

Alexi Virtanen

MITTALAIPAN PAINEHÄVIÖN CFD-SIMULOINTI

Kandidaatintyö

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta

Jussi Aaltonen

Elokuu 2023

TIIVISTELMÄ

Aleksi Virtanen: Mittalaipan painehäviön CFD-simulointi

Kandidaatintyö

Tampereen yliopisto

Konetekniikan tutkinto-ohjelma

Elokuu 2023

Teollisuudessa putkistojen virtamittausten tarkkuudella on merkittävä vaikutus prosessien toimintaan. Suuri osa kaikista tilavuusvirtamittauksista tehdään mittalaipalla, jonka aiheuttama painehäviö on otettava huomioon suunnitteluvaiheessa. Tämän kandidaatintyön tarkoituksena on perehtyä numeeriseen virtauslaskentaan sekä verrata empiiristen ja analyttisten kaavojen avulla laskettuja painehäviön arvojen yhdenmukaisuutta putkistossa CFD-ohjelmistosta saatuihin tuloksiin. Pää tarkoituksena on tutkia mittalaippaa, laskea painehäviö standardin mukaan ja verrata tulosta aikariippumattomalla simuloinnilla saatuun arvoon. Laskentaan käytettiin standardia ISO 5167 (2022) ja simuloinnissa ANSYS Fluent -ohjelmistoa.

Työn ensimmäisissä kappaleissa käsitellään virtauslaskennan, sekä CFD-simuloinnin teoriaa ja laskentaverkon luomiseen liittyviä haasteita. Myöhemmissä kappaleissa perehdytään painehäviöön ja mittalaipan ominaisuuksiin, jonka jälkeen esitellään kaksi tutkittavaa tilannetta. Ensimmäisessä tilanteessa tutkitaan fluidin ja suoran putken seinämän välisen kitkan aiheuttamaa painehäviötä. Toisessa tilanteessa putki oletetaan sileäksi ja tarkastellaan vain mittalaipan aiheuttamaa palautumatonta painehäviötä.

Simuloitujen ja analyttisten tulosten havaittiin vastaavan hyvin toisiaan, minkä lisäksi simuloinnilla saatiin tutkittua virtauksen käyttäytymistä, tutkittua muun muassa virtauksen nopeusprofiilia eri kohdissa putkea ja arvioitua turbulentin putkivirtauksen kehittymismatkaa. Lisäksi saadut tulokset ovat yhteneviä kirjallisuudesta löytyvien tiedon ja kokeellisten tutkimusten kanssa, mikä osoittaa mallien toimivuuden. Tuloksista havaitaan, että laskentamalli arvioi kitkan aiheuttamaa painehäviötä noin 3 % analyttistä tulosta pienemmäksi. Standardin kaavoilla laskettu mittalaipan painehäviön arvo puolestaan oli noin 6 % suurempi CFD-tuloksiin verrattuna. Tuloksiin vaikuttavat todennäköisesti useat mittalaipan geometriaan ja virtaustilanteeseen liittyvät oletukset sekä laskentahilaan liittyvät epätarkkuudet. Tulevaisuudessa eri menetelmillä laskettujen tulosten yhdenmukaisuutta voisi vielä tutkia muuttamalla mittalaipan geometriaa, laskea tuloksia useilla virtausnopeuksilla ja hilatiheyksillä sekä suorittaa kokeellisia tutkimuksia laskentatulosten validointia varten.

Avainsanat: CFD, mesh, turbulenti, putkivirtaus, painehäviö

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Aleksi Virtanen: Simulating orifice plate pressure drop with CFD

Bachelor's thesis

Tampere University

Bachelor's Degree Program in Mechanical Engineering

August 2023

In the industrial sector, the accuracy of flow measurements in pipes has a significant effect on processes. Therefore, it is important to have reliable ways to predict the pressure drop caused by the orifice, which is one of the most common ways to measure rate of flow. The main objective is to study the orifice plate, calculate the pressure drop according to the standard, and compare the result with the value obtained from time-independent simulation. The ISO 5167 (2022) standard was used for calculation, and ANSYS Fluent software was used for simulation.

The first sections of the thesis focus on the theory of laminar and turbulent flows and CFD simulation, as well as the possible challenges involved in a generation of good mesh. Later the characteristics of the orifice plate are studied, followed by the presentation of two cases. In the first case, the pressure drop caused by friction in a straight pipe is calculated. In the second situation, the pipe is assumed to be smooth, and only the irreversible pressure drop caused by the orifice plate is examined.

The results were found to correspond well with each other. The simulation gave additional insights of the flow, such as the velocity profile of the flow at different sections in the pipe and the entrance effects of turbulent flow. The results show CFD -software approximated the pressure loss caused by friction to be higher than analytical equations. The pressure drop across the orifice plate was calculated to be 6% higher than the CFD prediction. This phenomenon is likely caused by the assumptions of the orifice geometry and flow conditions. In the future, the consistency of results could be further studied by altering the geometry of the orifice plate, calculating results at multiple velocities, and conducting experimental studies for comparison of calculation results.

Keywords: CFD, mesh, turbulent, pipe flow, pressure loss

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO	1
2. LAMINAARI JA TURBULENTTI VIRTAUS PUTKESSA	3
3. VIRTAUKSEN ENERGIATARKASTELU	6
4. PUTKIVIRTAUKSEN KITKAKERROIN	7
5. PAINEHÄVIÖ PUTKIVIRTAUKSESSA	10
6. PUTKIVIRTAUKSEN NUMEERINEN MALLINNUS TIETOKONEELLA.....	11
6.1 Numeerisen virtauslaskennan teoriaa	11
6.2 Sopivan laskentaverkon muodostaminen	12
6.3 Virtauksen turbulenssin mallintaminen	14
7. PUTKIVIRTAUKSEN CFD-MALLINNUS JA ANALYYTTINEN RATKAISU.....	15
7.1.1 Kitkan aiheuttaman painehäviön approksimointi putkessa Darcy–Weisbach-yhtälöllä.....	15
7.1.2 Kitkan aiheuttaman painehäviön CFD-simulointi putkessa	16
7.2 Mittalaippa putkessa	18
7.2.1 Mittalaipan painehäviön approksimaatio standardin mukaan	20
7.2.2 Mittalaipan painehäviön CFD-simulointi	22
8. YHTEENVETO JA JOHTOPÄÄTÖKSET	27
LÄHTEET	29

LYHENTEET JA MERKINNÄT

CFD	Computational Fluid Dynamics
RANS	Reynolds Averaged Navier–Stokes equation
SST	Shear Stress Transport

Re	Reynoldsin luku
V	Virtauksen keskimääräinen nopeus ($\frac{m}{s}$)
D	Putken halkaisija (m/s)
ρ	Tiheys (kg/m^3)
μ	Kinemaattinen viskositeetti ($\frac{m^2}{s}$)
L_e	Hydrodynaaminen kehittymismatka (m)
ε	Absoluuttinen karheus (m)
f	Kitkakerroin
K	Kertavastuskerroin
p	Paine (Pa)
∇	Nabla-operaattori

1. JOHDANTO

Teollisuudessa useiden prosessien toiminta perustuu nesteisiin ja kaasuihin eli fluideihin, joiden siirtämiseen käytetään putkistoja (Cengel & Cimbala 2006, s. 4–5). Putkistoissa virtaavan fluidin tilavuusvirran tarkka mittaaminen on prosessin toiminnan kannalta tärkeää. Esimerkiksi voimalaitoksilla virtauksia muuttamalla säädetään turbiinitehoa ja kemianteollisuudessa sekoitussuhteita. Suurin osa kaikista tilavuusvirtamittauksista teollisuudessa tehdään mittalaippaa hyödyntämällä (Dong et al. 2018, s. 52–62, Golijanek-Jędrzejczyk et al. 2019, s. 1 mukaan).

Putkiverkostoa tai muuta teknistä kokonaisuutta suunniteltaessa on selvitettävä virtauksen ja ympäröivien olosuhteiden määrittämät rajoitteet rakenteille ja otettava ne huomioon. Luotettava tapa testata uutta järjestelmää olisi tehdä siitä prototyyppi ja suorittaa kokeellisia testejä. Käytännössä haluttuun lopputulokseen pääseminen vaatii kuitenkin useiden mallien rakentamista, mikä olisi liian kallista ja aikaa vievää. Teollisuudessa suunnittelu alkaakin tavoitteiden määrittelyn jälkeen iteratiivisella laskennalla, jossa pyritään löytämään tarvittavat ominaisuudet järjestelmälle.

Perinteisesti laskentaa tehdään alkuvaiheessa kokeellisiin tuloksiin perustuvilla kaavoilla. Analyttisissä kaavoissa on tyypillisesti vastuskertoimia, jotka perustuvat arvioihin tai aikaisempiin kokeisiin, eivätkä kaavat tuota kovinkaan tarkkoja tuloksia. Painehäviön suuruutta lopullisessa järjestelmässä on vaikea ennustaa erityisesti kaksifaasivirtauksille, joissa pienillä lähtöpaineilla painehäviön suuruus voi olla 3–5-kertainen tavallisen höyryvirtauksen häviöön verrattuna (Miranda & López, 2011, s. 7).

Tietokoneiden kehityksen seurauksena markkinoille on tullut ohjelmistoja, joilla virtauslaskentaa voidaan suorittaa numeerisesti simuloimalla. Numeerisilla virtauslaskentaohjelmistoilla (CFD) luoduista malleista on tullut yksi keino arvioida putkessa kulkevan virtauksen käyttäytymistä jo suunnitteluvaiheessa. CFD-ohjelmistoilla voidaan luoda malleja ilman perinpohjaista tietämystä Navier–Stokesin yhtälöistä.

Tämän työn tarkoituksena on perehtyä numeeriseen virtauslaskentaan, mittalaipan aiheuttamaan painehäviöön putkessa ja verrata analyttisillä sekä standardin ISO 5167 (2022) mukaisilla kaavoilla laskettuja tuloksia CFD-ohjelmiston ennusteisiin. Kappaleissa 2–5 käsitellään putkivirtauksiin liittyvää teoriaa, jonka jälkeen perehdytään pintapuolisesti numeerisen virtauslaskennan perusteisiin. Lopuksi esitetään kaksi tapausta,

joissa aiheutuvaa painehäviön suuruutta pyritään arvioimaan. Työn tieto pohjautuu oppikirjoihin, kurssimateriaaleihin, tieteellisiin julkaisuihin, standardeihin ja CFD-ohjelmistotarjoajien dokumentaatioon. Tämän kandidaatintyön tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Miten kirjallisuudessa esiintyvillä kaavoilla lasketut painehäviöiden arvot putkessa vertautuvat CFD -ohjelmistolla saatuihin tuloksiin?
2. Mitä asioita CFD-mallin rakentamisessa on otettava huomioon?
3. Millaista lisätietoa virtauksen käyttäytymisestä voidaan saada CFD-simulaatiolla?

