistaan nyt paraabelin huippupisteen x-koordinaatti nollakohtien avulla.

Esittely		Olkoot $x,a,b,c \in \mathbb{R}$
Oletus		$a \neq 0$
Määritelmä		Määritellään $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
		{ Paraabelin yhtälö }
		ehdolla $f(x) = ax^2 + bx + c$
Lasku	•	$f(x) = 0$
	$\Leftrightarrow$	{ } ✓
		$ax^2 + bx + c = 0$
	$\Leftrightarrow$	{ Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava } !
		$x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \vee x = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$
	□	

Esittely — Olkoot $x_0 \in \mathbb{R}$ paraabelin huipun x-koordinaatti.

Oletus — Oletetaan, että
$$x_0 = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}{2}$$

Tehtävä • Todista $x_0 = -\frac{b}{2a}$

$\Vdash$ { }

• $$\frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ { Yhdistetään vasemman puolen osoittaja yhdeksi murtolausekkeeksi }
$$\frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ { Poistetaan vastakkaismerkkiset juurilausekkeet }
$$\frac{\frac{-b-b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ { Sievennetään }
$$\frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ { Sievennetään }
$$\frac{-2b}{4a} = -\frac{b}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ { Sievennetään }
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ { Yhtälön molemmat puolet ovat samat, joten totuusarvo on tosi }

T

$\square$

Vastaus $\square$

Päättelyä ei pystytty todistamaan oikeaksi.

Siis paraabelin $f(x) = ax^2 + bx + c$ huippupisteen x-koordinaatti on $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Kuva 6.3. *Kuvassa tehtävän 2.3 tehtävänanto ja erään opiskelijan vastaus siihen*

Taulukossa 6.2 on esitetty kaikkien opiskelijoiden käyttämien osien kappalemäärät kaikissa tehtävien vastauksissa. Osat (Lasku, Esittely, Oletus, Määritelmä, Päätelmä, Tehtävä) on nimetty yläriville. Alarivillä kerrotaan osien käyttö yhteensä kaikkien viikkojen osalta ja erikseen viikoilta 3-7 eli ilman viikkoja 1-2. Tämä sen takia, että viikoilla 1-2 vielä opeteltiin eMathStudion käyttöä, ja opiskelijat pystyivät kopioimaan suoraan esimerkeistä käyttämänsä osat. Joidenkin osien käyttö näkyy selvästi kahden ensimmäisen viikon tehtävien vastauksissa. Esimerkiksi lähes kaikki käyttivät Tehtävä-osaa tehtävässä 2.1, mutta eivät juuri muissa.

	Lasku	Esittely	Oletus	Määritelmä	Päätelmä	Tehtävä	Tehtyjen tehtävien lkm
O1	11	-	-	-	-	-	12
O2	7	4	4	5	2	1	9
O3	10	3	4	2	-	1	10
O4	5	6	4	4	4	1	9
O5	10	3	7	1	4	4	13
O6	10	6	7	8	3	1	13
O7	10	5	6	7	2	1	12
O8	7	6	5	5	2	2	9
O9	11	3	3	-	-	2	11
O10	4	3	3	2	2	1	6
O11	11	8	7	5	2	3	13
yht.	96	47	50	39	21	17	117
yht. ilman vko 1-2	50	22	19	17	5	5	53

Taulukko 6.2. *Opiskelijoiden käyttämien eMathStudion osien kappalemäärät*

Taulukosta nähdään, että Lasku-osa oli selkeästi käytetyin. Se esiintyi 96 eri vastauksessa kaikkien viikkojen osalta ja viikkojen 3-7 osalta 50 vastauksessa. Viikkojen 3-7 osalta ainoastaan kolmessa vastauksessa ei esiintynyt kyseistä osaa. Opiskelijat käyttivät kaikki Lasku-osaa yli puolessa vastauksistaan, ja sitä käytettiin tasaisesti jokaisella viikolla. Seuraavaksi eniten käytettiin Esittelyä ja Oletusta, ja niitäkin kaikilla viikoilla. Näitä esiintyi n. 40 % kaikista tehtävien vastauksista. Vähiten käytettiin Päätelmä- ja Tehtävä-osaa.

Opiskelijat käyttivät eMathStudion osia eri tavoilla. Kaikki opiskelijat käyttivät Lasku-osaa tehtäviensä vastauksissa. Esittely, Oletus- ja Määritelmä-osien käyttömäärät vaihtelivat, mutta suurin osa käytti niitä kahden ensimmäisen viikon jälkeenkin. Lähes jokainen käytti myös vähintään yhdessä vastauksessa Päätelmä- ja Tehtävä-osaa. Neljä opiskelijaa käytti Päätelmä- tai Tehtävä-osaa useammassa kuin kahdessa vastauksessa. Yksi opiskelijoista ei käyttänyt muita osia kuin Lasku-osaa opintojakso toteutuksella annetuista esimerkeistä huolimatta. Eräs toinen opiskelija ei käyttänyt ollenkaan Määritelmä- tai

Päätelmä-osaa. Muut opiskelijat käyttivät vähintään kerran kaikkia osia.

Päätelmä- ja Tehtävä-osien vähyys näkyy myös kun tarkastelee niitä tehtäväkohtaisesti. Kaikki osat esiteltiin opiskelijoille esimerkkien avulla kahden ensimmäisen viikon aikana, ja opiskelijat tekivät näiden kahden viikon tehtävät esimerkkejä seuraten. Päätelmä-osaa käytettiin tehtävissä 1.3 ja 2.2 (tehtävän 1.3 esimerkkiratkaisu on nähtävissä liitteessä C.1) ja Tehtävä-osaa tehtävässä 2.1. Suurin osa opiskelijoista seurasi näitä esimerkkejä tehdessään kahden ensimmäisen viikon tehtävät, ja siten suurin osa Päätelmä- ja Tehtävä-osien lukumääristä kohdistuikin näille kahdelle ensimmäiselle viikolle. Jos tarkastellaan viikkojen 3-7 vastauksia, niin ainoastaan viidessä noiden viikkojen tehtävien vastauksissa esiintyi Päätelmä- tai Tehtävä-osa. Voidaan siis päätellä, että opiskelijat käyttivät Päätelmä- ja Tehtävä-osaa oma-aloitteisesti tosi vähän. Muiden osien käyttö jakaantui paremmin myös viikkojen 3-7 tehtävien vastauksiin.

Opiskelijat kommentoivat tehtävien b)-kohtien vastauksissaan osien käyttöä eri tavoin. Seuraavissa kommenteissa on suluissa tehtävän numero, johon kommentti on liittynyt. Ensimmäinen numero kertoo, minkä viikon tehtävästä on kyse, ja jälkimmäinen numero, monesko tehtävä se oli kyseisellä viikolla. Osa opiskelijoista kommentoi oppimistaan osien käytön valinnassa esimerkiksi seuraavilla kommenteilla:

> Opin, miten esittely, määritelmä, oletus ja päätelmä elementit toimivat. (1.3, O6)
>
> Opin hyödyntämään saman elementin sisällä useampaa laskuosuutta. (6.3, O6)

Osa opiskelijoista kommentoi osien käytön vaikeutta. Esimerkiksi opiskelijat eivät tienneet, miten jotain osaa kuuluu käyttää tai mitä osia valita käytettäväksi. Joistain kommenteista huomataan, että Päätelmä- ja Tehtävä-osat olivat ainakin joidenkin kommenttien mukaan vaikeita käyttää. Opiskelijat kommentoivat ongelmia esimerkiksi näin:

> Vaikeinta oli päätelmäominaisuuden käyttöönotto, en ensin meinannut ymmärtää miten sitä käytetään [...] (1.3, O8)
>
> Vaikeinta oli ehkä se, että varsinainen todistus tehtiin tehtävä osioon, josta valittiin todistus ja siihenkin lisättiin vielä alilasku. (2.1, O11)
>
> Vaikeinta oli miettiä, että millä elementeillä lähteä liikkeelle. (2.3, O8)
>
> Käyttöliittymään liittyen alan tulla siihen tulokseen, että kannattaa käyttää mahdollisimman usein lasku-osiota muiden "hienompien" osioiden (tehtävä, ratkaise, alilasku,...) sijaan. Tällöin elämä eMathStudion kanssa on suuremalla todennäköisyydellä mukavampaa. (5.3, O11)

Pääasiassa opiskelijat vastasivat tehtäviin niin, että tarkastin näytti vihreää ja hyväksyi käytetyn päättelyketjun jokaisen askeleen. Taulukossa 6.3 on esitetty opiskelijoiden tehtävien vastausten kappalemäärät, joissa tarkastin ilmoitti vähintään yhdestä virheellisestä päättelyaskeleesta. Virheellisten päättelyaskeleiden määrää ei ole laskettu tehtävän vastauksen sisällä, sillä tarkastin saattoi toistaa virhettä monessa eri kohdassa, vaikka mahdollinen korjaus tapahtuisikin vain yhteen kohtaan. Virheelliset askeleet on luokiteltu taulukossa neljällä eri tavalla sarakkeisiin. Ensimmäinen ja toinen sarake kuvastavat sitä, minkä merkin tarkastin ilmoitti (punainen huutomerkki/punainen rasti). Luvussa 4 on tarkemmin kerrottu punaisen huutomerkin ja punaisen rastin erot. Kolmas sarake kuvastaa sitä, oliko vastauksessa jokin virheellinen askel matemaattinen, ja neljäs sarake sitä, oliko vastauksessa vastauksessa jokin virheellinen askel selkeästi eMathStudion käyttöön liittyen.

Taulukosta pitää huomata se, että vastauksessa voi esiintyä nämä kaikki neljä luokkaa, ja automaattisesti punainen huutomerkki ei tarkoittanut sitä, että virhe oli matemaattinen. Osa ongelmista oli selkeästi siinä, että opiskelija ei osannut käyttää eMathStudiota sen tarkoittamalla tavalla. Toisaalta virhe saattoi olla sellainen, että opiskelijan matemaattisessa ajattelussa oli puute. Taulukosta poistettiin yhden opiskelijan antama vastaus, sillä se oli jätetty selkeästi kesken, ja tarkastin ilmoitti tämän takia siinä virheellistä päättelyaskelta. Taulukossa on lisäksi viimeisessä sarakkeessa esitetty vastauksien lukumäärä niistä, joissa esiintyi vähintään yksi virheellinen päättelyaskel. Viimeisessä sarakkeessa on opiskelijan yhteensä tekemien tehtävien lukumäärä ja viimeisellä rivillä virheellisten askeleiden yhteismäärä luokittain.

