Tampereen yliopisto

Mikko Tuumanen

REILUN VOITONJAKAMISEN ONGELMAT

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Mika Mattila
Elokuu 2023

TIIVISTELMÄ

Mikko Tuumanen: Reilun voitonjakamisen ongelmat
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Elokuu 2023

Tutkielman tarkoituksena on esitellä menetelmiä reiluun jakamiseen ja vertailla niitä yksinkertaisin esimerkein. Yhteistyöpeliteoriasta on apua taloustieteessä parempien yhteistyösopimusten tekemisessä. Reilun voitonjakamisen ongelmia esiintyy esimerkiksi taloustietessä reilu voitonjako tarkoittaa usein sitä, että jokainen osallistuva osapuoli saa osuutensa yrityksen voitosta sen mukaan, kuinka paljon he ovat sijoittaneet tai miten paljon työtä ovat tehneet yrityksen hyväksi. Koneoppimisessa varsinkin Shapley-arvot tarjoavat tavan tutkia, mitkä mallin ominaisuudet vaikuttavat eniten ennusteeseen. Reilun voitonjakamisen ongelmissa ratkaisumenetelmä riippuu siitä, miten ongelmassa oikeudenmukaisuus määritellään. Menetelmät, kuten Shapley-arvot ja nukleolialgoritmi, ratkaisevat jakamisongelman käyttäen toisistaan poikkevia määritelmiä oikeudenmukaisuudelle.

Tutkielmassa ensin esitetään peruskäsitteitä, kuten koalitiot, karakteristiset funktiot ja niiden ominaisuuksia. Lisäksi esitellään jakovektorit ja ratkaisulta vaaditut yksilön ja ryhmän rationaalisuusominaisuudet. Esitellään myös pelin normalisointi, jota hyödynnetään myös tutkielmassa esitellyissä todistuksissa.

Seuraavaksi määritellään ylijäämäfunktio ja joukkoja, jotka sisältävät oikeudenmukaisimman jakotavan koalitioiden suurimman tyytymättömyyden minimisoimiseen. Edellä mainittuja joukkoja ovat ydin, kohtuullisen jaon joukko ja pienin ydin. Koska pienin ydin voi sisältää useamman ratkaisun, voimme joutua minimoimaan seuraavaksi tyytymättömien koalitioiden tyytymättömyyttä. Apuna voidaan käyttää nukleolialgoritmia yksikäsitteisen ratkaisun löytämiseksi, mitä havainnollistetaan esimerkin avulla. Tutkielmassa esitellään myös menetelmiä oikeudenmukaisen kustannustenjakamisongelman muuttamiseen voitonjakamisen ongelmaksi. Kustannusten jakamiseen liittyvän ongelman ratkaisua havainnollistetaan esimerkin avulla.

Viimeisessä kappaleessa esitetään Shapley-arvot, jotka määrittelevät reiluuden omien aksioomiensa mukaisesti. Laskemme aikaisemmille esimerkkitilanteille Shapley-arvoja ja vertailemme niitä aikaisemmin esitettyyn menetelmään. Lisäksi esittelemme lukijalle, kuinka poliittisen vaikutusvallan tunnusluku Shapley-Shubik-indeksi johdetaan Shapley-arvoista. Lopuksi havainnollistetaan Shapley-arvojen laskemista ohjelmiston avulla laskemalla Shapley-Shubik-indeksit vaalikauden 2023–2027 Suomen eduskuntaryhmille.

Avainsanat: peliteoria, yhteistyö, nukleoli, jakaminen, Shapley-arvo

ALKUSANAT

Kiitos Mika Mattilalle ohjaamisesta ja kaikille, jotka ovat minua kannustaneet.

Tampereella, 3. elokuuta 2023

Mikko Tuumanen

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$C(\epsilon)$	ϵ -ydin
$v(S)$	karakteristinen funktio
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
$C(\epsilon^1)$	pienin ydin
$C(0)$	ydin
$e(S,\vec{x})$	ylijäämäfunktio

1. JOHDANTO

Yhteistyöpelit ovat olennainen osa peliteoriaa, ja niiden avulla voidaan tutkia erilaisia tapoja, joilla pelaajat voivat tehdä yhteistyötä saavuttaakseen parhaan mahdollisen lopputuloksen pelissä. Tämä on erityisen tärkeää liiketoiminta-alalla, sillä yritysten on usein tehtävä yhteistyötä toistensa kanssa saavuttaakseen paremman markkina-aseman tai parantaakseen tuottavuutta. Yhteistyöpeliteorian avulla voidaan myös tutkia tapoja, joilla yritykset voivat tehdä yhteistyötä kumppaneidensa kanssa erilaisissa liiketoimintaympäristöissä.