2. LAMINAARI JA TURBULENTTI VIRTAUS PUT- KESSA

Tässä kandidaatintyössä tutkittavan mittalaipan toiminnan ymmärtäminen vaatii taustatietoa virtausopista. Sekä analyyttisessä ratkaisussa että CFD-ohjelmistolla luodussa mallissa käytetään useita oletuksia ja kokeellisiin tutkimuksiin perustuvia arvoja, joiden ymmärtäminen perustuu virtausopin perusteisiin.

Virtaukset voivat olla laminaarisia, turbulenttisia tai osittain turbulenttisia, sen mukaan kuinka virtauspartikkelit etenevät. Laminaarissa virtauksessa fluidielementit etenevät suoraviivaisesti kerroksissa, joiden nopeus voi toisaalta vaihdella. Turbulenttisessa virtauksessa virtauspartikkelit etenevät sattumanvaraisesti eri suuntiin vaihtuvien nopeuksien. Näiden ääripäiden välistä tilannetta kutsutaan osittain turbulentiksi virtaukseksi, jossa esiintyy kummallekin tyypillisiä ominaisuuksia. (Cengel & Cimbala. 2006, s. 11, 323)

Virtauksen käyttäytymistä kuvataan dimensiottomalla luvulla, jota kutsutaan Reynoldsin luvuksi (Re)

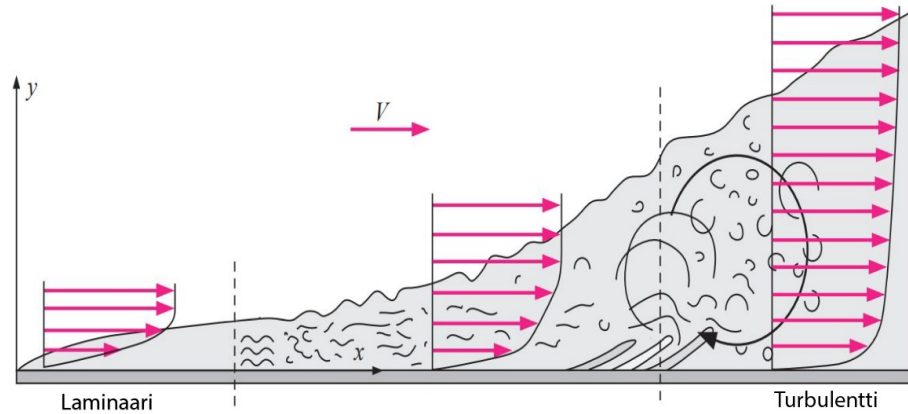
$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}, \quad (1)$$

jossa ρ on fluidin tiheys [kg], V virtauksen keskimääräinen nopeus, D virtauksen karakteristinen mitta [m] ja μ kinemaattinen viskositeetti [$\frac{m^2}{s}$]. Luku voidaan esittää myös dynaamisen viskositeetin ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$) avulla. (White, 2016, s. 24)

Reynoldsin luvun perusteella saadaan tietoa virtauksen etenemismuodosta. Hyvin pienillä Reynoldsin luvuilla, kuten $Re \approx 1$, puhutaan ryömivästä virtauksesta. Tällöin kyse voi olla viskositeetiltään hyvin korkeasta nesteestä tai hitaasti etenevästä virtauksesta. (Durbin & Medic, 2010, s. 108) Hyvin korkean Reynoldsin luvun virtaukset ovat tyypillisesti turbulenttisia, ja näiden ääripäiden väliset virtaukset laminaarisia. Pyöreissä putkissa virtauksille pätee yleisesti, että virtaus on laminaarista Reynoldsin luvuilla $Re \leq 2300$ ja turbulenttista kun $Re > 4000$ (Cengel & Cimbala. 2006, s. 324). Näiden välisellä siirtymäalueella virtauksella voi olla sekä laminaarisia että turbulenttisia ominaisuuksia.

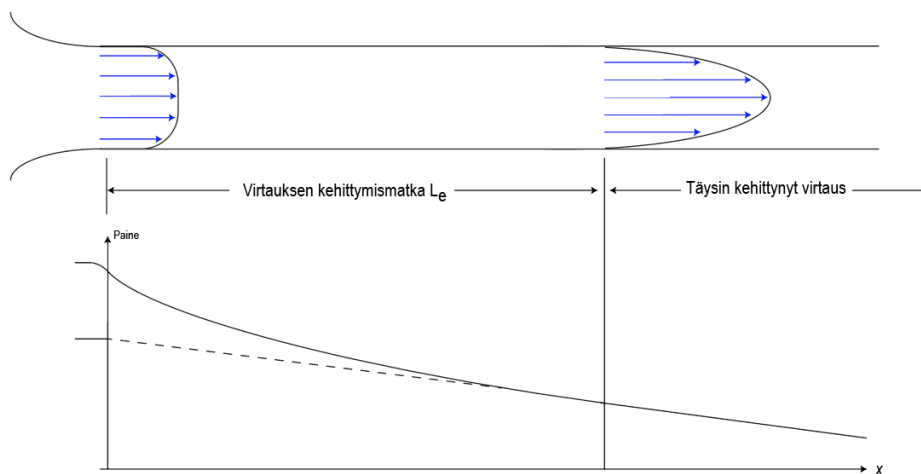
Kokeelliset tutkimukset todistavat, että putkivirtauksessa nesteen nopeus ei ole kaikkialla yhtä suuri, vaan välittömästi putken seinämällä virtausnopeus on nolla. Rajakerrokseksi kutsutaan välimatkaa seinämän ja sen pisteen välillä, jossa saavutetaan 99 % päävirtauksen nopeudesta. Virtausnopeus kasvaa seinämältä keskelle mentäessä ja saavuttaa päävirtauksen huippuarvon putken poikkileikkauksen puolivälissä. Tätä nopeuksien eroa putken eri pisteissä kutsutaan nopeusprofiiliksi. (Cengel & Cimbala. 2006,

s. 6) Kuvasta 1 voidaan havaita, että laminaarin virtauksen nopeusprofiili on parabolinen. Turbulentilla virtauksella esiintyvät pyörteet tasoittavat virtauksessa nopeuseroja ja suurin osa nopeuden muutoksesta keskittyy putken reunoille.



Kuva 1. Rajakerroksen paksuus ja nopeusprofiilin muoto eri tapauksissa. Y-akselia on liioiteltu. Muokattu lähteestä (Cengel & Cimbala. 2006, s. 514).

Putkivirtauksissa virtaus vaatii riittävän pitkän matkan, jotta nopeusprofiili saavuttaa vakiotilan ja voidaan puhua täysin kehittyneestä virtauksesta. Täysin kehittyneellä virtauksella nopeusprofiili pysyy likimäärin vakiona ja painehäviö muuttuu lineaarisesti pituus suunnassa. Kuvassa 2 laminaari virtaus muuttuu rajakerrosten yhdistytyä täysin kehittyneeksi matkalla L_e (ANSYS, 2020). Turbulentissa virtauksessa nopeusjakauma ei saavuta laminaarille virtaukselle ominaista paraabelimaista muotoa, vaan nopeusjakauman muoto jää tylppämäisemmäksi suurilla Reynoldsin luvuilla (White, 2016, s. 461; Salama, 2021, s. 8).



Kuva 2. Laminaarin virtauksen nopeusjakauman kehittyminen ja painehäviö putkessa, muokattu lähteestä (White, 2016, s. 345).

Putkivirtauksen hydrodynaamiseen kehittymismatkaan vaikuttaa ainoastaan Reynoldsin luku. Useissa tilanteissa virtaava neste on kuitenkin vettä ja putken halkaisija pysyy vakiona, jolloin kehittymismatkaan vaikuttaa vain virtauksen keskinopeus. Laminaarille virtaukselle kehittymismatka voidaan laskea kaavalla

$$\frac{L_e}{D} \approx 0,06 \cdot Re_d,$$

jossa D on putken halkaisija ja Re_d Reynoldsin luku. Vastaava kaava voidaan johtaa myös turbulentille virtaukselle. Virtauslaskentaohjelmistoilla laskettujen tulosten perusteella kehittymismatka turbulentille virtaukselle voidaan laskea

$$\frac{L_e}{D} \approx 1,6 \cdot Re_d^{\frac{1}{4}},$$

kun $Re_d \leq 10^7$. (White, 2016, s. 345–346) Kirjallisuudesta löytyy isoteremiselle turbulentin virtauksen kehittymismatkalle useita arvioita eri Reynoldsin luvuilla.

Taulukko 1: Hydrodynaaminen kehittymismatka turbulentissa putkivirtauksessa eri lähteiden mukaan. Muokattu lähteestä (Zimmer et al. 2011).

Kehittymismatka (putken halkaisijaa)	Reynoldsin luku	Lähdeviite
25–40	$3,0 \cdot 10^3 - 3,3 \cdot 10^6$	Nikuradse (1932)
30	$5,0 \cdot 10^4 - 5,0 \cdot 10^5$	Laufer (1954)
50–80	$1,0 \cdot 10^3 - 1,0 \cdot 10^4$	Patel & Head (1969)
vähintään 131	$3,0 \cdot 10^4 - 3,5 \cdot 10^7$	Zagarola & Smits (1998)
70	$3,0 \cdot 10^4 - 1,0 \cdot 10^5$	Zanoun et al. (2009)

Taulukosta 1 havaitaan, että useat kokeellisiin tutkimuksiin perustuvat lähteet antavat huomattavasti suurempia arvoja turbulentin virtauksen kehittymismatkalle Whiten (2016) yhtälöön verrattuna välillä $1,0 \cdot 10^3 - 3,5 \cdot 10^7$. Tässä työssä kehittymismatkaa ennen mittalaippaa arvioitiin Zanoun et al. (2009) mukaan.

3. VIRTAUKSEN ENERGIATARKASTELU

Virtaukset voidaan jakaa stationaarisiiin ja epästationaarisiiin, sekä puristuviin ja puristumattomiin. Stationaarisessa virtauksessa virtauspartikkeleiden nopeus ja suunta voivat vaihdella tarkastelupisteen mukaan, mutta ne eivät muutu ajan funktiona. Tällaisia virtauksia ovat esimerkiksi laminaarit putkivirtaukset, jossa tilavuusvirta pysyy vakiona, eikä putkea häiritä ulkoisesti. Toisaalta, jos putken sisääntulopainetta nostetaan tai putki suljetaan, virtauksen luonne muuttuu hetkellisesti epästationaariseksi. Stationaarille, puristumattoman virtauksen kahden pisteen välille voidaan johtaa Bernoullin yhtälö:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2, \quad (2)$$

jossa p_1 ja p_2 ovat tarkastelupisteiden paineet, z korkeudet nollatasosta, V virtauksen keskinopeudet, g putoamiskiihtyvyys ja ρ nesteen tiheys (Cengel & Cimbala. 2006, s. 187–189) Bernoullin yhtälön käytettävyys ulottuu vain tilanteisiin, joissa virtaus on stationaarista ja puristumatonta. Lisäksi oletetaan, että virtauksen lämpötila ei juurikaan muutu, eikä virtaukseen tehdä työtä tarkasteltavalla matkalla (White, 2016, s. 176).

