Leena Yliviitala

MATEMATIIKAN KIELENTÄMINEN OPPIKIRJOJEN ESIMERKKITEHTÄVIEN RATKAISUISSA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta (ITC)
Pro gradu -tutkielma
Elokuu 2023

TIIVISTELMÄ

Leena Yliviitala: Matematiikan kielentäminen oppikirjojen esimerkkitehtävien ratkaisuissa
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan maisteriohjelma
Elokuu 2023

Tässä tutkimuksessa selvitettiin, miten matematiikkaa kielennetään matematiikan oppikirjojen esimerkkitehtävien ratkaisuissa. Kielentämistä tarkasteltiin Joutsenlahden ja Kuljun kolmen kielen mallin sekä Joutsenlahden matematiikan tehtävien ratkaisumallien pohjalta. Tutkimuksessa arvioitiin, mitä kieliä ja ratkaisumalleja käytetään, mikä on kielten merkitys ratkaisun kannalta ja miten kielentäminen muuttuu luokka-asteiden välillä. Oppikirjoista tutkittiin myös mahdollisia sanallisten tehtävien yleisohjeita.

Matematiikan oppikirjatutkimusta on tehty 2000-luvun alusta lähtien. Tutkimusta on tehty monesta eri näkökulmasta, kuten oppikirjojen tehtävärakenteista sekä niiden yhteydestä opetussuunnitelmaan. Koska oppikirjat kehittyvät ja ovat merkittävä osa koulujen opetusta, on niitä edelleen tärkeä tutkia. Matematiikan kielentämisen tutkimus on puolestaan tärkeä, koska kielentäminen edistää oppilaan matemaattisen ajattelun rakentumista ja selkiyttää sitä. Tässä tutkimuksessa kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisua eri kielten avulla.

Tämä tutkimus toteutettiin teorialähtöisenä sisällönanalyysinä. Lisäksi aineistoa tutkittiin sisällönerittelyn keinoin. Aineistona käytettiin Sanoma Pron kuudennen luokan oppikirjaa Milli 6A, kahdeksannen luokan oppikirjaa Kuutio 8 ja lukion lyhyen matematiikan oppikirjaa Binomi 4 Matemaattisia malleja. Lisäksi aineistoon valittiin Otavan kuudennen luokan oppikirja Tuhattaituri 6a. Aineisto koostui näiden oppikirjojen esimerkkitehtävistä, jotka pyrittiin valitsemaan tasaisesti eri vuosiluokilta. Tämän lisäksi aineistoon valittiin sanallisen tehtävän yleisohjeet Milli-kirjan opettajan oppaasta ja Kuutio-kirjasta.

Tutkimuksen mukaan kolmen kielen mallin kielistä luonnollisen kielen käyttö lisääntyy ja kuviokielen käyttö vähentyy siirryttäessä ylemmille luokka-asteille. Sanallisten tehtävien ratkaisumalleissa siirrytään kuudennella luokalla käytetyistä ”standardi”- ja ”tiekartta”-malleista pääosin ”kommentti”-mallin käyttöön, mutta myös ”tiekartta”-mallia esiintyy edelleen kahdeksannella luokalla ja lukiossa. Peruslaskutehtävissä puolestaan kuudennella luokalla käytetään ”standardi”-mallia ja kahdeksannella luokalla sekä lukiossa ”kommentti”-mallia. Merkittävä ero kahdeksannen luokan ja lukion esimerkkien kielentämisessä on se, että lukiossa käytetyt luonnollisen kielen virkkeet ovat yleensä pidempiä. Yleisohjeita sanallisten tehtävien ratkaisuun löytyi kuudennen luokan opettajan materiaalista sekä kahdeksannen luokan oppikirjasta. Molemmissa ohjeet on listattu vaihe vaiheelta allekkain, mutta kuudennen luokan opettajan kirjan ohjeessa on enemmän tekstiä ja se on epäselvempi. Lisäksi kuudennen luokan ohjeessa ei kehoteta miettimään ratkaisun järkevyyttä, mikä löytyy kahdeksannen luokan ohjeesta.

Tutkimuksen perusteella lukiossa kielennetään matematiikka kaikista monipuolisimmin ja kuudennella luokalla matematiikan symbolikielellä on suurin rooli ratkaisussa. Jo ennen lukiota olisi tärkeää oppia käyttämään useita matematiikan kieliä tehtävän ratkaisussa, koska lukiossa tätä vaaditaan. Tällöin harppaus uuteen ei olisi liian iso.

Avainsanat: matematiikka, oppikirja, oppikirjatutkimus, kielentäminen, sisällönanalyysi

SISÄLLYS

1 JOHDANTO 1

2 TEOREETTINEN VIITEKEHYS 3

2.1 Oppikirjatutkimus 3
2.2 Matematiikan kielentäminen 5
2.3 Matematiikka ja kielentäminen opetussuunnitelman perusteissa 10

3 MATEMATIIKAN MALLINTAMINEN 13

3.1 Vektorit ja matriisit 13
3.2 Pienimmän neliösumman menetelmä 24
3.3 Polynomin interpolointi 28

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS 30

4.1 Tutkimuskysymykset 30
4.2 Aineisto 30
4.3 Sisällönanalyysi 32

5 AINEISTON ANALYYSI 33

5.1 Sanalliset tehtävät 33
5.2 Peruslaskutehtävät 42

6 POHDINTA 46

7 JOHTOPÄÄTÖKSET JA JATKOTUTKIMUS 53

LÄHTEET 55

1 JOHDANTO

Suomessa oppikirjoja on tuotettu 1800-luvulta asti. Nykyään oppikirjoja tuottavat kaupalliset kustantajat, jotka saavat vapaasti valita oppikirjojen sisällön. [1] Koska oppikirjat ovat edelleen merkittävä osa opetusta [1], niiden sisältöratkaisuilla on vaikutus myös oppituntien sisältöön. Matematiikan oppikirjoja on tutkittu useasta eri näkökulmasta, kuten niiden yhteyttä opetussuunnitelmaan sekä tehtävien rakenteita [1]. Tutkimusta oppikirjojen esimerkkitehtävistä ei ole Suomessa kuitenkaan paljoa tehty. Esimerkkitehtävät antavat oppilaille mallin, miten matematiikan tehtäviä tulisi ratkaista, ja myös opettajat saattavat seurata oppikirjan esimerkkien ratkaisun rakennetta opetuksessaan. Opettajasta riippuen oppikirjan esimerkkiratkaisu saattaakin vaikuttaa merkittävästi siihen, miten tehtäviä opitaan ratkaisemaan.

Kielentämisen käsite on ollut käytössä didaktisessa tutkimuksessa jo 1990-luvulla, ja matematiikan kielentämistä on tutkittu Suomessa 2000-luvun alusta lähtien [2]. Tässä tutkielmassa kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisua eri matematiikan kielten avulla. Matematiikkaa voi kielentää sekä kirjallisesti että suullisesti useiden eri kielten avulla, kuten matematiikan omalla symbolikielellä tai kuviokielellä, ja sama asia voidaankin ilmaista useammalla eri kielellä. Esimerkiksi murtoluku voidaan esittää niin matemaattisten symboleiden kuin kuvionkin avulla. Useamman kielen käyttö edistää oppimista ja sisällön syvempää ymmärrystä [2].

Tämän tutkielman tarkoituksena on selvittää, miten matematiikkaa kielennetään oppikirjojen esimerkkiratkaisuissa. Oppikirjoissa käytetty monipuolinen kielentäminen voi auttaa oppilasta seuraamaan ja ymmärtämään tehtävän ratkaisua paremmin. Tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita siitä, mitä Joutsenlahden ja Kuljun [3] kolmen kielen mallin kielistä oppikirjojen esimerkeissä käytetään ja mikä on niiden merkitys tehtävän ratkaisun kannalta. Ratkaisuja tarkastellaan myös Joutsenlahden [4, 5] matematiikan tehtävien ratkaisumallien pohjalta. Lisäksi tutkimuksessa selvitetään, miten kielentäminen muuttuu luokka-asteiden välillä. Tutkimuksessa tarkastellaan kuudennen luokan, kahdeksannen luokan ja lukion lyhyen matematiikan laajalti käytössä olevia oppikirjoja. Tutkittu aineisto sisältää sekä peruslaskutehtäviä että sanallisia tehtäviä. Oppikirjoista tutkitaan myös mahdollisia sanallisten tehtävien ratkaisun yleisohjeita.

Seuraavassa kappaleessa esitellään tutkimuksen teoreettinen viitekehys. Teoreettinen viitekehys koostuu aiemmasta oppikirjatutkimuksesta sekä matematiikan kielentämisen tutkimuksesta. Aineistoa analysoidaan myöhemmin tässä osiossa esiteltyjen teorioiden ja mallien pohjalta. Kolmannessa kappaleessa tutustutaan matemaattiseen mallintamiseen, ja erityisesti pienimmän neliösumman menetelmään sekä polynomiseen interpolointiin. Neljäs luku käsittelee tutkimuksen toteutusta, ja viides on aineiston analyysiä. Analyysissä sisällönanalyysin ja sisällönerittelyn keinoin saadaan sekä määrällistä että laadullista aineistoa. Kuudennessa luvussa pohditaan saatuja tuloksia teoreettisen viitekehyksen pohjalta, ja viimeisessä luvussa kootaan vastaukset tutkimuskysymyksiin sekä esitetään mahdollisia jatkotutkimusaiheita.

2 TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Tässä luvussa esitetään tutkimuksen kannalta oleellisia käsitteitä ja teorioita, sekä tarkastellaan aiempaa oppikirjatutkimusta ja kielentämisen tutkimusta. Tämän lisäksi tarkastellaan, mitä opetussuunnitelmissa sanotaan matematiikan opetuksesta ja kielentämisestä.

2.1 Oppikirjatutkimus

Oppimateriaaliksi luetaan muun muassa kirjalliset, auditiiviset ja visuaaliset materiaalit. [1] Tässä työssä tutkitaan oppikirjoja, ja perehdytään siis kirjalliseen materiaaliin. Oppikirjat yleensä sisältävät tekstiä, kuvitusta sekä tehtäviä [6], ja matematiikan oppikirjat teoriaosion, laskuesimerkkejä sekä laskutehtäviä [1]. Heinosen [6] mukaan oppimateriaalin tehtävänä on tukea yhteiskunnan arvoja, mutta myös toisaalta luoda uusia näkemyksiä. Oppimateriaalien tulisi myös olla monenlaisia oppilaita motivoivaa, haastaa erilaisia oppijoita ja ennen kaikkea sen avulla tulisi oppia. Oppimateriaalien tulee vastata vallitsevaa opetussuunnitelmaa sekä tukea opettajaa opetustyössä. Sen tulisi myös kestää aikaa, mutta olla samaan aikaan ajankohtainen. [6]

Vuoteen 1990 asti oppikirjat tuli hyväksyttää Koulutushallituksessa ennen julkaisemista [2]. Koska nykyään oppikirjoja ei enää tarkasteta Opetushallituksen toimesta, on opettajan asiantuntijuudella suuri merkitys oppikirjoja valitessa ja käytettäessä. Toisaalta vaikka tarkastus on lopetettu, oppikirjojen ajatellaan edelleen olevan opetussuunnitelman mukaisia. [1] Heinosen [6] mukaan suomalaisessa koulutusjärjestelmässä opetussuunnitelmauudistukset ajatellaan kulkeutuvan oppimateriaalien avulla opetukseen.

Oppimateriaaleja uudistetaan niiden sisällön vanhenemisen vuoksi sekä muuttuvan oppimiskäsityksen vuoksi. Kun ajatus siitä, mitä oppiminen on, muuttuu, täytyy myös oppimateriaalin muuttua tätä ajatusta parhaiten tukevaksi. Esimerkiksi teknologisoituminen on muuttanut tiedonhaun ja jakamisen tapoja, mikä on huomioitava myös oppimateriaaleissa. Nykyään käytössä olevat sähköiset oppimateriaalit ovatkin helpommin muokattavissa ja siten pidettävissä paremmin ajan tasalla kuin painetut oppikirjat. [7]

Matematiikan oppimateriaaleja on Suomessa tutkittu useista eri näkökulmista. Oppimateriaalitutkimusta on tehty muun muassa oppikirjojen ja opetussuunnitelman suhteesta, oppikirjojen ilmentämästä oppimiskäsityksestä ja oppikirjojen tehtävistä [1]. Niemen [8] mukaan käytetyllä oppikirjalla on yhteys sekä oppimistuloksiin että oppilaiden motivaatioon. Oppikirjalla ja sen rakenteella on merkittävä rooli opiskelun ohjaajana ja tukena [9]. Vastaavia tuloksia on saatu myös muissa tutkimuksissa [10]. Oppikirjojen merkitys oppimisen näkökulmasta edistää oppilaiden eriarvoisuutta [8], sillä oppikirjat painottavat eri asioita ja antavat näin käyttäjälleen erilaisia tietoja ja taitoja [1].

Joutsenlahden ja Vainionpään [9] tutkimukseen vastanneista opettajista jopa 97 % piti oppikirjaa melko tai erittäin tärkeänä opetuksen kannalta. Opettajat pitivät oppimateriaaleja laadukkaina ja opetusta tukevina [9]. Oppikirjoihin nojaudutaan osalta siksi, että nuoret opettajat eivät koe saaneensa opettajankoulutuksesta riittäviä taitoja matematiikan opettamiseen. [11] Oppikirjaan nojautumisen vaarana on kuitenkin se, että oppikirja ohjaa opetusta liikaa eikä jätä tilaa opettajan omille opetusratkaisuille [9]. Perkkilän [11] tutkimukseen osallistuneet opettajat kokivatkin oppikirjat opetusta rajoittaviksi. Kurssin aikana tulee kiire, jos koko oppikirja pyritään käymään läpi. Opettajan liiallinen nojautuminen oppikirjan rakenteeseen voi myös rajoittaa opettajan ajattelua. Kun oppilas ei anna oppikirjan mukaista vastausta, opettaja sivuttaa oppilaan selityksen tämän ratkaisutavasta ja odottaa muilta oppilailta oppikirjan mukaista ratkaisua. [11]

Oppikirjoja on tärkeää edelleen tutkia, sillä niillä on huomattava merkitys koulujen opetuksessa [1], ja ne tulevat myös tulevaisuudessa olemaan merkittävä osa opetusta ja vaikuttamaan oppilaiden matemaattiseen osaamiseen [9]. Suomessa opetus on vahvasti oppikirjapainotteista, minkä vuoksi oppilaille matematiikan luonne ja sisältö saattaa näyttäytyä vain oppikirjojen kautta [12]. Oppikirjoja käyttäessä tulisikin huomioida, että oppikirja on työkalu, jonka ei pidä antaa liikaa ohjata työskentelyä [1]. Oppikirjan kriittinen käyttö antaa oppilaille enemmän mahdollisuuksia ja tilaa kysyä opeteltavan asian sisällöstä ja ratkaisuista [12]. Opettajan tuleekin toimia asiantuntijana, joka varmistaa, että oppilas oppii tarvittavat opetussuunnitelman mukaiset tiedot, oli oppikirjan sisältö millainen tahansa [1].

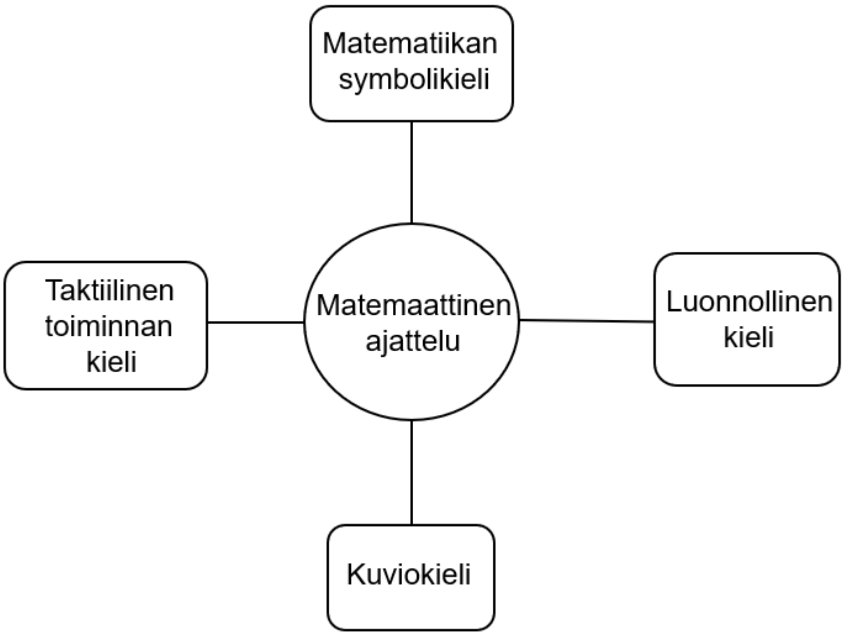
2.2 Matematiikan kielentäminen

Kielet voidaan jakaa luonnollisiin kieliin sekä keinotekoisiin kieliin. Luonnollisiin kieliin kuuluvat ne kansalliset kielet, joilla ihmiset kommunikoivat, kuten englanti ja suomi. Keinotekoisiin eli formaalisiin kieliin kuuluvat esimerkiksi matematiikka ja ohjelmointikielet. [2, 13] Keinotekoisten kielten ongelmana on niiden ilmaisujen rajoittuneisuus [13] ja käyttötarkoituksen suppeus [2], jolloin esimerkiksi tunteiden ilmaisu niiden avulla on haastavaa [13]. Luonnollinen kieli on puolestaan muuntuvaa [2].

Tossavainen [14] on kuvannut artikkelissaan matematiikan kielellisiä piirteitä. Matematiikka sisältää paljon sille ominaista sanastoa, vakiintuneita ilmauksia ja tyypillisiä rakenteita. Lisäksi matematiikassa käytetään sanoja, joita käytetään arkikielessä eri tarkoituksessa, esimerkiksi diskreetti. Matematiikalla on myös oma luonnollisesta kielestä poikkeava symbolikieli, jonka avulla voidaan nimetä ja ilmaista objekteja sekä niiden välisiä suhteita. Symboleilla voidaan myös ilmentää, miten päättely etenee. Vaikka matematiikassa onkin vakiintuneita merkintöjä ja ilmaisua, ei sillä ole samanlaista kielioppia kuin äidinkielessä. [14] Matematiikkaan kuuluu sen oman symbolijärjestelmän lisäksi vahvasti myös luonnollisen kielen ja visualisoinnin käyttö [15]. Esimerkiksi luonnollisen kielen avulla voidaan tuoda matemaattisia olioita opiskelijoille jo tuttuihin ilmiöihin [3] sekä selittää matematiikan käsitteiden merkityksiä [13].

Matematiikan kielentäminen suullisesti ja kirjallisesti edistää opiskelijan oman ajattelun rakentumista ja selkiytymistä. Se auttaa myös muita opiskelijoita ja opettajaa seuraamaan ratkaisua sekä opettajaa arvioinnissa. Kielentämisen avulla voidaan osoittaa oppilaan uskomuksia käsiteltävästä asiasta sekä kehittää vertaisryhmän muiden jäsenten matemaattista ajattelua. Kielentäen voidaan myös yhdistää useampia oppiaineita toisiinsa ja näin edistää kokonaisvaltaista oppimista. [13] Matematiikan kielentäminen edistää käsitteellistä ymmärrystä ja strategista osaamista, joita tarvitaan ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemiseen. Opetukseen sisällytetty kielentäminen opettaa opiskelijoille matematiikalle tieteenalana tyypillisiä käytäntöjä, kuten päättelyä, perustelua, erilaisten näkemysten jakamista ja kommunikaatiota. [12]

Joutsenlahden ja Kuljun [3] kolmen kielen malli kuvaa kolmea tapaa ilmaista matemaattista ajattelua. Nämä kolme kieltä ovat matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli ja kuviokieli. Symbolikieleen kuuluvat matemaattiset lausekkeet ja laskutoimitukset, luonnolliseen kieleen tavallinen äidinkieli ja kuviokieleen esimerkiksi geometriset kuviot. [3] Joutsenlahti ja Rättyä [13] laajentavat kolmen kielen mallia lisäämällä siihen neljännen kielen, taktiilisen toiminnan kielen, joka sisältää käsin kosketeltavan materiaalin, kuten geometriset palat. He kokevat, että kolmen kielen malli ei huomioi matematiikan opetuksessa käytettävää konkreettista materiaalia [13]. Neljän kielen malli on esitetty kuvassa 1.