Tässä tutkielmassa keskitytään reiluun voiton jakamiseen pelaajien kesken. Reiluus voidaan kuitenkin määritellä usealla eri tavalla. Esimerkiksi liiketoiminnassa reilu voitonjako tarkoittaa usein sitä, että jokainen osallistuva osapuoli saa osuutensa yrityksen voitosta sen mukaan, kuinka paljon he ovat sijoittaneet tai miten paljon työtä ovat tehneet yrityksen hyväksi. Toisaaltaan hyvinvointiyhteiskunnassa reiluna pidetään, että palveluita tarjotaan kaikille yhdenvertaisesti ja että niiden saavutettavuus ei riipu yksilön sosioekonomisesta asemasta tai muista tekijöistä.

Voitonjako-ongelmien ratkaisumenetelmät kuten nukleolialgoritmi ja Shapley-arvo määrittelevät reiluuden omilla tavoillaan. Tässä tutkielmassa vertaillaan näitä kahta eri ratkaisumenetelmää. Erilaisilla reiluuden määritelmillä saadut ratkaisut voivat poiketa toisistaan.

2. KARAKTERISTISET FUNKTIOT JA KOALITIOT

Olkoon n pelaajien määrä ja kaikkien pelaajien muodostama joukko $N = \{1, 2, ..., n\}$. Tarkastellaan peliä, jossa pelaajat voivat tehdä yhteistyötä toistensa kanssa. **Koalitio** on tällöin jokin alijoukko $S \subseteq N$ tai numeroitu kokoelma pelaajia. Koska n määrästä pelaajia voidaan muodostaa 2^n osajoukkoa, niin voidaan siis muodostaa 2^n erilaista koalitiota.[1] Tällöin kukin pelaaja kuuluu 2^{n-1} erilaiseen koalitioon. Tässä tutkielmassa pelaajien 1, 2 ja 3 muodostamia koalitioita merkitään merkinnöillä 1, 2, 3, 12, 13, 23 ja 123.

Yhteistyöpeleissä pelaajat koettavat parantaa tulostaan muodostamalla keskenään sopimuksia. Pelaajat siis tekevät näin yhteistyötä saadakseen parempaa tulosta itselleen pelistä, minkä takia on hyödyllistä tutkia erilaisten pelaajaryhmien eli koalitioiden saamaa hyötyä tehdessä yhteistyötä. Lisäksi siis määritellään karakteristinen funktio, joka kertoo suurimman summan, jonka koalitio voi yhdessä varmasti saada palkinnokseen [1].

Määritelmä 2.1 ([1], Definition 6.1.1)**.** Olkoon 2^N kaikkien mahdollisten koalitioiden joukko, joka voidaan muodostaa N pelaajasta. Jos koalitio $S = \{i\}$ sisältää vain yhden pelaajan i, joukkoa S voidaan myös merkitä joukkona i.

Karakteristinen funktio on funktio $v : 2^N \to \mathbb{R}$, jolle on voimassa

$$v(\emptyset) = 0 \quad \text{ja} \quad v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(i)$$

n henkilön yhteistyöpelissä.

Määritelmästä nähdään, että karakteristisen funktion arvo tyhjälle koalitiolle on aina nolla. Eihän tyhjässä koalitiossa olekaan ketään ansaitsemassa mitään.

Määritelmä 2.2. Karakteristiselle funktiolle v voi lisäksi olla voimassa seuraavia ominaisuuksia:

1. Kahden eri koalition välinen yhteistyö ei voi huonontaa kummankaan joukon tulosta, minkä takia karakteristiselle funktiolle on usein toivottavaa olla voimassa

   $$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \text{ kaikille koalitioille } S, T \subset N, S \cap T = \emptyset.$$

   Tätä kutsutaan superadditiivisuudeksi.

2. Peli on epäolennainen, jos ja vain jos $v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(i)$. Tällöin olennaisessa pelissä $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(i)$.

3. Peli on additiivinen, jos $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ kaikille $S, T \subset N$, $S \cap T = \emptyset$. [1]

Seuraavaksi esitetään yksinkertainen esimerkki karakteristisen funktion luonnista ja koalitioista.