4. PUTKIVIRTAUKSEN KITKAKERROIN

Putkivirtauksen painehäviöihin liittyvissä kaavoissa esiintyy usein yksikötön termi f , jolla viitataan kitkakertoimeen virtauksessa. Kitkakerroin riippuu useista tekijöistä, kuten virtaavan fluidin tiheydestä, putken halkaisijasta ja virtausnopeudesta, sekä putken karheudesta. Kitkakerroin laminaarille virtaukselle pyöreässä putkessa voidaan laskea Reynoldsin lukua hyödyntämällä kaavasta

$$f = \frac{64\mu}{\rho DV_k} = \frac{64}{Re}, \quad (3)$$

jossa μ on dynaaminen viskositeetti, ρ fluidin tiheys, D putken halkaisija, V_k virtauksen keskinopeus ja Re Reynoldsin luku (Cengel & Cimbala. 2006, s. 329–330). Yhtälössä ei esiinny putken ekvivalenttikarheutta, sillä laminaarin rajakerroksen vuoksi putken karheudella on merkityksettömän pieni vaikutus (Cengel & Cimbala. 2006, s. 582).

Turbulentissa virtauksessa kaaottisen nopeusjakauman vuoksi pienikin muutos pinnan karheudessa kasvattaa kitkakerrointa ja sen seurauksena lisää painehäviötä (Cengel & Cimbala. 2006, s. 582). Virtaus on usein turbulenttista käytännön tilanteissa, kuten vesiputkissa ja teollisuuslaitoksissa.

Abdelmonem (2020) mukaan teräs-, rauta-, betoni- ja muoviputkien karheus kasvaa ajan myötä. Kokeellisen tutkimuksen perusteella teräksisen juomavesiputken karheus kasvoi 50 vuoden aikana noin 40-kertaiseksi ja raakavesiputken jopa 100-kertaiseksi (Abdelmonem & Shabayek, 2020). Putkistovirtauksia simuloimassa on siis putkimateriaalin lisäksi otettava huomioon putken ikä. Echávez (1997) huomauttaa, että vesiputkella karheusarvon muuttumiseen vaikuttaa merkittävästi siinä virtaavan veden ominaisuudet. Taulukossa 2 on esitetty karheusarvoja joillekin yleisistä putkimateriaaleista. Cengel & Cimbala (2006) huomauttaa, että arvot voivat poiketa todellisuudesta jopa ± 60 %.

Taulukko 2: Putken materiaalien sisäpintojen karheuksia. Muokattu lähteistä (Cengel & Cimbala. 2006; Farshad & Rieke, 2006).

Putken materiaali	Karheus ε (mm)
Lasi, muovi	0 (sileä)
Betoni	0,9–9
Kupari tai messinki	0,0015
Valurauta	0,26
Sinkitty rauta	0,15
Ruostumaton teräs	0,002
Kaupallinen teräs	0,045
Hiottu hiiliteräs	0,0125
Lasikuituvuoraus	0,038

Yleisesti tunnettu yhtälö kitkakertoimen määrittämiseen täysin turbulentille virtaukselle on implisiittinen Colebrookin yhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right), \quad (4)$$

jossa f on Darcyn kitkakerroin, Re Reynoldsin luku ja ε/D suhteellinen karheus (Cengel & Cimbala. 2006, s. 384). Absoluuttisella karheudella ε tarkoitetaan putken pinnan epätasaisuutta millimetreinä. Kitkakertoimen ratkaiseminen yhtälöstä vaatii iteratiivista laskentaa, joka voidaan suorittaa esimerkiksi Excel-tilaukkolaskentaohjelmistolla.

Joissakin tilanteissa, esimerkiksi putkiverkostosilmukassa iteroinnin suorittaminen Colebrookin yhtälölle on työlästä. Ratkaisu saattaa vaatia sekä Colebrookin että Hardy–Cross-menetelmän samanaikaista iterointia. Colebrookin yhtälöstä onkin johdettu useita eksplisiittisiä approksimaatioita, joiden ratkaisu ei vaadi iterointia (Brkić, 2011, s. 28). Näistä yhtälöistä kirjallisuudessa esiintyy usein Haalandin yhtälö, jonka käyttö soveltuu nesteiden ja kaasujen tarkasteluun. Arvion mukaan Haalandin yhtälö eroaa tarkkuudeltaan alle 2 % Colebrookin yhtälöön verrattuna. Haalandin yhtälöstä saatua tulosta voidaan käyttää ensimmäisenä arvauksena Colebrookin yhtälön iteroinnissa jos halutaan mahdollisimman tarkka arvo kitkakertoimelle ja samalla pitää iterointiprosessi lyhyenä. (Cengel & Cimbala. 2006, s. 341)

Haalandin yhtälö voidaan kirjoittaa nesteille muodossa

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1,8 \log \left[\frac{6,9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} \right)^{1,11} \right], \quad (5)$$

jossa f on Darcyn kitkakerroin, Re Reynoldsin luku ja ε/D suhteellinen karheus. (Brkić, 2011, s. 13)

5. PAINEHÄVIÖ PUTKIVIRTAUKSESSA

Putkessa virtausvastus aiheutuu pääosin seinämien ja virtaavan nesteen välille syntyvästä (major friction) kitkasta. Putkenmutkat, venttiilit, supistajat ja muun muassa haaurumat aiheuttavat paikallisia virtausvastuksia. Putkivirtauksen kerhahäviöistä käytetään englanninkielisessä kirjallisuudessa usein termiä ”minor loss”. Armfield (2012) mukaan paikallisten virtausvastusten merkittävyyttä ilmaisevat kertavastuskertoimet määritetään usein laskennan monimutkaisuuden takia kokeellisesti. Ahmari & Kabir (2019) huomauttavat, että nimestään huolimatta kertavastuksista aiheutuvat häviöt voivat olla huomattavasti suurempia kuin kitkasta aiheutuva häviö, kun putki on lyhyt tai häviöitä aiheuttavia komponentteja on putkistossa useita. Riittävän tarkkojen tulosten saamiseksi on esimerkiksi venttiilien vaikutuksen huomioon ottava kertavastuskerroin valittava huolella tilanteen mukaan.

Täysin kehittyneelle putkivirtaukselle voidaan laskea kitkasta aiheutuva painehäviö käyttämällä Darcy–Weisbachin yhtälöä

$$\Delta P = \left(f \frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{\rho V_k^2}{2}, \quad (6)$$

jossa f on kitkakerroin, L putken pituus, pyöreälle putkelle D on halkaisija, ρ fluidin tiheys, V_k virtauksen keskinopeus ja $\sum K$ kertahäviöiden summa. (Cengel & Cimbala. 2006, s. 329, 349).

Khaleefan (2019) kokeellisessa tutkimuksessa havaittiin, että analyttisesti lasketut painehäviöiden arvot olivat todellisia arvoja pienempiä, kun tutkittiin putkenmutkista ja venttiilistä koostuvaa putkistoa. Virtauksen nopeuttaminen putkessa aiheutti sekä pää- että paikallisvastusten kasvamista.

6. PUTKIVIRTAUKSEN NUMEERINEN MALLIN- NUS TIETOKONEELLA

Virtausten simulointiin on kehitetty useita tietokoneohjelmistoja, jotka kykenevät approksimoimaan haastaviakin virtausolosuhteita. Käytettävä ohjelmisto ja esimerkiksi turbulenssimallin valinta riippuvat tutkittavasta tilanteesta, minkä vuoksi käyttäjällä on oltava jonkin verran tietoa virtauslaskennan teoriasta ja erilaisista malleista.

6.1 Numeerisen virtauslaskennan teoriaa

Numeerinen virtauslaskenta perustuu Navier–Stokesin yhtälöihin, jotka kuvaavat kaasun tai nesteen virtausta. Navier–Stokes-yhtälöt koostuvat kolmesta säilymislaista, joita ovat: jatkuvuusyhtälö, X, Z ja Y -suuntaiset liikemääräyhtälöt, sekä energian säilymistä kuvaava energiayhtälö. Ne ottavat huomioon paineen, lämpötilan, tiheyden ja nopeuden riippuvuuden toisiinsa, sekä viskositeetin vaikutukset. (Nasa.gov, 2021) Jatkuvuusyhtälö kuvaa fluidin virtauksen massan säilymistä ajan kuluessa kontrollivolumin sisällä. Jatkuvuusyhtälö voidaan esittää muodossa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (7)$$

jossa ρ on fluidin tiheys [$\frac{kg}{m^3}$], t on aika [s] ja $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$ massavirran divergenssi, joka kuvaa massavirran muutosta ajan ja paikan suhteen (White, 2016, s. 225). Oletetaan, että fluidi on kokoonpuristumatonta, jolloin yhtälö 7 yksinkertaistuu muotoon

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (8)$$

Liikemäärän säilymistä kuvaava yhtälö voidaan kirjoittaa kokoonpuristumattomalle fluidille muodossa

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \rho \bar{\mathbf{F}}, \quad (9)$$

Kolmiulotteisessa koordinaatistossa yhtälö voidaan jakaa X, Y ja Z suuntiin:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x, \quad (10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y, \quad (11)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z. \quad (12)$$

Yhtälöissä 10, 11 ja 12 ρ on kokoonpuristumattoman fluidin tiheys, u , v ja w nopeuskomponentit kolmeen koordinaattiakselin suuntaan, p on fluidin paine, μ dynaaminen viskositeetti ja g_x , g_y ja g_z kiihtyvyystermit vastaaviin suuntiin. (Cebeci et al. 2005, s. 43; Cengel & Cimbala. 2006, s. 430)

Kolmas Navier–Stokes-yhtälöistä on energiayhtälö, joka kuvaa energian säilymistä termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön mukaisesti. Yhtälö voidaan lausua muodossa

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\mathbf{k}\nabla T) + \Phi, \quad (13)$$

jossa ρ on fluidin tiheys, p paine, T lämpötila ja Φ kuvaa lämmön syntymistä fluidin leikkausvoimista johtuen. (White, 2016, s. 240)

Reaalimaailman virtaukset voidaan esittää näillä differentiaaliyhtälöillä 7,9 ja 11, joiden ratkaisu on käytännössä liian vaikeaa. Numeerisessa virtauslaskennassa differentiaaliyhtälöt diskretisoidaan eli rakennettu malli jaetaan pieniin laskentakoppeihin ja fluidin ominaisuudet lasketaan kopeissa likimääräisesti approksimoimalla perusyhtälöiden osittaisderivaattoja (Heidelberg, 2008, s. 429). Laskentaa varten luotujen koppien joukkoa kutsutaan laskentahilaksi tai -verkoksi. Englanniksi laskentahilasta käytetään nimitystä mesh tai grid. (Siikonen, 2014, s. 35). Hyvän laskentaverkon luominen on yksi CFD-laskennan haasteista, johon palataan myöhemmissä kappaleissa.