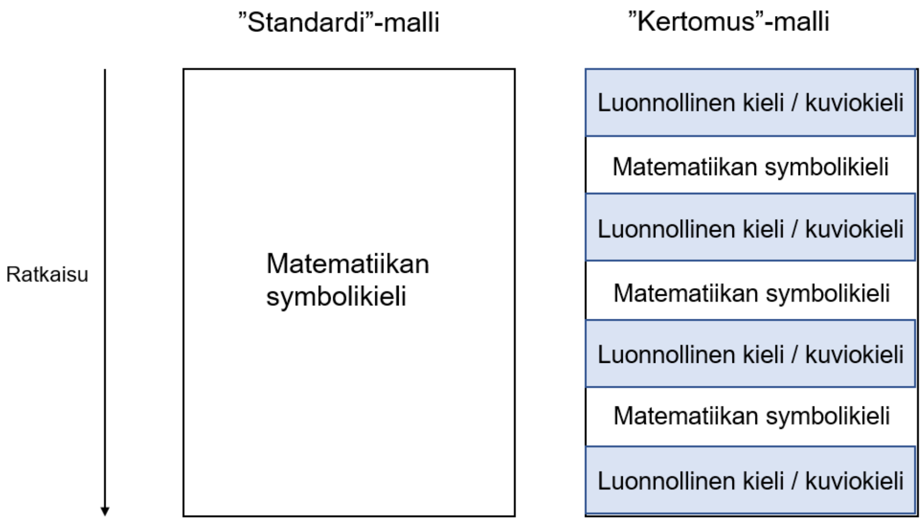
Kuva 1. Matematiikan opiskelun ja opetuksen neljä kieltä: matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli, kuviokieli ja taktiilinen toiminnan kieli *[13]*

Matematiikan jokaisella neljällä kielellä on vahvuutensa ja niitä voidaan käyttää myös toisiaan täydentäen [15]. Kielten avulla voidaan luoda merkityksiä matemaattisille käsitteille ja tehostaa niiden ymmärtämistä. Kielten välillä voidaan liikkua tarpeen mukaan siten, että ongelma saadaan parhaiten ratkaistua ja dokumentoitua. Toiminnan lähtökohdaksi voidaan ottaa mikä tahansa kielistä ja miettiä, miten samaa ilmiötä voidaan kuvata muilla kielillä. [13] Esimerkiksi murtolukujen laskeminen voidaan esittää kaikilla edellä mainituilla kielillä. Eri matematiikan kielen osa-alueiden käyttö opetuksessa voi edistää erilaisten oppijoiden matemaattisen ymmärryksen syventymistä. Matematiikan opetuksessa voidaan lähteä liikkeelle opiskelijoille tutuista ilmiöistä ja siirtyä kohti käsitteellistä ymmärrystä käyttäen apuna matematiikan neljää kieltä. [2]

Sanallisten tehtävien avulla harjoitellaan matemaattisia toimintoja ja kehitetään matemaattista ajattelua. Niiden ratkaisussa voidaan käyttää monipuolisesti yllä esitettyjä matematiikan kieliä. [3] Joutsenlahden [5] mukaan perusopetuksessa matematiikan oppikirjat eivät kuitenkaan kannusta käyttämään tehtävien ratkaisuun luonnollista kieltä. Jos matematiikassa kannustettaisiin myös luonnolliseen kielen käyttöön, voisi se parhaimmillaan edistää taitavien kielen käyttäjien intoa matematiikkaa kohtaan. Lukioon siirryttäessä esimerkeissä on puolestaan käytetty vaihtelevasti symbolikieltä, luonnollista kieltä ja kuviokieltä. [5]

Joutsenlahti [4] on konstruoinut matematiikan tehtävien ratkaisujen neljä kirjallisen kielentämisen mallia. Malleissa käytetyt kielet ovat kolmen kielen mallin mukaiset luonnollinen kieli, matematiikan symbolikieli ja kuviokieli. Ensimmäinen malleista on ”standardi”-malli, jossa käytetään vain matematiikan symbolikieltä. Ratkaisusta löytyy yleensä lauseke, laskut ja vastaus yksiköineen. Siinä opiskelija toistaa opittua rakennetta, eikä ratkaisu vahvista ymmärtämisen prosessia. Mallia käytetään paljon erityisesti peruskoulun aritmetiikan tehtävissä. [4]

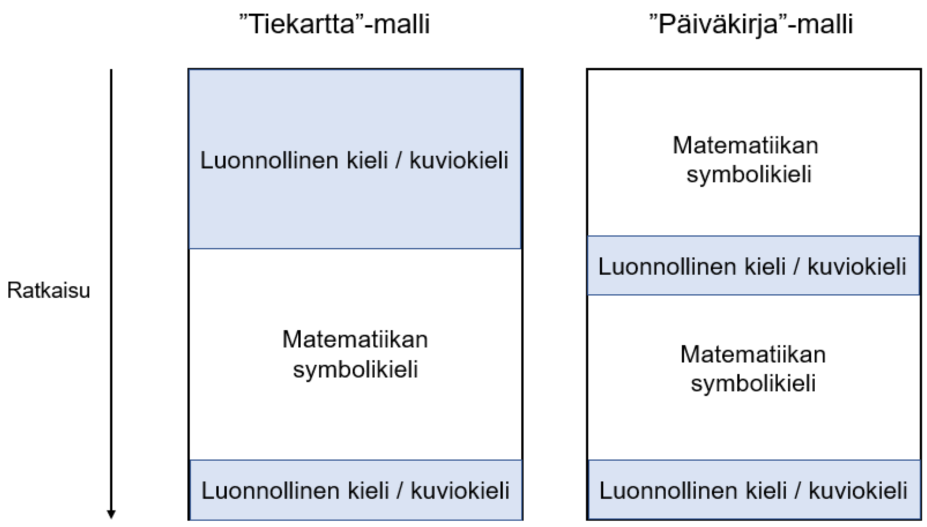
”Kertomus”-mallissa toistuu vuoron perään luonnollinen kieli tai kuviokieli ja matematiikan symbolikieli. Luonnollisella kielellä tai kuviokielellä yleensä kerrotaan, mitä ratkaisussa seuraavaksi kirjoitetaan matematiikan symbolikielellä. ”Kertomus”-mallissa useita kieliä käytetään oman ratkaisuprosessin apuna sekä myös jäsentämään ratkaisun etenemistä lukijalle. Lukijan on helppo seurata ratkaisua ja löytää siitä ongelmakohdat. ”Kertomus”-malli luokin kertomuksenomaisen ja johdonmukaisen kokonaisuuden kieliä monipuolisesti hyödyntäen. Mallia käytetään yleensä lukion sanallisten tehtävien esimerkeissä. [4] Kuvassa 2 on esitetty ”standardi”- ja ”kertomus”-malleja kuvaava ratkaisun eteneminen.



Kuva 2. Matematiikan tehtävän ratkaisun "standardi"- ja "kertomus"-mallit [4]

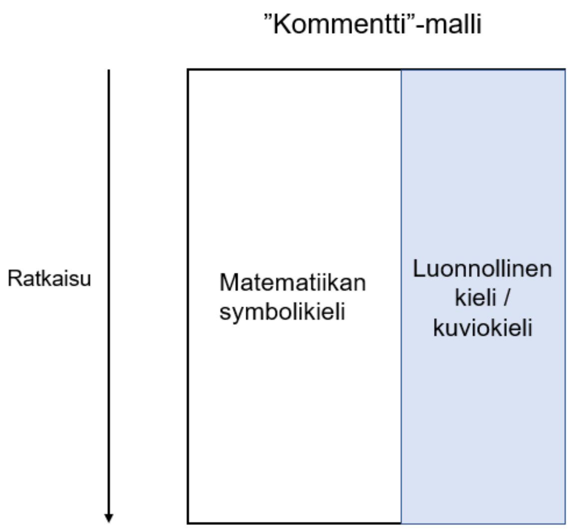
”Tiekartta”-malli kuvaa ratkaisua, jonka alussa kerrotaan luonnollisella kielellä tai kuviokielellä koko ratkaisuprosessi. Tämän jälkeen ratkaisu esitetään matematiikan symbolikielellä. Yleensä tarvittava lauseke merkitään heti ratkaisun toisen vaiheen alkuun esittämään alussa annettu luonnollisen kielen ratkaisu matematiikan symbolikielellä. Esittämällä ratkaisu luonnollisella kielellä tehtävän aluksi ratkaisija osoittaa perustelut tulevalle ratkaisulleen, ja mallin rakenne auttaakin opettajaa tai muuta lukijaa ymmärtämään ratkaisua. ”Tiekartta”-mallin ensimmäisessä vaiheessa siis kirjataan ajatteluprosessi, mikä jää ”standardi”-mallissa esittämättä. [4] Mallin käyttäminen on haastavaa, sillä se vaatii ratkaisijalta valmiin mentaalimallin ratkaisusta, jota tämä lähtee sitten kirjaamaan luonnollisella kielellä tai kuviokielellä [5].

”Päiväkirja”-mallissa ratkaisu etenee ”standardi”-mallin mukaisesti, kunnes ratkaisija kohtaa ongelman. Tällöin hän luonnollisen kielen tai kuviokielen avulla selkeyttää omia ajatuksiaan. Selvennys onkin yleensä tehty ratkaisijalle itselleen eikä niinkään lukijalle. ”Päiväkirja”-malli tukee oppilaan omaa ratkaisuprosessia ja se otetaan käyttöön, kun ratkaisu ei enää muuten etene. [4] ”Tiekartta”- ja ”päiväkirja”-mallit on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3. Matematiikan tehtävän ratkaisun "tiekartta"- ja "päiväkirja"-mallit [4]

Jousenlahti [5] on myöhemmin lisännyt joukkoon myös viidennen ratkaisumallin, ”kommentti”-mallin, jossa matematiikan symbolikieli ja luonnollinen kieli tai kuviokieli kulkevat rinnakkain. Symbolikielen vierelle tehdään luonnollisella kielellä tai kuviokielellä ratkaisua selventäviä kommentteja. Opettajat käyttävät usein tätä mallia esittäessään ratkaisuja. [5] ”Kommentti”-malli on esitetty kuvassa 4.



Kuva 4. Matematiikan tehtävän ratkaisun ”kommentti”-malli [5]

Kaikkien mallien lopuksi oletetaan, että tehtävän ratkaisu esitetään erillisenä vastauksena. Vastauksen esittäminen kokonaisena virkkeenä ohjaa tarkastamaan, mitä tehtävässä kysyttiin ja onko ratkaisu mielekäs. Luonnollisen kielen avulla annettuun tehtävään voidaan olettaa saatavan myös vastaus luonnollisella kielellä. [4]

2.3 Matematiikka ja kielentäminen opetussuunnitelman perusteissa

Tässä alaluvussa käsitellään matematiikkaa ja kielentämistä opetussuunnitelman perusteissa perusopetuksessa ja lukiossa. Luvussa tutustutaan lisäksi siihen, mitä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (POPS) [16] mainitaan algebran opetuksessa, ja mitä Lukion opetussuunnitelman perusteissa (LOPS) [17] sanotaan MAB4 Matemaattisia malleja -moduulin tavoitteista. Kyseiset sisällöt on valittu tarkasteluun, sillä aineistoon valittu materiaali perusopetuksesta käsittelee algebraa ja lukion aineisto on yllä mainitun moduulin kurssikirjasta.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [16] mukaan matematiikan opetuksen tehtävä on kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua, ongelmanratkaisukykyä sekä positiivista matematiikkakuvaa itsestään oppijana. Matematiikan opetuksen tulee ohjata oppilasta ymmärtämään, mikä on matematiikan merkitys sekä oppilaan elämässä että yhteiskunnassa. Opetuksen tulisi edistää oppilaan kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa. Vuosiluokilla 3–6 pyritään kehittämään oppilaan taitoa ilmaista matemaattista ajatteluaan eri tavoin, ja 7–9 luokilla vahvistetaan matemaattista yleissivistystä sekä syvennetään matemaattisten käsitteiden ymmärrystä. Tämän lisäksi oppilaiden tulisi pystyä mallintamaan ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. [16]

Tarkastellaan vielä algebran opetusta perusopetuksessa. Vuosiluokilla 3–6 algebran opetuksessa tutkitaan lukujonon säännöllisyyttä, tutustutaan käsitteeseen tuntematon ja tutkitaan yhtälöitä. Vuosiluokilla 7–9 tutustutaan potenssilausekkeiden sieventämiseen ja polynomeihin. Tavoitteena on oppia ensimmäisen asteen yhtälön sekä yhtälöparien muodostamista ja ratkaisua sekä kehittää edelleen oppilaiden taitoa tutkia lukujonoa. [16]

Lukion opetussuunnitelman perusteiden [17] mukaan matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota opiskelijalle valmiudet ymmärtää, tuottaa ja soveltaa matemaattista tietoa. Opetuksen tulee ohjata opiskelijaa ymmärtämään matematiikan merkitys niin kulttuurillisesti kuin yhteiskunnallisestikin. Matematiikan opetuksen tulee tutustuttaa opiskelija matematiikan peruskäsitteisiin ja rakenteisiin sekä ohjata matematiikan ilmaisuun ja tulkintaan niin kirjallisesti kuin puhuttunakin. Lisäksi opetus edistää laskemisen, matemaattisen mallintamisen ja ongelmanratkaisun taitoja. Opetuksen lähtökohtana tulisi olla opiskelijoita kiinnostavat aiheet, joita voidaan tarkastella matemaattisesti, ja opetuksessa tulisi etsiä yhteyksiä matematiikan ja arkielämän välillä. [17]

Lukion lyhyen matematiikan MAB4 Matemaattisia malleja -moduulin tavoitteena on, että opiskelija tunnistaa ja osaa kuvata reaalimaailmaa matemaattisilla malleilla. Opiskelijan tulisi oppia hyödyntämään erilaisia ohjelmistoja mallinnuksessa, funktion ominaisuuden tutkimisessa sekä yhtälöiden ratkaisussa. Tavoitteena on myös, että opiskelija oppii arvioimaan mallien toimivuutta ja käyttökelpoisuutta. [17]

Tarkastellaan vielä, mitä opetussuunnitelmien perusteissa sanotaan kielentämisestä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [16] mukaan opetuksen tulee perustua oppimiskäsitykseen, jossa kielen käyttö on oppimisen kannalta oleellista. Laaja-alaisen osaamisen sisällöissä puolestaan todetaan, että opetuksen tulee tukea oppilaan kasvua monipuoliseksi ja taitavaksi kielenkäyttäjäksi äidinkielen lisäksi myös muilla kielillä, kuten matematiikan kielillä. Jokaisella oppiaineella on oma kielensä ja symbolijärjestelmänsä, joilla voidaan esittää ja tulkita samaa ilmiötä eri näkökulmista. Matematiikan symbolikielen käytön oppiminen on yhtä tärkeä kuin muidenkin kielten, ja oppilasta tulee tukea kielenkäyttöön myös vähäisillä taidoilla. [16]

Monilukutaito tarkoittaa taitoa tuottaa, tulkita ja arvottaa erilaisia tekstejä. Teksteillä tarkoitetaan sanallista, kuvallista, auditiivista, numeerista sekä kinesteettisten symbolijärjestelmien avulla ilmaistua kieltä. Monilukutaito on tiedon hankintaa, muokkaamista, yhdistämistä, tuottamista, esittämistä ja arviointia. Se auttaa oppilasta tulkitsemaan ympäröivää maailmaa ja ymmärtämään kulttuurista monimuotoisuutta. Oppilaan monilukutaitoa tulisi kehittää kaikissa oppiaineissa arkikielestä kohti aineen omaa kieltä ja esitystapaa. Oppilaiden tulee päästä tulkitsemaan, käyttämään ja tuottamaan monipuolisesti erilaisia tekstejä. [16]

Myös Lukion opetussuunnitelman perusteissa [17] tunnustetaan kielen merkitys oppimisen kannalta. Lukio-opetuksen tulee kehittää opiskelijan monikielistä osaamista, ja jokaisen opettajan tulee toimia oman oppiaineensa kielten ja monilukutaidon opettajana. Opetuksessa tulee tuoda näkyväksi ja arvostaa eri kieliä sekä vahvistaa opiskelijan monilukutaitoa. Lukiossa opiskelijan tulisi ymmärtää tieteenalalle ominaista kieltä. Kielitietoisuutta ja monilukutaitoa kehitetään vuorovaikutuksessa yhdessä ja erilaisissa ympäristöissä. [17]

3 MATEMATIIKAN MALLINTAMINEN

Malleja käytetään muun muassa fysiikassa ja biotieteissä systeemin ominaisten piirteiden löytämiseen sekä systeemin käyttäytymisen ennustamiseen ja optimointiin. Matemaattisessa mallissa tarkasteltava data esitetään matemaattisten lausekkeiden avulla. Matemaattiset mallien ratkaisut ovat usein likiarvoja, joten niitä käytettäessä on tarpeellista tarkastella myös ratkaisun tarkkuutta ja luotettavuutta. [18] Tässä kappaleessa esitellään kaksi tapaa, miten voidaan muodostaa matemaattisia malleja. Ensimmäisessä alakappaleessa esitellään vektoreiden sekä matriisien ominaisuuksia ja seuraavissa alakappaleissa pienimmän neliösumman menetelmä sekä polynominen interpolointi.

3.1 Vektorit ja matriisit

Määritellään aluksi vektoreihin liittyviä käsitteitä ja ominaisuuksia myöhempiä todistuksia varten. Ennen vektoreihin siirtymistä on määriteltävä kunta.

Määritelmä 1. [19] Kunta $K \neq \emptyset$ on joukko, joka on varusteltu laskutoimituksilla yhteenlasku $a + b$ ja tulo ab, missä $a, b \in K$, ja näille laskutoimituksille pätee seuraavat ehdot.

1. $a + b = b + a$ (summan vaihdannaisuus)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (summan liitännäisyys)
3. on olemassa alkio $0 \in K$ siten, että $0 + a = a$ kaikilla $a \in K$ (summan neutraalialkio)
4. jokaiselle alkiolle $a \in K$ on olemassa vasta-alkio $-a$ siten, että $a + (-a) = 0$ (summan vasta-alkio)
5. $ab = ba$ (tulon vaihdannaisuus)
6. $a(bc) = (ab)c$ (tulon liitännäisyys)

7. on olemassa alkio $1 \in K$ siten, että $1a = a$ kaikilla $a \in K$ (tulon neutraalialkio)
8. jokaiselle alkiolle $a \neq 0$ on olemassa käänteisalkio a^{-1} siten, että $aa^{-1} = 1$ (tulon käänteisalkio)
9. $a(b + c) = ab + ac$ (osittelulaki).

Kunnan K alkioita kutsutaan skalaareiksi. Tyypillisiä kuntia ovat rationaalilukujen kunta $\mathbb{Q}$, reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$ ja kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$. [19] Tässä työssä tarkasteltava kunta on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan vektoriavaruuksia.

Sisätuloavaruus

Aloitetaan määrittelemällä vektoriavaruus.

Määritelmä 2. [20] Olkoot V joukko ja siinä määritelty laskutoimitus yhteenlasku $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Olkoon lisäksi kaikkien kunnan K alkioiden $c \in K$ ja kaikkien joukon V alkioiden $\boldsymbol{u} \in V$ välillä määritelty skalaarikertolasku $c\boldsymbol{u}$. Jos kaikille alkioille $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ ja kaikille skalaareille $c, d \in K$ pätee seuraavat aksioomat, on joukko V K-kertoiminen vektoriavaruus ja alkiot $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sekä $\boldsymbol{w}$ vektoreita.

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$
2. Yhteenlasku on vaihdannainen eli $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
3. Yhteenlasku on liitännäinen eli $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.
4. Kaikilla $\boldsymbol{u} \in V$ on olemassa alkio $\boldsymbol{0} \in V$ s.e. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$. Tätä alkiota kutsutaan nolla-alkioksi.
5. Jokaiselle $\boldsymbol{u} \in V$ on olemassa vasta-alkio $-\boldsymbol{u} \in V$, jolle pätee $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.
6. $c\boldsymbol{u} \in V$
7. $c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$
8. $(c + d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$
9. $c(d\boldsymbol{u}) = (cd)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, jossa on määritetty laskutoimitukset yhteenlasku $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ja skalaarikertolasku $c\boldsymbol{x} = (cx_1, \dots, cx_n)$, missä $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Joukko $\mathbb{R}^n$ varustettuna näillä laskutoimituksilla toteuttaa määritelmän 2 aksioomat ja on siis vektoriavaruus [20].