	Punainen huutomerkki	Punainen rasti	Virhe matemaattinen	Virhe eMathStudion käytössä	Virheellisten tehtävien lkm	Tehtyjen tehtävien lkm
O1	1	-	1	-	1	12
O2	1	-	1	-	1	9
O3	1	-	1	1	1	10
O4	3	-	2	1	3	8
O5	5	3	2	6	6	13
O6	-	1	-	1	1	13
O7	-	-	-	-	0	12
O8	1	-	1	-	1	9
O9	2	-	1	1	2	11
O10	2	3	1	2	3	6
O11	5	5	4	7	7	13
yht.	21	12	15	19	26	116

Taulukko 6.3. *Opiskelijoiden vastauksien kappalemäärät, joissa tarkastin ilmoitti vähintään yhdestä virheellisestä päättelyaskeleesta.*

Taulukosta nähdään, että 116 vastauksesta ainoastaan 26 vastauksessa tarkastin ei hyväksynyt jotain käytettyä päättelyaskelta. Eniten opiskelijoilla (21 vastauksessa) esiintyi punaista huutomerkkiä. Toiseksi eniten (19 vastauksessa) virheellisiä askeleita olivat eMathStudion käyttöön liittyvät ongelmat. Paria opiskelijaa lukuunottamatta useimmilla opiskelijoilla esiintyi vähintään yksi virheellinen päättelyaskel 0-3 eri vastauksessa. Usein opiskelijan tekemä virheellinen päättelyaskel oli yksittäinen joko syntaksiin ja eMathStudion käyttöön liittyvä tai sitten matematiikkaan liittyvä. Harvalla opiskelijalla oli monia eri virheellisiä päättelyaskeleita yhdessä vastauksessa.

Opiskelijoilla esiintyi kahden tehtävän vastauksissa eniten virheellisiä päättelyaskeleita. Nämä tehtävät olivat 2.3 ja 3.1. Tehtävässä 2.3 esiintyi vähintään yksi virheellinen päättelyaskel 6 vastauksessa ja tehtävässä 3.1 5 vastauksessa. Tehtävässä 2.3 esiintyi muutamia eri virheellisiä askeleita opiskelijoilla, mutta jopa neljällä opiskelijalla oli täysin samanlainen virheellinen päättelyaskel. Tehtävästä kirjattiin kaikille neljälle opiskelijalle taulukkoon 6.1 virhe M6. Tehtävä on esitetty liitteessä C.2 ja olennainen osa todistusta oli olettaa, että $a \neq 0$. Neljä opiskelijaa unohti kirjoittaa oletuksen vastauksiinsa, mutta osa tämän kuitenkin muisti tai ymmärsi lisätä. Yhdellä opiskelijalla oli lisäksi jäänyt virheellinen derivaattamerkintä (ks. luku 4.4). Myös tehtävässä 3.1 esiintyi virheellisiä päättelyaskeleita usealla opiskelijalla. Tehtävä on esitetty Analyyttistä geometriaa käsittelevässä luvussa esimerkkinä 3.6 ja asiasta on myös lisätietoja luvussa 4.4. Virheiden esiintyminen liittyi erityisesti siihen, että tarkastin ei pystynyt tutkimuksen aikana onnistuneesti käsittelemään trigonometristen funktioiden yhtälöitä.

Opiskelijat kommentoivat tehtävien b)-kohtien vastauksissaan myös tarkastimen toimintaa. Yleisesti opiskelijoiden kommenteista löytyi tarkastimeen liittyviä kommentteja paljonkin. Näissäkin seuraavissa kommenteissa suluissa lukee, mihin tehtävään kommentti liittyi. Ensimmäinen numero kertoo, minkä viikon tehtävästä oli kyse, ja jälkimmäinen numero, monesko tehtävä se oli kyseisellä viikolla. Opiskelijat kommentoivat tarkastinta yleisesti esimerkiksi näin:

> Tässä tehtävässä eMathStudio oli lähinnä raivostuttava. Huutaa vain punaista vaikka laskut oikein. Hyvin pikkutarkasti tarvitsi miettiä, että onhan kaikki määritelty hyvin. (3.1, O8)
>
> Saada tehtävä menemään läpi tarkistuksessa. Ei lopulta mennyt. (1.3, O10)

Osa opiskelijoista kommentoi tarkemmin kyseiseen tehtävään liittyvää tarkastimen toimintaa. Näissä kommenteissa opiskelijat viittaavat joko suoraan siihen, että eivät olleet osanneet korjata tekemäänsä virheellistä askelta vastauksessaan tai sitten siihen, että löysivät lopulta oikein ratkaisun virheellisen askeleeseensa.

Osalla opiskelijoista kommentit liittyivät esimerkiksi syntaksiin liittyviin virheisiin:

> Mikäli ohjelmisto tunnistaa myös derivaatat, niin niiden tarkistuksesta olisi kovasti hyötyä. Nyt en ehkä itse osannut vain käyttää oikeita merkintöjä, jotta järjestelmä tunnistaisi ne derivaataksi. (1.2, O3)

> Vaikeinta oli tajuta että totuusarvoksi ei voinut vain kirjoittaa T. Vähän aikaa sai miettiä että mitä tarkastin herjaa tehtävässä, kun varmasti ei laskussa ollut mitään vikaa. (2.1, O8)
>
> [...] derivaatan merkitseminen ei vain millän onnistunut vaikka kuinka yksinkertaisesti sen kirjoitti, joten tarkistus oli kierrettävä siltä osin. Lisäksi ratkaisu on oikein ja mielestäni looginen, mutta ohjelmalla on vaikeuksia ymmärtää muuttujan n käyttö vastauksissa. (3.1, O9)
>
> Todennäköisesti syntaksi on jollakin tavalla väärin, kun tarkistaminen kestää kauan, mutta en tiedä miten korjata. Osittain pitää myös myöntää, että en jaksa hirveästi panostaa syntaksiin. (3.2, O11)

Osa opiskelijoista taas huomasi virheen rakenteeseen viittavissa ongelmissa:

> [...] tarkistus herjasi minulle enkä ymmärtänyt aluksi mistä on kyse. Ongelma olikin vain se, että olin ajatuksissani laittanut esittelyn ja oletuksen väärin päin. Muuten ratkaisu olisi ollut oikein. Uutena asiana eMathStudion käyttöön liittyen apua kysyttäessä ymmärsin, että tarkistuksen yhteydessä ilmestyvien punaisten raksien kohdalta saa lisätietoa ongelmasta. (2.1, O11)
>
> [...] kesti hetken aikaa huomata, miksi päättely ei mene läpi (oletus [$a \neq 0$] puuttui). (2.3, O7)

Osalta opiskelijoilta puuttui tehtävästä 2.3 olennainen oletus $a \neq 0$. Eräs opiskelija kommentoi vastaustansa näin:

> [...]opin myös, että eMathstudiolla on suuria vaikeuksia ymmärtää, että $2ax = -b$:stä siirtymä lauseeseen $x = -\frac{b}{2a}$ on looginen. Opin myös, että itselläni on parempaakin tekemistä, kun väitellä tyhmän eMathStudion kanssa itsestään selvästä asiasta. :)

Kommentti kyseisestä tehtävästä osoittaa, että välillä opiskelijat saattoivat syyttää tarkastinta heidän omasta matemaattisesta virheestään. Lisäksi yllä olevista muista kommenteista huomataan, että syntaksi aiheutti monelle ongelmia, esimerkiksi derivaatan ja totuusmerkin T kohdalla. Näistä syntaksivirheistä löytyy lisätietoja luvusta 4.4. Toisaalta myös rakenteen valinta saattoi aiheuttaa opiskelijoille ongelmia tarkastimen käytön suhteen.

Yleisesti tarkasteltuna opiskelijat käyttivät eri osia suhteellisen monipuolisesti. Tämä erottui varsinkin kahden ensimmäisen viikon tehtävissä, joissa opiskelijoilla oli valmiit esimerkit, joista seurata osien käyttöä. Lasku-, Esittely-, Oletus- ja Määrittely-osia käytettiin kuitenkin myös monipuolisesti kahden ensimmäisen viikon jälkeen. Vaikka Päätelmä- ja Tehtävä-osan käytöt jäivätkin vähälle, niin opiskelijan O11 kommentin mukaan voidaan ajatella, että kyseiset osat olivat liian vaikeita opiskelijoille. Syynä voi olla myös opiskelijoiden yleinen kokemus eMathStudion käytöstä, mitä tarkastellaan tarkemmin kolmannessa tutkimuskysymyksessä.

Tarkastimen käytön näkökulmasta opiskelijat löysivät ratkaisuja tehtäviinsä usein niin, että myös tarkastin hyväksyi päättelyketjun. Tehtävien vastauksia oli yhteensä 116 ja näistä vain 26 vastauksessa, tarkastin ei hyväksynyt päättelyketjua. Suurin osa opiskelijoista osasi tehdä lähes kaikki tehtävät niin, että tarkastin ei ilmoittanut virheellisistä päättelyaskeleista. Virheelliset päättelyaskeleet olivat tasaisesti joko punaisia rasteja tai huutomerkkejä sekä matemaattisia tai syntaksisia. Syntaksiin liittyvät ongelmat ovat yleisiä muissakin ohjelmistoissa kuten Panula (2012) ja Patana (2017) totesivat Stack-tehtävistä tai kuten Myllykoski ym. (2018) totesivat MathCheckistä.

Oli kyse sitten syntaksiin tai matematiikaan liittyvästä virheellisestä askeleesta, niin joidenkin opiskelijoiden kohdalla virheellinen päättelyaskel saattoi myös jäädä vastaukseen, koska he eivät halunneet käyttää aikaa virheellisen askeleen etsimiseen. Koska virheitä esiintyi kuitenkin kokonaismäärään nähden vähän, niin tästä näkökulmasta voidaan päätellä, että opiskelijat ymmärsivät miten tarkastinta kuuluu käyttää.

Tarkastimen käyttöön liittyi kuitenkin muutama tekijä, jotka saattoivat vaikuttaa siihen, miksi suurimmassa osassa vastauksia tarkastin hyväksyi päättelyketjun. Joillakin hyväksytty päättelyketju saattoi koostua vain yhdestä lyhyestä laskusta, jolloin virheellisiä askelia saattoi tulla vähän. Tarkastimen käytössä pitää huomioida myös se, että opiskelijat mahdollisesti välttivät jonkun sellaisen asian laskemista, jota he eivät saaneet toimimaan tarkastimella (esim. derivaattojen). Tällöin he laittoivat tarkastimelle ainoastaan sellaisia osia, jotka menivät läpi. Opiskelijoilta ei edellytetty tarkastimen käyttöä jokaiseen tehtävän vastauksen välivaiheesen ja päättelyaskeleeseen, vaan heillä piti olla vähintään jokin osa tehtävän vastauksesta tarkastimella tarkastettu. Tarkastin olikin opiskelijoilla käytössä lähes aina, vain yhden tehtävän yhteydessä yksi opiskelija ei ollut vastauksessaan sitä käyttänyt. Hyvä esimerkki tarkastimen lyhyestä käytöstä on luvussa 6 esitetty yhden opiskelijan vastaus tehtävään 4.2 kuvassa 6.1. Siinä hän on laskenut vain yhden päättelyaskeleen vastauksen loppupuolelta, ja se on oikein.