Esimerkki 2.3. Olkoon kolme pelaajaa 1, 2 ja 3. Pelaajalla 1 on 35 pulttia, pelaajalla 2 on 10 mutteria ja pelaajalla 3 on 15 mutteria. Yhdessä mutteri ja pultti muodostavat kokonaisuuden, josta saadaan 3 rahayksikköä. Yksittäisellä mutterilla tai pultilla ei ole mitään arvoa.

Yksittäisellä pelaajalla ei ole molempia, sekä mutteria että pulttia, eli kukaan yksittäinen pelaaja ei saa niistä rahaa, eli karakteristiselle funktiolle on voimassa $v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$. Pelaajilla 1 ja 2 on yhteensä 35 pulttia ja 10 mutteria, joten heillä on 10 mutterin ja pultin muodostamaa kokonaisuutta ja lisäksi 25 yksittäistä pulttia. He voisivat siis saada yhdessä tavarastaan $v(12) = 10 \cdot 3 + 25 \cdot 0 = 30$ rahayksikköä. Vastaavasti pelaajat 1 ja 3 voisivat yhdessä saada tavarastaan $v(13) = 15 \cdot 3 + 20 \cdot 0 = 45$ rahayksikköä. Pelaajilla 2 ja 3 ei ole yhtäkään pulttia, jolloin yhteistyöllä he eivät saisi mitään hyötyä, eli $v(23) = 0$. Jos kaikki pelaajat 1, 2 ja 3 tekevät yhteistyötä, heillä olisi yhteensä 35 pulttia ja 25 mutteria, eli he voisivat yhteistyöllään saada tavaroista $v(123) = 25 \cdot 3 + 10 \cdot 0 = 75$ rahayksikköä.

Pelaaja haluaa tehdä yhteistyötä vain, jos hän saa sitä kautta paremman palkkion itselleen. Palkkio, jonka pelaaja kykenee saamaan yksin, on pienin palkkio, johon hän voi tyytyä. Pelaajat haluavat myös saada suurimman mahdollisen summan pisteitä jaettavaksi. Seuraava määritelmä esittelee kyseiset yksilön ja ryhmän rationalisuuden käsitteet.

Määritelmä 2.4 ([1], Definition 6.1.2)**.** Olkoon x_i reaaliluku, jolle $i = 1, 2, ..., n$ ja $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq v(N)$. Vektori $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ on **jakovektori**, jos

- $x_i \geq v(i)$ (**yksilön rationaalisuus**)
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ (**ryhmän rationaalisuus**)

Kukin arvo x_i esittää pelaajan i saamaa osuutta arvosta $v(N)$. Jakovektoria $\vec{x}$ kutsutaan tässä tutkielmassa myös maksuvektoriksi, allokaatioksi tai vain jaoksi.

Pultti ja mutteri -esimerkin kannalta ryhmän rationaalisuus tarkoittaa sitä, että jaettava summa pelaajien kesken on suurin mahdollinen eli $v(123) = 75$. Pelaajat siis haluavat yhteistöllä maksimoida potin, josta heille jaetaan osuus. Yksilön rationaalisuus puolestaan tarkoittaa, että pelaaja ei tyydy vähempään kuin mitä saisi yksin. Esimerkin kannalta tämä tarkoittaa sitä, että kukaan ei tyydy negatiiviseen palkkioon, koska yksin kukin pelaaja voisi saavuttaa $v(1) = v(2) = v(3) = 0$.

Tutkimme pelejä, joissa edeltävät yksilön ja ryhmän rationaalisuusominaisuuksien olevan voimassa. Yhteistyöpeli voidaan normalisoida seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 2.5 ([1], Definition 6.1.3)**.** Olkoon peli, joka on olennainen eli $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(i)$ ja jolla on karakteristinen funktio v. Tällöin pelillä on (1,0)-normalisointi, jolla on karakteristinen funktio v'. Karakteristeinen funktio v' muodostettaan seuraavanlaisesti:

$$v'(S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} v(i)}{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i)},\ S \subseteq N. \tag{2.1}$$

Tällöin karakteristiselle funktiolle v' on voimassa $v'(N) = 1$ ja $v'(i) = 0$ jokaisella arvolla $i = 1, 2, ..., n$.

Alkuperäisen pelin imputaatioiden joukko on

$$X = \{\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \mid x_i \geq v(i), \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)\}.$$

Koska normalisoidulle pelille on voimassa $v(i) = 0$ ja $v(N) = 1$ jokaisella arvolla $i = 1, 2, \ldots, n$, tällöin normalisoidun pelin kaikkien imputaatioiden joukko on

$$X' = \{\vec{x'} = (x'_1, ..., x'_n) \mid x'_i \geq 0, \textstyle\sum_{i=1}^{n} x'_i = 1\}$$

,

sillä jokaiselle jaolle $\vec{x'} = (x'_1, ..., x'_n)$ tulisi olla voimassa $x'_i \geq v'(i) = 0$ ja $\sum_{i=1}^{n} x'_i = v'(N) = 1$.