Vektoriavaruudelle voidaan määritellä aliavaruus seuraavasti.

Määritelmä 3. [21] Vektoriavaruuden V aliavaruus W on avaruuden V osajoukko, jolle pätee seuraavat ominaisuudet.

1. Avaruuden V nolla-alkio $\mathbf{0}$ on myös avaruudessa W.
2. Jokaisille vektoreille $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v} \in W$ pätee $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$.
3. Jokaiselle vektorille $\boldsymbol{v} \in W$ ja skalaarille c pätee $c\boldsymbol{v} \in W$.

Määritelmän kohdista 1–3 seuraa, että myös aliavaruus W on vektoriavaruus [21].

Olkoot V vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on K, ja $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ siihen kuuluvia vektoreita. Sanotaan, että vektori $\boldsymbol{v}$ voidaan esittää vektoreiden $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ lineaarikombinaationa, jos

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m,$$

missä $a, a_2, \dots, a_m \in K$. Jos jokainen vektoriavaruuden V vektori voidaan esittää vektoreiden $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ lineaarikombinaationa, vektorit $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ virittävät avaruuden V. [20]

Vektorit $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos lauseke

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m = \mathbf{0}$$

pätee vain, kun kaikki kertoimet $a_i = 0,\ i = 1, \dots, m$. Vektoriavaruuden kanta on pienin mahdollinen joukko lineaarisesti riippumattomia vektoreita, joiden lineaarikombinaationa kaikki avaruuden vektorit voidaan esittää. [20] Jos pienimmästä mahdollisesta vektorijoukosta poistetaan yksikin vektori, ei kaikkia muita avaruuden vektoreita voi enää esittää kyseisen vektorijoukon lineaarikombinaationa.

Määritellään seuraavaksi vektoreiden pistetulo, sisätulo ja sisätuloavaruus.

Määritelmä 4. [20] Sisätulo $\langle , \rangle$ on K-kertoimisen vektoriavaruuden V funktio, $\langle , \rangle : V^2 \to K$, jolla seuraavat ehdot pätevät vektoreille $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w} \in V$ sekä skalaarille $c \in K$.

1. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$
2. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$
3. $\langle c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = c\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$ ja $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Jos vektoriavaruus V on varustettu yllä esitetyn mukaisella sisätulolla, on se sisätuloavaruus. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna vektoreiden $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ pistetulolla $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ on sisätuloavaruus. [21] Osoitetaan tämä seuraavaksi. Olkoot siis $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$. Tarkastellaan määritelmän 4 ehtoja. Nyt

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + \cdots + v_nu_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
2. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) = u_1(v_1 + w_1) + \cdots + u_n(v_n + w_n) =$
   $u_1v_1 + u_1w_1 + \cdots + u_nv_n + u_nw_n = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n + u_1w_1 + \cdots + u_nw_n =$
   $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
3. $c\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = cu_1v_1 + \cdots + cu_nv_n = c(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n) = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$
4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = u_1u_1 + \cdots + u_nu_n = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$ ja $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 0$ jos ja vain jos $u_1^2, \dots, u_n^2 = 0$ eli $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Koska kaikki määritelmän 4 ehdot pätevät, on $\mathbb{R}^n$ varustettuna vektoreiden $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ pistetulolla sisätuloavaruus.

Esimerkki 5. [22] Olkoot $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ja $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin vektoreiden pistetuloksi on määritelty

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_1v_1 + \cdots + u_nv_n) \in \mathbb{R}.$$

Määritellään seuraavaksi normi ja normiavaruus.

Määritelmä 6. [20] Olkoon V K-kertoiminen vektoriavaruus. Funktiota $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ sanotaan normiksi, jos kaikilla vektoreilla $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ ja kaikilla skalaareilla $c \in K$ pätee.

1. $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ ja $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ jos ja vain jos $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

2. $\|c\boldsymbol{v}\| = |c|\|\boldsymbol{v}\|$
3. $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$.

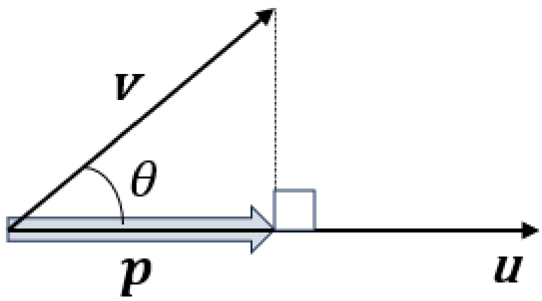
Jos vektoriavaruudessa on määritelty normi, on se normiavaruus.

Esimerkki 7. Tarkastellaan vektorin pituutta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Vektorin $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ pituus eli normi on skalaari, joka voidaan esittää muodossa $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$. [20] Koska vektorin pistetulo vastaa vektorin sisätuloa avaruudessa $\mathbb{R}^n$, voidaan myös kirjoittaa $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$.

Vektorin projektio

Tarkastellaan vektorin projektiota. Olkoot $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{u}$ nollasta poikkeavia vektoreita ja θ niiden välinen kulma. Olkoon lisäksi $\boldsymbol{p}$ vektorin $\boldsymbol{u}$ kanssa yhdensuuntainen vektori, jonka kärki on saatu siirtämällä vektorin $\boldsymbol{v}$ kärki kohtisuorasti vektorille $\boldsymbol{u}$. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 5. Tällöin vektori $\boldsymbol{p}$ voidaan ilmoittaa vektorin $\boldsymbol{u}$ suuntaisen yksikkövektorin $\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$ avulla $\boldsymbol{p} = \|\boldsymbol{p}\|\hat{\boldsymbol{u}}$. Trigonometrian avulla saadaan vektorin $\boldsymbol{p}$ pituudeksi $\|\boldsymbol{p}\| = \|\boldsymbol{v}\|\cos(\theta)$. Lisäksi tiedetään, että $\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$. Nämä yhdistämällä saadaan

$$\boldsymbol{p} = \|\boldsymbol{p}\|\hat{\boldsymbol{u}} = \|\boldsymbol{v}\|\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}\right)\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\right)\boldsymbol{u} = \left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\right)\boldsymbol{u}.$$



Kuva 5. Vektorin $\boldsymbol{v}$ projektio $\boldsymbol{p}$ vektorille $\boldsymbol{u}$

Tällöin voidaan siis esittää vektorin $\boldsymbol{v}$ projektio vektorille $\boldsymbol{u}$ seuraavasti.

Määritelmä 8. [20] Olkoot vektorit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Tällöin vektorin $\boldsymbol{v}$ projektio vektorille $\boldsymbol{u}$ on vektori

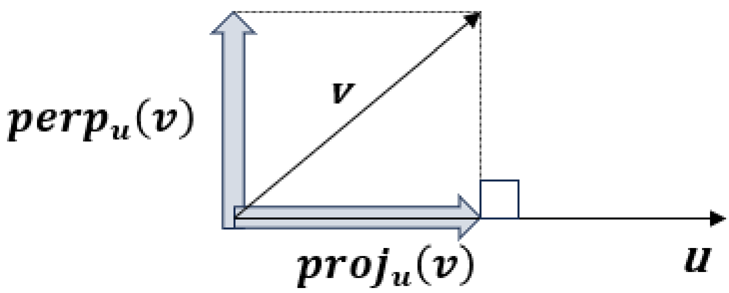
$$proj_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}\right)\boldsymbol{u}.$$

Ortogonaalisuus

Tarkastellaan seuraavaksi vektoreiden ortogonaalisuutta. Määritellään, mitä tarkoittaa, että vektorit ovat ortogonaaliset.

Määritelmä 9. [21] Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat ortogonaaliset, jos $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

Projektiota $proj_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$ vastaan ortogonaalista vektoria voidaan merkitä $perp_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - proj_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$. Kohtisuoruutta voidaan merkitä myös symbolilla $\perp$. Käytetään näitä merkintöjä jatkossa. Ortogonaalista vektoria on havainnollistettu kuvassa 6.



Kuva 6. Projektion $proj_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$ kanssa ortogonaalinen vektori $perp_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$

Vektoreiden ortogonaalisuus voidaan laajentaa koskemaan myös vektorijoukkoa. Määritellään, millainen vektorijoukko on ortogonaalinen joukko, ja milloin vektoriavaruuden kanta on ortogonaalinen.

Määritelmä 10. [20] Vektorijoukko $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ on ortogonaalinen joukko, jos $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ kaikille $i, j \in 1, \dots, k$, kun $i \neq j$.

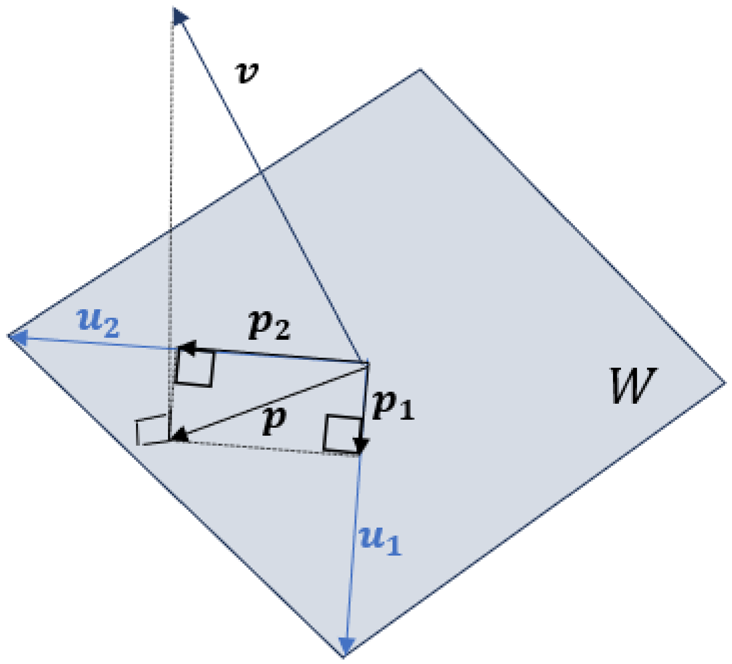
Määritelmä 11. [20] Jos vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden W kanta on määritelmän 10 mukainen ortogonaalinen joukko, se on avaruuden W ortogonaalinen kanta.

Tarkastellaan seuraavaksi vektorin ortogonaalista projektiota.

Määritelmä 12. [20] Olkoot W avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus ja $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ avaruuden W ortogonaalinen kanta. Tällöin jokaiselle vektorille $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää ortogonaalinen projektio avaruudessa W seuraavasti.

$$proj_W(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\right)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \left(\frac{\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k}\right)\boldsymbol{u}_k.$$

Määritelmän 8 mukaisella merkinnällä voidaan edelleen kirjoittaa $proj_W(\boldsymbol{v}) = proj_{\boldsymbol{u}_1}(\boldsymbol{v}) + \ldots + proj_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{v})$. Kuvassa 7 on havainnollistettu vektorin $\boldsymbol{v}$ ortogonaalista projektiota avaruudessa W. Kuvassa $\boldsymbol{p} = proj_W(\boldsymbol{v})$.



Kuva 7. Vektorin $\boldsymbol{v}$ ortogonaalinen projektio $\boldsymbol{p}$ avaruudessa $\boldsymbol{W}$

Projektiota $proj_W(\boldsymbol{v})$ vastaan ortogonaalista vektoria voidaan merkitä $perp_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})$.

Olkoon W avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus ja vektori $\boldsymbol{z}$ ortogonaalinen kaikkia aliavaruuden W vektoreita vastaan. Tällöin $\boldsymbol{z}$ on ortogonaalinen aliavaruutta W

vastaan. Kaikkien tällaisten vektorien $\boldsymbol{z}$ joukkoa kutsutaan aliavaruuden W ortogonaaliseksi komplementiksi ja sitä merkitään $W^{\perp}$.

Esitellään seuraavaksi ortogonaalisen hajotelman lause.

Lause 13. [21] *Ortogonaalisen hajotelman lause*
Olkoot W avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus ja vektori $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset vektorit $\boldsymbol{w} \in W$ ja $\boldsymbol{w}^{\perp} \in W^{\perp}$, joille pätee

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\perp}.$$

Todistus. Osoitetaan ensin hajotelman olemassaolo. Olkoot $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ avaruuden W ortogonaalinen kanta, $\boldsymbol{w} = proj_W(\boldsymbol{v})$ ja $\boldsymbol{w}^{\perp} = perp_W(\boldsymbol{v})$. Tällöin

$$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\perp} = proj_W(\boldsymbol{v}) + perp_W(\boldsymbol{v}) = proj_W(\boldsymbol{v}) + \big(\boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})\big) = \boldsymbol{v}$$

Vektori $\boldsymbol{w} = proj_W(\boldsymbol{v})$ kuuluu avaruuteen W, sillä se on kantavektoreiden $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ lineaarikombinaatio. Jotta voidaan osoittaa että $\boldsymbol{w}^{\perp} \in W^{\perp}$ riittää osoittaa, että vektori $\boldsymbol{w}^{\perp}$ on ortogonaalinen kaikkien kantavektoreiden $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ kanssa. Nyt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{w}^{\perp} &= \boldsymbol{u}_i \cdot perp_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}_i \cdot \big(\boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})\big) \\ &= \boldsymbol{u}_i \cdot \left(\boldsymbol{v} - \left(\frac{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\right)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \left(\frac{\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k}\right)\boldsymbol{u}_k\right)\end{aligned}$$

Koska määritelmän 10 nojalla $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ kun $i \neq j$, saadaan

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{w}^{\perp} = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_i \cdot \left(\frac{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\right)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

On siis osoitettu, että $\boldsymbol{w} \in W$ ja $\boldsymbol{w}^{\perp} \in W^{\perp}$ eli ortogonaalinen hajotelma on olemassa.

Osoitetaan seuraavaksi, että hajotelma on yksikäsitteinen. Tehdään vastaoletus, että on olemassa toinen hajotelma $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_1^{\perp}$, jossa $\boldsymbol{w}_1 \in W$ ja $\boldsymbol{w}_1^{\perp} \in W^{\perp}$. Tällöin $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\perp} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_1^{\perp}$ ja edelleen $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}^{\perp} - \boldsymbol{w}_1^{\perp}$. Nyt $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_1$ on siis aliavaruuksien W ja $W^{\perp}$ alkio. Tällöin $(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_1) \cdot (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_1) = 0$, jolloin $(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_1) = \boldsymbol{0}$ ja siis oltava $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\boldsymbol{w}^{\perp} = \boldsymbol{w}_1^{\perp}$, ja hajotelma on siis yksikäsitteinen. □

Todistetaan vielä vektoreiden ortogonaalisuuteen liittyvä Pythagoraan lause myöhempiä todistuksia varten

Lause 14. [20] *Pythagoraan lause*
Olkoot $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{w}$ vektoreita sisätuloavaruudessa V. Tällöin $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{w}$ ovat ortogonaalisia, jos ja vain jos

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2.$$

Todistus. Sisätuloavaruuden laskutoimitusten nojalla saadaan

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle$$

Jos ja vain jos $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$ ja $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\rangle = 0$ yhtälö saa muodon

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2.$$

Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{w}$ ortogonaalisia jos ja vain jos niiden sisätulolle pätee $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$. On siis osoitettu, että $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{w}$ ovat ortogonaalisia, jos ja vain jos

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2.$$

□

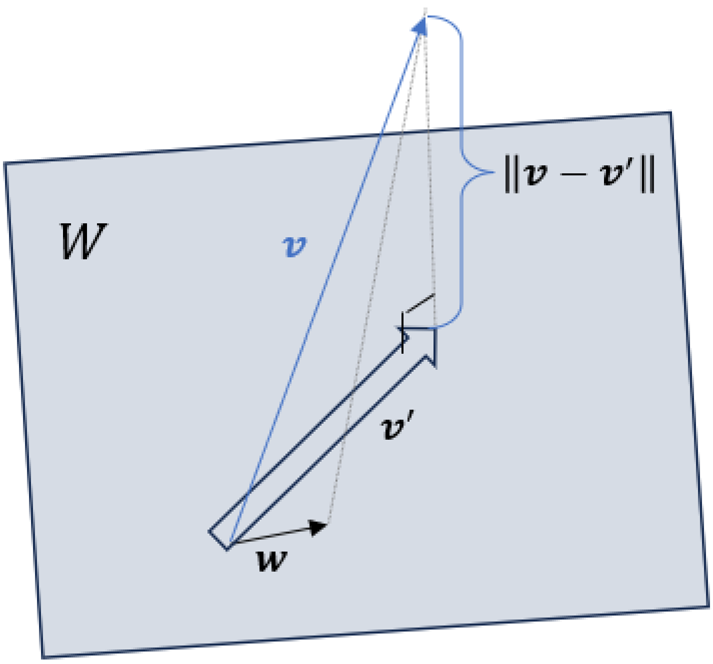
Paras approksimaatio

Tarkastellaan tilannetta, jossa vektoriavaruuden V vektorille $\boldsymbol{v}$ tulisi löytää mahdollisimman lähellä oleva approksimaatio vektoriavaruuden V aliavaruudessa W.

Määritelmä 15. [20] Olkoon W määritelmän 6 mukaisen normiavaruuden V aliavaruus ja $\boldsymbol{v}$ vektori normiavaruudessa V. Tällöin vektorin $\boldsymbol{v}$ paras approksimaatio avaruudessa W on vektori $\boldsymbol{v}' \in W$, siten että jokaisella vektorilla $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{v}' \in W$ pätee

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'\| < \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|.$$

Tarkastellaan kuvan 8 tilannetta. Vektorin $\boldsymbol{v}$ paras approksimaatio avaruudessa W on siis vektori $\boldsymbol{v}'$, jolla pituus $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'\|$ saadaan mahdollisimman pieneksi.



Kuva 8. Vektorin $\boldsymbol{v}$ paras approksimaatio avaruudessa W

Koska ortogonaalinen projektio voidaan määrittää missä tahansa sisätuloavaruudessa, saadaan vektorille $\boldsymbol{v}'$ seuraavan lauseen mukainen muoto.

Lause 16. [20] *Parhaan approksimaation lause*

Olkoon W on äärellisulotteinen sisätuloavaruuden V aliavaruus ja $\boldsymbol{v}$ vektori avaruudessa V. Tällöin $proj_W(\boldsymbol{v})$ on vektorin $\boldsymbol{v}$ paras approksimaatio aliavaruudessa W.

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{w}$ eri vektori kuin $proj_W(\boldsymbol{v})$ aliavaruudessa W. Tällöin myös vektori $proj_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}$ on vektorien erotuksena aliavaruudessa W. Merkitään $perp_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})$ vektoria, joka on ortogonaalinen vektoria $proj_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}$ vastaan. Tällöin lauseen 14 eli Pythagoraan lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})\|^2 + \|proj_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}\|^2 &= \|\boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v}) + proj_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2\end{aligned}$$

Koska $\boldsymbol{w}$ ja $proj_W(\boldsymbol{v})$ ovat eri vektorit, on oltava $\|proj_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}\|^2 > 0$ ja edelleen

$$\|\boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})\|^2 < \|\boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})\|^2 + \|proj_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2$$

On siis todistettu, että

$$\|\boldsymbol{v} - proj_W(\boldsymbol{v})\|^2 < \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2$$

joten vektorin $\boldsymbol{v}$ paras approksimaatio aliavaruudessa W on $proj_W(\boldsymbol{v})$. □

Lineaarinen yhtälöryhmä

Tarkastellaan ensin lineaarista yhtälöryhmää ja siirrytään sitten matriisiyhtälöön ja matriisien ominaisuuksiin. Muuttujien $x_1, \dots, x_n$ muodostama lineaarinen yhtälö on muotoa

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

missä b ja kertoimet $a_1, \dots, a_n$ ovat kunnan K alkioita. Lineaarisista yhtälöistä voidaan koota lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m. \end{cases}$$

Lineaariselle yhtälöryhmälle pätee täsmälleen yksi seuraavista väitteistä.

1. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
2. Yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.
3. Yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja.

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan esittää myös matriisimuodossa. Kunnan K matriisi on skalaarijoukon taulukkomainen esitysmuoto. Matriisi voidaan yleisesti esittää muodossa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

missä rivit ovat vaakasuoria skalaarien listoja, kuten $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, ja sarakkeet pystysuoria listoja, kuten $\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}$. $n \times m$-matriisissa on n kappaletta rivejä ja m kappaletta sarakkeita. [22]

Edellä esitetty lineaarinen yhtälöryhmä matriisimuodossa on

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Merkitään kertoimia a_{mn} kuvaava matriisia merkinnällä A, muuttujia $x_1, \dots, x_n$ kuvaavaa vektoria $\boldsymbol{x}$ ja skalaareja $b_1, \dots, b_n$ kuvaavaa vektoria $\boldsymbol{b}$. Tällöin yhtälö saa muodon $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. [21]

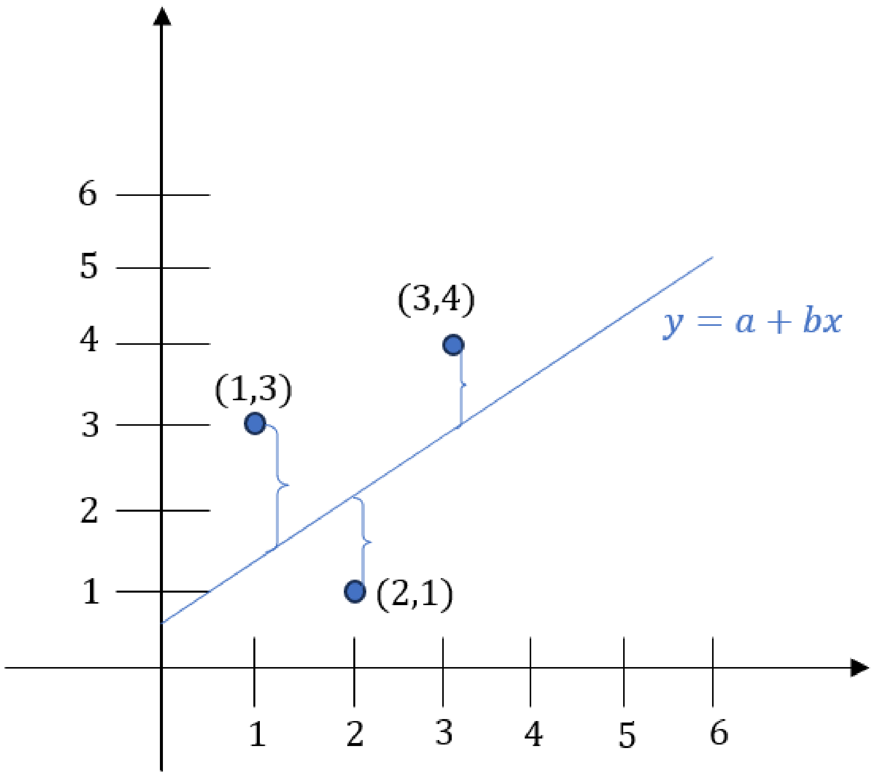
Määritellään tämän alaluvun lopuksi matriisin aste ja sarakeavaruus.

Määritelmä 17. [22] Matriisin aste, $rank(A)$, on sen lineaarisesti riippumattomien rivien määrä.

Määritelmä 18. [20] Olkoon A $n \times m$ reaalinen matriisi. Tällöin matriisin A sarakeavaruus $col(A)$ on avaruuden $\mathbb{R}^m$ aliavaruus, joka on matriisin A sarakkeiden virittämä.

3.2 Pienimmän neliösumman menetelmä

Pienimmän neliösumman menetelmässä pistejoukkoon pyritään löytämään sovite siten, että se poikkeaa mahdollisimman vähän kaikista pisteistä. Pisteiden ja sovitteen pystysuuntaisten etäisyyksien summa pyritään siis saamaan mahdollisimman pieneksi. [20] Tarkastellaan tapausta, jossa etsitään sovitesuoraa. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 9.



Kuva 9. Pisteiden pystysuuntainen etäisyys suorasta

Olkoot meillä n kappaletta pisteitä $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ja suora $y = a + bx$. Merkitään kunkin pisteen virhettä eli etäisyyttä suorasta ε_i, missä $i \in \mathbb{N}$. Tällöin voidaan muodostaa virhevektori

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

missä $n \in R$ ja $\varepsilon_i = y_i - (a + bx_i)$. Virhevektori saadaan pienimmäksi, kun minimoidaan vektorin pituus tai vastaavasti sen pituuden neliö

$$\|\boldsymbol{e}\|^2 = \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_n^2.$$

Jos pisteet $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ olisivat suoralla $y = ax + b$, voitaisiin muodostaa n kappaletta lineaarisia yhtälöitä

$$\begin{gathered} a + bx_1 = y_1 \\ \vdots \\ a + bx_n = y_n, \end{gathered}$$

jotka olisivat kaikki tosia. Yhtälöt voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Matriisiyhtälö on nyt muotoa $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$, missä

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Mahdollisimman pieneksi haluttu virhevektori $\boldsymbol{e}$ on siis muotoa $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}$. [20]
Pienimmän neliösumman menetelmällä voidaan määrittää myös muunlaisia sovitteita kuin suoria. Tällöin muuttuvat edellä esitetty matriisi X muotoon

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

sekä vektori $\boldsymbol{c}$ muotoon $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$. Esitetään seuraavaksi kaikille sovitteille kelpaava pienimmän neliösumman ratkaisu matriisimuodossa.

Määritelmä 19. [20] Jos X on $n \times m$ matriisi ja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, pienimmän neliösumman ratkaisu matriisiyhtälölle $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ on vektori $\boldsymbol{c}^* \in R^n$, jolle pätee

$$\|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*\| \leq \|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}\|$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Etsitään seuraavaksi ratkaisu määritelmän 19 mukaiselle yhtälölle. Tarkastellaan matriisin X sarakeavaruutta $Col\,X$, johon vektori $X\boldsymbol{c}$ aina kuuluu. Tarkoituksena on siis etsiä vektori $\boldsymbol{c}$, jolla $X\boldsymbol{c}$ on lähimpänä vektoria $\boldsymbol{y}$ sarakeavaruudessa $Col\,X$. Oletetaan, että vektori $\boldsymbol{y}$ ei kuulu matriisin X sarakeavaruuteen, sillä jos se kuuluisi, on olemassa $\boldsymbol{c}$, jolla $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$. Parhaan approksimaation lauseen nojalla vektorin $\boldsymbol{y}$ paras approksimaatio sarakeavaruudessa $Col\,X$ on

$$\boldsymbol{y}^* = proj_{Col\,X}(\boldsymbol{y})$$

Koska $\boldsymbol{y}^*$ kuuluu matriisin X sarakeavaruuteen, on yhtälöllä $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}^*$ ratkaisu. Tällöin on olemassa vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^n$ kuuluva vektori $\boldsymbol{c}^*$, jolle pätee

$$X\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{y}^*$$

Vektori $\boldsymbol{c}^*$ on pienimmän neliösumman ratkaisu yhtälölle $X\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{y}$. [21]

Oletetaan että $\boldsymbol{c}^*$ toteuttaa yhtälön $X\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{y}^*$**.** Lauseen 13 eli ortogonaalisen hajotelman lauseen nojalla projektiolla $\boldsymbol{y}^*$ on ominaisuus, että $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*$ on ortogonaalinen sarakeavaruuteen $Col(X)$ nähden. Tällöin $\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*$ on ortogonaalinen jokaiseen matriisin X sarakkeeseen nähden. Olkoon $\boldsymbol{a}_j$ matriisin X sarake. Tällöin $\boldsymbol{a}_j \cdot (\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*) = 0$ ja $\boldsymbol{a}_j^T(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*) = 0$ kaikille j. Edelleen koska $\boldsymbol{a}_j^T$ on matriisin X^T rivi, niin

$$X^T(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*) = \boldsymbol{0}$$
$$X^T\boldsymbol{y} - X^TX\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{0}$$
$$X^TX\boldsymbol{c}^* = X^T\boldsymbol{y}$$

Täten pienimmän neliösumman ratkaisu matriisiyhtälölle $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ on siis vektori $\boldsymbol{c}^*$, jolle pätee yhtälö $X^TX\boldsymbol{c}^* = X^T\boldsymbol{y}$. Tätä yhtälöä kutsutaan pienimmän neliösumman ratkaisua vastaavaksi normaaliyhtälöksi. [21] Edellä johdettu voidaan esittää seuraavana lauseena.

Lause 20. [21] Pienimmän neliösumman ratkaisujen joukko matriisiyhtälölle $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ vastaa normaaliyhtälön $X^TX\boldsymbol{c}^* = X^T\boldsymbol{y}$ ratkaisujen joukkoa.

Todistus. Kuten yllä on esitetty, pienimmän neliösumman ratkaisujen joukko on epätyhjä ja jokainen ratkaisu $\boldsymbol{c}^*$ toteuttaa normaaliyhtälön. Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{c}^*$ toteuttaa yhtälön $X^TX\boldsymbol{c}^* = X^T\boldsymbol{y}$. Tällöin $\boldsymbol{c}^*$ toteuttaa myös yhtälön

$$X^T(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*) = \boldsymbol{0},$$

mikä osoittaa, että $\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*$ on ortogonaalinen matriisin X^T riveihin ja edelleen matriisin X sarakkeisiin nähden. Koska matriisin X sarakkeet virittävät sarakeavaruuden $Col\,X$, vektori $\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*$ on ortogonaalinen sarakeavaruuden $Col\,X$ kanssa. Tällöin voidaan muodostaa yhtälö

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{c}^* + (\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{c}^*),$$

joka on vektorin $\boldsymbol{y}$ ortogonaalihajotelma. Ortogonaalihajotelman yksikäsitteisyyden nojalla $X\boldsymbol{c}^*$ on vektorin $\boldsymbol{y}$ ortogonaalinen projektio sarakeavaruuteen $Col\,X$. Tällöin $X\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{c}^*$ on pienimmän neliösumman ratkaisu. □

Rajataan lopuksi tapaus, jolloin pienimmän neliösumman ratkaisu on yksikäsitteinen.

Lause 21. [21] Matriisi X^TX on kääntyvä, jos ja vain jos matriisin X sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin pienimmällä neliösummalla on vain yksi ratkaisu, joka on muotoa $\boldsymbol{c}^* = (X^TX)^{-\mathbf{1}}X^T\,\boldsymbol{y}$.

Todistus. Matriisin X n kappaletta sarakkeita ovat lineaarisesti riippumattomia, jos $rank(X) = n$. Tämä puolestaan on totta vain jos X^TX on kääntyvä. Jos X^TX on kääntyvä, saadaan

$$X^TX\boldsymbol{c}^* = X^T\boldsymbol{y}$$
$$(X^TX)^{-\mathbf{1}}(X^TX)\boldsymbol{c}^* = (X^TX)^{-\mathbf{1}}X^T\boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{c}^* = (X^TX)^{-\mathbf{1}}X^T\boldsymbol{y}$$

On siis saatu yksikäsitteinen pienimmän neliösumman ratkaisu $\boldsymbol{c}^* = (X^TX)^{-\mathbf{1}}X^T\boldsymbol{y}$. □

Todistus matriisin asteen ja kääntyvyyden välisestä yhteydestä löytyy esimerkiksi lähteestä [20].

3.3 Polynomin interpolointi

Pistejoukosta voidaan määrittää sovite myös muilla tavoin kuin pienimmän neliösumman avulla. Tarkastellaan seuraavaksi, miten pistejoukkoon voidaan sovittaa polynomi. Määritellään ensin, mitä tarkoittaa polynomin interpolointi.

Määritelmä 22. [23] Funktio $y = P(x)$ interpoloi pisteet $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, jos $P(x_i) = y_i$ kaikille $i = 0, \dots, n$.

Esitetään seuraavaksi lause, joka ilmaisee, millainen polynomi pistejoukkoon voidaan sovittaa.

Lause 23. [23] Olkoot $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ $n + 1$ kappaletta pisteitä, joille x_i:t ovat eri pisteitä. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen korkeintaan astetta n oleva polynomi $P(x)$, jolle pätee $P(x_i) = y_i$ kaikille $i = 0, \dots, n$.

Todistus. Todistetaan yksikäsitteisyys. Tehdään vastaoletus, että on olemassa polynomit $P(x)$ ja $Q(x)$, jotka molemmat interpoloivat kaikki $n + 1$ pistettä ja ovat korkeintaan astetta n. Oletetaan siis, että $P(x_i) = Q(x_i) = y_i$ kaikilla $i = 0, \dots, n$. Olkoon sitten $H(x) = P(x) - Q(x)$. Tällöin myös H:n aste on korkeintaan n ja $H(x_i) = 0$ kaikilla $i = 0, \dots, n$. Algebran peruslauseen mukaan astetta n olevalla polynomilla voi olla korkeintaan n nollakohtaa tai se on nollapolynomi. Siis H:n on oltava nollapolynomi ja $P(x) \equiv Q(x)$ eli kaikilla $x_i \in \mathbb{R}^n$ pätee $P(x_i) = Q(x_i)$. On siis osoitettu, että jos on olemassa korkeintaan astetta n oleva polynomi $P(x)$, joka interpoloi pisteet $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, on kyseinen polynomi yksikäsitteinen.

Lauseen mukaisen polynomin olemassaolo voidaan todistaa määrittelemällä Lagrangen polynomi. Nyt jokaiselle $k = 0, \dots, n$ voidaan määritellä astetta n oleva polynomi

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

Todetaan, että polynomilla on ominaisuudet $L_k(x_k) = 1$ ja kaikilla muilla arvoilla x_j, missä $j = 0, \dots, n$ ja $j \neq k$, $L_k(x_j) = 0$. Tätä polynomia kutsutaan Lagrangen polynomiksi. Tällöin voidaan edelleen määritellä astetta n oleva polynomi

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

Tarkastellaan polynomia arvolla $x = x_k$. Tällöin Lagrangen polynomin ominaisuuksien perusteella

$$P_n(x_k) = y_0 L_0(x) + \cdots + y_n L_n(x) = 0 + \cdots + 0 + y_k L_k(x) + 0 + \cdots + 0 = y_k$$

On siis löydetty polynomi, joka kulkee jokaisen pisteen kautta ja on astetta n. Täten on todistettu polynomin olemassaolo ja löydetty tapa määrittää tällainen polynomi. □

Esimerkki 24. Etsitään interpoloiva polynomi pisteille $(1,2), (0,2)$ ja $(2,4)$ Lagrangen polynomin avulla. Käytettävissä on kolme datapistettä, joten etsitään astetta kaksi oleva polynomi. Nyt

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2 + 2x$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-0)}{(2-1)(2-0)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Edelleen Lagrangen polynomiksi saadaan

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2(-x^2 + 2x) + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) + 4\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) \\ &= -2x^2 + 4x + x^2 - 3x + 2 + 2x^2 - 2x = x^2 - x + 2. \end{aligned}$$

Tarkistetaan vielä, että polynomi toimii kaikissa datapisteissä

$$P_2(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$$

$$P_2(0) = 0^2 - 0 + 2 = 2$$

$$P_2(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4.$$

Polynomi toimii kaikissa pisteissä ja interpoloi siis kaikki pisteet.

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

4.1 Tutkimuskysymykset

Tässä tutkimuksessa on tarkoitus selvittää, miten matematiikkaa kielennetään matematiikan oppikirjojen esimerkkitehtävien ratkaisuissa. Tarkoitus on myös tutkia, miten kielentäminen muuttuu luokka-asteelta toiselle siirryttäessä, ja millaisia yleisohjeita sanallisten tehtävien ratkaisuun oppikirjoista löytyy. Aineistoa tutkitaan teoriaosiossa esiteltyjen kielentämisen mallien pohjalta. Tarkemmat tutkimuskysymykset ovat:

1. Mitä kolmen kielen mallin matematiikan kielistä käytetään oppikirjojen esimerkkitehtävien ratkaisuissa ja mikä on niiden merkitys ratkaisun kannalta?
2. Mitä ratkaisumalleja oppikirjojen esimerkkitehtävien ratkaisuista löytyy?
3. Miten kolmen kielen mallin kielten käyttö ja eri ratkaisumallien käyttö muuttuu luokka-asteelta toiselle siirryttäessä?
4. Millaisia yleisohjeita oppikirjoissa on sanallisten tehtäviä ratkaisua varten?

Tutkimuksen aineistona toimii valikoidut matematiikan oppikirjojen esimerkkitehtävät eri luokka-asteilta. Tutkimuskysymyksiin etsitään aineiston pohjalta vastauksia sekä määrällisen että laadullisen tutkimuksen keinoin. Aineistosta kerrotaan tarkemmin seuraavassa alaluvussa.

4.2 Aineisto

Tutkimukseen valittiin aineistoksi Sanoma Pron oppikirjoja kolmelta eri luokka-asteelta. Kuudennen luokan kirja on Milli-kirjasarjasta Milli 6A [24], kahdeksannen luokan kirja Kuutio-sarjasta Kuutio 8 [25] ja lukiosta lyhyen matematiikan Binomi-sarjasta kirja Binomi 4 Matemaattisia malleja [26]. Näiden lisäksi aineistoksi valikoitui Otavan Tuhattaituri-sarjan kuudennen luokan oppikirja Tuhattaituri 6a [27]. Tutkimukseen valittiin kirjoja eri luokka-asteilta, jotta päästään tutkimaan, miten matematiikan kielentäminen muuttuu ja kehittyy ylemmille luokille siirryttäessä. Kirjat pyrittiin valitsemaan tasaisesti eri luokka-asteilta, jotta kielentämisen kehittymistä päästään tutkimaan tasaisesti perusopetuksen ja lukion aikana. Kirjat valittiin suurilta kustantajilta, sillä ne ovat laajalti käytössä ja siten mielenkiintoista tutkimusmateriaalia.

Aineistoksi valittiin Milli 6 A kirjasta viisi esimerkkiä, joista yksi oli sanallinen tehtävä ja muut neljä peruslaskutehtäviä. Kuutio 8 – ja Binomi 4 -kirjoista valittiin kummastakin kymmenen sanallisen tehtävän esimerkkiä ja neljä peruslaskutehtävän esimerkkiä. Koska Milli 6A -kirjasta löytyi vain yksi esimerkki sanallisesta tehtävästä, näiden oppikirjojen lisäksi aineistoon valittiin viisi sanallisen tehtävän esimerkkiä Tuhattaituri 6a -kirjasta. Aineistoksi valittiin lisäksi Milli 6A -kirjan opettajan ohjeista löytyvä ohje sanallisten tehtävien ratkaisuun sekä Kuutio 8 -kirjan yleisohje ongelmatehtävän ratkaisemiseksi.

Esimerkit pyrittiin valitsemaan niin, että ne kuvaisivat mahdollisimman hyvin koko kirjan sisältöä. Lisäksi aineistoon haluttiin esimerkkejä siten, että eri kirjojen tehtävänannot olisivat luonteeltaan samankaltaisia. Tällöin voidaan tarkastella, miten saman tehtävätyypin ratkaisujen kielentäminen muuttuu luokka-asteelta toiselle. Sanallisten tehtävien esimerkit kahdeksannen luokan ja lukion oppikirjoista valittiin siten, että kaikki oppikirjan esimerkit luokiteltiin karkeasti Joutsenlahden [4, 5] ratkaisumallien mukaan. Tämän jälkeen aineistoon valittiin kustakin ratkaisumallista prosentuaalisesti koko kirjaa kuvaava määrä esimerkkejä. Lähes kaikki peruslaskutehtävät olivat yhden oppikirjan sisällä laskettu samalla kaavalla, joten peruslaskutehtävät pyrittiin valitsemaan siten, että kirjojen välillä tehtävätyypit olisivat samankaltaisia.

Aineistoa tutkittiin Joutsenlahden ja Kuljun [3] kolmen kielen mallin sekä Joutsenlahden [4, 5] tehtävien ratkaisumallien pohjalta. Esimerkkejä luokiteltiin sen mukaan, mitä kieliä tai ratkaisumalleja ne sisältävät. Yksi tehtävä voi kuulua useampaan kolmen kielen mallin luokkaan. Tämän lisäksi analysoitiin, mikä on kielen merkitys tehtävän ratkaisun kannalta ja miten kielten käyttö muuttuu luokka-asteiden välillä.