Haastavien yhtälöiden approksimoimiseksi on kehitetty useita tietokoneohjelmia, joita yleisesti kutsutaan virtausratkaisijoiksi tai CFD-ohjelmistoiksi (computational fluid dynamics). Usein kirjallisuudessa mainittuja ja tutkimuksissa käytettyjä kaupallisia ohjelmistoja ovat esimerkiksi ANSYS Fluent, NX Flow, SOLIDWORKS Flow Simulation ja Simcenter STAR-CCM+. Lisäksi eräs yleisesti tunnettu avoimen lähdekoodin ohjelma on OpenFOAM. OpenFOAM on oikeastaan kirjasto erilaisille numeerisille ratkaisumenetelmille ja muita mainittuja haastavampi käyttää (Siikonen, 2014, s. 16). OpenFOAM:lla ei kuitenkaan ole mahdollista piirtää 3D-geometrioita, joten malli tarvitsee tehdä toisella ohjelmistolla. Simcenter mahdollistaa yksinkertaisimpien geometrioiden piirtämisen, mutta käytännöllisempää on piirtää geometria esimerkiksi Siemens NX:llä ja tuoda valmis malli haluttuun simulointityökaluun. Suunnitteluohjelmistoilla luodut geometriatiedosto voidaan monissa tapauksissa avata lähes missä tahansa virtausratkaisijassa. Siemens NX ja Solidworks Flow simulation ovat vain lisäosia alkuperäiseen ohjelmistoon.

6.2 Sopivan laskentaverkon muodostaminen

Numeerista ratkaisua varten tarvitaan tietokoneella piirretty malli, jonka perusteella laskentahila luodaan. Simuloitava fluidi kulkee yleensä kaksi- tai kolmiulotteisen mallin läpi.

Usein käytettävää geometriaa on yksinkertaistettava, jotta verkon laadusta saadaan riittävän hyvä ja vältetään epärealistisilta tuloksilta. Laskentaverkon luominen tarkoittaa geometrian diskretisointia pieniin yksittäisiin laskentakoppeihin. Kopeista voidaan tehdä eri kokoisia ja muotoisia, mikä vaikuttaa suoraan simuloinnin laskennan kestoon ja tarkkuuteen. Koppien tulee olla kooltaan riittävän pieniä, jotta laskennassa päästään tarvittavan suureen tarkkuuteen. (Simscale, 2022). Monet ohjelmistot luovat hiloja lähes automaattisesti ilman, että käyttäjän tarvitsee juurikaan tietää esimerkiksi laskentakoppien muodoista. Ensimmäiseen automaattisesti luotuun hilaan ei kuitenkaan kannata tyytyä, vaan epätarkkojen tulosten välttämiseksi on syytä tarkistaa verkon laatu ja tehdä tarvittavia muutoksia. Sopivien muutosten tekeminen vaatii kuitenkin tietotaitoa laskentakoppien muotoon liittyen.

Sopivan laskentaverkon muodostamiseksi Simscale (2021) kehottaa huomioimaan viisi asiaa

1. Yksinkertainen suljettu geometria, jossa ei ole teräviä kärkiä tai fysikaalisesti mahdottomia päällekkäisyyksiä
2. Sopiva laskentakoppien koko ja vinouden (skewness) minimointi
3. Laskentaverkon tihentäminen kohdissa, jossa laskentatarkkuus on simuloinnin tulosten kannalta tärkeää
4. Laskentaverkon hienosäätö rajakerroksessa ja $Y+$ arvon tarkastelu pintojen lähellä
5. Laskentaverkon tarkkuuden riittävyyden arviointi simulointitulosten keskihajontaa hyödyntämällä

Simscale (2021) mainitsema vinoutuminen tarkoittaa laskentakopin epäsuhtaisuutta muihin koppeihin, mikä vaikuttaa tulosten tarkkuuteen. Useimmissa tilanteissa on hyvä jos laskentaverkon suurin vinouden arvo on alle 0,95 tai ortogonaalisuus vähintään 0,1 (ANSYS, 2011).

Taulukko 3: Laskentaverkon vinouden spektri. Muokattu lähteestä (ANSYS, 2011).

Loistava	Erittäin hyvä	Hyvä	Kohtalainen	Huono	Kelvoton
0–0,25	0,25–0,50	0,50–0,80	0,80–0,94	0,95–0,97	0,98–1,00

Laskentahila voi olla joko rakenteellinen tai rakenteeton. Rakenteellisessa verkossa domaini on jaettu mahdollisimman yksinkertaisiin säännöllisiin muotoihin, kuten kolmioihin tai suorakulmioihin järjestäytyneellä tavalla. Rakenteettomassa verkossa käytetään puolestaan useita epäsäännöllisiä muotoja, kuten kolmioita, nelikulmioita ja tetraedreja, jotka on asetettu vaihteleviin suuntiin. Siikosen (2014) mukaan rakenteellinen verkko on useissa tapauksissa tarkempi, mutta monimutkaisille geometrioille sen luominen voi olla haastavaa ja aikaavievää. Rakenteettomat hilat eivät tuota yhtä tarkkoja tuloksia, mutta monimutkaisissa tilanteissa sen käyttö voi olla järkevää ajan säästämiseksi (Bono & Awruch, 2007).

Useissa CFD-ohjelmistoissa on mahdollista luoda hybridiverkko, jossa on sekä rakenteelliselle että rakenteettomalle laskentaverkolle tyypillisiä ominaisuuksia. Hybridiverkossa voidaan esimerkiksi hyödyntää tetraedrimuotoja monimutkaisilla laskentapinnoilla ja tetraedreja muualla verkossa. Dyedov et al. (2009) mukaan monitahokkaista tai tetraedreistä koostuvan laskentaverkon tarkkuutta voidaan parantaa käyttämällä rajakerroksessa prismaattisia laskentakoppeja.

6.3 Virtauksen turbulenssin mallintaminen

Virtauspartikkeleiden sattumanvarainen käyttäytyminen tekee turbulentin virtauksen mallintamisesta haastavaa. Pienimmät turbulenssipyörteet ovat kokoluokkaa 0,1 mm – 0,01 mm. Esittäjänsä mukaan nimettyjen Kolmogorovin mikroskaalojen tarkka mallinnus vaatisi, että laskentakopit ovat pyörteitä pienempiä, mikä olisi laskennallisesti äärimmäisen vaativaa. Turbulenssin mallintamiseen onkin kehitetty useita malleja, joiden avulla turbulenssin vaikutusta pystytään arvioimaan. (Versteeg & Malalasekera, 2007, s. 6, 42–43).

Virtauslaskentaohjelmistot käyttävät Navier–Stokes Reynolds-keskiarvotettujen yhtälöiden (RANS) ratkaisemiseen turbulenssimalleja, joita hyödyntämällä yhtälöt saadaan ratkaistavaan muotoon. Tässä kandidaatintyössä turbulenssin mallintamiseen käytettiin SST $k - \omega$ -mallia, joka on yksi yleisesti käytetyistä RANS -turbulenssimalleista. Malli yhdistää matalan Reynoldsin luvun virtauksille sopivan $k - \omega$ -mallin ja turbulenteille virtauksille soveltuvan $k - \varepsilon$ -mallin hyvät ominaisuudet. SST -mallissa putkivirtauksen rajakerroksia mallinnetaan $k - \omega$ -mallilla, ja keskivaihetta $k - \varepsilon$ -mallilla. (Menter, et al. 1992, s. 2–3). Turbulenssin simulointiin on olemassa myös muita malleja, mutta ne ovat vähemmän käytettyjä kuin RANS -mallit. Hyödyllisimmät turbulenssimallit ovat tarkkoja, soveltuvat moniin eri tilanteisiin ja ovat riittävän yksinkertaisia (Versteeg & Malalasekera, 2007, s. 66).

7. PUTKIVIRTAUKSEN CFD-MALLINNUS JA ANALYYTTINEN RATKAISU

Putkivirtauksissa virtaavan fluidin ja putken ominaisuuksilla on merkittävä vaikutus painehäviön suuruuteen. Yksinkertaisissa tapauksissa painehäviötä voidaan arvioida kaavoista laskemalla, mutta monimutkaisissa tilanteissa simuloinnissa on etunsa. Laskentamallin on kuitenkin oltava riittävän tarkka, jotta tuloksia voidaan pitää luotettavina.

7.1.1 Kitkan aiheuttaman painehäviön approksimointi putkessa Darcy–Weisbach-yhtälöllä

1 metriä pitkän putken läpi virtaa vettä. Putki on kaupallista terästä ja sisähalkaisija on 20 mm. Virtauksen keskimääräinen nopeus putken alkupäässä on 1 m/s, lämpötila 20°C. Vedelle $\mu = 1,0016 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ja $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$. Kyseessä on suora putki ilman paikallisia virtausvastuksia, joten $\sum K = 0$. Taulukon 2 perusteella putken karheus on $\varepsilon = 0,045 \text{ mm}$. Oletetaan virtauksen nopeusprofiili virtauksen sisäänmenoaukolla täysin kehittyneeksi. Reynoldsin luku tilanteelle voidaan laskea yhtälöstä 1:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu},$$

missä $\rho = 998,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $V = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $D = 20 \text{ mm}$ ja $\mu = 1,0016 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Luvut sijoittamalla tulokseksi saadaan $Re_1 \approx 19963$.

$Re_1 \gg 4000$, joten Cengel & Cimbala. (2006) mukaan virtaus on selvästi turbulenttisella alueella. Stationäärille, turbulentille virtaukselle voidaan ratkaista kitkakerroin yhtälöstä 4 iteroimalla:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,7 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right).$$

Yhtälöä iteroitiin Excel-taulukkolaskentaohjelmiston Goal Seek -funktioilla. Kitkakertoimelle annettiin alkuarvaukseksi 0,01 ja yhtälön vasemman ja oikean puolen erotukseksi tavoiteltiin lukua 0. Iteroinnin tuloksena kitkakertoimelle saatiin arvo $f = 0,030275303$.