Jos $\vec{x'} = (x'_1, ..., x'_n) \in X'$ on jakovektori normalisoidun pelin karakteristiselle funktiolle v', niin alkuperäisen pelin karakteristiselle funktiolle v on jakovektori $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in X$, missä

$$x_i = x'_i(v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i)) + v(i), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.2}$$

Vastaavasti, kun tiedetään jakovektori $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in X$ alkuperäiselle pelille, niin jakovektori normalisoidulle pelille on $\vec{x'} = (x'_1, ..., x'_n) \in X'$, missä

$$x'_i = \frac{x_i - v(i)}{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i)}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Koska Pultti ja mutteri -esimerkissä $v(i) = 0$ kullakin $i = 1, 2, 3$, niin karakterististä funktiota normalisoidessa saataisiin $v'(S) = \frac{v(S)}{v(N)} = \frac{v(S)}{75}$. Tällöin siis $v'(1) = v'(2) = v'(3) = 0$, $v'(12) = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$, $v'(13) = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$, $v'(23) = 0$ ja $v'(123) = 1$.

3. YDIN JA NUKLEOLI

3.1 Ytimet

Seuraavaksi tarkastellaan voitonjakoa $\vec{x} \in X$ ratkaisuna pelille. Etsimme voitonjakoa, jonka voi kokea reiluksi kaikkia pelaajia kohtaan. Saadaksemme käsitystä reiluudesta esitetään seuraavanlainen jakovektorijoukon X osajoukko.

Määritelmä 3.1 ([1], Definition 6.1.4)**.** Yhteistyöpelin **kohtuullisen jaon joukko** on sellainen joukko maksuvektoreita $R \subset X$, että

$$R \equiv \{\vec{x} \in X \mid x_i \leq \max_{T \in \Pi^i} (v(T) - v(T - i)), i = 1, 2, ..., n\}$$

missä Π^i on kaikkien sellaisten mahdollisten koalitioiden joukko, johon pelaaja i voi kuulua. Jos $T \in \Pi^i$, niin $i \in T \subset N$ ja $T - i$ on koalitio T ilman pelaajaa i.

Toisin sanoen pelaajan saama palkkio on oltava pienempi kuin suurin mahdollinen hyöty, minkä hän voi tuoda mihinkään koalitioon, koska muuten hänestä olisi muille koalition jäsenille enemmän haittaa kuin hyötyä. Kohtuullisen jaon joukko antaa lähtökohdan, joka auttaa pienentäämään tarkasteltavaa joukkoa X ratkaisun löytämisen helpottamiseksi [1].

Jos kohtuullisen jaon joukossa olisi vain yksi alkio, tämä olisi pelin ratkaisu. Suurimmassa osassa pelejä joukkoon R kuuluu useampi alkio, jolloin täytyy jakaa kyseinen joukko vielä pienempiin osiin. [1]

Määritelmä 3.2 ([1], Definition 6.1.5)**.** Olkoon koalitio $S \subset N$ ja jakovektori $\vec{x} \in X$. Koalition $S \subset N$ **ylijäämä** jaolle $\vec{x} \in X$ on

$$e(S, \vec{x}) = v(s) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Tämä kertoo paljonko joukon S saama hyöty poikkeaa koalition S antamasta hyödystä kyseisellä maksuvektorilla $\vec{x} \in X$.

Pelin ydin on

$$C(0) = \{\vec{x} \in X \mid e(S, \vec{x}) \leq 0, \forall S \subset N\} = \{\vec{x} \in X \mid v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i \forall S \subset N\}$$

Ytimeen kuuluvat kaikkisellaiset jaot, joissa pelaajat saavat vähintään sen määrän palkkiosta kuin mitä kyseiseen koalitioon kuuluisi. Ydin voi olla myös tyhjä joukko.

ϵ-ydin, missä $-\infty < \epsilon < +\infty$, on

$$C(\epsilon) = \{\vec{x} \in X \mid e(S, \vec{x}) \leq \epsilon, \forall S \subset N, S \neq N, S \neq \emptyset\}.$$

Olkoon $\epsilon^1 \in \mathbb{R}$ pienin ϵ, jolle $C(\epsilon) \neq \emptyset$. Tällöin **pienin ydin** joukossa X^1 on joukko $C(\epsilon^1)$, jossa ϵ^1 voi olla positiivinen, negatiivinen tai nolla.