4.3 Sisällönanalyysi

Sisällönanalyysin avulla voidaan tutkia erilaisia kirjallisessa muodossa olevia dokumentteja, kuten kirjoja, artikkeleita tai haastatteluja. Se on tekstianalyysia, jossa pyritään sanallisesti kuvaamaan aineiston sisältöä. Sisällönanalyysin avulla pyritään luomaan tutkittavasti ilmiöstä sanallisesti selkeä kuvaus. Aineisto pyritään samaan tiiviiseen muotoon ilman että sen informatiivisuus kärsii. Sisällönanalyysissa aineisto ensin puretaan osiin, sitten käsitteellistetään ja lopuksi kootaan yhteen loogiseksi kokonaisuudeksi. Analyysiä tehdään prosessin jokaisessa vaiheessa. Sisällönanalyysin yhteydessä voidaan puhua myös sisällön erittelystä, jossa tekstien sisältöä kuvataan kvantitatiivisesti. Yleensä sisällönanalyysillä aineistosta saadaan enemmän tietoa, ja sisällön erittelyä voidaan käyttää tässä apuvälineenä. [28]

Sisällönanalyysi voi olla aineistolähtöistä, teorialähtöistä tai teoriasidonnaista. Aineistolähtöisessä analyysissa rakennetaan teoria aineistosta tehtyjen havaintojen pohjalta [29]. Aineistolähtöisen analyysin haasteena on tehdä täysin ”puhtaita” havaintoja, ja tutkijan onkin pyrittävä tekemään aineistosta havaintoja ilman omien ennakkoluulojensa vaikutusta [28].

Teorialähtöisessä analyysissä aineistoa luokitellaan aiempaan teoriaan tai malliin pohjautuen. Teoriaohjaava sisällönanalyysi puolestaan yhdistelee aineistolähtöistä ja teorialähtöistä analyysiä. Se etenee aineiston ehdoilla, mutta havainnot liitetään jo tunnettuun teoriaan. Ero teorialähtöiseen sisällönanalyysin on se, että teorialähtöisessä analyysissa tutkija poimii aineistosta havaintoja jonkin teorian mukaisesti ja teoriaohjaavassa tehdään ensin havainnot aineistosta ja tämän jälkeen ”pakotetaan” tehdyt havainnot teoriaan. [28] Tämän tutkimuksessa analyysiä tehdään valmiiden teorioiden pohjalta teorialähtöisesti sisällönanalyysin ja sisällön erittelyn keinoin.

5 AINEISTON ANALYYSI

5.1 Sanalliset tehtävät

Tässä alaluvussa esitetään sanallisista tehtävistä saadut tutkimustulokset. Sanallisten tehtävien esimerkkejä analysoitiin yhteensä 26 kappaletta. Milli 6A -kirjasta analysoitiin yksi esimerkki, Tuhattaituri 6a -kirjasta viisi esimerkkiä ja Kuutio 8 – sekä Binomi 4 – kirjoista kummastakin kymmenen esimerkkiä. Esimerkeistä tutkittiin, mitä matematiikan kolmen kielen mallin kielistä ja mitä ratkaisumalleista niissä oli käytetty ja miten. Oppikirjoista tutkittiin myös sanallisten tehtävien ratkaisun yleisohjeita.

Sanallisissa tehtävissä käytetyt matematiikan kielet

Taulukossa 1 on esitetty tutkituissa sanallisissa tehtävissä käytetyt matematiikan kielet. Yksi esimerkki voi kuulua useampaan kategoriaan. Taulukosta nähdään, että Milli 6A -kirjan ainoassa esimerkissä käytettiin matematiikan symbolikieltä ja kuviokieltä. Tuhattaituri 6a -kirjassa kaikissa esimerkeissä esiintyi symbolikieltä, kahdessa luonnollista kieltä ja yhdessä kuviokieltä. Kuutio 8 -kirjan esimerkeistä kaikissa käytettiin symbolikieltä, yhdeksässä esimerkissä kymmenestä luonnollista kieltä ja kolmessa kuviokieltä. Lukioon siirryttäessä luonnollisen kielen ja kuviokielen käyttö lisääntyi hieman lisää, sillä luonnollista kieltä oli Binomi 4 -kirjan kaikissa tarkastelluissa esimerkeissä ja kuviokieltä neljässä esimerkissä kymmenestä. Taulukosta on nähtävissä, että kaikissa tarkasteltavissa esimerkeissä käytettiin matematiikan symbolikieltä, suuressa osassa (21/26 esimerkkiä) luonnollista kieltä ja alle puolissa (9/23 esimerkkiä) kuviokieltä. Merkittävää on, että kaikissa tehtävissä käytettiin vähintään kahta kieltä.

Taulukko 1. Sanallisissa tehtävissä käytettyjä matematiikan kieliä kuvaava frekvenssitaulukko

Kielentäminen	Milli 6A	Tuhattaituri 6a	Kuutio 8	Binomi 4	Yhteensä
Matematiikan symbolikieli	1	5	10	10	26
Luonnollinen kieli	0	2	9	10	21
Kuviokieli	1	1	3	4	9
Esimerkkien määrä	1	5	10	10	23

Kuudennen luokan kirjoissa käytetyt kielet erosivat osaksi toisistaan, mutta koska Milli 6A -kirjasta tarkasteltiin vain yhtä esimerkkiä, eivät tulokset ole kovin vertailtavissa. Merkillepantava ero on se, että Milli-kirjan esimerkissä ei käytetty ollenkaan luonnollista kieltä, ja Tuhattaiturissa se oli käytössä kahdessa esimerkissä viidestä. Kuudennelta luokalta ylöspäin siirryttäessä huomattavimmin lisääntyy juuri luonnollisen kielen käyttö. Kuutio 8 – ja Binomi 4 -kirjojen esimerkeissä käytetyissä kielissä ei ollut isoja eroja. Symbolikieltä käytetään molempien kirjojen kaikissa tehtävissä ja luonnollinen kieli puuttuu vain yhdestä Kuutio 8 -kirjan esimerkkiratkaisusta. Kuviokieltä käytettiin myös lähes yhtä paljon.

Osa käytetystä kuviokielestä on oleellinen osa tehtävää ja osa vain virikkeenä. Kuvioiden, jotka ovat oleellinen osa tehtävää, poistaminen tekee ratkaisusta epätäydellisen. Kuviot voivat olla pyydettyjä tehtävänannossa tai ne voivat toimia perusteluina tehdyille laskuille. Virikekuvat puolestaan esittävät saman asian, joka on kerrottu myös muilla tavoin. Taulukossa 2 on esitetty tutkituissa oppikirjoissa käytetyn kuviokielen merkitys ratkaisun kannalta. Sekä Milli- että Tuhattaituri-kirjojen yhdessä esimerkissä käytetty kuviokieli toimi virikekuvana ja esitti sen, mikä seuraavaksi kirjoitettiin matematiikan symbolikielellä. Virikekuvaa käytettiin apuna hahmottamaan tehtävän tilannetta. Kuution 8 -kirjan esimerkeissä käytetty kuviokieli oli kahdessa tapauksessa virikekuva ja yhdessä kuvio oli oleellinen osa ratkaisua. Binomi 4 -kirjan tarkastelluissa esimerkeissä virikekuvia oli kolmessa ratkaisussa, ja kuvio oli oleellinen osa ratkaisua yhdessä esimerkissä. Virikekuvia oli siis kokonaisuudessaan kuudessa ratkaisusta kahdeksasta, ja kuviot olivat oleellinen osa ratkaisua kahdessa esimerkissä kahdeksasta.

Taulukko 2. Kuviokielen merkitystä sanallisten tehtävien esimerkeissä kuvaava frekvenssitaulukko

Kuvat	Milli 6A	Tuhattaituri 6a	Kuutio 8	Binomi 4	Yhteensä
Virikekuva	1	1	2	3	6
Oleellinen osa ratkaisua	0	0	1	1	2
Kuvien määrä	1	1	3	4	8

Sanallisissa tehtävissä käytetyt ratkaisumallit

Tarkastellaan seuraavaksi tutkituissa sanallisten tehtävien esimerkeissä käytettyjä ratkaisumalleja. Tulokset on esitetty taulukossa 3. Yksi tutkituista esimerkeistä kuuluu kahteen kategoriaan ja muut yhteen. Kuudennen luokan Milli-kirjassa sanallinen tehtävä oli ratkaistu ”tiekartta”-mallilla. Tuhattaituri 6 -kirjan ratkaisuista löytyi sekä ”standardi”- että ”kertomus”-mallia. Yksi tehtävä oli ratkaistu näillä molemmilla malleilla, yksi pelkästään ”kertomus”-mallilla ja kolme ”standardi”-mallilla. Kuutio-kirjassa vain yksi tehtävä kymmenestä oli ratkaistu ”standardi”-mallilla ja lukion lyhyen matematiikan Binomi 4 -kirjassa ”standardi”-mallia ei enää käytetty ollenkaan.

Taulukko 3. Sanallisten tehtävien esimerkeissä käytettyjä ratkaisumalleja kuvaava frekvenssitaulukko

Ratkaisumalli	Milli 6A	Tuhattaituri 6a	Kuutio 8	Binomi 4	Yhteensä
Standardi	0	4	1	0	4
Kertomus	0	2	5	7	14
Tiekartta	1	0	3	3	7
Kommentti	0	0	1	0	1
Päiväkirja	0	0	0	0	0
Esimerkkien määrä	1	5	10	10	23

Käytetyin ratkaisumalli oli ”kertomus”-malli. Sitä käytettiin viidessä esimerkissä Kuutio 8 -kirjassa ja seitsemässä esimerkissä Binomi 4 -kirjassa. Kaikista tarkastelluissa esimerkeissä ”kertomus”-mallia käytettiin yli puolissa ratkaisuista (14/23 esimerkkiä). Toiseksi käytetyin ratkaisumalli oli ”tiekartta”-malli (7/23 esimerkkiä), jota käytettiin Kuutio- ja Binomi-kirjoissa kummassakin kolmessa esimerkissä ja ainoassa Milli 6A -kirjan esimerkissä. Yksi ”kommentti”-mallilla ratkaistu esimerkki löytyi Kuutio 8 -kirjasta. ”Päiväkirja”-mallia ei tehtävistä löytynyt. Siinä luonnollinen kieli ja kuviokieli onkin tarkoitettu ratkaisijan oman ajattelun selkeyttämisen eikä niinkään ratkaisun lukijalle.

Tarkastelluissa kuudennen luokan kirjoissa oli ero ratkaisumallien käytössä. Milli 6A -kirjasta löytyi vain yksi sanallisen tehtävän esimerkki, joka on esitetty kuvassa 10. Esimerkki oli ratkaistu ”tiekartta”-mallin mukaisesti käyttäen matematiikan symbolikieltä ja kuviokieltä. Apukuvion avulla hahmotellaan sitä, mitä seuraavassa vaiheessa kirjoitetaan matematiikan symbolikielellä lausekkeeksi


Mallit sanallisissa tehtävissä

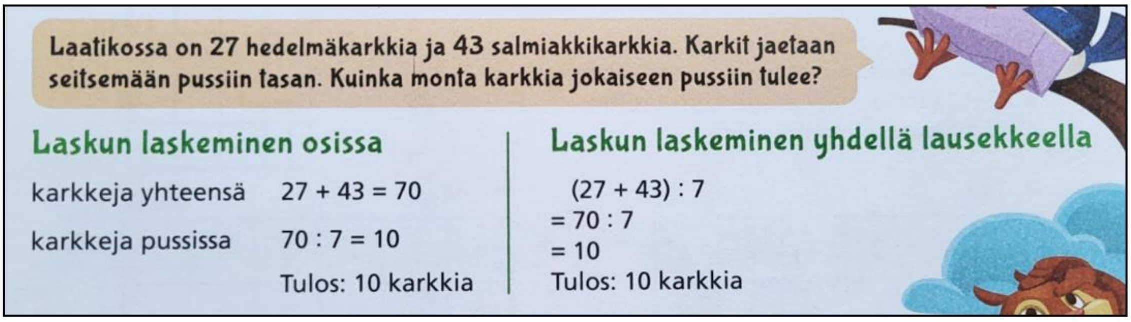
Parturi leikkaa Ollin ja Jalon hiukset. Yksi hiustenleikkaus maksaa 28 euroa. Kuinka paljon he saavat vaihtorahaa 100 eurosta?

Sijoitetaan luvut apukuvioon.

100 € – 2 · 28 €
= 100 € – 56 €
= 44 €
V: 44 €

Kuva 10. Milli 6A -kirjan esimerkki sanallisen tehtävän ratkaisusta [24]

Tuhattaiturista puolestaan tarkasteltiin viittä tehtävää, joissa oli käytetty joko ”standardi”- tai ”kertomus”-mallia. Yksi Tuhattaiturin tarkastelluista esimerkeistä oli ratkaistu molempien mallien mukaan. Tämä esimerkki on esitetty kuvassa 11. Merkittävää on, miten paljon vähemmän sanallisia tehtäviä löytyi Milli 6A -kirjasta kuin Tuhattaituri 6a -kirjasta. On myös huomattava, että vaikka Tuhattaituri-kirjan alussa opetetaan ratkaisemaan lasku osissa, myöhemmissä esimerkeissä käytetään enimmäkseen ”standardi”-mallia.


Laatikossa on 27 hedelmäkarkkia ja 43 salmiakkikarkkia. Karkit jaetaan seitsemään pussiin tasan. Kuinka monta karkkia jokaiseen pussiin tulee?

Laskun laskeminen osissa

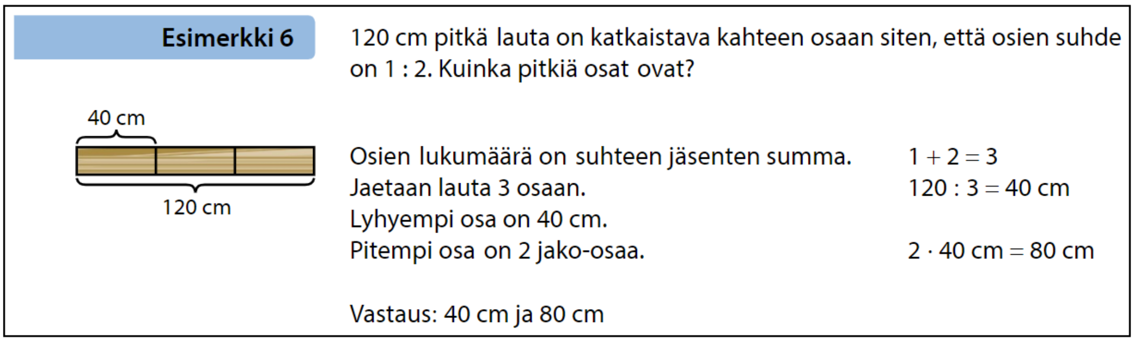
karkkeja yhteensä 27 + 43 = 70
karkkeja pussissa 70 : 7 = 10
Tulos: 10 karkkia

Laskun laskeminen yhdellä lausekkeella

(27 + 43) : 7
= 70 : 7
= 10
Tulos: 10 karkkia

Kuva 11. Tuhattaituri 6a -kirjan esimerkki sanallisen tehtävän ratkaisusta [27]

Kahdeksannen luokan ja lukion lyhyen matematiikan kirjojen sanallisten tehtävien esimerkkiratkaisuissa ei ollut suuria eroja ratkaisumallien käytössä. Sekä Kuutio 8 – että Binomi 4 -kirjoissa käytetyin ratkaisumalli oli ”kertomus”-malli, ja toiseksi eniten tehtäviä oli ratkaisu ”tiekartta”-mallin mukaan. Kuvassa 12 on Kuutio 8 -kirjan esimerkkitehtävä, joka on ratkaistu ”kertomus”-mallin mukaisesti osissa. Siinä kuva on virikkeenä, ja siis selventämässä sitä, mikä luonnollisella kielellä on viereen kirjoitettu.



Esimerkki 6

40 cm

120 cm

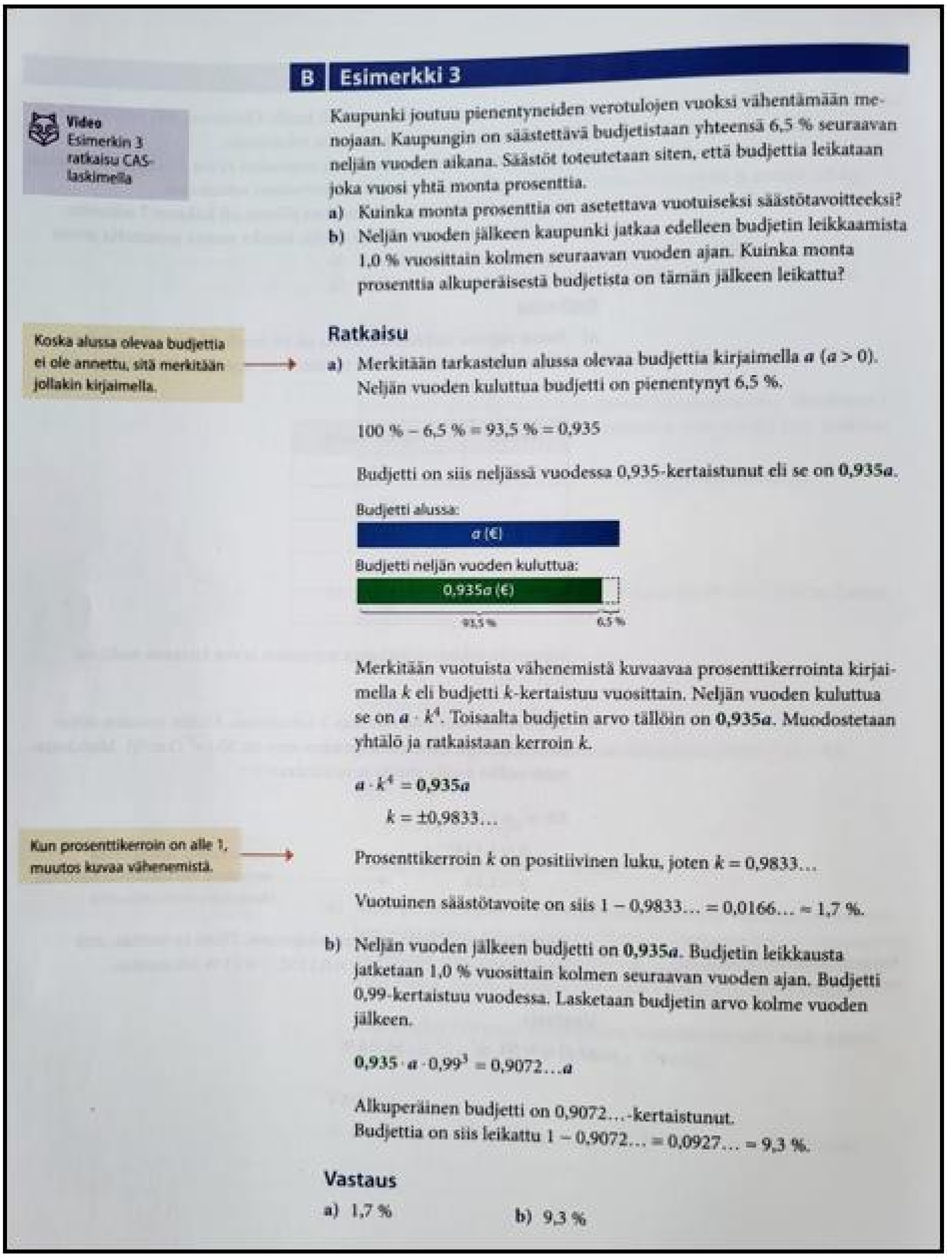
120 cm pitkä lauta on katkaistava kahteen osaan siten, että osien suhde on 1 : 2. Kuinka pitkiä osat ovat?