Painehäviö voidaan nyt laskea Darcy–Weisbachin yhtälöä hyödyntämällä:

$$\Delta P = \left(f \frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{\rho V_k^2}{2},$$

jossa $f = 0,030275303$, $L = 1 \text{ m}$, $D = 20 \text{ mm}$, $\sum K = 0$, $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$ ja virtauksen nopeus $V_k = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Painehäviöksi (ΔP) metrin putkessa saadaan noin 755 Pascalia.

Putkivalmistaja SANHALta löytyy julkinen katalogi juomaveden jakeluun tarkoitettujen putkien painehäviöistä. Sisähalkaisijaltaan 20 mm putkelle painehäviö on taulukon 1.1.1 arvoja interpoloimalla noin $718,4 \text{ Pa/m}$, kun virtauksen nopeus on $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja veden lämpötila 10°C . SANHAN mukaan putkien keskimääräinen karheus on $0,007 \text{ mm}$, mikä johtaa hie-man pienempiin painehäviöihin tässä työssä laskettuihin tuloksiin verrattuna. Taulukon arvojen perusteella voidaan todeta, että laskettu painehäviö on eroaa noin 5 % putkisto-valmistajan julkaisemasta arvosta.

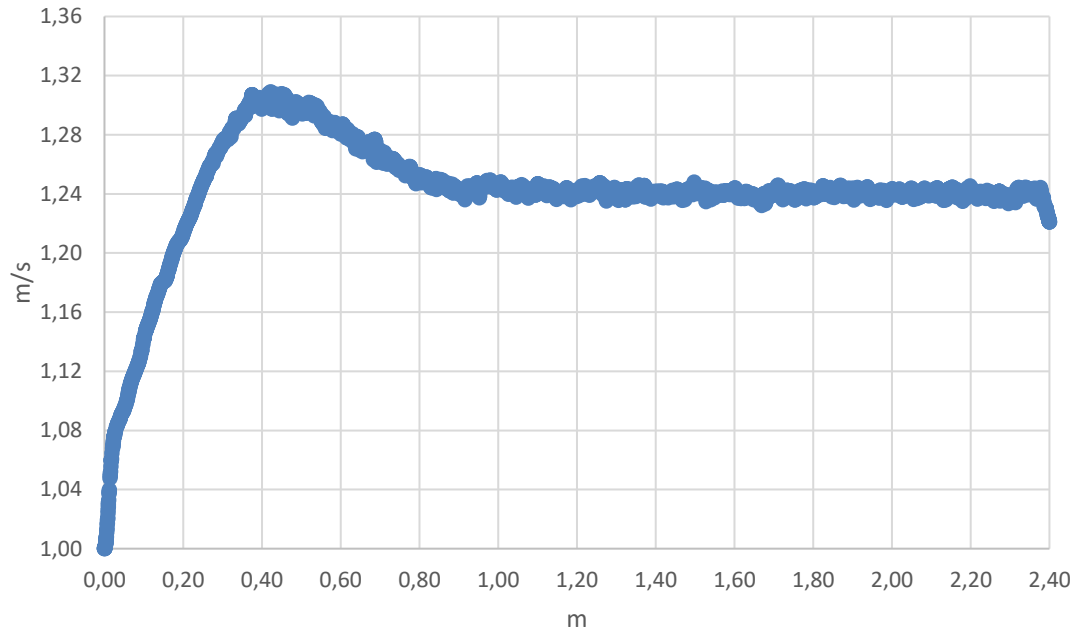
7.1.2 Kitkan aiheuttaman painehäviön CFD-simulointi putkessa

Painehäviön laskentaa varten ANSYS SpaceClaim -ohjelmistolla luotiin malligeometria fluidin sisällä virtaavasta nesteestä. Geometrialle luotiin rakenteeton prismoista koostuva laskenhila. Laskennassa kaikkien skaalattujen residuaalien tarkkuus saavutti 150 iterointikierröksellä Simscale (2020) suositteleman arvon 10^{-3} . X, Y ja Z -suuntaiset residuaalit saavuttivat arvon 10^{-6} . Iterointikierröksia lisäämällä residuaalit suppenivat yhä pienempiin arvoihin, mutta vaikutukset painetasoihin ja virtausnopeuksiin olivat tämän työn näkökulmasta merkityksettömän pieniä.

Zanoun et al. (2009) mukaan turbulentille virtaukselle hydrodynaaminen kehittymismatka on likimäärin 70 putken halkaisijaa:

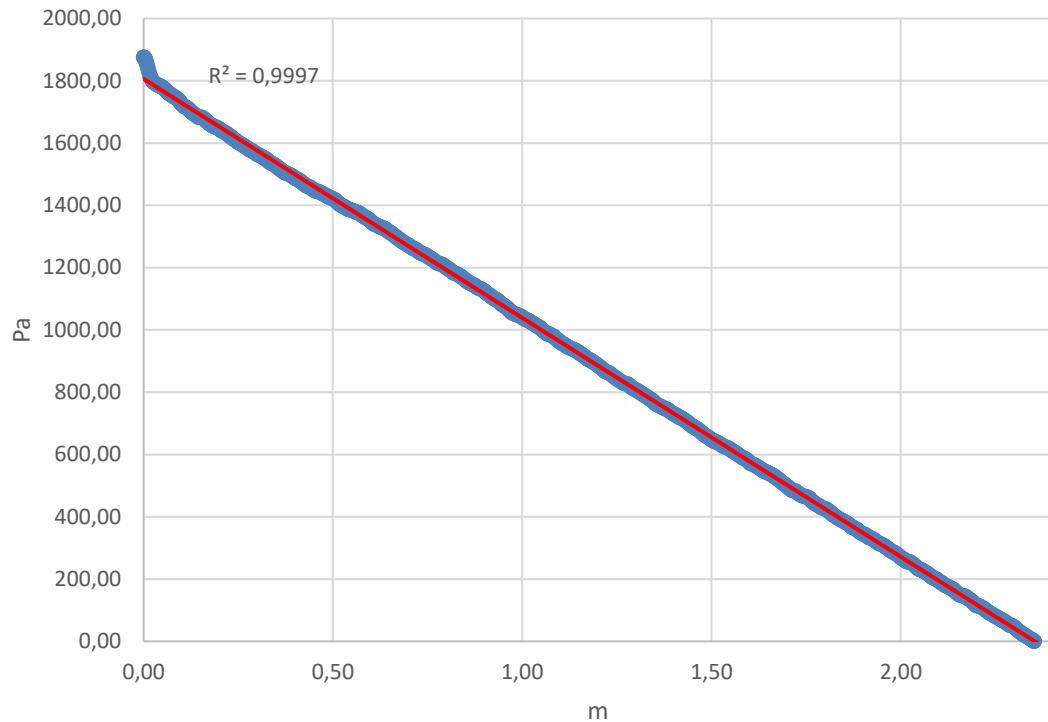
$$L_e \approx 70 \cdot D,$$

missä $D = 20 \text{ mm}$. Hydrodynaamiseksi kehittymismatkaksi arvioidaan siten noin 1,4 metriä. Koko malli koostui metrin mittaisesta tarkasteltavasta osuudesta, sekä 1,4 metriä pitkästä osuudesta putken alkupäässä. Tarkoituksena oli varmistaa, että virtaus on täysin kehittynyt tarkasteltavalla alueella.



Kuva 2. Virtausnopeus putken keskiviivalla paikan funktiona

Kuvasta 2 havaitaan, että putken alkuosuudella virtausnopeus saavuttaa keskiviivalla arvon $1,3 \frac{m}{s}$, ja vakiintuu noin metrin jälkeen likimäärin arvoon $1,24 \frac{m}{s}$. Putkivirtauksen hydrodynaaminen kehittymismatka on simuloinnissa noin 40–50 cm lyhyempi kuin Zanoun et al. (2009) mukaan laskettu arvio, minkä perusteella voidaan todeta mallinnetun putken olevan riittävän pitkä täysin kehittyneen nopeusprofiilin saavuttamiseksi simuloinnissa.



Kuva 3. CFD-ennuste painehäviöstä putkessa

Kuvasta kolme havaitaan, että CFD-ennusteen mukaan painehäviö putkessa on likimäärin lineaarinen koko matkalla. Metrikohtaiseksi painehäviöksi saadaan noin 731 Pascaalia.

7.2 Mittalaippa putkessa

Teollisuudessa putkien tilavuusvirran määrittämiseen on kehitetty useita menetelmiä. Virtausmittausten perusteella säädetään usein prosessien toimintaa, joten mittausten riittävä tarkkuus ja luotettavuus on tärkeää. Tunnettuja virtausmittarityyppejä ovat esimerkiksi Pitot putket, turbiinimittarit, Vortex-mittarit, ultraäänimittarit ja sähkömagnetisiin perustuvat laitteistot (Peter & Chinedu, 2016, s. 1–2). Peter & Chinedu (2016) mukaan tilavuusvirran jatkuvaan mittaamiseen käytetään usein kuristuslaippaa. Morris & Langari (2020) täsmentää, että edullisuutensa ja monikäyttöisyytensä vuoksi lähes puolet kaikista tilavuusvirtamittauksista tehdään mittalaippaa hyödyntämällä. Kuristuslaippa eli mittalaippa on ohut levy, jossa on reikä keskellä. Mittalaippa pakottaa kokoonpuristumattoman fluidin virtaamaan pienen aukon lävitse, jolloin levyn eri puolille syntyvän paine-eron perusteella voidaan Bernoullin lakia hyödyntämällä laskea putken tilavuusvirta.

Kuristuslaippa aiheuttaa putkeen painehäviön, jonka suuruus riippuu virtaavan fluidin tilasta, virtauksen ominaisuuksista, laipan dimensioista ja putken halkaisijasta. Morris & Langari (2021) mukaan lopullinen laipan aiheuttama painehäviö on 50–90% paine-erosta $\Delta P = P_1 - P_2$. Paine P_1 mitataan ylävirrasta riittävän kaukana mittalaipasta ja P_2 laipan jälkeen kohdassa, jossa fluidin nopeus on suurimmillaan. Tätä pistettä, jossa nopeus on suurimmillaan, kutsutaan nimellä *vena contracta*. (ISO 5167-2, 2022, s. 20)

Standardin ISO 5167-2 (2022, s. 9) mukaan viistereunaisen mittalaipan paksuuden e tulisi olla väliltä $0,005 \cdot D$ ja $0,02 \cdot D$, jossa D on putken halkaisija. Koko laipan paksuus tulisi olla välillä e ja $0,05 \cdot D$. Tässä kandidaatintutkielmassa arvioidaan kuitenkin vain yksinkertaisemman, kaksisuuntaisiin mittauksiin tarkoitetun viisteettömän mittalaipan aiheuttamaa painehäviötä. Tällaiselle laipalle paksuuden E tulee olla kauttaaltaan e , jolloin paineen levyyn aiheuttamiin materiaalivaatimuksiin on kiinnitettävä erityistä huomiota. Reader-Harris (2015, s. 33) mukaan laippa pitää mitoittaa niin ohueksi, ettei sen paksuus vaikuta purkauskertoimeen, eikä se taipu paine-erosta johtuvien voimien vaikutuksesta. Mittalaipan paksuuden, viisteen ja halkaisijan lisäksi sen toimintaan vaikuttaa reikien lukumäärä ja niiden ympyrämäisyys, reiän paikoitus, taipuma virtaussuunnassa ja pinnan karheudet. (Reader-Harris, 2015, s. 33–45).