Suurin osa opiskelijoista käytti eri osia suhteellisen hyvin, ja suurimmalla osalla tarkastin hyväksyi käytetyn päättelyketjun. Osalla osien käyttö ja tarkastimen käyttö oli kuitenkin ollut erilaista verrattuna muihin. Tulosten perusteella voidaan päätellä, että osa opiskelijoista ei oppinut eMathStudion käyttöä kunnolla. Opiskelija, joka käytti vain Lasku-osaa vastauksissaan, ei palauttamiensa ratkaisujen perusteella onnistunut perehtymään muiden osien käyttöön. Se, että hänellä oli vain yksi vastaus, missä tarkastus ei ollut mennyt läpi, johtui todennäköisesti siitä, että Lasku-osan käyttäminen oli suhteellisen helppoa. Tutkittavien joukossa oli toinenkin opiskelija, jolla muiden kuin Lasku-osien käyttö oli palautetuissa vastauksissa suhteellisen vähäistä. Toisaalta tutkimukseen osallistuneissa oli opiskelijoita, jotka olivat tehneet paljon tehtäviä, mutta useassa vastauksesa tarkastin oli havainnut useassa ratkaisussa puutteita. Vaikka kyseiset opiskelijat olivat käyttäneet erilaisia osia monipuolisesti, niin muut opiskelijat osasivat paremmin valita osien käytön niin, että niissä oli käytetty tarkastimen näkökulmasta oikeita päättelyaskelia.

Opiskelijoiden joukossa oli myös sellaisia, jotka ratkaisujensa perusteella oppivat käyttämään eMathStudiota monipuolisesti osien ja tarkastimen käytön näkökulmasta. Tämä voidaan perustella sillä, että he käyttivät Esittely-, Oletus- ja Määritelmä-osia eniten verrattuna muihin opiskelijoihin, mutta lisäksi he tekivät vähiten virheellisiä päättelyaskeleita. Vaikka kyseiset opiskelijat eivät käyttäneetkään eniten Päätelmä- ja Tehtävä-osia, niin voidaan päätellä, että näiden osien käyttäminen ei kertonut tässä tutkimuksessa eMathStudion osaamisesta. Osa opiskelijoista käytti Päätelmä- ja Tehtävä-osia eniten muihin opiskelijoihin verrattuna, mutta niissä vastauksissa esiintyi kuitenkin myös virheellisiä päättelyaskeleita. Toisaalta pitää huomata, että tehtävässä 2.1 käytettiin Tehtävä-osaa ja tehtävässä 2.2 Päätelmä-osaa, mutta kaikki saivat tehtävien vastaukset kuitenkin menemään tarkastuksesta läpi. Opiskelijat osasivat siten käyttää niitä ihan oikein, kun näkivät valmiin samantyyppisen esimerkin, jossa kyseisiä osia oli käytetty.

Vaikka yksittäisten opiskelijoiden kohdalla eMathStudion oppiminen saattoi jäädä vähäiseksi, niin tulosten perusteella voidaan sanoa, että suurin osa oppi käyttämään eMathStudiota. He oppivat käyttämään sekä osia että tarkastinta, joiden voidaan katsoa olevan eMathStudion tärkeimmät kohdat oppia. He ymmärsivät käyttää eri osia ja löysivät myös lopulta parhaan mahdollisen tavan vastata tehtäviin. Opiskelija O11 kommentoi, että osien käytön valinta oli ollut välillä vaikeaa. Hän kommentoi myös, että ei ole aina löytänyt oikeaa syntaksia, mutta ei ole myöskään halunnut panostaa siihen. Tässä voi olla kyse siitä, että erilaisten osien käyttö tuotti opiskelijoille hankaluuksia. Se saattoi viedä turhaa aikaa, ja siten opiskelijat eivät jaksaneet loputtomasti etsiä mahdollisia tarkastuksessa olleita virheitä, jos he kokivat muuten tehneen tehtävän vastauksen ihan oikein. Tästä huolimatta suurin osa opiskelijoista kuitenkin löysi syntaksin ja oikeat päättelyaskeleet niin, että tarkastin hyväksyi ne.

6.3 Ohjelmistojen hyödyt ja opiskelijoiden kokemukset eMathStudiosta

Kolmatta tutkimuskysymystä tarkasteltiin kahdella tavalla: alkukyselyn ja loppukyselyn perusteella. Ensin tarkasteltiin opiskelijoiden kokemuksia ohjelmistojen käytöstä matematiikan opetuksessa alkukyselyn vastauksien perusteella. Niistä etsittiin samankaltaisuuksia ja luokiteltiin toistuvat teemat. Toisena tarkasteltiin opiskelijoiden kokemuksia eMathStudiosta loppukyselyn perusteella ja myös tästä etsittiin samankaltaisuuksien perusteella toistuvia teemoja.

Ensimmäistä osaa varten tarkasteltiin tutkimuskysymystä alkukyselyn perusteella. Siinä opiskelijoiden piti yleisesti kertoa heidän kokemuksensa ohjelmistoista matematiikan opetuksessa. Apukysymyksien avulla opiskelija saattoi vastata esimerkiksi mitä hyötyä ohjelmistoista voi olla, mikä ohjelmistojen käytössä on helppoa/vaikeaa tai miten ne auttavat oppimisessa. Vastauksien perusteella opiskelijoiden kokemuksista löytyi kolme teemaa:

- matemaattisen kuvan luominen
- tarkastaminen
- ohjelmiston käytön vaikeus
- käsin laskemisen vaikeutuminen

Opiskelijat kokivat, että ohjelmistot voivat auttaa heitä muodostamaan paremman kuvan käsiteltävästä matemaattisesta asiasta. Kuva voi tarkoittaa esimerkiksi mielikuvaa, geometristä kuvaa tai kuvaajaa. Opiskelijoista neljä koki ohjelmistojen auttavan havainnollistamisessa. Kaksi koki niiden auttavan visualisoinnissa ja kaksi hahmottamisessa. Mallintamisen mainitsi yksi opiskelija. Opiskelijat kertoivat asioista joko yleisesti ohjelmistoina tai yksittäisistä käyttämistään ohjelmistoista. Opiskelijat kommentoivat tätä teemaa esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

> Geogebran hyötynä pidän sen visuaalisuutta ja mahdollisuutta havainnollistaa asioita sen kautta[...] (O6)

> Ohjelmistot helpottavat erityisesti geometrista hahmottamista, ja tekevät mahdolliseksi huomattavasti paremman kuvioiden piirtämisen. (O8)

Neljä opiskelijaa otti alkukyselyssä esille tarkastamisen. He kertoivat, että ohjelmistolla voi esimerkiksi tarkastaa vastauksen, välivaiheita tai tarkastaa, onko jo käsin laskettu vastaus oikein. Yksi opiskelija kommentoi tätä seuraavalla tavalla:

> Ohjelmistolla voi myös tarkistaa vastauksen ja sen jälkeen miettiä, miten pääsisi käsin laskemalla samaan tulokseen. (O6)

Melkein kaikki opiskelijat mainitsivat sen, että ohjelman käyttäminen voi olla vaikeaa. Opiskelijat kertoivat syitä hankaluuksiin erilaisia. Osa koki, että käyttö voi olla alussa hankalaa, koska ei ole vielä tottunut ohjelman käyttöön. Yksi opiskelija kertoi tähän myös syyksi mahdollisten komentojen käyttämisen. Pari opiskelijaa taas koki, että vaikeus voi johtua siitä, että ohjelman käytön opettelu vie aikaa. Opiskelijat kommentoivat tätä esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

> Vaikeaa on varmasti aluksi komentojen ja erilaisten funktioiden käyttäminen. (O1)

> Käytössä vaikeinta on sinuiksi pääseminen erilaisten ohjelmistojen kanssa sekä joskus pienien virheiden tekeminen voi johtaa siihen, että ohjelmisto ei

> kykene viemään haluttua toimintoa loppuun ja joskus tämän virheen löytäminen itse voi olla hankalaa. (O7)

Kaksi opiskelijaa mainitsi siitä, että heidän kokemuksensa mukaan opiskelija saattaa osata käyttää ohjelmaa monillakin eri tavoilla, mutta ei sitten ymmärrä kuitenkaan, miten laskea matemaattista asiaa käsin. Opiskelijat kommentoivat tätä näin:

> Esimerkiksi uuden opsin opiskelijoissa lukiossa olen huomannut, että osaavat toki kikkailla kaikkea kivaa ohjelmilla, mutta eivät osaa sitten käsin tehdä edes perusasioita. (O4)

> Kuitenkin se, jos kursseilla käytetään pelkästään ohjelmistoja ja opetellaan ulkoa, kuinka joku asia vain kirjoitetaan ohjelmistoon eikä opetella sitä, miten asia oikeasti lasketaan ei taas mielestäni ole hyvä asia. (O5)

Alkukyselyn perusteella opiskelijat kokivat, että ohjelmistot voivat auttaa muodostamaan paremman kuvan käsiteltävästä matemaattisesta asiasta tai se voi auttaa tarkastamaan haluttua laskua tai tehtävää. Opiskelijat kokivat, että ohjelman käyttö voi olla hankalaa. Osa koki, että se voi olla hankalaa aluksi ja osa taas koki, että ohjelman opettelu vie aikaa. Muutama opiskelija koki myös, että ohjelman käytöstä ei aina ole hyötyä, jos oppilas tai opiskelija ei pysty omaksumaan muuten käsiteltävää matemaattista asiaa.

Toisena asiana tarkasteltiin opiskelijoiden kokemuksia eMathStudiosta loppukyselyn perusteella. Siinä kysyttiin esimerkiksi eMathStudion käytön haittoja ja hyötyjä, sen positiivisia ja negatiivisia asioita sekä sitä, auttoiko eMathStudio heidän mielestään todistustehtävien tekemisessä. Tarkemmat kysymykset löytyvät kappaleesta 5.3. Vastauksien perusteella opiskelijoiden kokemuksista löytyi seuraavat kuusi teemaa:

- tarkastaminen ja tarkastin
- eMathStudion rakenne
- syntaksi
- ajan käyttö
- tulevaisuus (opettajana)
- todistaminen.