Osien lukumäärä on suhteen jäsenten summa.	$1 + 2 = 3$
Jaetaan lauta 3 osaan.	$120 : 3 = 40$ cm
Lyhyempi osa on 40 cm.	
Pitempi osa on 2 jako-osaa.	$2 \cdot 40$ cm $= 80$ cm

Vastaus: 40 cm ja 80 cm

Kuva 12. Kuutio 8 -kirjan esimerkki "kertomus"-mallin mukaisesti ratkaistuna [25]

Vaikka kahdeksannen luokan ja lukion käytetyissä ratkaisumalleissa tai kielessä ei ollut määrällistä eroa, on oppikirjojen esimerkkien ratkaisut kielellisesti erilaisia. Binomi 4 -kirjassa luonnollisella kielellä esitetyt perustelut olivat usein pidempiä virkkeitä ja Kuutio 8 -kirjassa yksittäisiä lyhyitä lauseita. Kuvassa 13 on Binomi 4 -kirjan esimerkki ”kertomus”-mallin mukaisesti ratkaistuna. Kuvia 12 ja 13 vertailtaessa huomataan, että lukion oppikirjan esimerkkitehtävässä luonnollista kieltä käytetään enemmän kuin kahdeksannen luokan kirjassa. Molemmissa esimerkeissä on käytetty kuviokieltä havainnollistamaan matematiikan symbolikielellä ja luonnollisella kielellä ilmaistua asiaa.



B Esimerkki 3

Video
Esimerkin 3 ratkaisu CAS-laskimella

Kaupunki joutuu pienentyneiden verotulojen vuoksi vähentämään menojaan. Kaupungin on säästettävä budjetistaan yhteensä 6,5 % seuraavan neljän vuoden aikana. Säästöt toteutetaan siten, että budjettia leikataan joka vuosi yhtä monta prosenttia.

a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi säästötavoitteeksi?
b) Neljän vuoden jälkeen kaupunki jatkaa edelleen budjetin leikkaamista 1,0 % vuosittain kolmen seuraavan vuoden ajan. Kuinka monta prosenttia alkuperäisestä budjetista on tämän jälkeen leikattu?

Ratkaisu

Koska alussa olevaa budjettia ei ole annettu, sitä merkitään jollakin kirjaimella.

a) Merkitään tarkastelun alussa olevaa budjettia kirjaimella $\boldsymbol{a}$ ($a > 0$). Neljän vuoden kuluttua budjetti on pienentynyt 6,5 %.

100 % − 6,5 % = 93,5 % = 0,935

Budjetti on siis neljässä vuodessa 0,935-kertaistunut eli se on **0,935*a***.

Budjetti alussa:
a (€)
Budjetti neljän vuoden kuluttua:
$0{,}935a$ (€)
93,5 % 6,5 %

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli budjetti k-kertaistuu vuosittain. Neljän vuoden kuluttua se on $a \cdot k^4$. Toisaalta budjetin arvo tällöin on **0,935*a***. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin k.

$$a \cdot k^4 = 0{,}935a$$
$$k = \pm 0{,}9833\ldots$$

Kun prosenttikerroin on alle 1, muutos kuvaa vähenemistä.

Prosenttikerroin k on positiivinen luku, joten $k = 0{,}9833\ldots$

Vuotuinen säästötavoite on siis $1 - 0{,}9833\ldots = 0{,}0166\ldots \approx 1{,}7$ %.

b) Neljän vuoden jälkeen budjetti on **0,935*a***. Budjetin leikkausta jatketaan 1,0 % vuosittain kolmen seuraavan vuoden ajan. Budjetti 0,99-kertaistuu vuodessa. Lasketaan budjetin arvo kolme vuoden jälkeen.

$$0{,}935 \cdot a \cdot 0{,}99^3 = 0{,}9072\ldots a$$

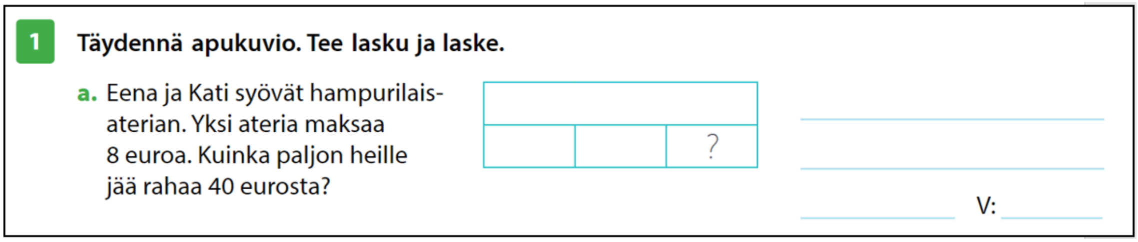
Alkuperäinen budjetti on 0,9072…-kertaistunut.
Budjettia on siis leikattu $1 - 0{,}9072\ldots = 0{,}0927\ldots \approx 9{,}3$ %.

Vastaus

a) 1,7 % b) 9,3 %

Kuva 13. Binomi 4 -kirjan esimerkki "kertomus"-mallin mukaisesti ratkaistuna [26]

Kuudennen luokan oppikirjoissa tehtävien ratkaisua ohjaa myös kirjan rakenne. Jos tehtävät ratkaistaan kirjaan, on siinä annettu tietty tila ratkaisua varten. Kuvassa 14 on esitetty sanallisen tehtävän ratkaisuun osoitettu tila Milli 6A -kirjasta. Oppilasta ohjeistetaan ensin täydentämään apukuvio ja sitten laskemaan lasku. Tilalla ohjataan tietynlaiseen ratkaisumalliin, eikä siinä ole jätetty tilaa luonnolliselle kielelle tai muulle ratkaisun hahmottelulle. Tehtävänannolla halutaan opettaa oppilasta käyttämään sanallisten tehtävien ratkaisuun apukuviota. Vihkotehtävissä sanotaan: ”voit piirtää apukuvion”.



1 **Täydennä apukuvio. Tee lasku ja laske.**

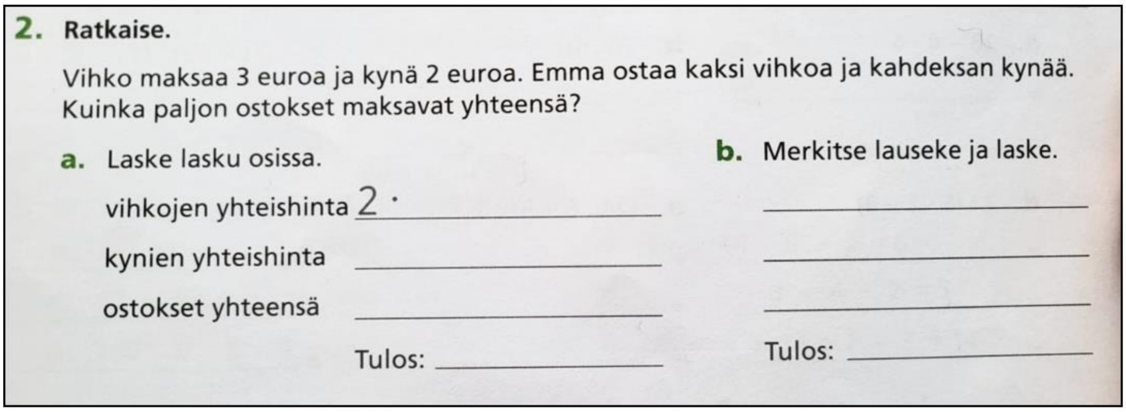
a. Eena ja Kati syövät hampurilais-aterian. Yksi ateria maksaa 8 euroa. Kuinka paljon heille jää rahaa 40 eurosta?

?

V:

Kuva 14. Milli 6A -kirjan sanallinen tehtävä [24]

Tuhattaituri 6a -kirjasta löytyy kappale, jossa opetetaan ratkaisemaan sanallisia tehtäviä joko osissa tai yhdellä lausekkeella. Tehtävänantojen avulla ja kirjan rakenteella opetetaan siis ratkaisemaan sanallisia tehtäviä sekä ”kertomus”- että ”standardi”-mallin mukaisesti. Osissa ratkaistaessa oppilaalle ei ole kuitenkaan jätetty oppikirjaan tilaa itse kirjoittaa ratkaisuvaiheita luonnollisella kielellä, vaan ne on kirjoitettu valmiiksi. Vihkotehtävissä oppilaan annetaan itse valita, kumpaa ratkaisutapaa tämä haluaa käyttää. Kuvassa 15 on esitetty Tuhattaituri-kirjan tehtävä.



2. **Ratkaise.**

Vihko maksaa 3 euroa ja kynä 2 euroa. Emma ostaa kaksi vihkoa ja kahdeksan kynää. Kuinka paljon ostokset maksavat yhteensä?

a. Laske lasku osissa.

vihkojen yhteishinta 2 ·

kynien yhteishinta

ostokset yhteensä

Tulos:

b. Merkitse lauseke ja laske.

Tulos:

Kuva 15. Tuhattaituri 6a -kirjan sanallinen tehtävä [27]

Sanallisten tehtävien yleisohjeet

Peruskoulun oppikirjoista löytyi yleisohjeita, miten ratkaista sanallisia tai ongelmanratkaisua vaativia tehtäviä. Lukion oppikirjasta vastaavaa ohjetta ei löytynyt. Tarkastellaan seuraavaksi Milli 6A -oppikirjan ohjetta sanallisen tehtävän ratkaisuun ja Kuutio 8 -oppikirjan ohjetta ongelmanratkaisuun.

Milli 6A -kirjan yleisohje sanallisen tehtävän ratkaisemiseen ei löytynyt oppilaan kirjasta, vaan opettajalle tarkoitetuista opetusvinkeistä. Materiaalissa ohjeistetaan ratkaisemaan sanallinen tehtävä apukuviota hyödyntäen. Kuvassa 16 annettu ratkaisuohje on erityisesti kuvassa 10 esitetylle esimerkille, mutta se voidaan yleistää myös muille sanalliselle tehtäville. Ohjeen mukaan aluksi täytyy miettiä, mitä tietoja tehtävässä on annettu ja mitä siinä kysytään. Tämän jälkeen täydennetään apukuvio tarkastelemalla, miten tehtävän tiedot sijoitetaan kuvioon ja mihin tulee kysymysmerkki. Ennen tätä vaihetta tehtävän ratkaisijalla tulisi olla tiedossa, että kuvion ylin yhtenäinen palkki esittää kokonaisuutta, alempiin osiin jaettu palkki kokonaisuuden eri osia ja kysymysmerkillä merkitään tehtävässä kysyttyä asiaa. Apukuvion täytön jälkeen tulee miettiä, millä laskutoimituksella tehtävä ratkeaa. Lopuksi suoritetaan laskutoimitukset ja merkitään vastaus. Ohjeen eri vaiheista löytyy valmiit kysymykset, joihin kyseisessä vaiheessa halutaan vastaus. Tässä vaiheen perään on kirjoitettu, mitä se tarkasteltavan tehtävän kannalta tarkoittaa, mutta kysymyksiä voi käyttää myös yleisesti sanallisten tehtävien ratkaisuun. Ohjeessa on paljon tekstiä, minkä vuoksi ratkaisun vaiheita voi olla haastava erottaa toisistaan. Ohje on kuitenkin tarkoitettu opettajan käyttöön eikä sellaisenaan oppilaille.

Asetetaan näkyviin sanallinen tehtävä ja tyhjä apukuvio:
"Parturi leikkaa Ollin ja Jalon hiukset. Yksi hiustenleikkaus maksaa 28 euroa. Kuinka paljon he saavat vaihtorahaa 100 eurosta?"

Opetellaan esittämään sanallisen tehtävän tilanne apukuvion avulla:
- Kuvioon merkitään tehtävässä annetut (oleelliset) luvut.
- Kysyttyä asiaa merkitään kysymysmerkillä.
- Ylin yhtenäinen palkki esittää kokonaisuutta.
- Alempi osiin jaettu palkki esittää kokonaisuuden eri osia.
- Tehtävässä voidaan kysyä mitä tahansa osaa tai kokonaisuutta.

Tarkastellaan tehtävää järjestelmällisesti ja annetaan oppilaiden kertoa tehtävän tiedot omin sanoin:
- Mitä tietoja on annettu? (Yksi hiustenleikkaus maksaa 28 €. Leikataan kahden pojan hiukset. Maksetaan 100 euron setelillä.)
- Mitä tehtävässä kysytään? (Kuinka paljon pojat saavat vaihtorahaa?)

Täydennetään apukuvio:
- Miten tehtävän tiedot sijoitetaan apukuvioon? (Ylempään palkkiin tulee maksettu summa 100 €. Alempaan tulee kaksi kertaa hiustenleikkauksen hinta 28 €.)
- Mihin kohtaan tulee kysymysmerkki? (Alemman palkin kolmas osa esittää tuntematonta vaihtorahaa. Siihen merkitään kysymysmerkki.)

100 €		
28 €	28 €	?

Ratkaistaan tehtävä loppuun:
- Millä laskutoimituksella tehtävä ratkeaa? (100 € – 2 · 28 €)
- Suoritetaan laskutoimitukset ja merkitään vastaus:
  100 € – 56 € = 44 € V: 44 €
- Todetaan, että pojat saavat vaihtorahaa 44 euroa.

Kuva 16. Milli 6A -kirjan ohje sanallisen tehtävän ratkaisuun apukuvion avulla [30]

Kuutio 8 -oppikirjassa on annettu yleisohjeet sekä ongelmanratkaisulle että ongelmanratkaisulle yhtälön avulla. Ohjeet on esitetty kuvassa 17. Ohjeiden mukaan ongelmanratkaisu tulisi aloittaa lukemalla tehtävä huolellisesti ja keräämällä ylös lähtötiedot esimerkiksi taulukkoon tai piirrokseen. Yhtälöllä ratkaistessa täytyy valita muuttujat ja merkitä muut tekijät muuttujan avulla. Tämän jälkeen tulee käyttää jotain ongelmanratkaisumenetelmää, kuten päättelemistä, kokeilua tai ratkaisua takaperin. Yhtälön avulla ratkaistessa tulee muodostaa yhtälö annetuista tiedoista. Seuraavaksi tehtävä ratkaistaan ja tarkistetaan, onko saatu ratkaisu järkevä ja alkuehdot täyttävä. Lopuksi tulisi vielä tutkia, onko löydetty ainoa mahdollinen ratkaisu vai onko olemassa muita ratkaisuja. Ratkaisuprosessin vaiheet on ohjeissa esitetty luettelomaisesti vaihe vaiheelta.

NÄIN RATKAISET ONGELMIA

- **Perehdy** ongelmaan huolellisesti.
- **Kerää** kaikki mahdolliset lähtötiedot. Tee tarvittaessa taulukko tai piirrä ongelmaa selventävä piirros.
- Käy läpi yleisiä **ongelmanratkaisumenetelmiä** kuten päätteleminen, kokeileminen, taulukoiminen, piirtäminen ja ratkaiseminen takaperin eli lopusta alkuun.
- **Ratkaise** ongelma.
- **Tarkasta**, että saamasi ratkaisu on järkevä ja täyttää alkuehdot.
- **Tutki, onko muita ratkaisuja**. Onko löytämäsi ratkaisu ainoa mahdollinen?

ONGELMANRATKAISU YHTÄLÖN AVULLA

- Lue tehtävä huolella.
- Käytä tarvittaessa apuna kuviota tai taulukkoa.
- Valitse muuttuja ja merkitse sitä kirjaimella.
- Merkitse mahdolliset muut tekijät muuttujan avulla.
- Muodosta yhtälö tehtävässä annetuista tiedoista.
- Ratkaise yhtälö.
- Laske tarvittaessa lisätietoja.
- Kirjoita vastaus kysymykseen.
- Tarkista, toteuttaako vastaus tehtävässä annetut tiedot.

Kuva 17. Kuutio 8 -kirjan yleisohje ongelmanratkaisuun ja ongelmanratkaisuun yhtälön avulla [25]

5.2 Peruslaskutehtävät

Tässä alaluvussa esitetään peruslaskutehtävistä saadut tutkimustulokset. Peruslaskutehtävien esimerkkejä analysoitiin yhteensä 12 kappaletta. Milli 6A -, Kuutio 8 - ja Binomi 4 -kirjoista kustakin valittiin aineistoon neljä esimerkkiä. Esimerkeistä tutkittiin mitä matematiikan kolmen kielen mallin mukaisia kieliä ratkaisuista löytyi, minkä ratkaisumallin mukaisesti esimerkki etenee ja miten käytettyjä kieliä hyödynnetään.

Peruslaskutehtävissä käytetyt matematiikan kielet

Taulukossa 4 on esitetty peruslaskutehtävien esimerkkien ratkaisuissa käytetyt matematiikan kielet. Kaikissa tarkastelluissa esimerkeissä käytettiin matematiikan symbolikieltä. Milli 6A -kirjan esimerkeissä ei käytetty luonnollista kieltä, mutta tutkituista esimerkistä kahdessa neljästä käytettiin kuviokieltä. Kuutio 8-kirjassa kolmessa esimerkissä neljästä käytettiin luonnollista kieltä ja vain yhdessä kuviokieltä. Binomi 4 -kirjassa luonnollinen kieli oli osa jokaista esimerkkiä, mutta yhdessäkään ei käytetty kuviokieltä. Luonnollisen kielen määrä siis lisääntyi ja kuviokielen määrä väheni luokka-asteilla ylemmäs siirryttäessä. Ratkaisuissa käytetty kuviokieli oli kaikissa esimerkeissä virikekuvana auttamassa ratkaisun ymmärtämistä. Merkittävin ero on, että kuudennen luokan kirjassa yhdessäkään tutkituista esimerkeistä ei käytetty luonnollista kieltä ja lukion lyhyen matematiikan kirjassa sitä käytettiin jokaisessa tehtävässä.

Taulukko 4. Peruslaskutehtävissä käytettyjen matematiikan kielten frekvenssitaulukko

Kielentäminen	Milli 6A	Kuutio 8	Binomi 4	Yhteensä
Symboli	4	4	4	12
Luonnollinen	0	3	4	7
Kuvio	2	1	0	3
Esimerkkien määrä	4	4	4	12

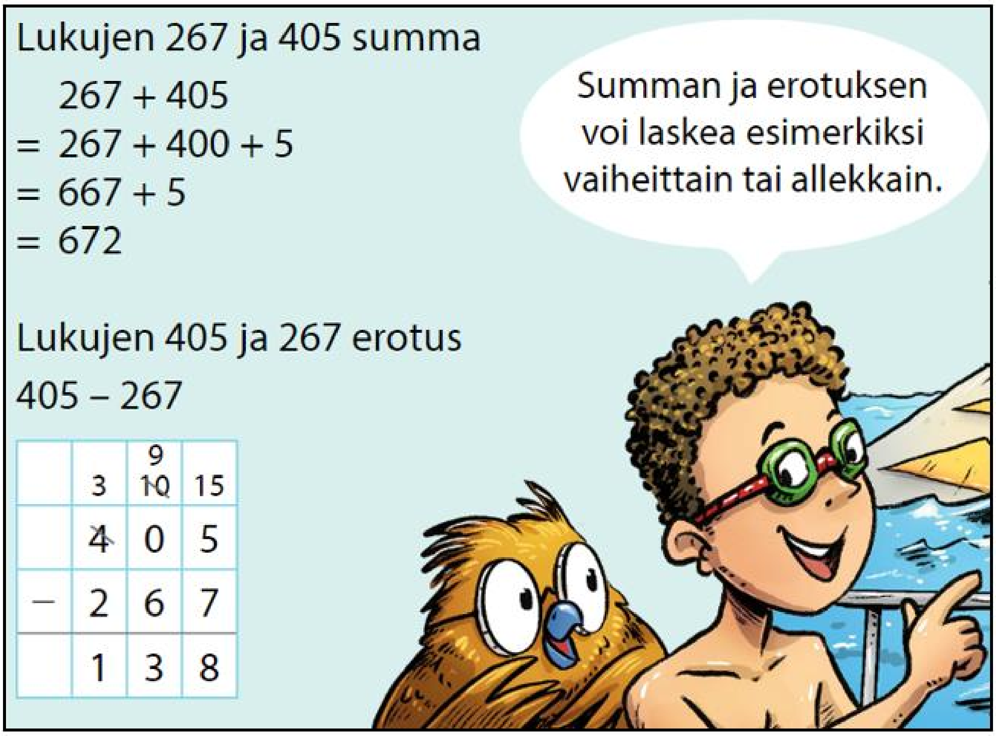
Peruslaskutehtävissä käytetyt ratkaisumallit

Peruslaskutehtävien esimerkkien ratkaisut luokiteltiin niiden ratkaisumallin mukaisesti. Käytettyjen ratkaisumallien määrät on esitetty taulukossa 5. Kaikki Milli 6A -kirjan tehtävät oli ratkaistu ”standardi”-mallin mukaisesti. Kuutio 8 -kirjassa enää 1 esimerkki oli ratkaistu ”standardi”-mallilla ja kolme ”kommentti”-mallilla. Binomi 4 -kirjassa kolme tarkastelluista esimerkeistä oli ratkaistu ”kommentti”-mallin ja yksi ”tiekartta”-mallin mukaan. Kahdeksannen luokan ja lukion peruslaskutehtävissä selvästi käytetyin malli oli siis ”kommentti”-malli.