Kaikille laipoille on ISO 5167-2 (2022) mukaan oltava

$$0,10 \leq \beta \leq 0,75,$$

jossa β on laipan reiän d ja putken sisähalkaisijan D suhde. Kuitenkin reiän halkaisijan on kaikissa tilanteissa oltava vähintään 12,5 mm. Lisäksi on huomioitava, että standardia voidaan käyttää vain tilanteissa, jossa putken halkaisija on vähintään 50 mm ja enintään 1 000 mm. On varmistettava, että pätee $Re_D \geq 16000 \cdot \beta^2$ kun $\beta > 0,56$ ja käytetään nurkkamittausta. (ISO 5167-2, 2022, s. 10–11, 16)

Kuristuslaipalle purkauskertoimen arvoa voidaan arvioida Reader-Harris/Gallagher -yhtälöllä

$$C_d = 0,5959 + 0,0312 \cdot \beta^{2,1} - 0,184 \cdot \beta^8 + 91,71 \cdot \beta^{2,5} Re_D^{-0,75} + \frac{0,09 \cdot \beta^4}{1 - \beta^4} F_1 - 0,0337 \cdot \beta^3 F_2,$$

jossa $\beta = \frac{d}{D}$, Re_D Reynoldsin luku. Lisäoletuksina on, että painetta mitataan nurkkamittauksella, jolloin funktiot $F_1 = F_2 = 0$. Tällöin yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$C_d = 0,5959 + 0,0312 \cdot \beta^{2,1} - 0,184 \cdot \beta^8 + 91,71 \cdot \beta^{2,5} Re_D^{-0,75}. \text{ (White, 2016, s. 415) (14)}$$

Kuristuslaipalle painehäviökerrointa voidaan arvioida yhtälöllä

$$K = \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^4(1 - C_d^2)}}{C_d \beta^2} - 1 \right)^2, \quad (15)$$

jossa $\beta = \frac{d}{D}$ ja C_d aikaisemmin määritelty purkauskerroin. Painehäviökertoimen arvoa hyödyntämällä voidaan ratkaista mittalaipan aiheuttama painehäviö yhtälöstä

$$\Delta \bar{\omega} = K \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot V^2, \quad (16)$$

jossa ρ_1 on fluidin tiheys ja V keskimääräinen nopeus ylävirrassa ennen mittalaippaa. (Urner, 1997; ISO 5167-2, 2022, s. 19 mukaan). Fluidi oletetaan kokoonpuristumattomaksi, joten tiheydelle voidaan käyttää sen tyypillistä arvoa 20°C lämpötilassa.

Massavirta mittalaipallisessa putkessa voidaan laskea kaavasta:

$$q_m = \frac{C_d}{\sqrt{1 - \beta^4}} \varepsilon \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\rho_1 2 \Delta P}, \quad (17)$$

jossa C_d on purkauskerroin, $\beta = \frac{d}{D}$ ja laajenemiskerroin $\varepsilon \cong 1$ (nesteille). (ISO 5167-2, 2022, s. 6). Kaavasta voidaan ratkaista paine-ero ΔP ja yleistää kaava kokoonpuristumattomalle nesteelle, jolloin saadaan

$$\Delta P = \frac{8 q_m^2 (1 - \beta^4)}{\pi^2 C_d^2 d^4 \rho}. \quad (18)$$

Toisaalta ISO 5167-2 (2022) esittää kaavan, jolla voidaan arvioida mittalaipan aiheuttama painehäviötä mittauspisteiden välistä paine-eroa hyödyntäen:

$$\Delta \bar{\omega} = \frac{\sqrt{1 - \beta^4(1 - C_d^2)} - C_d \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^4(1 - C_d^2)} + C_d \beta^2} \Delta P. \quad (19)$$

Mittalaipan painehäviötä saadaan siten arvioitua laskemalla paine-ero kaavan 18 perusteella ja syöttämällä tulos kaavaan 19.

7.2.1 Mittalaipan painehäviön approksimaatio standardin mukaan

Tarkastellaan teräsputkea, jonka sisähalkaisija on 50 mm ja pituus 4 m. Putkessa on viisteetön 2 mm paksu mittalaippa, jonka reiän halkaisija on 30 mm. Mittalaippa on asen-

nettu putkeen 3,5 m päähän sisäänmenoaukosta. Putkessa virtaavan 20°C asteisen veden nopeus on sisäänmenoaukolla 1 m/s ja ulostulo on normaalissa ilmanpaineessa. Oletetaan, että mittalaippa ei taivu paine-eron seurauksena. Lisäoletuksena on, että putken seinämä on sileä ja painehäviö syntyy ainoastaan mittalaipan vaikutuksesta.

Paine-eron ratkaisemiseen mittalaipan ympäristössä ei voida hyödyntää Bernoullin lakia, sillä se ei ota huomioon turbulenssia tai virtauksen todellista käyttäytymistä mittalaipan ja vena contractan välisellä alueella.

Vedelle $\mu = 1,0016 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ja $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$.

Reynoldsin luku tilanteelle voidaan laskea kaavasta 1:

$$Re_D = \frac{\rho V D}{\mu},$$

jossa $\rho = 998,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $V = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $D = 50 \text{ mm}$ ja $\mu = 1,0016 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Reynoldsin luvuksi saadaan noin 49830,2716, joka on selvästi yli 4000. Cengel & Cimbala. (2006) mukaan virtaus on tällöin turbulenttisella alueella. Zanoun et al. (2009) mukaan turbulentille virtaukselle hydrodynaaminen kehittymismatka on likimäärin 70 putken halkaisijaa.

$$L_e \approx 70 \cdot D.$$

$$L_e \approx 70 \cdot 50 \text{ mm}.$$

$$L_e \approx 3,5 \text{ m}$$

Kehittymismatka on yhtä pitkä kuin putken pituus ennen mittalaippaa. Virtauksen voidaan olettaa olevan täysin kehittynyt juuri ennen mittalaippaa. Kaavasta 14 voidaan laskea arvio mittalaipan purkauskertoimelle:

$$C_d = 0,5959 + 0,0312 \cdot \beta^{2,1} - 0,184 \cdot \beta^8 + 91,71 \cdot \beta^{2,5} Re_D^{-0,75},$$

jossa $\beta = \frac{3}{5}$ ja $Re_D = 49830,2716$. Sijoittamalla lukuarvot kaavaan saadaan $C_d \approx 0,61115$. Virtauksen massavirta voidaan laskea, kun tiedetään putken sisähalkaisija, virtauksen keskinopeus ja tiheys:

$$q_m = \rho V A_1,$$

jossa $\rho = 998,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $V = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $A_1 = \frac{\pi \cdot (50 \text{ mm})^2}{4}$. Massavirraksi saadaan noin $1,96 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

Kaavaa 18 hyödyntämällä voidaan arvioida mittalaipan aiheuttamaa paine-eroa:

$$\Delta P = \frac{8q_m^2(1 - \beta^4)}{\pi^2 C_d^2 d^4 \rho},$$

jossa $q_m = 1,96 \frac{kg}{s}$, $\beta = \frac{3}{5}$, $C_d = 0,61115$, $d = 30 \text{ mm}$ ja $\rho = 998,2 \frac{kg}{m^3}$. Paine-eroksi saadaan siten $\Delta P = 8974,7643 \dots Pa$.

Painehäviöksi saadaan kaavan 19 ja lasketun paine-eron perusteella:

$$\Delta \bar{\omega} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4 (1 - (0,61115)^2) - 0,61115 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4 (1 - (0,61115)^2) + 0,61115 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2}} \cdot 8974,7643 \text{ Pa} = 5623,9366 \text{ Pa}.$$

Laskettu painehäviö on ISO 5167 (2022) mukaan ero staattisessa paineessa pisteiden välillä, jotka ovat D:n verran ylävirtaan ja 6D alavirtaan mittalaipasta mitattuna.

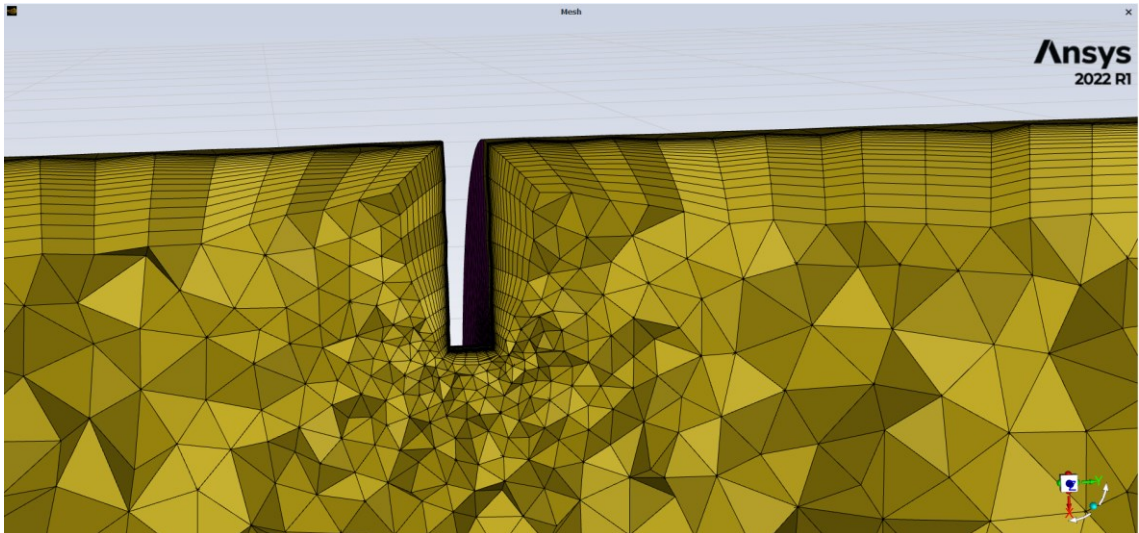
7.2.2 Mittalaipan painehäviön CFD-simulointi

Mittalaipallisen putken geometria luotiin ANSYS SpaceClaim -ohjelmistolla. Piirretyssä mallissa geometrialla kuvataan putkessa liikkuvaa nestettä ilman teräsputkea. Lisäksi mittalaippa mallinnettiin ilman viistettä (square-edged orifice).