Loppukyselyn perusteella opiskelijoista seitsemän mainitsi tarkastamisominaisuuden, ja he pitivät ominaisuutta hyvänä asiana. Opiskelijat kertoivat sen auttavan virheen etsimisessä, ja tällöin ei aina tarvitse kysyä opettajalta apua. Opiskelijat kommentoivat tarkastamista esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

> [...] tarkistin-ominaisuus auttoi hahmottamaan ainakin, jos on tehnyt jonkun ajatteluharhan laskiessa tai unohtanut tärkeän oletuksen. (O1)

> Tarkistin kertoo oppilaalle, missä kohtaa päättelyä virheitä on. Tämä auttaa oppilasta itse miettimään, kuinka saisi vastauksen oikein. Tämä tukee itsenäistä työskentelyä ja hieman vähentää opettajan roolia oppimisessa. (O2)

Toisaalta kaikki opiskelijat mainitsivat myös, että tarkastimen antamat vihjeet eivät aina olleet selkeitä, ja opiskelijat esittävätkin vastauksissaan turhautumistaan tähän. He kertoivat muun muassa, että eivät aina tienneet, mitä korjata vastauksesta, jotta tarkastin hyväksyisi sen tai eivät osanneet tulkita tarkastimen antamaa viestiä. Opiskelijat kommentoivat tarkastinta esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

> Ikinä ei tiennyt, mitä ohjelmisto haluaa tai mitä tehtävästä puuttuu. Tarkastus elementti oli hidas ja se ei aina toiminut. (O3)

> Välillä ohjelma tarkisti tehtävän ja antoi vihreän hyväksytty merkin, mutta saman tehtävän tarkistaminen myöhemmin ilman muutoksia antoi punaisen rastin. Tarkistimeen ei siis voinut luottaa. (O6)

Loppukyselyn perusteella neljä opiskelijaa oli sitä mieltä, että eMathStudion vaatima rakenne oli hyödyksi. He kokivat, että esimerkiksi oletuksien ja määrittelyjen muistaminen oli tärkeää. Yksi opiskelija kommentoi asiaa näin:

> [eMathStudion] avulla voi tarkistaa välivaiheiden oikeellisuuden ja se pakottaa opiskelijat selkeään matemaattiseen rakenteeseen: esittely, oletus, lasku, loppupäätelmä. (O11)

Toisaalta kolme opiskelijaa mainitsi, että oikean rakenteen valitseminen oli välillä vaikeaa, ja tämä kävi ilmi jo toisen tutkimuskysymyksen kohdalla, kun tarkasteltiin opiskelijoiden antamia kommentteja tehtäväkohtaisesti. Yksi opiskelija kommentoi loppukyselyssä rakennetta seuraavalla tavalla:

> Tehtävien tekeminen ylipäätänsä tuntuu vaikeammalta kuin muilla alustoilla johtuen muun muassa hieman sekavasta rakenteesta ja pienestä kirjoitustilasta. Esimerkiksi pitkiä kaavoja ei näe kokonaisuudessaan kerralla, minkä takia niitä on mahdotonta muokata emathstudiossa. (O1)

Opiskelijat kokivat, että he joutuivat käyttämään liikaa aikaa eMathStudion käyttöön. Ajan käyttöön viittavan kommentin kirjoitti kahdeksan loppukyselyyn vastanneista. Ne ilmenivät joko siinä, että tarkastin toimi hitaasti (4 kpl) tai sitten kerrottiin, että ohjelman opettelu vei liikaa aikaa tai se oli pois muulta opiskelulta (4 kpl). Opiskelijat kommentoivat ajan käyttöä esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

> Tarkistuksen pyöritys usein kestää tosi kauan, välillä jopa yli 15 minuuttia. Sen aikana ei voi oikein tehdä mitään muuta tehtävän edistymisen kannalta. (O3)

> Haittana ehkä se, että siihen käyttämäni aika oli pois kurssin varsinaisen asian opiskelusta. (O6)

Neljä opiskelijoista vastasi, että eMathStudion opettelusta voisi olla tulevaisuudessa hyötyä muiden ohjelmistojen käyttämisessä. Yksi arveli, että sen tausta olisi samantapainen kuin muissa lukiossa käytössä olevissa ohjelmistoissa. Opiskelijat kommentoivat tätä esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

> Uusien ohjelmistojen opettelusta on aina jotakin hyötyä. Oppii erilaisia tapoja tehdä, ja se taas voi sitten auttaa seuraavan ohjelmiston käytössä tai jonkun henkilön auttamisessa. (O3)

> Syntaksit, pikanäppäimet ja rakenne ovat varmasti samanlaisia tai ainakin samantapaisia kaikissa lukion ohjelmistoissa, joten kokemukset eMathStudiosta voivat auttaa muiden ohjelmistojen omaksumisessa. (O11)

Toisaalta kolme opiskelijaa kommentoi, ettei käyttäisi eMathStudiota enää jatkossa missään. Kommentteja oli esimerkiksi seuraavat:

> Osaan käyttää sitä, JOS se tulee joskus työelämässä vastaan. Vahvasti kyllä epäilen, että tulen tätä ikinä missään käyttämään ainakaan omasta mielenkiinnostani. (O6)

> En käyttäisi mistään hinnasta omalla kurssillani. Ei tarjoa mitään, mitä joku toinen ohjelma ei tekisi paljon paremmin. Arvokasta aikaa ja huomiota menee matematiikan kannalta epäoleellisiin asioihin. (O4)

Neljä opiskelijaa koki loppukyselyn perusteella syntaksin välillä vaikeaksi, ja yksi taas kertoi, että matemaattiset merkit tuntuivat Latex-komennoilla löytyvän helposti. Kommentteja oli esimerkiksi seuraavat:

> Matemaattiset merkit löytyi pääasiassa latex-komennoilla ja uuden elementin liittäminen oli aika intuitiivistä. (O3)

> Syntaksi on vaikeasti hallittava eikä ohjelma anna virheilmoituksen kanssa aina selkeää vinkkiä, että mistä kiikastaa. (O11)

Opiskelijat kokivat vaihtelevasti eMathStudion auttavan todistamisessa. Kaksi opiskelijaa oli sitä mieltä, että se auttoi päättelyssä, ja kolme opiskelijaa koki, että eMathStudion vaatima rakenne auttoi todistamisessa. Opiskelijat kommentoivat tätä esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

> Auttoi. Helpotti oman päättelyn korjaamista. (O2)

> Siinä mielessä kyllä, että tehtävässä piti olla selkeä rakenne: esittely, oletus, todistus. Muuten todistustehtävä oli samanlainen kuin se olisi ollut paperillakin. (O11)

Neljä opiskelijaa oli sitä mieltä, ettei eMathStudio auttanut todistamisessa. He kokivat esimerkiksi, että ohjelmaan kirjoittaminen on vaikeaa, ja että todistuksen kirjoittaminen käsin on helpompaa. Yksi opiskelija kommentoi tätä esimerkiksi seuraavalla tavalla:

> Ei mielestäni auttanut. On tärkeää, että oletukset vaaditaan myös paperiversiossa, mutta tässä oletukset ja esittelyt ja muut lähinnä sekoitti tehtävän ratkaisua. Varsinkin, kun välillä oletukset hyväksyttiin ja välillä niissä oli vikaa. (O3)

Tulosten perusteella opiskelijat kokivat tarkastamisen yhtenä ominaisuutena ohjelmistojen käytössä. Tarkastaminen esiintyi myös eMathStudion ominaisuuksissa. Luvussa 2 kerrottu Stack-tehtävien paras puoli oli tarkastus. MathCheckin yksi hyvä ominaisuus oli se, että opiskelija pystyi sen avulla itse paikantamaan virheen eikä tarvinnut opettajan apua. Osa opiskelijoista kommentoi myös eMathStudiosta vastaavaa tilannetta ja kertoi, että tarkastin auttaa virheen etsinnässä.

Muutaman opiskelijan mielestä eMathStudion vaatima rakenne oli hyödyksi. Rakenteisiin päättelyketjuihin liittyvissä aiemmissa tutkimuksissa (Back, Mannila ym. 2010; Mannila ja Wallin 2009; Sallasmaa ym. 2011) todettiin myös, että opiskelijat olivat kokeneet niiden selkiyttävän ratkaisua. Vaikka tässä tutkimuksessa ei varsinaisesti opetettu rakenteisia päättelyketjuja, eMathStudio kuitenkin perustuu niihin, ja siten nämä tutkimustulokset vastaavat osittain toisiaan.

Opiskelijat kokivat, että he joutuivat käyttämään liikaa aikaa eMathStudion käyttöön. Rakenteisiin päättelyketjuihin oli saatu tulos, että opiskelijat kokivat niiden hidastavan tehtävän vastauksen tekemistä. Rakenteisten päättelyketjujen kohdalla Mannila ja Wallin (2009) sekä Back, Mannila ym. (2010) totesivat sen johtuvan perustelujen kirjoittamisesta, mikä taas tässä tutkimuksessa ei ollut syynä. Opiskelijoilla voi olla erinäisistä syistä johtuen ajatus siitä, että tehtäviin vastaamiseen ei pidä käyttää liikaa aikaa, ja tässä tutkimuksessa heidän oli helppo "syyttää" asiasta tarkastinta.

Luvussa 2 kerrottiin että Stack-tehtävien suurin haaste oli ollut syntaksiin liittyvät ongelmat. Lisäksi MathCheckerissä oli ollut vastaavaa haastetta. eMathStudion kohdalla muutama opiskelija kommentoi syntaksiin liittyviä ongelmia, mutta useimmat siihen liittyvät kommentit koskivat jotain yksittäistä tilannetta. Teorian perusteella syntaksiin liittyvät ongelmat ovat ohjelmissa yleinen ongelma eikä siten ole yllätys, että näin oli osittain myös eMathStudion kohdalla.

7. POHDINTA

Tässä luvussa kerrotaan ensin yhteenvetona tutkimustulokset tutkimuskysymyksiin ja sen jälkeen tutkimuksen onnistumisesta. Sen jälkeen kerrotaan tutkimuksen luotettavuudesta ja eMathStudion mahdollisesta jatkosta.

7.1 Yhteenveto tuloksista

Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää, miten opiskelijat onnistuivat todistustehtävissä. Tulosten mukaan opiskelijat osasivat tehdä todistustehtävät matemaattisesti hyvin, mutta kielentämisessä oli puutteita. Matemaattisia virheitä opiskelijoilla esiintyi vain yksittäisiä. He eivät aina kertoneet, mitä määritelmiä he käyttivät vastauksissa tai miten he päätyivät edellisestä välivaiheesta seuraavaan. He eivät myöskään kirjoittaneet aina vastauksensa loppuun johtopäätöstä. Kielentämiseen liittyviä ongelmia löytyi merkittävä määrä toteutuksen toisen viikon tehtävistä. Tähän on voinut olla monia eri syitä, esimerkiksi se, että silloin vielä opeteltiin eMathStudion käyttöä ja opiskelijat eivät välttämättä panostaneet kielentämiseen. Kokonaisuudessaan voidaan kuitenkin päätellä, että opiskelijat suoriutuivat todistustehtävistä hyvin.