Taulukko 5. Peruslaskutehtävissä käytettyjen ratkaisumallien frekvenssitaulukko

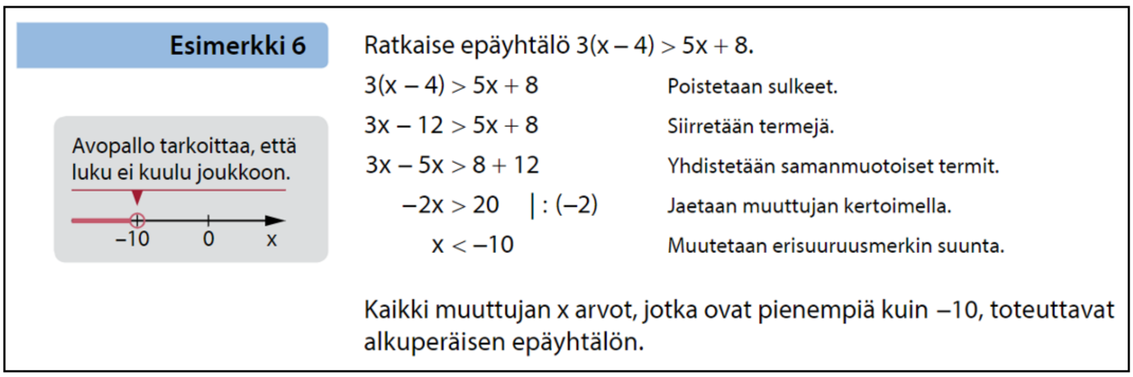
Ratkaisumalli	Milli 6A	Kuutio 8	Binomi 4	Yhteensä
Standardi	4	1	0	5
Kertomus	0	0	0	0
Tiekartta	0	0	1	1
Kommentti	0	3	3	6
Päiväkirja	0	0	0	0
Esimerkkien määrä	4	4	4	12

Jokaisella tutkitulla luokka-asteella esimerkeillä on tietty ratkaisutapa, joka eroaa muiden luokka-asteiden tavasta. Milli 6A-kirjan esimerkeissä ratkaisu oli esitetty lähinnä symbolikielellä, osassa tehtävistä myös kuviokielellä. Analysoidussa aineistossa kuviokielen avulla havainnollistettiin tehtävää laskutoimitusta. Kuvioiden avulla pyritään mallintamaan ilmiötä ja tekemään symbolikielellä tehdystä ratkaisusta lukijalle ymmärrettävän. Kuudennen luokan kirjassa luonnollinen kieli ei ole osa tehtävien ratkaisua. Osassa tehtävistä luonnollista kieltä käytetään kuitenkin ylimääräisissä kommenteissa, kuten vinkeissä miten lähteä ratkaisemaan tehtävää. Kirjassa ei siis rohkaista oppilasta käyttämään luonnollista kieltä tämän omassa ratkaisussa, vaan annetaan ohjeita, miten tehdä laskutoimituksia. Kuvassa 18 on esimerkki tällaisesta luonnollisen kielen käytöstä.



Kuva 18. Milli 6A -kirjan esimerkkiratkaisu peruslaskutehtävän ratkaisemisesta [24]

Kuutio 8 -kirjan esimerkkien ratkaisuissa luonnollisen kielen määrä lisääntyi. Esimerkit oli ratkaistu vaiheittain allekkain matematiikan symbolikielellä, ja jokaisen ratkaisuvaiheen viereen oli kirjoitettu luonnollisella kielellä, mitä kyseisessä vaiheessa tehdään. Sama ”kommentti”-mallin rakenne toistui lähes kaikissa tarkastelluissa esimerkeissä. Yhdessä tarkastelluista esimerkeistä luonnollisella kielellä tehtävä vaiheiden selitys puuttui ja se luokiteltiinkin ”standardi”-mallin mukaisesti ratkaistuksi. Kuvassa 19 on esimerkki Kuutio 8 -kirjan ratkaisusta. Siinä on edellä kuvatun rakenteen lisäksi annettu vastaus myös kuviokielellä. Kuviokieli ei ole osa tehtävän ratkaisua, vaan se havainnollistaa lukijalle matematiikan symbolikielellä annettua vastausta. Ratkaisun lopuksi vastaus on vielä annettu luonnollisella kielellä.


Esimerkki 6

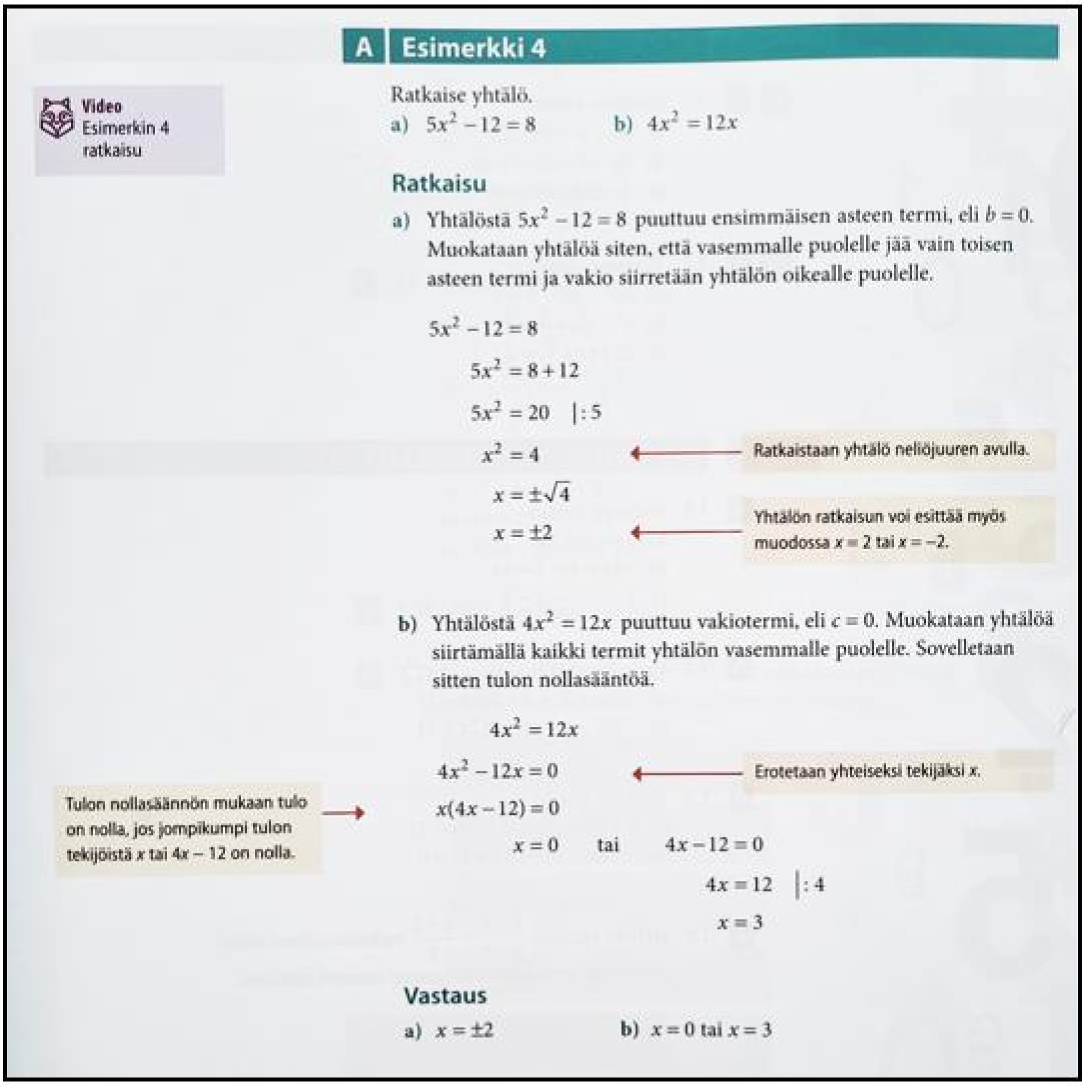
Ratkaise epäyhtälö $3(x - 4) > 5x + 8$.

$3(x - 4) > 5x + 8$	Poistetaan sulkeet.
$3x - 12 > 5x + 8$	Siirretään termejä.
$3x - 5x > 8 + 12$	Yhdistetään samanmuotoiset termit.
$-2x > 20 \quad \vert : (-2)$	Jaetaan muuttujan kertoimella.
$x < -10$	Muutetaan erisuuruusmerkin suunta.

Kaikki muuttujan x arvot, jotka ovat pienempiä kuin –10, toteuttavat alkuperäisen epäyhtälön.

Kuva 19. Kuutio 8 -kirjan esimerkki peruslaskutehtävän ratkaisemisesta [25]

Lukion lyhyen matematiikan Binomi 4 -kirjan esimerkeissä ratkaisun alussa kerrotaan luonnollisella kielellä, mitä ratkaisussa aiotaan tehdä, ja tämän jälkeen ratkaisu on kirjoitettu matematiikan symbolikielellä. Jokaista vaihetta ei enää esitetä luonnollisella kielellä, kuten kahdeksannen luokan kirjassa tehtiin. Esimerkeissä on kuitenkin luonnollisella kielellä kommentoitu joitain matematiikan laskusääntöjä tai ratkaisun vaiheita. Tällaisen ratkaisun voisi lukea kuuluvaksi myös ”tiekartta”-malliin, mutta näkyvän kommentoinnin vuoksi esimerkit on luokiteltu ”kommentti”-malliksi. Yhdessä tarkastelluista esimerkeistä ratkaisun vieressä kulkevaa kommentointia ei ollut, ja tämä ratkaisu luokiteltiinkin ”tiekartta”-mallin mukaiseksi. Kuvassa 20 on esimerkki Binomi 4 -kirjan ratkaisusta. Kyseisessä esimerkissä opiskelijalla on mahdollista nähdä ratkaisu myös videon muodossa.



A | Esimerkki 4

Video
Esimerkin 4 ratkaisu

Ratkaise yhtälö.

a) $5x^2 - 12 = 8$ b) $4x^2 = 12x$

Ratkaisu

a) Yhtälöstä $5x^2 - 12 = 8$ puuttuu ensimmäisen asteen termi, eli $b = 0$. Muokataan yhtälöä siten, että vasemmalle puolelle jää vain toisen asteen termi ja vakio siirretään yhtälön oikealle puolelle.

$$5x^2 - 12 = 8$$
$$5x^2 = 8 + 12$$
$$5x^2 = 20 \quad |:5$$
$$x^2 = 4$$

Ratkaistaan yhtälö neliöjuuren avulla.

$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Yhtälön ratkaisun voi esittää myös muodossa $x = 2$ tai $x = -2$.

b) Yhtälöstä $4x^2 = 12x$ puuttuu vakiotermi, eli $c = 0$. Muokataan yhtälöä siirtämällä kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle. Sovelletaan sitten tulon nollasääntöä.

$$4x^2 = 12x$$
$$4x^2 - 12x = 0$$

Erotetaan yhteiseksi tekijäksi x.

$$x(4x - 12) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan tulo on nolla, jos jompikumpi tulon tekijöistä x tai $4x - 12$ on nolla.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x - 12 = 0$$
$$4x = 12 \quad |:4$$
$$x = 3$$

Vastaus

a) $x = \pm 2$ b) $x = 0$ tai $x = 3$

Kuva 20. Binomi 4 -kirjan esimerkki peruslaskutehtävän ratkaisemisesta [26]

6 POHDINTA

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten matematiikkaa kielennetään matematiikan oppikirjojen esimerkkitehtävien ratkaisuissa. Lisäksi tarkasteltiin, millaisia yleisohjeita sanallisten tehtävien ratkaisuun oppikirjoista löytyy. Aineiston perusteella kielten käytössä ja esimerkkitehtävien ratkaisutavoissa tapahtuu muutosta siirryttäessä luokka-asteelta toiselle. Yleishuomiona voidaan sanoa, että tehtävien ratkaisut pitenevät ja kielenkäyttö monipuolistuu siirryttäessä ylemmille luokille. Matematiikan kielentämistä tarkasteltiin muun muassa Joutsenlahden ja Kuljun [3] kolmen kielen mallin pohjalta. Kuten olettaa saattoi, kaikki tutkitut esimerkkiratkaisut sisälsivät matematiikan symbolikieltä. Kiinnostavampaa tutkimuksessa olikin se, miten muiden matematiikan kolmen kielen mallin kielten, luonnollinen kieli ja kuviokieli, käyttö muuttuu luokka-asteiden välillä.

Luonnollinen kieli lisääntyi sekä tutkituissa sanallisten että peruslaskutehtävien esimerkkiratkaisuissa siirryttäessä ylemmille luokille. Tarkastellaan ensin luonnollista kieltä peruslaskutehtävissä. Kuudennen luokan oppikirjan tarkastelluista peruslaskutehtävien esimerkeistä yhdessäkään ei käytetty luonnollista kieltä, kahdeksannen luokan kirjasta löytyi vielä yksi peruslaskutehtävän esimerkkiratkaisu ilman luonnollista kieltä, ja lukiossa sitä käytettiin kaikissa ratkaisuissa. Alaluokilla tehtävät ovat yksinkertaisempia, eivätkä ratkaisut siksi välttämättä vaadi paljoa perusteluja. Yläkouluun siirryttäessä tehtävät vaikeutuvat, ja tässä vaiheessa havaittiinkin suurin harppaus luonnollisen kielen lisääntymisessä. Esimerkiksi yhtälöt ratkaistiin kuudennen luokan kirjassa symbolikieltä ja kuviokieltä hyödyntäen. Yläkoulussa jokainen ratkaisun vaihe selitettiin myös luonnollisella kielellä, ja oppikirjan yhtälönratkaisun esimerkeissä oli myös huomattavasti enemmän vaiheita kuin kuudennella luokalla. Lukiossa peruslaskutehtävät alkavat olla jo tuttuja, eikä tutkitussa oppikirjassa enää perusteltu luonnollisella kielellä kaikkia ratkaisun vaiheita, vaan perustelut laskutoimituksille annetaan heti ratkaisun alussa ja vain osa vaiheista perustellaan kommenteilla. Vaikka tehtävät ovat alaluokilla yksikertaisempia, olisi luonnollisen kielen käyttö jo tässä vaiheessa tärkeää, sillä sen voidaan nähdä olevan tie matematiikan käsitteiden ja symbolikielen ymmärtämiseen. Luonnollisen kielen avulla oppilas voi jäsentää ja syventää omaa ajatteluaan. [31]

Myös sanalliset tehtävät vaikeutuvat ja monipuolistuvat luokka-asteilla ylemmäs siirryttäessä, mikä näkyy lisääntyvänä luonnollisen kielen käyttönä. Kahdeksannella luokalla jo lähes kaikki ja lukiossa kaikki esimerkkiratkaisut sisälsivät luonnollista kieltä. Ratkaisuissa on enemmän vaiheita ja tehtävät laskut perustellaan luonnollista kieltä käyttäen. Monivaiheisissa ratkaisuissa kielten monipuolinen käyttö auttaa niin ratkaisijaa itseään kuin mahdollista ratkaisun lukijaa [4]. Kuudennen luokan kirjoissa tarkastellut ratkaisut olivat vain muutaman rivin vastauksia. Peruskoulussa sanallisten tehtävien ratkaisut ovatkin yleensä lyhyitä [3]. Vaikka Milli-kirjassa ei käytetty luonnollista kieltä sanallisten tehtävien ratkaisemiseen, Tuhattaiturissa sitä käytettiin. Jos opettaja siis noudattaa oppikirjan ratkaisutapaa, saavat eri oppikirjoja käyttävät oppilaat hyvin erilaiset lähtökohdat yläkouluun siirryttäessä. Tämä on merkittävää, sillä opettajat kokevat oppikirjan käytön tärkeäksi osaksi opetusta, ja niiden sisältö- sekä rakenneratkaisut vaikuttavatkin huomattavasti matematiikan opetukseen [9].

Tutkitun aineiston peruslaskutehtävien esimerkeissä kuviokieltä käytettiin eniten kuudennen luokan oppikirjassa. Alakoulussa kuviokielen avulla usein havainnollistetaan tutkittavaa matemaattista ilmiötä. Sen avulla voidaan muun muassa ilmaista lukumäärien muutoksia esittämällä tehtävän alku- ja lopputilanne [15]. Tutkittavat ilmiöt ovat alaluokilla riittävän yksikertaisia kuvioiden tai konkreettisten esineiden avulla havainnollistettaviksi. Sanallisten tehtävien esimerkeissä kuviokieltä käytettiin Milli 6A -kirjan ainoassa esimerkissä ja osassa Tuhattaituri 6a -kirjan esimerkeistä. Milli-kirjassa tehtävän ratkaisemiseksi opetettiin käyttämään apukuviota, jonka avulla voidaan hahmottaa annettujen tietojen yhteyksiä. Kahdeksannen luokan ja lukion sanallisten tehtävien esimerkeissä kuviokieltä käytettiin vain muutamassa esimerkissä, ja kuviot olivat yleisimmin virikekuvia. Kuviokieltä käytettiin yleisesti esimerkkitehtävien ratkaisuissa valitettavan vähän, sillä aiemman tutkimuksen mukaan merkittävä osa opiskelijoista kokee kuvion piirtämisen auttavan tehtävien ratkaisussa [5].

Esimerkkejä tarkasteltiin myös Joutsenlahden [4, 5] ratkaisumallien pohjalta. Käytetyin ratkaisumalli kahdeksannen luokan ja lukion sanallisten tehtävien esimerkeissä oli ”kertomus”-malli ja peruslaskutehtävissä ”kommentti”-malli. Joutsenlahden [4] mukaan ”kertomus”-malli on käytetty lukion sanallisten tehtävien esimerkeissä, mitä tämän tutkimuksen tulokset siis vahvistavat. Myös opiskelijat käyttävät mieluiten kyseistä mallia omissa ratkaisuissaan [5]. ”Kertomus”-mallissa kielten välillä vaihdellaan sujuvasti ja sama asia on voitu esittää kahden tai useamman kielen avulla. Monipuolinen kielten käyttö edistää oppimista ja syvemmän ymmärryksen syntymistä, sillä oppijoita on monenlaisia [2]. Toinen oppija voi ymmärtää tehtävän ratkaisun pelkän symbolikielen avulla, mutta toinen tarvitsee rinnalle esimerkiksi luonnollisella kielellä tehdyt perustelut lausekkeille.

Kuudennella luokalla peruslaskutehtävien esimerkeissä käytettiin ainoastaan ”standardi”-mallia. Sanalliset tehtävät ratkaistiin Milli-kirjassa ”tiekartta”-mallin mukaisesti ja Tuhattaituri-kirjassa ”standardi”- tai ”kertomus”-mallin mukaisesti. ”Standardi”-malli onkin yleisesti käytetty ratkaisumalli erityisesti peruskoulun oppikirjoissa [4]. Hyvää on, että alakoulun oppikirjoissa opetetaan ”standardi”-mallin lisäksi myös muiden ratkaisumallien käyttöä sanallisia tehtäviä ratkaistaessa. Useamman kielen käyttö jo alakoulussa on tärkeää, sillä näin voidaan taata jokaiselle oppilaalle hänelle sopivin tapa lähestyä matematiikan tehtäviä. Joku tai jotkut kielistä voivat olla oppilaalle luonnollinen tapa ilmaista ajatteluaan [13].