Geometrialle luotiin rakenteeton prismoista koostuva laskentahila. Ensimmäisessä laskentahilassa solujen kokonaismääräksi tuli 844 720 kappaletta ja toisessa 2 374 411 kappaletta. Laskennassa kaikkien skaalattujen residuaalien tarkkuus saavutti 200 iteroitokierroksella Simscales (2020) suosittelman arvon 10^{-3} . X, Y ja Z -suuntaiset residuaalit suppenivat tarkkuuteen 10^{-6} . Iterointikierrosten lisääminen ei vaikuttanut enää merkittävästi konvergoitumiseen, vaan residuaalit jäivät oskilloimaan saavutettujen arvojen ympärille.

ANSYS Fluentille hilan rajakerrokseen annettiin sivusuhteen tavoitearvoksi 10. Koko laskentaverkon sivusuhteen arvoksi vinouden maksimiarvoksi ensimmäiselle laskentahilalle tuli 0,46, joka taulukon 3 mukaan on erinomainen. Mittalaipan ympäristöön laskentaseläjen tavoitekoko asetettiin muita putken alueita pienemmäksi. Lisäksi rajakerroksia seinämille asetettiin 20 kappaletta ja niiden koon kasvukertoimena (Growth rate) käytettiin Fluentin ehdottamaa vakioarvoa 1,2. Rajakerrosten käyttäytyminen mittalaipan ympäristössä voidaan havaita hilan poikkileikkauksesta kuvassa 4, jossa lähellä putken seinämää kerrosten paksuudet ovat huomattavasti muita pienempiä.

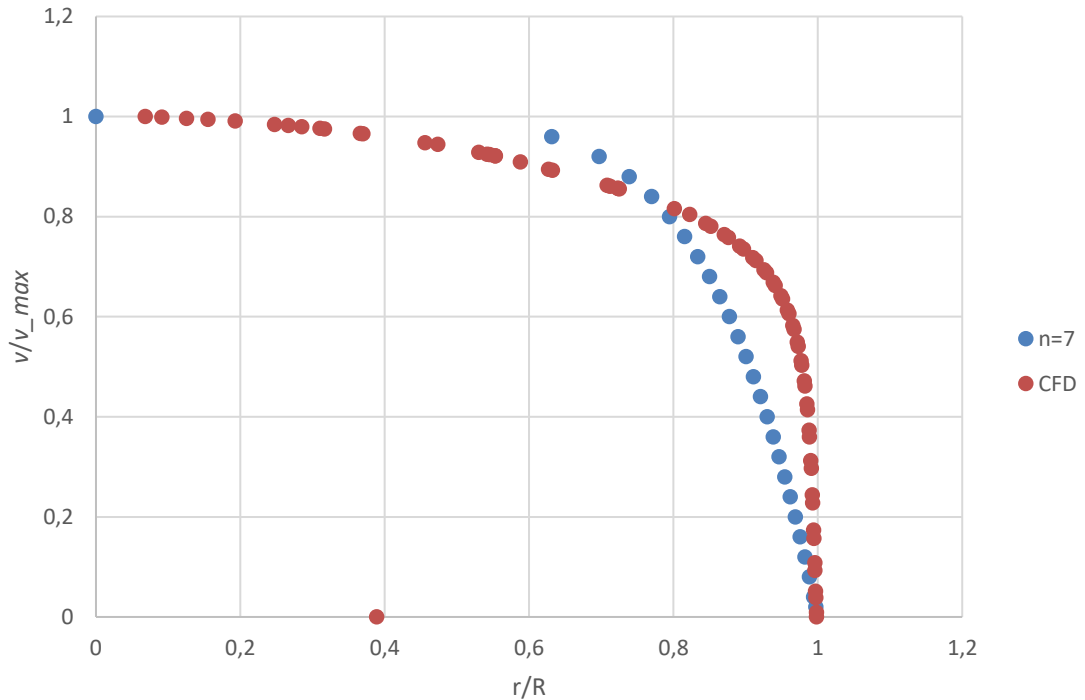
Putken seinämille asetettiin no-slip -ehto ja pinnankarheus oli 0 mm. Seinämillä virtausnopeus oli siis nolla ja painehäviöitä ei aiheutunut virtauksen ja putken välisestä kitkasta. Simuloinnissa virtaavan veden lämpötila oli $20 \text{ }^\circ\text{C}$.



Kuva 4. Laskentahilan poikkileikkaus ja rajakerrokset seinämällä mittalaipan ympäristössä

Virtauksesta tehtiin poikkileikkaukset nopeuden arvoista sisääntuloaukolla, ulostuloaukolla ja mittalaipasta 2D ylävirtaan mitattuna. Oletuksena oli, että sisääntuloaukolla virtauksen nopeus on kaikkialla asetetun arvon mukainen 1 m/s . Lisäksi tavoitteena oli, että juuri ennen mittalaippaa virtauksen nopeusprofiili on täysin kehittynyt, mihin pyrittiin asettamalla putken pituudeksi ylävirtaan $70D$ perustuen Zanoun et al. (2009) approksimaatioon.

Kuvassa 5 on esitetty simulointitulosten perusteella muodostetun nopeusprofiilin ja teoreettisen profiilin välinen ero. Teoreettinen profiili on laskettu hyödyntämällä potenssilakia arvolla $n = 7$, joka perustuu Prandtlin arvioon turbulentin virtauksen approksimoimisesta (White, 2016, s. 464). Havaitaan, että putken reunan ympäristössä malli ei täysin vastaa simuloinnista saatua tulosta. Luotettavampia arvioita voitaisiin saada valitsemalla potenssilaisissa esiintyvälle luvulle n parempi perusteltu arvo. Potenssilaki ei yksinkertaisuutensa vuoksi anna kovin hyvää arvioita virtauksen nopeusprofiilista putken reunoilla. (White, 2016, s. 461–471).



Kuva 5. Teorettinen ja simuloitu nopeusprofiili putkessa mittalaipasta 2D ylävirtaan

Standardin ISO 5167-2 (2022, s. 19) mukaan staattisen paineen arvot painehäviön laskentaa varten mitataan kohdista D ja $6D$.

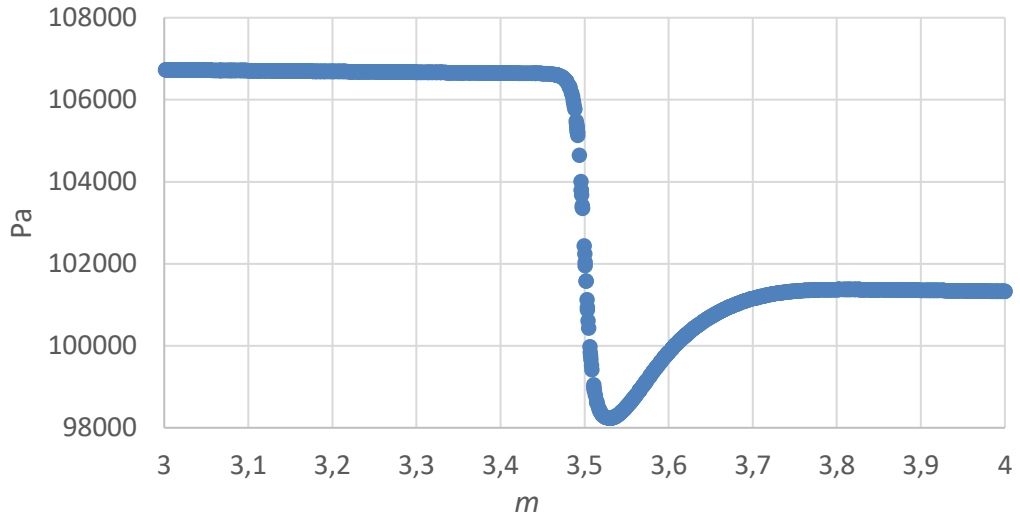
Taulukko 1. Standardin ISO 5167-2 (2022) mukaisesti mitatut painearvot

Mittauskohta keskiakselilla	Staattinen paine (Pa)
D	106 638
6D	101 370

Taulukon 1 tietojen perusteella voidaan laskea simuloitu mittalaipan aiheuttama painehäviö:

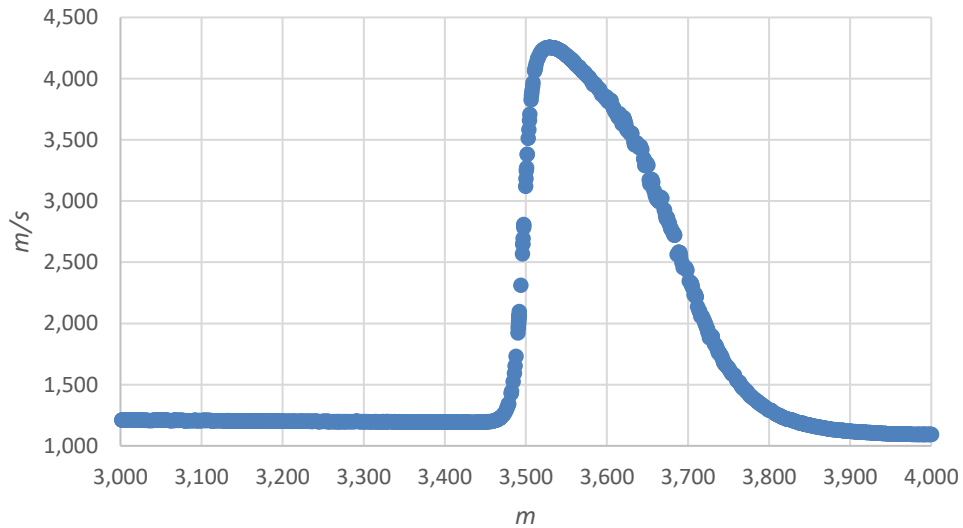
$$\Delta \bar{\omega}_s = P_{st,D} - P_{st,6D} = 106\,638 \text{ Pa} - 101\,370 \text{ Pa} = 5268 \text{ Pa}.$$

Mittalaipan aiheuttamaksi painehäviöksi saatiin siis CFD-simuloinnilla arvioksi 5268 Pascalia.



Kuva 6. Staattisen paineen arvot putken keskiviivalla paikan funktiona

Kuvasta 7 nähdään, että teorian mukaisesti virtausnopeus kasvaa mittalaipan jälkeen ja saavuttaa maksiminopeutensa vena contracta -kohdassa. Virtaukselle maksiminopeus simuloinnin mukaan on likimäärin $4,26 \text{ m/s}$ putken keskilinjalla noin $28,6 \text{ mm}$ mittalaipan jälkeen. Tukiman et al. (2017) ovat simuloineet työssään pienen, halkaisijaltaan viiden millimetrin kokoisen mittalaipan aiheuttamaa painehäviötä ja saaneet tulokseksi painehäviöprofiilin, joka on muodoltaan kuvan 6 mukainen.