Toisessa tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää, miten opiskelijat oppivat eMathStudion käytön, ja tähän kysymykseen haettiin vastausta tutkimalla niin sanottujen rakenteisten päättelyketjujen osien käyttöä ja tarkastimen antamaa palautetta. Tulosten mukaan suurin osa opiskelijoista käytti Lasku-, Esittely-, Oletus- ja Määritelmä-osia monipuolisesti vastauksissaan, mutta Päätelmä- ja Tehtävä-osaa vähän. Niiden käytön vähyys saattoi johtua muutamien kommenttien perusteella siitä, että opiskelijoiden mielestä niitä oli vaikea käyttää. Yksi opiskelija ei käyttänyt muita osia kuin Lasku-osaa vastauksissaan. Tarkastimen käyttö sujui suurimmalta osalta opiskelijoita hyvin, ja ainoastaan muutamalla opiskelijalla virheellisiä päättelyaskeleita esiintyi enemmän kuin muilla. Suurimmalla osalla niitä esiintyi vain yksittäisissä tehtävissä, ja siten tulosten perusteella suurin osa opiskelijoista ymmärsi miten tarkastinta kuuluu käyttää ja löysi oikeat valinnat sille, että tarkastin ilmoitti päättelyketjun hyväksytyksi. Tulosten perusteella yksittäiset opiskelijat eivät oppineet eMathStudion käyttöä hyvin, mutta suurin osa oppi käyttämään eMathStudiota osien ja tarkastimen käytön suhteen.

Kolmannessa tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää opiskelijoiden kokemuksia matematiikan ohjelmistoista yleensä ja erityisesti eMathStudiosta. Tulosten perusteella opiskelijat kokivat, että matemaattiset ohjelmistot voivat auttaa esimerkiksi matemaattisen kuvan luomisessa ja tarkastamisessa. Opiskelijat kokivat myös, että ohjelman opettelu voi olla vaikeaa. Osa ajatteli, että ohjelman osaaminen ei takaa sitä, että käyttäjä ymmärtäisi tällöin, miten esimerkiksi laskea käsin samantyyppinen matemaattinen tehtävä. Loppukyselystä saatujen tulosten perusteella opiskelijat pitivät eMathStudiossa tarkastamismahdollisuudesta ja sen vaatimasta rakenteesta. Moni koki, että eMathStudion käytöstä voi olla tulevaisuudessa hyötyä muiden ohjelmistojen käytössä. Toisaalta opiskelijat kokivat turhautumista tarkastimesta. Se toimi heidän mielestään hitaasti tai he eivät aina osanneet korjata vastauksiaan niin, että tarkastin olisi hyväksynyt vastauksissa käytetyt rakenteiset päättelyketjut. Osa opiskelijoista oli sitä mieltä, että eMathStudio auttoi todistamisessa ja osa oli eri mieltä.

7.2 Tutkimuksen onnistuminen

Tutkimus aloitettiin melko nopealla aikataululla ja tutkimuksen tekijä joutui perehtymään eMathStudion käyttöön nopeasti. eMathStudio osoittautui alussa suhteellisen hankalaksi käyttää, mutta sen käytön oppi vähitellen. Tehtävien tekeminen opintojaksolle onnistui, ja vaikka tässä tutkimuksessa ei tehtävien toimivuutta tarkemmin analysoitukaan, niin tehtävät toimivat tehtävien laatijan eli tämän diplomityön tekijän mielestä opiskelijoille matemaattisesti ja opintojakson teemaa mukaillen hyvin. Liitteestä C löytyy tehtävät 1.3 ja 2.3 esimerkkeinä, ja lisäksi muita tehtäviä on esitetty läpi tämän diplomityön. Muutamaa tehtävää lukuunottamatta ne toimivat myös eMathStudiolla mainiosti. Joidenkin tehtävien kohdalla tiedostettiin eMathStudioon liittyvä ongelma jo etukäteen (matriiseihin liittyvät laskut), kun taas joidenkin ominaisuuksien kohdalla ne tulivat tutkimuksen tekijällekin yllätyksenä tutkimuksen aikana (trigonometristen funktioiden yhtälöt).

Tutkimuksen toteutus sujui pääasiassa hyvin, mutta muutamia ongelmia tuli vastaan. Yhtenä ongelmana oli se, että nettiyhteydellä saattoi olla merkitystä oppimisalustan toimintaan. Monille opiskelijoille tarkastin näytti vihreää merkkiä, että vastaus olisi oikein, vaikka todellisuudessa siinä oli virhe. Ohjelma ilmoitti tällöin, että ”palvelimessa on liian monta pyyntöä”, ja jos tätä ei huomannut, saattoi luulla, että vastaus on oikein tarkastimenkin mielestä. Toisena ongelmana oli se, että opintojakso jouduttiin COVID-19-pandemian takia järjestämään etätoteutuksena. Jos lähiopetus olisi ollut mahdollista, opiskelijat olisivat varmasti kysyneet enemmän apua eMathStudion ongelmiin. Toisaalta lähiopetuksessa olisi saattanut olla se huono puoli, että opiskelijat olisivat ehkä myös vahvemmin tuoneet esille turhautumisensa. Se taas olisi saattanut vaikuttaa opettamis- ja oppimismotivaatioon enemmän.

Ajatuksena oli alunperin analysoida tarkemmin opiskelijoiden vastaukset kaikista tehtäviin liitetyistä kyselyistä. Opiskelijat kuitenkin vastasivat niihin alkua lukuunottamatta tutkimuksen edetessä yhä huonommin. Syitä tähän olivat ainakin seuraavat:

- Opiskelijat vastasivat koko ajan vähemmän eMathStudio-tehtäviin.
- Opiskelijat kopioivat vastauksia aiemmista vastauksistaan. Esimerkiksi yksi opiskelija kopioi kaikki vastaukset aina kaikkiin tehtäviin joitain yksittäisiä kommentteja vähän muuttaen.
- Loppupuolella opiskelijoiden kommentit toistivat pääasiassa samoja asioita. Esimerkiksi "tarkastin on turha" -tyyppisiä vastauksia näkyi aika paljon kommenteissa, mutta perusteluja vähän.

Tämän takia tutkimuksen tuloksissa esitettiin opiskelijoiden yksittäisiä b)-kohtien kysymyksen vastauksia ainoastaan esimerkkeinä, eikä niitä analysoitu sen tarkemmin.

Opiskelijoille opetettiin Lasku-osan ja Päätelmä-osan erot. Päätelmä-osa on sellainen, jonka lopputulosta voidaan hyödyntää myöhemmin. Monet esimerkit ja esimerkkiratkaisut, jotka esitettiin opiskelijoille käyttivät tätä mallia. Esimerkiksi liitteessä C tehtävä 1.3 on tällainen tehtävä, jossa ensimmäisen Päätelmä-osan tulosta $a = 1$ hyödynnetään seuraavassa Päätelmä-osassa. Lasku-osalla ei ole tällaista ominaisuutta. Opiskelijat eivät todennäköisesti oppineet osan käyttöä, vaikka sille yritettiinkin luoda tarpeeksi hyvät perustelut Lasku-osaan verrattuna.

Vaikka tutkimustulokset eivät tätä varsinaisesti kertoneetkaan, niin tutkimuksen tekijälle, laskuharjoitusten opettajana, kävi ilmi, että opiskelijat suhtautuivat melko negatiivisesti oppimisalustaa kohtaan. Tämä kävi myös joistain opiskelijoiden vastauksista ilmi. Loppukysely haluttiinkin tästä syystä luoda niin, että opiskelijat "pakotetaan" kertomaan myös eMathStudion hyviä puolia. Opiskelijat osasivat vastata kysymyksiin todella hyvin. Valinta kuitenkin johti siihen, että tuloksista ei voida nähdä opiskelijoiden todellista kokemusta eMathStudiosta.

7.3 Luotettavuus

Saaranen-Kauppinen ja Puusniekka (2006) toteavat, että laadullisessa tutkimuksessa luotettavuuteen liittyviä validiteettia ja reliabiliteettia ei voida arvioida samalla tavalla kuin määrällisessä tutkimuksessa. Tarkastellaan seuraavaksi luotettavuutta tutkimuskysymys kerrallaan ja lopuksi vielä yleisesti.

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen liittyvää matemaattisen todistamisen onnistumista voidaan pitää suhteellisen luotettavana tuloksena tässä tutkimuksessa. Virheiden luokitteluun voisi käyttää monenlaisia eri tapoja. Matemaattisia virheitä esiintyi kuitenkin opiskelijoiden vastauksissa vähän, ja eikä niiden määrään toisenlainen luokittelu olisi vaikuttanut. Se, mikä tulkitaan matemaattiseksi virheeksi, voi olla osittain riippuvaista lukijan näkemyksestä siitä, mitä asioita tehtävän vastaukselta vaaditaan. Kuitenkin käyttämällä malliratkaisuja ja eMathStudion tarkastinta voidaan vakuuttua siitä, että matemaattisten virheiden määrä ei toisenkaan lukijan mielestä ole paljon suurempi. Todistustehtävissä on myös hyödyksi se, että vastaus tiedetään etukäteen. Opiskelijat osallistuivat tässä tutkimuksessa syventävälle matematiikan opintojaksolle, joten on oletettavaa, että heidän todistamistaitonsa ovat kehittyneet jo korkeammalle kuin alkeistasolle. Tämä osaltaan kertoo myös siitä, että todistamistehtävissä onnistuminen oli odotettua. Tässä tutkimuksessa opiskelijat saivat yhdestä tehtävän vastauksesta vähän pisteitä opintojakson kokonaissuoritukseen nähden. Tämä saattoi vaikuttaa opiskelijoiden motivaatioon ja heidän vastauksiinsa.

Tutkimuksen tekijän oli tärkeää miettiä, mikä eMathStudion käytön oppimisessa olisi tärkeintä. Yhden opiskelijan valinta käyttää ainoastaan Lasku-osaa, kertoi hyvin sen, että hän ei käyttänyt eMathStudiota niin hyvin kuin muut opiskelijat. Osien käyttö perustuu myös rakenteisiin päättelyketjuihin, joka on eMathStudion taustatekijä. Toisaalta eMathStudion tärkein ominaisuus on tarkastin, joten sen käytön tutkiminen oli myös tärkeää. Näillä kahdella ominaisuudella voidaan vastata toiseen tutkimuskysymykseen eMathStudion käytön oppimisesta, sillä ne ovat eMathStudion kaksi tärkeintä piirrettä.

Opiskelijoilta ei vaadittu eMathStudion rakenteellisten päättelyketjujen useampien eri osien käyttöä. Niitä näytettiin esimerkkien avulla kahdella ensimmäisellä viikolla, ja tämän jälkeen opiskelijat saivat itse päättää käyttämänsä rakenteen. Se, että jotkut opiskelijat päätyivät käyttämään niin vähäisesti ohjelmassa esiintyviä erilaisia osia voi johtua monista eri tekijäistä. Jos opiskelijoilta olisi vaadittu eri osien käyttöä enemmän, olisivat tulokset voineet olla erilaisia, mutta tällöin opiskelijoiden motivaatio tehdä tehtäviä olisi saattanut laskea entisestään. Vapaaehtoisuus tässä katsottiin siten tutkimuksen kannalta hyväksi asiaksi. Opiskelijoilta ei myöskään vaadittu pisteiden saamiseen sitä, että tarkastin hyväksyy päättelyketjun ja näyttää vihreää merkkiä. Pistevähennystä sai vain silloin, jos vastauksissa esiintyi matemaattisesti jotain väärin tai tarkastinta ei oltu käytetty lainkaan. Koska opiskelijat vasta opettelivat ohjelman käyttöä, olisi ollut liikaa vaadittu vihreän merkin saaminen vastauksen loppuun. Opiskelijat pystyivät kuitenkin kysymään apua tehtäviin, joten luotettiin siihen, että he uskaltaisivat kysyä apua. Hyväksytyn päättelyketjun vaatiminen olisi saattanut aiheuttaa vielä enemmän turhautumista ja motivaation laskua. Nämä tulokset perustuvat siten vapaaehtoisuuteen, ja tuloksien lukemiseen kuuluu tämä ottaa huomioon. Vapaaehtoisuus liittyy kuitenkin vahvasti siihen, millainen kokemus opiskelijoille jäi eMathStudiosta.