Joutsenlahden [4] mukaan perusopetuksen oppikirjat antavat yhdenlaisen mallin sanallisten tehtävien ratkaisuun, eivätkä rohkaise käyttämään muita malleja tai kuviokieltä ja luonnollista kieltä ratkaisuissa. Lukiossa esimerkkitehtävät on puolestaan ratkaistu monipuolisesti kaikkia kolmen kielen mallin kieliä käyttäen, joten uudet tavat ilmaista matematiikkaa tulisi oppia nopeasti [4]. Myös tätä tutkimusta varten analysoidussa aineistossa oli huomattavissa, että peruskoulussa sanallisten tehtävien ratkaisujen esimerkit olivat kielellisesti yksipuolisempia kuin lukiossa. Erityisesti kuudennella luokalla ratkaisut olivat hyvin yksinkertaisia ja myös oppikirjan asettelu ohjasi ratkaisemaan tehtäviä yhdellä tietyllä tavalla. Positiivista on, että kahdeksannen luokan oppikirjan esimerkkien ratkaisuista löytyi luonnollista kieltä ja kuviokieltä. Tällöin harppaus lukion pidempiin ja kielellisesti monipuolisempiin ratkaisuihin ei ole liian suuri. On kuitenkin huomattava, että jo peruskoulun oppikirjojen esimerkeissä käytettiin matematiikan symbolikielen lisäksi muita kieliä. Aiemman tutkimuksen mukaan peruskoulun oppikirjoissa sanallisten tehtävien ratkaisuun on ohjattu käyttämään vain symbolikieltä ja standardimallia [4]. Tässä voidaan siis nähdä kehitystä aiempaan tutkimukseen verrattuna.

On merkillepantavaa, miten vähän sanallisia tehtäviä Milli 6A -oppikirjasta löytyi. Tutkimukseen jouduttiin ottamaan mukaan toinen kuudennen luokan oppikirja, koska Millistä löytyi vain yksi haluttu esimerkki. Tätä tutkimusta varten tehdyn aineiston hankinnan perusteella sanallisten tehtävien määrä kasvaakin merkittävästä yläkouluun mentäessä. Sanallisia tehtäviä tulisi ratkoa kaikilla luokka-asteilla, sillä niiden avulla opitaan matemaattisten operaatioiden lisäksi matemaattisen ajattelun kehitystä [3], ongelmanratkaisua [32] sekä oman ajattelun tekemistä näkyväksi matematiikan kaikilla kielillä. Lukiossa ylioppilaskokeissa opiskelijan odotetaan osaavan kirjallisesti ilmaista matemaattista ajattelua selkeästi ja monipuolisesti [5]. Jos alaluokilla sanallisten tehtävien tekoa on harjoiteltu vain vähän, on harppaus yläkouluun ja edelleen lukioon mentäessä suuri. Alakoulun opettajan tulisikin ymmärtää, mitä myöhemmillä luokilla tehtävien ratkaisuun vaaditaan. Näin hän voi ohjata oppilasta kohti haluttuja ratkaisutapoja.

Alakoulussa oppilaat tekevät vielä paljon tehtäviä suoraan oppikirjaan, jolloin oppikirjan asettelu voi rajata mahdollisuuksia ratkaista tehtävä. Tarkastelluissa kuudennen luokan oppikirjoissa tehtävien asettelu ei jättänyt tilaa oppilaan omalle luonnollisen kielen tai kuviokielen käytölle. Matematiikan oppituntien vaarana onkin yksipuolisten tehtävien mekaaninen laskeminen [9]. Jokaisella luokka-asteella oppilaan tulisi ratkaista monipuolisesti erilaisia tehtäviä, sillä liian samankaltaiset tehtävätyypit voivat aiheuttaa sen, että oppilas oppii vain pinnallisen strategian tehtävien ratkaisuun [31]. Yläkoulussa ja lukiossa tehtävät ratkaistaan vihkoon, mikä jättää enemmän tilaa oppilaan omalle hahmottelulle.

Tutkimuksessa tarkasteltiin kolmen kielen mallin kieliä, sillä esimerkit eivät sisältäneet neljän kielen mallin neljättä eli taktiilista toiminnan kieltä. Taktiilista toiminnan kieltä voitaisiin lisätä myös oppikirjoihin sarjoittamalla toimintoja kuviksi. Esimerkiksi murtokakkujen kuvilla avulla voitaisiin esittää vaiheittain murtolaskuja. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [16] mukaan konkretian ja toiminnallisuuden tulisi olla keskeinen osa matematiikan opetusta. Taktiilisen toiminnan kielen avulla voidaan tuoda näitä sisältöjä opetukseen. Konkretian avulla oppilaat voivat hahmottaa abstrakteja matematiikan käsitteitä ja tutkia, miten käsitteet muuttuvat operaatioita tehtäessä.

Lukio oppimateriaaliin kuuluu nykypäivänä sähköistä materiaalia, ja osassa tutkituista esimerkeistä olikin annettu ratkaisu kirjallisen version lisäksi myös videona. Tässä tutkimuksessa näitä videoratkaisuja ei tarkasteltu, mutta on huomioitava niiden mahdollisuudet oppimisen kannalta. Videolla tehtävä ratkaisu voidaan esittää selkeästi vaihe vaiheelta ilman että seuraavat vaiheet vielä näkyvät. Tällainen esitystapa voi näyttäytyä osalle oppilaista selkeämpänä kuin pitkä kokonainen vastaus. Tämän lisäksi videoiden avulla opetukseen voidaan lisätä neljän kielen mallin mukaista taktiilista toiminnan kieltä.

Kuudennella luokalla yleisohjetta sanallisten tehtävien ratkaisuun ei löytynyt oppilaan omasta kirjasta, vaan se oli opettajalle tarkoitetussa materiaalissa. Tällöin on opettajasta kiinni, opettaako hän tällaisen yleisohjeen vai tarkastellaanko aihetta vain yksittäisten tehtävien kautta. Kahdeksannen luokan oppilaan kirjasta puolestaan löytyi yleisohje ongelmanratkaisuun. Huomattava ero ohjeissa oli se, että kuudennen luokan opettajan kirjan ohjeessa ei ohjeisteta miettimään ratkaisun järkevyyttä, mikä löytyy kahdeksannen luokan oppikirjasta. Ratkaisun järkevyyden tarkastelu on oleellinen osa tehtävän ratkaisua. Tällöin oppilas oppii arvioimaan, onko tehtävän ratkaisussa jokin selkeä virhe tai ongelma. Kuudennen luokan oppikirja jättääkin paljon opettajan osaamisen varaan, mikä voi olla ongelmallista, sillä luokanopettajien matemaattisessa osaamisessa on suuria eroja [32]. Puutteita on niin peruslaskutaidoissa kuin matematiikan rakenteiden ymmärtämisessä [32]. Jos oppikirja ei ohjeista tiettyihin tapoihin eikä opettajalla ole riittäviä taitoja ottaa näitä opetuksessa huomioon, jää tulevaisuuden kannalta tärkeitä taitoja oppimatta. Tuhattaituri 6a -oppikirjasta ei löytynyt ollenkaan yleisohjetta sanallisten tehtävien ratkaisuun. Tällainen ohje on kuitenkin kyseisestä oppikirjasta löytynyt ainakin vuonna 2006, ja olisikin mielenkiintoista tietää, milloin ja millä perustein ohje on oppikirjasta poistunut.

Kaikki matematiikan kielet ovat yhtä tärkeitä, eikä yhtä tulisi arvottaa toisen yläpuolelle [2]. Erityisesti alakoulun oppikirjossa on kuitenkin tämän tutkimuksen mukaan nähtävissä, että symbolikieltä käytetään muita kieliä enemmän.

Yläasteella ja lukiossa luonnollisen kielen käyttö lisääntyy, mutta kuviokielen määrä erityisesti peruslaskutehtävien ratkaisuissa jopa vähenee alakouluun verrattuna. Kielentämisellä on merkittävä rooli matematiikan oppimisessa. Sen avulla voidaan edistää matemaattista osaamista ja ymmärrystä sekä parantaa asenteita matematiikkaa kohtaan. [33] Oppijan tulisi liikkua kielten välillä tarpeidensa mukaan tehtävän ratkaisemiseksi, ja opettajan toimia ohjaajana eri kielten välillä [13].

Esimerkkiratkaisujen tutkiminen on tärkeää, sillä ne toimivat usein mallina oppilaan omille ratkaisuille vastaavanlaisissa tehtävissä. Hyvin esitetty esimerkki edistää oppimista ja voi auttaa oppilasta myös ilmaisemaan omaa matemaattista ajatteluaan. Joutsenlahden [5] tutkimuksessa ilmeni, että opiskelijat kokevat kirjallisen kielentämisen mallien opetuksen tärkeäksi. Tämän lisäksi oppikirjojen esimerkit voivat toimia myös opettajalle mallina siitä, mitä kullakin luokka-asteella voidaan oppilaalta odottaa. Koska opettajat tukeutuvat edelleen opetuksessa oppikirjoihin [9], on oppikirjatutkimuksella ja oppikirjojen kehittämisellä paikkansa tutkimuskentällä.

Tämän tutkimuksen otoskoko ei ollut kovin suuri, mutta jo tällä määrällä esimerkkejä saatiin näkemys siitä, miten matematiikka kielennetään laajalti käytössä olevissa oppikirjoissa. Tutkimuksen haasteena olikin valita sellainen otos, joka kuvaa mahdollisimman hyvin koko oppikirjan sisältöä. Tähän pyrittiin arvioimalla ensin karkeasti erilaisten ratkaisutapojen määrä, ja sitten valitsemalla esimerkit siten, että ne kuvaavat määrällisesti koko sisältöä. Erityisesti peruslaskutehtävien ratkaisutavoissa ei oppikirjan sisällä ollut eroja, joten pieni määrä tarkasteltavia tehtäviä riittää kuvaamaan koko kirjan sisältöä.

Tutkimuksen tekijän omat tulkinnat aineistosta voivat vaikuttaa tutkimuksen luotettavuuteen. Tässä tutkimuksessa luokiteltiin oppikirjojen esimerkkejä valmiiden tieteellisesti hyväksyttyjen mallien pohjalta. Mallit ovat selkeitä ja siksi esimerkkien luokittelu oli suhteellisen yksinkertaista. Joidenkin esimerkkien kohdalla täytyi käydä pohdintaa siitä, mihin luokkaan ne kuuluvat, mutta tällaisten tehtävien luokittelun ratkaisut on perusteltu tulososiossa.

Tutkimuksessa oltiin kiinnostuneita siitä, miten matematiikan kielentäminen muuttuu luokka-asteelta toiselle siirryttäessä. Aineistoksi valittiin oppikirjoja kuudennelta luokalta, kahdeksannelta luokalta ja lukiosta. Tällainen otanta antaa hyvän kuvan siitä, miten kielentäminen kehittyy opintojen edetessä.

Alkuopetuksesta ei valittu oppikirjoja, sillä ajatuksena oli, että vasta alakoulun viimeisillä luokilla oppikirjoissa alkaa esiintyä enemmän sanallisia tehtäviä.

7 JOHTOPÄÄTÖKSET JA JATKOTUTKIMUS

Tutkimuksen tarkoitus oli selvittää, miten matematiikan oppikirjojen esimerkkitehtävien ratkaisuissa kielennetään matematiikkaa. Kiinnostuksen kohteena oli myös se, miten kielentäminen muuttuu luokka-asteelta toiselle siirryttäessä. Tarkastellaan lopuksi, miten tutkimus vastasi esitettyihin tutkimuskysymyksiin.

Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä oltiin kiinnostuneita siitä, mitä kolmen kielen mallin matematiikan kielistä käytetään oppikirjojen esimerkkitehtävissä, ja mikä on niiden merkitys ratkaisun kannalta. Esimerkkitehtävistä löytyi kaikki kolmen kielen mallin kielet eli matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli ja kuviokieli. Symbolikielen avulla esitettiin matemaattiset lausekkeet ja luonnollisen kielen avulla joko lausekkeiden merkitys tai perustelut näihin. Kuviokielen avulla enimmäkseen kuvattiin graafisesti jotain, mikä esitettiin myös luonnollisen kielen tai symbolikielen avulla. Kuvioilla pyrittiin siis selkeyttämään ratkaisua lukijalle. Osa kuvioista toimi myös välttämättömänä osana tehtävän ratkaisua.

Toisen tutkimuskysymyksen mukaan haluttiin vastaus siihen, mitä ratkaisumalleja oppikirjojen esimerkkitehtävistä löytyy. Tutkimuksessa tarkasteltiin sekä sanallisia tehtäviä että peruslaskutehtäviä, ja näiden tehtäväluokkien väliltä löytyi eroja ratkaisumallien käytössä. Kuudennella luokalla sanallisissa tehtävissä käytettiin ”kertomus”-, ”standardi”- sekä ”tiekartta”-malleja, ja peruslaskutehtävät ratkaistiin ”standardi”-mallin mukaisesti. Kahdeksannella luokalla ja lukiossa sanalliset tehtävät ratkaistiin pääosin ”kertomus”-mallin mukaisesti, ja peruslaskutehtävät ”kommentti”-mallin mukaisesti.

Kolmas tutkimuskysymys oli, miten kolmen kielen mallin kielten käyttö ja eri ratkaisumallien käyttö muuttuu luokka-asteelta toiselle siirryttäessä. Kielenkäytön muutoksesta voidaan tutkimuksen perusteella sanoa, että luokka-asteilla ylemmäs siirryttäessä luonnollisen kielen käyttö lisääntyy ja kuviokielen käyttö vähenee erityisesti peruslaskutehtävien esimerkkien ratkaisuissa. Sanallisissa tehtävissä ratkaisumalleja käytetään ylemmillä luokilla monipuolisemmin ja ”standardi”-mallin käyttö loppuu kokonaan viimeistään lukioon siirryttäessä. Peruslaskutehtävissä puolestaan siirrytään ”standardi”-mallin käytöstä ”kommentti”-mallin käyttöön.

Viimeinen tutkimuskysymys oli, millaisia yleisohjeita oppikirjoissa on sanallisten tehtäviä ratkaisua varten. Lukion oppikirjasta yleisohjetta ei löytynyt ollenkaan, kuudennella luokalla se löytyi opettajan materiaalista ja kahdeksannen luokan oppikirjasta löytyi yleisohje ongelmanratkaisuun. Kuudennen luokan ohje oli monivaiheinen ja se sisälsi paljon tekstiä, mikä teki siitä epäselvän. Ohje ei kuitenkaan ollut tarkoitettu oppilaan vaan opettajan käyttöön. Kahdeksannen luokan ohje löytyi oppilaan kirjasta, ja se olikin kuudennen luokan ohjetta selkeämpi. Molemmissa ohjeet olivat vaihe vaiheelta allekkain listattuna, ja molemmissa ohjeistettiin tarkastelemaan aluksi, mitä tietoja tehtävässä on annettu. Tämän jälkeen tehtävä ratkaistaan, ja kahdeksannen luokan ohjeessa kehotetaan lopuksi vielä pohtimaan ratkaisun järkevyyttä.

Tässä tutkimuksessa analysoitiin esimerkkitehtäviä vain yhdestä oppikirjasta luokka-astetta kohden, pois lukien kuudennen luokan sanalliset tehtävät. Olisi mielenkiintoista tutkia aihetta edelleen vertailemalla eri oppikirjasarjojen esimerkkitehtävien ratkaisuiden kielentämistä. Tutkituista kuudennen luokan oppikirjoista jo huomataan, että kirjasarjojen välillä on eroja. Tämän lisäksi voitaisiin tutkia useampaa eri luokka-astetta, jolloin saataisiin jatkumo matemaattisen kielentämisen kehityksestä luokka-asteiden välillä.

LÄHTEET

[1] Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V–M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H., Räsänen, P., & Aro, M. (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos.). Niilo Mäki Instituutti, 344–367.

[2] Joutsenlahti, J., & Kulju, P. (2015). Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa Kaartinen, T. (toim.), *Monilukutaito kaikki kaikessa*. Tampereen yliopiston normaalikoulu, 57–76.

[3] Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa Ropo, E., Silfverberg, H., Soini, T. (toim.), *Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat: ainedidaktinen symposiumi 13.2.2009 Tampereella*. Tampereen yliopisto, 77—90.

[4] Joutsenlahti J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä. Teoksessa Kaasila, R. (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksentutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008.* Rovaniemi: Lapin yliopisto, 71–86.

[5] Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen, P. & Sormunen, K. (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa*. Joensuu: University of Eastern Finland, 3–15.

[6] Heinonen, J.-P. (2005). *Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit: peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa*. Helsingin yliopisto, soveltavan kasvatustieteen laitos.

[7] Tossavainen, T. (2015). Tulevaisuuden oppimateriaalit. Teoksessa Helena Ruuska, Markku Löytönen & Anne Rutanen (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä*. Helsinki, Suomen tietokirjailijat ry, 187–197.

[8] Niemi E. (2008). *Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007.* Opetushallitus.

[9] Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa Niemi, E. & Metsämuuroinen, J. (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. Opetushallitus, 137—148.

[10] Törnroos, J. (2004). *Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset: seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana*. Jyväskylän yliopisto.

[11] Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa*. Jyväskylän yliopisto.

[12] Perkkilä, P., & Joutsenlahti, J. (2021). Academic Literacy Supporting Sustainability for Mathematics Education - A Case : Collaborative Working as a Meaning Making for “2/3”?. Teoksessa Jeronen, E. (toim.), *Transitioning to Quality Education*. MDPI, 163-188.

[13] Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa Kauppinen, M., Rautiainen, M., & Tarnanen, M. (toim.), *Rajaton tulevaisuus: kohti kokonaisvaltaista oppimista: ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014*. Suomen ainedidaktinen tutkimusseura, 45—62.

[14] Tossavainen, T. (2005). Matematiikka ja kieli. *Tieteessä tapahtuu*, 23(4), 33–36. https://journal.fi/tt/article/view/56692

[15] Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H., Räsänen, P., & Aro, M. (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos.). Niilo Mäki Instituutti, 410—431.

[16] Opetushallitus (2016). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Helsinki.

[17] Opetushallitus (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019.* Helsinki.

[18] Haataja, J. (2002). *Numeeriset menetelmät käytännössä* (2. uud. p.). CSC-Tieteellinen laskenta.

[19] Shafarevich, I. R., Kostrikin, A. I., & Shafarevich, I. R. (2005). *Basic Notions of Algebra* (1st ed.). Springer B

[20] Poole, D. (2015). *Linear algebra: a modern introduction* (4th ed.). Cengage Learning.

[21] Lay, D. C. (2006). *Linear algebra and it’s applications* (3rd ed. update.). Pearson/Addison-Wesley.

[22] Lipschutz, S., & Lipson, M. (2018). *Linear algebra* (6th ed.). McGraw-Hill Education

[23] Sauer, T. (2014). *Numerical analysis* (2nd ed., Pearson new international edition.). Pearson.

[24] Häkkinen, K., Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P., Sohlman, L. & Vallo L. (2021). *Milli 6A* (1. painos). Sanoma Pro Oy.

[25] Hassinen, S., Latva, O., Makkonen, J-P., Pirttimaa, M. & Tolvanen, A. (2022). *Kuutio 8* (11.–18. painos). Sanoma Pro Oy.

[26] Alatupa, S., Hassinen, S., Hemmo, K., Kairema, A. & Taskinen, T. (2022). *Binomi MAB4. Matemaattisia malleja* (1.–2. painos). Sanoma Pro Oy.

[27] Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen, T., & Manninen, M. (2018). *Tuhattaituri 6a* (1. painos.). Kustannusosakeyhtiö Otava

[28] Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi* (Uudistettu laitos.). Kustannusosakeyhtiö Tammi.

[29] Eskola, J. (2018) Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat: Laadullisen aineiston analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa Valli, R., & Aaltola, J. (toim.), *Ikkunoita tutkimusmetodeihin. 2, Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin* (5., uudistettu ja täydennetty painos.). PS-kustannus.

[30] Häkkinen, K., Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P., Sohlman, L. & Vallo L. (2021). *Open opas. Milli 6A* (1. painos). Sanoma Pro Oy.

[31] Pongsakdi, N. (2017). *Bridging mathematics with word problems*. Turun yliopiston julkaisuja. Annales universitatis Turkuensis. Sarja B osa 435.

[32] Tossavainen, T., & Leppäaho, H. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaksi opiskelevien matemaattisesta osaamisesta. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H., Räsänen, P., & Aro, M. (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos.). Niilo Mäki Instituutti.

[33] Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates. (toim), *Issues in mathematics teaching*. London: Routledge Falmer.