Kuva 7. Virtauksen nopeus putken keskiviivalla paikan funktiona

Eiamsa-ard et al. (2008) tutkivat fluidin käyttäytymistä kokeellisesti 25,4 mm putkessa mittalaipan ympäristössä lämpötilassa 300 K ja vertasivat tuloksia eri turbulenssimalleilla laskettuihin simuloituihin arvoihin. Simuloitujen tulosten havaittiin olevan yhdenmukaisia mitattuihin arvoihin verrattuna. Tutkimuksessa $k - \varepsilon$ -turbulenssimallin perusteella muodostettu approksimaatio keskiviivan virtausnopeuksista vastaa hyvin tässä kandidaatintyössä SST $k - \omega$ -mallilla laskettua kuvan 7 tulosta. Toinen tutkimuksessa käytetyistä turbulenssimalleista oli laskennallisesti vaativampi Reynolds-jännitysmalli (RSM), jonka perusteella laskettu jakauma antoi hieman tarkempia arvioita virtauksen nopeudesta keskiviivalla. (Eiamsa-ard et al., 2008)

8. YHTEENVETO JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Tämän kandidaatintyön tarkoituksena oli perehtyä kitkan, sekä mittalaipan aiheuttamiin painehäviöihin turbulentissa putkistovirtauksessa ja vertailla CFD-mallin ja standardin perusteella laskettuja painehäviön arvoja kahdessa esimerkkitapauksessa. Lisäksi työn tavoitteena oli tutustua CFD-laskennan haasteisiin ja vertailla tuloksia kirjallisuudesta löytyviin ohjearvoihin.

Työssä esitetyt esimerkkitapaukset ovat laskennallisista syistä kohtalaisen yksinkertaisia: putkissa ei ole mutkia, virtaava fluidi on kokoonpuristumatonta nestettä, virtaus on isoterminen ja mittalaippa on viisteetön. Haasteena oli virtausopin teorian soveltaminen mittalaipan painehäviön ratkaisemiseen. Kitkasta aiheutuva painehäviö suorassa putkessa ratkaistiin analyttisesti virtausnopeutta, putken dimensioita ja pinnankarheutta hyödyntämällä. Mittalaipan aiheuttaman painehäviön ratkaisemiseen jouduttiin hyödyntämään osittain kokeellisiin tutkimuksiin perustuvia approksimaatioita muun muassa purkauskerointa määritettäessä. Kirjallisuudesta ei löytynyt tuloksia kokeellisista tutkimuksista, jossa standardin ISO 5167-2 (2022) mukaisen mittalaipan painehäviö olisi määritetty kokoonpuristumattomalla nesteellä. Sen sijaan useissa tutkimuksissa keskityttiin purkauskertoimen määrittämiseen.

Numeerisen virtauslaskennan teoriaan perehdyttiin vain pintapuoleisesti, sillä työn pääpaino haluttiin säilyttää mittalaipan tutkimisessa. Virtauslaskentaohjelmistojen taustalla olevan teorian ymmärtämiseksi vaaditaan vahvaa matemaattista osaamista ja ymmärrystä numeerisista menetelmistä, fluididynamiikan yhtälöistä ja turbulenssimalleista. CFD-mallin luomisessa haastavin osuus oli luoda riittävän hyvä laskentahila, jonka ratkaisu kuitenkin onnistuu käytettävissä olevalla tietokoneella kohtuullisessa ajassa.

Taulukko 4: Arviot kitkan aiheuttamasta painehäviöstä putkessa

	Painehäviö (Pa)	Ero %
Approksimaatio Darcy-Weisbach-yhtälöllä	756	3,344
CFD-mallin ennuste	731	

Taulukko 5: Arviot mittalaipan aiheuttamasta painehäviöstä putkessa

	Painehäviö (Pa)	Ero %
ISO 5167 approksimaatio	5624	6,195
CFD-mallin ennuste	5268	

Taulukosta 4 voidaan havaita, että sekä kaavoilla laskettu että CFD-ohjelmistosta saatu ennuste ovat lähellä putkivalmistaja SANHAN taulukoista interpoloitua arvoa 718 Pa. Taulukkoon 5 listattujen standardiyhtälöillä lasketun ja CFD-tuloksen välinen ero on myös kohtalaisen pieni ottaen huomioon, että laskennassa tehtiin useita oletuksia ja yksinkertaistuksia.

Tulevaisuudessa yhtälöiden ja CFD-mallin välisiä eroja voisi tutkia tarkemmin muuttamalla putken ja mittalaipan geometriaa, käyttämällä eri tilavuusvirtoja, sekä tehdä oman kokeellisen tutkimuksen mittalaipan aiheuttamasta painehäviöstä ja validoida saadut tulokset.

LÄHTEET

Abdelmonem, Y. & Ead, S. & Shabayek, S. (2020). "EFFECT OF TIME ON PIPE ROUGHNESS", 17th Canadian Hydrotechnical Conference.

Ahmari, H. & Kabir, S.M.I. (2019). "Applied Fluid Mechanics Lab Manual", Mavs Open Press (UTA Libraries).

ANSYS. (2011). "Introduction to ANSYS Meshing, Introduction to ANSYS 14.0 CFD", Lecture 4.

ANSYS. (2020). "Fully Developed Internal Turbulent Flows in Ducts and Pipes, Real Internal Flows" – Lesson 2. Saatavissa: <https://courses.ANSYS.com/wp-content/uploads/2020/09/Lesson-2-Fully-Developed-Internal-Turbulent-Flows-in-Ducts-and-Pipes-Handout.pdf> (Viitattu 25.3.2023).

Armfield. (2012). "Energy Loss in Pipe Bends and Fittings", Instruction Manual, F1-22, Issue 8, Nov.

Bono, G. & Awruch, A.M. (2007). "Numerical study between structured and unstructured meshes for Euler and Navier-Stokes equations", Federal University of Rio Grande do Sul, Av.

Brkić, D. (2011). "Review of explicit approximations to the Colebrook relation for flow friction", Journal of Petroleum Science and Engineering. DOI: 10.1016/j.petrol.2011.02.006

Cebeci, T., Shao, J.P., Kafyeke, F., Laurendeau, E. (2005). "Computational Fluid Dynamics for Engineers", Horizon Publishing Inc.

Cengel, Y.A. & Cimbala, J.M. (2006). "Fluid mechanics: fundamentals and applications", McGraw-Hill Higher Education, Boston, USA.

Durbin, P. & Medic, G. (2007). "Creeping Flow", in Fluid Dynamics with a Computational Perspective. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511619281.004

Dyedov, V., Einstein, D. R., Jiao, X., Kuprat, A. P., Carson, J. A., Pin, F. D. (2009). "Variational Generation Of Prismatic Boundary-layer Meshes For Biomedical Computing", International Journal for Numerical Methods in Engineering. DOI: 10.1002/nme.2583.

Echávez, G. (1997). "Increase in Losses Coefficient with Age for Small Diameter Pipes. Journal of Hydraulic Engineering." DOI: 10.1061/(asce)0733-9429(1997)123:2(157)

Eiamsa-Ard, S., Ridluan, A. & Somravysin, P. (2008). "Numerical investigation of turbulent flow through a circular orifice", KMITL.

Farshad, F. F. & H. H. Rieke. (2006). "Surface-Roughness Design Values for Modern Pipes", SPE Drill & Compl 21 DOI: 10.2118/89040-PA.

Golijanek-Jędrzejczyk, A., Mrowiec, A., Hanus, R., Zych, M. & Świsulski, D. (2019). "Determination of the uncertainty of mass flow measurement using the orifice for different values of the Reynolds number", EPJ Web of Conferences, 213, 02022. DOI: 10.1051/epjconf/201921302022

ISO 5167-1. (2022). "Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits running full — Part 1: General principles and requirements", SFS.

ISO 5167-2. (2022). "Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits running full — Part 2: Orifice plates", SFS.

- Khaleefa Ali, S. (2019). "Study of Pressure Losses in Piping System", International Journal of Science and Research (IJSR). DOI: 10.21275/ART20198900.
- Miranda, J.L.H. & López, L.A.A., (2011). "Piping design: the fundamentals", Short Course on Geothermal Drilling, Resource Development and Power Plant organized by UNU-GTP and LaGeo, in Santa Tecla, El Salvador.
- Morris, A.S & Langari, R. (2020). "Measurement And Instrumentation: Theory And Application", Butterworth-Heinemann.
- Morris, A.S & Langari, R. (2021). "Measurement And Instrumentation: Theory And Application", Third Edition, Butterworth-Heinemann.
- Nasa.gov (2021). "Navier-Stokes Equations." Saatavilla: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/nseqs.html>
- Peter, U.C. & Chinedu, U. (2016). "Model prediction for constant area, variable pressure drop in orifice plate characteristics in flow system", Chem. Int, 2(8), pp. 80–88.
- Reader-Harris, M. (2015). "Orifice Plates and Venturi Tubes", Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-16880-7
- Salama, A. (2021). "Velocity Profile Representation for Fully Developed Turbulent Flows in Pipes: A Modified Power Law", Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI). DOI: 10.3390/fluids6100369
- SANHA. "Pressure loss tables for drinking water." Saatavissa: <https://www.sanha.com/en/Planning-and-Installation/Downloads/Pressure-heat-loss-tables/> (Viitattu 22.5.2023).
- Siikonen, T. (2014). "Virtaussimulointi", Kurssimoniste. Aalto-yliopisto.
- Simscale. (2021). "5 Tips on How to Create a High-Quality Mesh." Saatavissa: <https://www.simscale.com/blog/tips-high-quality-mesh>. (Viitattu 15.4.2023)
- Simscale. (2022). "Mesh quality." Saatavissa: <https://www.simscale.com/docs/simulation-setup/meshing/mesh-quality>. (Viitattu 20.4.2023)
- Tukiman, M.M., Ghazali, M.N.M., Sadikin, A., Nasir, N.F., Nordin, N., Sapit, A. & Razali, M.A. (2017). "CFD simulation of flow through an orifice plate", IOP Publishing Ltd. DOI: 10.1088/1757-899X/243/1/012036
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). "An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method", Pearson education.
- White, F.M. Fluid Mechanics. (2016). "Eighth Edition in SI Units", McGraw-Hill Education. McGraw Hill.
- Zimmer, F., Zanoun, E -S., Egbers, C. (2011). "A study on the influence of triggering pipe flow regarding mean and higher order statistics", IOP Publishing Ltd. DOI: 10.1088/1742-6596/318/3/032039