Opiskelijoiden kokemus ohjelmistoista ja eMathStudiosta antaa joitain vastauksia, mutta näkemykseen on voinut vaikuttaa monta asiaa. Jos loppukyselyssä ei olisi pyydetty erittelemään eMathStudion hyviä ja huonoja ominaisuuksia, olisivat vastaukset voineet olla negatiivisempia. Tutkimuksen tekijäkin markkinoi eMathStudiota opintojakson toteutuksen alussa tarkastamisen näkökulmasta, mikä saattoi osaltaan johtaa opiskelijoiden kokemukseen. Opiskelijoiden vastaukset eMathStudion huonoista puolista liittyivät paljon tarkastimeen joko käytön tai ajan suhteen.

Opiskelijoiden kokemukseen eMathStudiosta on saattanut vaikuttaa se, että opiskelijat käyttivät myös GeoGebra-ohjelmaa toteutuksella. Mielenkiintoista oli, että opiskelijat vastasivat Geogebra-tehtäviin koko opintojakson toteutuksen ajan todella hyvin. Loppuvaiheessa eMathStudio-tehtäviin ei enää juuri vastattu, mutta esimerkiksi kahden viimeisen viikon Geogebra-tehtäviin vastasi tutkimukseen osallistuneista suurin osa. Tutkimukseen osallistuneista opiskelijoista suurin osa oli aktiivisia toteutuksen loppuun asti GeoGebra-tehtävien kannalta. Jossain vaiheessa opintojakson toteutusta opiskelijoille selvisi, että eMathStudio-tehtävät tai Geogebra-tehtävät eivät tulleet tenttiin. Opiskelijat saattoivat siten kokea, että eMathStudio-tehtävien teosta ei ollut varsinkaan loppuvaiheessa enää hyötyä. Vertailu GeoGebraa-ohjelmaan on myös saattanut vaikuttaa opiskelijoiden kokemukseen eMathStudiosta vaikka ne hyvin erilaisia ohjelmia ovatkin. Tämä käy myös ilmi opiskelijoiden alkukyselyn vastauksissa, jossa moni mainitsee esimerkiksi visualisoinnin hyvänä ominaisuutena ohjelmistoissa.

Opiskelijat vastasivat loppukyselyssä kysymykseen, auttoiko eMathStudio todistustehtävissä, mutta tuloksiin on syytä suhtautua kriittisesti. Opiskelijat käyttivät eMathStudiota sen verran eri tavoilla, että monelle kokemus todistamisen kannalta on hyvin voinut olla erilainen. Toisaalta osa opiskelijoista vastasi vain muutamaan tehtävään, joten heidän kokemuksensa eMathStudion käytöstä on jäänyt myös vähäiseksi.

Luotettavuuden kannalta on olennaista, että tähän tutkimukseen osallistui vähän opiskelijoita, mikä tarkoittaa, että yhden opiskelijan vastaukset merkitsevät paljon. Tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttaa myös se, että tutkimukseen osallistuivat tietyt opiskelijat, ja se toteutettiin tietyllä syventävällä matematiikan opintojaksolla. Tehtävät ja annettu opetus vaikuttavat siihen, millä tavalla opiskelijat suhtautuvat tehtävien tekemiseen ja minkälainen tausta heillä oli jo aiemmin todistustehtävien tekemiseen. Jos tutkimus tehtäisiin eri tehtävillä ja opintojaksolla, voisi eMathStudion käyttö ja kokemus eMathStudiosta olla jopa päinvastaiset. Tämän työn tarkoituksena oli testata eMathStudiota yliopiston opintojaksolla ja löytää sellaisia ominaisuuksia mitkä toimivat ja mitkä eivät. Siksi opiskelijoiden yksittäisetkin kommentit olivat merkittäviä tuloksia.

7.4 eMathStudio jatkossa

eMathStudiota on paranneltu paljon jo tämän tutkimuksen aikana ja sen jälkeen. Kaikki ongelmat, joita tässä työssä on esitetty eivät välttämättä ole enää eMathStudiossa sellaisenaan ongelmia.

Jos eMathStudiota haluaisi käyttää yliopiston opintojaksolla uudestaan olisi tärkeää huomata muutamia asioita, joita tämän tutkimuksen perusteella huomattiin. Tutkimuksessa olisi tärkeää tiedostaa tarkastimen sen hetkiset rajoitteet ja ottaa ne huomioon. Esimerkiksi tässä tutkimuksessa tuli yllätyksenä trigonometristen funktioihin yhtälöihin liittyvät ongelmat. Mahdollisessa uudessa tutkimuksessa olisi tärkeää tiedostaa, että tarkastimen käyttäminen voisi tuntua opiskelijoista hankalalta, ja se saattaisi vaikuttaa opiskelijoiden suhtautumiseen paljon.

Tämän tutkimuksen perusteella, jos ottaa mahdolliset rajoitukset huomioon, voisi eMathStudiota hyvin käyttää yliopiston opintojaksolla. Ainakin opiskelijamäärältään pienellä olisi helppo antaa opiskelijoille pisteet ja palautteet. Silloin olisi myös helppo tarkastaa missä kohdissa heillä tarkastin ei ole toiminut. Oppimisalusta voisi antaa etua opettajalle, varsinkin jos tarkastimen saisi toimimaan nopeammin. Tämä voisi vaikuttaa positiivisesti opiskelijoiden asenteeseen/motivaatioon. Opiskelijat kommentoivat paljon tarkastamisen antamaa hyötyä. Pienet laskuvirheet pitkissä laskuissa voivat monille olla ärsyttävä asia, jonka eMathStudion antama tarkastus voisi korjata. Opiskelijat pystyivät hyvin kirjoittamaan tehtäviä eMathStudioon. Sen vaatima rakenne voisi auttaa opiskelijoita vastaamaan matematiikan tehtäviin hyvin ja tarkastamaan vastauksista esimerkiksi laskuvirheet. Eri osien käyttö antaisi hyvää muistutusta opiskelijoille siitä, että esittelyt ja oletukset ovat tärkeitä huomata joissain tehtävissä.

eMathStudion rakenne perustuu rakenteisiin päättelyketjuihin, mutta tutkimuksen tekijällä ei ollut teoriasta vielä selkeää käsitystä tutkimusta aloittaessa. Eri eMathStudiossa käytettyjen osien käyttöä voidaan pitää yhtenä rakenteisten päättelyketjujen ideana, mutta on harmillista, että opiskelijoille ei kerrottu perustelujen tarpeellisuutta, joka on rakenteisissa päättelyketjuissa yksi peruspiirre. Mielenkiintoista olisikin tutkia, miten hyvin yliopisto-opiskelijat osaisivat kirjoittaa eMathStudiolla perusteluja vai tuntuisiko se turhalta. Osassa tämän tutkimuksen vastauksista opiskelijoilla esiintyi perusteluja, mutta johtuen opetuksen puutteellisuudesta, ei näihin sen tarkemmin kiinnitetty huomiota.

Mielenkiintoisia tutkimuksia eMathStudiolla voisi esimerkiksi olla kokeilla eMathStudiota pidemmän aikaa, kokeilla rakenteisten päättelyketjujen perustelujen toimivuutta tai tehdä vertailututkimus. eMathStudion kokeilu oli lyhyessä ajassa hankalaa, mikä näkyi opiskelijoiden vastauksissa. Mitä pidempään tehtävien laatija teki tehtäviä, sitä helpommaksi eMathStudion käyttö tuli. Tämän perusteella voisi ajatella, että opiskelijoillekin toimisi, jos he käyttäisivät eMathStudiota pidemmän aikaa. eMathStudion käyttöä voisi siis tulevaisuudessa kokeilla yliopistossa ja monella eri opintojaksolla, jolloin opiskelijat tottuisivat siihen. Rakenteisten päättelyketjujen perusteluja voisi hyödyntää enemmän. Niiden kirjoittaminen yliopiston opiskelijoille voisi olla turhauttavaa, mutta se saattaisi auttaa esimerkiksi tässä tutkimuksessa esiintyneisiin kielentämisongelmiin. Toisaalta perinteinen vertailututkimus eMathStudion käyttäjien ja ei-käyttäjien välillä antaisi tuloksia siitä, onko eMathStudiosta hyötyä esimerkiksi oppimisessa tai todistamisessa. eMathStudio antaa monia eri mahdollisuuksia jatkotutkimuksille, ja tämän tutkimuksen perusteella sille löytyisi jatkokäyttöä yliopistoissa.

LÄHTEET

Back, R. (2016). *Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin*. Four Ferries Publishing. ISBN: 978-952-7147-03-0. URL: https://fourferries.com/wp-content/uploads/2016/12/StructuredDerivationTutorialFin4-Book.pdf (viitattu 03. 05. 2022).

– (11. heinäkuuta 2022). puhelinkeskustelu.

Back, R., Grundy, J. and von Wright, J. (1997). Structured Calculational Proof. *Formal Aspects of Computing* 9.5-6, pp. 469–483.

Back, R., Mannila, L. and Wallin, S. (2010). 'It takes me longer, but I understand better' – student feedback on structured derivations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 41.5, pp. 575–593.

Back, R. and von Wright, J. (1998). *Refinement calculus: A systematic introduction*. Springer Science and Business Media New York. ISBN: 978-0-387-98417-9. URL: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-1-4612-1674-2.pdf (visited on 06/21/2022).

Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H. ja Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vol. 3, s. 907–920.

Clement, H. (2019). Yliopisto-opiskelijan virheet todistamisessa ja todistamisen kehittyminen kurssin aikana. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopisto.

Doerr, A. and Levasseur, K. (2023). *Applied Discrete Structures, third edition-version 10*. https://discretemath.org/ads/ads.html (visited 2016-01-01).

eMathStudio (2021). *eMathStudio-The learning platform for mathematics*. URL: https://emathstudio.com/fi (viitattu 22. 10. 2021).

Four Ferries - 4f Checker (2023). *Four Ferries - automaattinen tarkistus*. URL: https://fourferries.com/fi/automaattinen-tarkistus/ (viitattu 05. 07. 2023).

Four Ferries (2021). *Four Ferries - interaktiivisuutta opiskeluun*. URL: https://fourferries.com/fi/ (viitattu 22. 10. 2021).

Gasteren, A. J. M. (1990). *On the Shape of Mathematical Arguments*. Springer Berlin, Heidelberg. Chap. 14 Clarity of exposition, pp. 90–120. ISBN: 978-3-540-47166-0.

Gibson, C. (2003). *Elementary Euclidean Geometry: An undergraduate introduction*. Cambridge University Press. ISBN: 0-521-83448-1.

Hanna, G. ja Yan, X. (marraskuu 2021). Opening a discussion on teaching proof with automated theorem provers. *For the Learning of Mathematics* 41.3, s. 42–46.

Hietikko, P., Ilves, V. ja Salo, J. (2016). *Askelmerkit digiloikkaan*. Suomi. OAJ:n julkaisusarja 3.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at University level. *International Journal of Mathematical Education In Science & Technology* 31.1, pp. 53–60.

Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J. ja Harjulehto, P. (2013). Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa. *Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Association*. Toim. M. Hähkiöniemi, P. Leppäaho H.a dn Nieminen ja J. Viiri. Jyväskylä: University of Jyväskylä. Report of Teacher Education Research report 90, s. 59–70.

Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa*. Toim. M. Asikainen, P. Hirvonen ja K. Sormunen. Joensuu: University of Eastern Finland. Reports, Studies in Education, Humanities, ja Theology 1, s. 3–15.

Kaarakka, T., Kirsi, H., Valmari, A. ja Joutsenlahti, M. (2019). Pedagogical experimentswith MathCheck in university teaching. *LUMAT* 7.3, s. 84–112.

Kyyrönen, I. (2018). Todistamisajattelun opettaminen. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto.

Jekyll+Skinny Bones (2023). *Lean-theorem prover*. URL: `https://leanprover.github.io/` (visited on 06/12/2023).

Lehtinen, M. (2009). *Matematiikan historian luentoja*. URL: `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/histluennot.pdf`.

Levin, O. (2019). *Discrete Mathematics: An Open Introduction, 3rd edition*. Oscar Levin. 394 p. ISBN: 978-1792901690.

LOPS (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Opetushallitus. ISBN: 978-952-13-6623-9.

Mäkelä, A.-M. (2015). Verkkotyökalut yliopistomatematiikan peruskursseilla. Diplomityö. Tampereen teknillinen yliopisto.

Mannila, L., Peltomäki, M. och Back, R. (2014). Erfarenheter av strukturerade härledningar i undervisningen. I: *Nämnaren, Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet* 1, s. 3–10.

Mannila, L. and Wallin, S. (2009). Promoting students' justification skills using structured derivations. *19th ICMI Study Conference on Proof and Proving in Mathematics Education* 2.64, pp. 73–78.

Moore, R. C. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics* 27.3, s. 249–266. URL: `http://www.jstor.org/stable/3482952` (viitattu 10. 06. 2023).

Morgan, C. (2001). Issues in Mathematics Teaching. Toim. P. Gates. London: Routledge Falmer. Luku The Place of Pupil Writing in Learning, Teaching and Assessing Mathematics, s. 232–244.

Myllykoski, T., Mattila, P., Ali-löytty, S., Kaarakka, T. ja Viro, E. (2018). Yliopistomatematiikan sähköisten tehtävien virheluokittelun ja matemaattisen ajattelun kehittäminen. *FMSERA Journal* 2.1, s. 46–55.

Pantzar, E. (2004). *Oppimisympäristö verkkona : verkko oppimisympäristönä*. Tampere : Tampere University Press, s. 49–68. ISBN: 978-951-44-6351-8.

Panula, M. (2012). Parhaat käytännöt STACKin käyttöön automaattisesti arvioitavien matematiikan tehtävien luomiseen. Diplomityö. Tampereen teknillinen yliopisto.

Suomen eOppimiskeskus ry (2021). *Paras suomalainen digitaalinen oppimisratkaisu, eEemeli-palkinto. 05.05.2021*. URL: https://eoppimiskeskus.fi/suomen-parhaat-oppimisratkaisut-palkittu-eeemeli-palkinnolla/ (viitattu 22. 10. 2021).

Patana, S. (2017). Stack-tehtävien käyttö yliopiston matematiikan kurssilla. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopisto.

Peltomäki, M. and Back, R. (2009). An Empirical evaluation of structured derivations in high school mathematics. *19th ICMI Study Conference on Proof and Proving in Mathematics Education* 2.136, pp. 145–150.

Peltomäki, M. and Salakoski, T. (2004). Strict Logical Notation Is Not a Part of the Problem but a Part of the Solution for Teaching High-School Mathematics. *Kolin Kolistelut — Koli Calling - Proceedings of the Fourth Finnish/Baltic Sea Conference on Computer Science Education, Helsinki University of Technology, Department of Computer Science and Engineering Laboratory of Information Processing Science* TKO-A42/04, pp. 116–120.

Piotrowski, M. (2010). Learning Management System Technologies and Software Solutions for Online Teaching: Tools and Applications. Ed. by Y. Kats. Information science reference. Chap. What is an E-Learning Platform? Pp. 20–36. ISBN: 978-1-61520-854-8.

Poole, D. (2014). *Linear Algebra: A Modern introduction, 4th edition*. Cengage Learning. 618 p. ISBN: 1-285-46324-2.

Rasila, A., Harjula, M. ja Zenger, K. (2007). Automatic assessment of mathematics exercises: Experiences and future prospects. Helsinki University of Technology, Finland. ReflekTori 2007 Symposium of Engineering Education December 3–4, 2007, s. 70–80.

Saaranen-Kauppinen, A. ja Puusniekka, A. (2006). *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto [verkkojulkaisu]. Tutkimuksen luotettavuus ja arviointi*. URL: https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/kvali/L3_3.html (viitattu 18. 07. 2022).

Sallasmaa, P., Mannila, L., Peltomäki, M., Salakoski, T., Salmela, P. ja Back, R. (2011). Opetusteknologia koulun arjessa. Toim. M. Kankaanranta. Koulutuksen tutkimuslaitos, Agora Center. Luku Haasteet ja mahdollisuudet tietokonetuetussa matematiikan opetuksessa, s. 125–137. ISBN: 978-951-39-4198-7.

Sangwin, C. ja Hunt, T. (2023). *Moodle plugins directory: STACK*. URL: https://moodle.org/plugins/qtype_stack (viitattu 23. 05. 2023).

Selden, J. ja Selden, A. (tammikuu 2009). Teaching Proving by Coordinating Aspects of Proofs with Students' Abilities. S. 339–354. ISBN: 0-415-98984-1.

Stack (2023). *Stack - Online assessment*. URL: https://stack-assessment.org/ (viitattu 12. 05. 2023).

Stavrou, S. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal* 1.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching* 127, pp. 28–32.

Tanhua-Piiroinen, E., Viteli, J., Syvänen, A., Vuorio, J., Hintikka, K. A. ja Sairanen, H. (2016). *Perusopetuksen oppimisympäristöjen digitalisaation nykytilanne ja opettajien valmiudet hyödyntää digitaalisia oppimisympäristöjä*. Suomi. Valtioneuvoston selvitys- ja tutkimustoiminnan julkaisusarja 18. ISBN: 978-952-287-252-4.

Thoma, A. ja Iannone, P. (2022). Learning about Proof with the Theorem Prover LEAN: the Abundant Numbers Task. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 8, s. 64–93.

Tiitu, H. (2017). Oikeisiin virheisiin! Virheelliset vastaukset ja niiden tulkinta automaattisesti tarkastetuissa matematiikan harjoitustehtävissä. Diplomityö. Aalto-yliopisto.

Tikkanen, A. (2016). Suomalaisten yliopistojen käyttämät digitaaliset oppimisympäristöt. *Informaatioteknologian tiedekunnan julkaisuja/Jyväskylän yliopisto* 24.

Mathcheck-asentaminen (2023). *TIM ja MathCheck*. URL: https://tim.education/view/tim/TIMin-kehitys/mathcheck (viitattu 15. 06. 2023).

Tuomi, J. ja Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Gummerus Kirjapaino Oy. 175 s. ISBN: 978-951-31-4865-2.

Valmari, A. (2016). MathCheck relation chain checker. *Proceedings of the Finnish Mathematical Days 2016*, s. 44–46.

– (2021). *Yleistä MathCheckistä*. URL: http://users.jyu.fi/~ava/yleista.html (viitattu 04. 05. 2023).

Valmari, A. ja Kaarakka, T. (2016). Mathcheck: A tool for checking math solutions in detail. *SEFI 2016 Annual Conference Proceedings: Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation, European Society for Engineering Education SEFI*.

Valmari, A. ja Rantala, J. (2019). Arithmetic, Logic, Syntax and MathCheck. *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Supported Education - Volume 2: CSEDU*. INSTICC. SciTePress, s. 292–299. ISBN: 978-989-758-367-4.

LIITE A: ESIMERKIT

Tehtävä: Osoita, että $x(t) = 2r\cos^2 t$, $y(t) = 2r\sin t\cos t$, missä r kuvaa ympyrän sädettä, on säännöllinen parametrisointi.

Todistus:

Parametrisointi on säännöllinen, jos kaikilla parametreillä t vähintään toinen derivaatoista $x'(t)$, $y'(t)$ on nollasta poikkeava.

Muodostetaan oletukset sekä funktiot ja lasketaan derivaatat. Tutkitaan tämän jälkeen millä t:n arvoilla derivaatat ovat nollasta poikkeavia.

Tehtävä: Osoita, että $x(t) = 2r\cos^2 t$, $y(t) = 2r\sin t\cos t$, missä r kuvaa ympyrän sädettä, on säännöllinen parametrisointi.

Esittely	$t \in \mathbb{R}$
Oletus	$r > 0$ (ympyrän säde on positiivinen)
Määritelmä	$x:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ { ensimmäinen parametri } $x(t) = 2r(\cos t)^2$
Määritelmä	$y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ { toinen parametri } $y(t) = 2r\sin t\cos t$
Esittely	$n \in \mathbb{N}$ (positiivinen kokonaisluku trigonometrisia funktiota varten)
Päätelmä	{ Tutkitaan millä t:n arvoilla x(t):n derivaatta on nolla }
	• $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)\right] = 0$
	$\Leftrightarrow$ { derivoidaan }
	$-4r\cos t \cdot \sin t = 0$

$\Leftrightarrow$ { käytetään oletusta $r > 0$ ja jaetaan luvulla $-4r$ }

$\cos t \cdot \sin t = 0$

$\Leftrightarrow$ { käytetään tunnettua yhtälöä $\sin 2t = 2\cos t \sin t$ }

$\frac{1}{2}\sin 2t = 0$

$\Leftrightarrow$ { jaetaan $\frac{1}{2}$ }

$\sin 2t = 0$

$\Leftrightarrow$ { lasketaan trigonometrinen yhtälö } !

$t = n\pi \vee t = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$\square$

...

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)\right] = 0 \Leftrightarrow t = n\pi \vee t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Päätelmä

{ Tutkitaan millä t:n arvoilla y(t):n derivaatta on nolla } !

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y(t)\right] = 0$

$\Leftrightarrow$ { derivoidaan }

$2r\Big((\cos t)^2 - (\sin t)^2\Big) = 0$

$\Leftrightarrow$ { käytetään oletusta $r > 0$ ja jaetaan luvulla $2r$ }

$(\cos t)^2 - (\sin t)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ { käytetään tunnettua yhtälöä $\cos 2t = (\cos t)^2 - (\sin t)^2$ }

$\cos 2t = 0$

$\Leftrightarrow$ { lasketaan trigonometrinen yhtälö } !

$t = \frac{\pi}{4} + n\pi \vee t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

$\square$

... $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y(t)\right] = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + n\pi \vee t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

Päätelmä

{ todetaan, että arvot eivät ole yhtä suuria milläänn:n arvoilla (tapauksia yhteensä $\binom{4}{2} = 6$ }

$$\frac{\pi}{4} + n\pi \neq \frac{3\pi}{4} + n\pi \wedge \frac{\pi}{4} + n\pi \neq n\pi \wedge \frac{\pi}{4} + n\pi \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Päätelmä

{ todetaan, että arvot eivät ole yhtä suuria millään n:n arvoilla }

$$\frac{3\pi}{4} + n\pi \neq n\pi \wedge \frac{3\pi}{4} + n\pi \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \wedge n\pi \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Päättelyä ei pystytty todistamaan oikeaksi.

Koska kaikkien yhtälöiden vastaukset ovat erisuuria keskenään niin aina löytyy jokin t:n arvo, jolle toinen näistä derivaatoista on eri suuri kuin nolla.

Annettu parametrisointi on siis säännöllinen.

Kuva A.1. *Esimerkki ongelma yhtälön sin(2x)=0 ratkaisussa eMathStudiossa. Ratkaisu tehty kuten opiskelija saattaisi siihen vastata.*

Todista, että suorat $y = -\frac{1}{4}x + 3$ ja $-16x + 4y = 3000$ ovat ortogonaalisia.

Esittely [+] $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (suorien kulmakertoimet)

Oletus (—) $k_1 = -\frac{1}{4}$ (ensimmäisen suoran yhtälön kulmakerroin)

Päätelmä [+] { esitetään jälkimmäinen suora muodossa $y = kx + b$ alilaskuna }

- $-16x + 4y = 3000$

$\Leftrightarrow$ { lisätään termi 16x yhtälön molemmille puolille }

$4y = 3000 + 16x$

$\Leftrightarrow$ { jaetaan luvulla 4 }

$y = 750 + 4x$

$\Leftrightarrow$ { vaihdetaan termin 4x ja luvun 750 järjestystä }

$y = 4x + 750$

$\square$

… $-16x + 4y = 3000 \Leftrightarrow y = 4x + 750$

Oletus (—) $k_2 = 4$ (yllä olevan yhtälön kulmakerroin)

Päätelmä [+] { todistetaan alilaskuna, että suorat ovat ortogonaalisia osoittamalla, että $k_1 \cdot k_2 = -1$ }

- $k_1 \cdot k_2 = -1$

$\Leftrightarrow$ { sijoitetaan oletukset }

$-\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$

$\Leftrightarrow$ { sievennetään kertolasku }

$-1 = -1$

$\Leftrightarrow$ { yhtäsuuruus on voimassa }

T

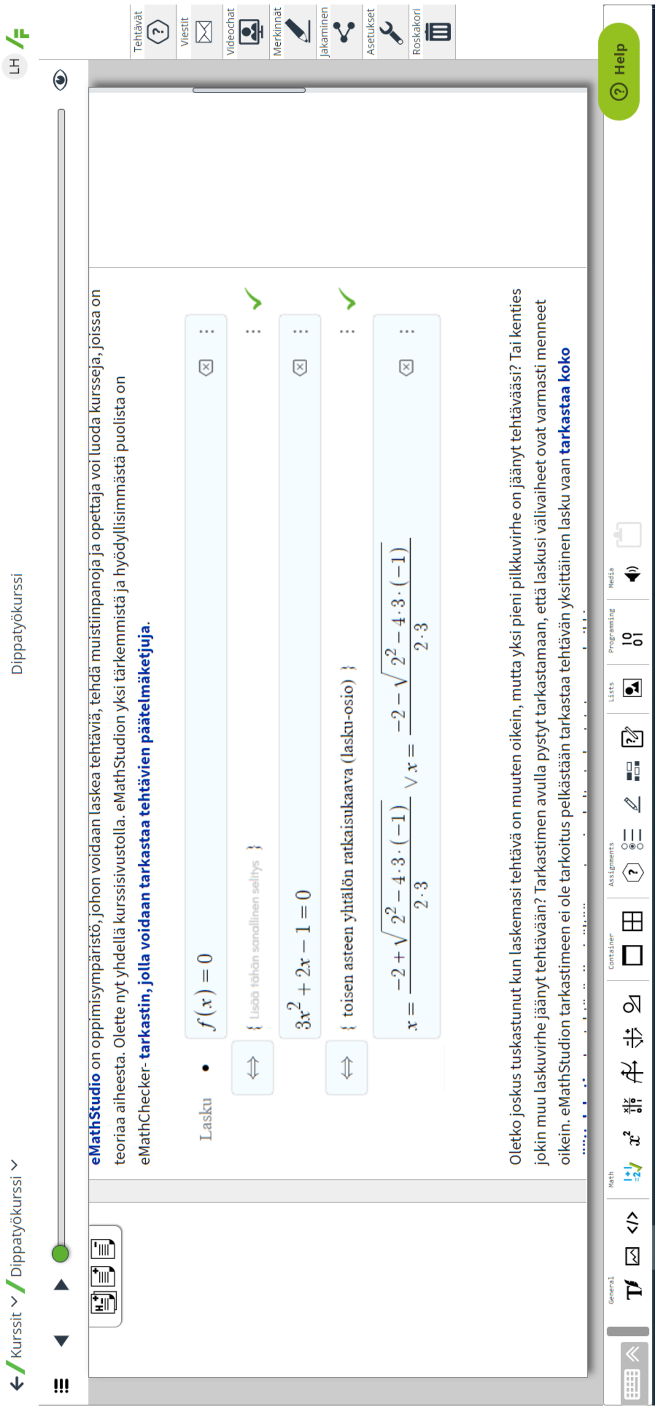
$\square$

… $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow \mathrm{T}$

Päättely todistettu oikeaksi.

Kuva A.2. *Esimerkki 4.1 kirjoitettuna eMathStudiolla*

LIITE B: KOKONAISKUVA EMATHSTUDIOSTA



Kuva B.1. Kokonaiskuva eMathStudiosta

LIITE C: TEHTÄVÄT 1.3 JA 2.3 ESIMERKKIRATKAISUINEEN

Tehtävä 1.3

Paraabelin huippupiste on $(1,1)$ ja eräs piste paraabelilla on $(3,5)$. Määritä paraabelin yhtälö normaalimuodossa.

Esittely	Olkoot	$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ paraabelin huipun koordinaatit (Huomaa, että muuttujat aina ensin esitellään ja sitten lisätään oletukset, jos muuttujista tiedetään jotain enemmän)
Oletus	Oletetaan, että $x_0 = 1 \wedge y_0 = 1$	
Esittely	Olkoot	$x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ piste paraabelilta (Huomaa, että tässä alaindekseillä erotetaan pisteet toisistaan)
Oletus	Oletetaan, että $x_1 = 3 \wedge y_1 = 5$	
Määritelmä	Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	

{ Määritellään paraabelin huippumuotoinen yhtälö. }

ehdolla $f(x) = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0$

Oletus	Oletetaan, että $f\left(x_1\right) = y_1$
Päätelmä	**Askel 1. lasketaan a. (Tämä on päättely-osio alilaskulla. Tässä halutaan, että ohjelmisto tallentaa muistiin mikä saadaan a-kirjaimen arvoksi.)**

- $f\left(x_1\right) = y_1$

$\Leftrightarrow$ { funktion määritelmä }

$a\left(x_1 - x_0\right)^2 + y_0 = 5$

$\Leftrightarrow$ { sijoitetaan arvot }

$5 - 1 = a(3-1)^2$

$\Leftrightarrow$ { sievennetään }

$4 = a \cdot 2^2$

$\Leftrightarrow$ { lasketaan a }

$a = 1$

$\square$

… $f\left(x_1\right) = y_1 \Leftrightarrow a = 1$ (Päättelyosion loppuun kirjoitetaan tulos, jota hyödynnetään myöhemmin. Huomaa ekvivalenssinuoli merkintä!)

Päätelmä **Askel 2. määritellään paraabelin yhtälö**

- $f(x) = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0$

$\Leftrightarrow$ { sijoitetaan lukuarvot }

$f(x) - 1 = 1(x - 1)^2$

$\Leftrightarrow$ { aukaistaan eksponentti }

$f(x) - 1 = x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow$ { ratkaistaan f(x) }

$f(x) = x^2 - 2x + 2$

$\square$

… $f(x) = x^2 - 2x + 2$

Päättely todistettu oikeaksi.

Paraabelin yhtälöksi saatiin siten $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

Kuva C.1. *Opintojakson toteutuksella käytössä ollut eMathStudio-tehtävä 1.3 esimerkkiratkaisulla*

Tehtävä 2.3

Todista, että ylöspäin tai alaspäin aukeavan paraabelin huippupisteen x-koordinaatti on $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Todistus:

Ylöspäin tai alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Paraabelin huipun kohdassa funktion derivaatta on nolla. Lasketaan ensin funktion derivaatta ja sen jälkeen sen nollakohta.

Esittely		$b, c \in \mathbb{R}$
Oletus		$a \neq 0$
Määritelmä		$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
		{ paraabelin yhtälö }
		$f(x) = ax^2 + bx + c$
Lasku	•	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[ax^2 + bx + c\right]$
	$=$	{ } ✓
		$2ax + b$
	$\square$	
Esittely		$x_0 \in \mathbb{R}$
Oletus		$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(x_0\right)\right] = 0$
Lasku	•	$2ax_0 + b = 0$
	$\Leftrightarrow$	{ } ✓
		$2ax_0 + b = 0$

$\Leftrightarrow$ { }

$$2ax_0 = -b$$

$\Leftrightarrow$ { }

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$\square$

Päättely todistettu oikeaksi.

Saatiin siis todistettua, että funktion huipussa x-koordinaatti on $x_0 = -\frac{b}{2a}$, koska kyseisessä pisteessä funktion derivaatta on nolla.

Kuva C.2. *Opintojakson toteutuksella käytössä ollut eMathStudio-tehtävä 2.3 esimerkkiratkaisulla*