Ylijäämäfunktio $e(S, \vec{x})$ kuvastaa koalition S tyytymättömyyden suuruutta jaolla $\vec{x}$. Ydin $C(0)$ sisältää kaikki jaot, jossa kaikki koalitiot saavat vähintään yhtä paljon hyötyä kuin mitä karakteristisen fuktion arvo on kyseiselle koalitiolle. Eli toisin sanoen koalitioon kuuuluvat pelaajat saavat vähintään sen, mitä he saisivat tehden vain keskenään yhteistyötä. Jos $C(0) = \emptyset$, niin tällöin olisi koalitio, joka voisi saada enemmän hyötyä tehdessään vain keskenään yhteistyötä. Kuitenkin ϵ-ydin tarkastelee sellasia jakovektoreita $\vec{x}$, joilla jokaisen koalition ylijäämä on korkeintaan luvun ϵ verran. Usein tarkoitus on etsiä ϵ^1, joka on pienin ϵ, jolla on voimassa $C(\epsilon) \neq \emptyset$. Ratkaisu tällöin löytyy joukosta $C(\epsilon^1)$.

Huomioitavaa on myös, että jos $\epsilon_1 < \epsilon_2$, niin $C(\epsilon_1) \subset C(\epsilon_2)$, koska joukon $C(\epsilon_1)$ alkioille $\vec{x}$ pätee $e(S, \vec{x}) \leq \epsilon_1 < \epsilon_2$. Tällöin esimerkiksi $C(\epsilon^1) \subset C(0)$, jos $\epsilon^1 < 0$.

Lause 3.3. *Pelin ydin sisältyy kohtuullisen jaon joukkoon, eli $C(0) \subset R$.*

[1], Definition 6.1.6. Voimme oletaa pelin olevan normeerattu, koska yhteistyöpelit voidaan normeerata. Tällöin $v(N) = 1$ ja $v(i) = 0$, kun $i = 1, \ldots, n$. Olkoon $\vec{x} \in C(0)$. Jos $\vec{x} \notin R$, niin on olemassa sellainen pelaaja j siten, että

$$x_j = \max_{t \in \Pi^j} (v(T) - v(T - j))$$

Tällöin jokaisella $T \subset N$, jolla $j \in T$, on voimassa $x_j > v(T) - v(T - j)$, eli pelaajan j saama summa on enemmän kuin pelaajan tuoma hyöty mihinkään koalitioon mihin hän voisi kuulua. Voidaan valita $T = N$, sillä pelaajan on kuuluttava joukkoon N, jolloin

$$x_j > v(N) - v(N - j) = 1 - v(N - j),$$

mutta toisaalta

$$v(N - j) > 1 - x_j = \sum_{i \neq j} = x_j(N - j),$$

mistä seuraa, että $e(N-j,\vec{x}) = v(N-j) - \vec{x}(N-j) > 0$. Huomataan siis, että $\vec{x} \notin C(0)$, mikä on ristiriidassa oletuksen $\vec{x} \in C(0)$ kanssa. □

Joissakin peleissä voi olla helpompaa tarkastella pelin kustannuksia kuin pelin palkkioita, jolloin peliin sopiva karakteristinen funktio $c : 2^N \to \mathbb{R}$ on subadditiivinen toteuttaen ehdon

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T), \quad T \subset N,\ S \cap T = \emptyset.$$

Eli toisin sanoen kahden koalition erillään aiheuttamien kustannusten summan on oltava korkeintaan yhtä suuri kuin mitä ne voisivat aiheuttaa tehden yhteistyötä. Kustannusten jakovektorille $\vec{x_i} = (x_1, \ldots, x_n)$ on oltava voimassa

1. $x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=0}^{n} x_i = c(N)$,
2. $x_i \leq c(i), i = 1, 2, \ldots, n$ (yksilön rationaalisuus),
3. $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$ (ryhmän rationaalisuus).

Karakterististä funktiota $c(S)$ käytetään joko suoraan tai määritellään tavallinen karakteristinen funktio

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \tag{3.1}$$

joka laskee yhteen säästöt, jotka koalitio S voi saavuttaa. [1]

Lause 3.4 ([1], Exercise 6.34)**.** *Karakteristinen funktio $v(S)$ on superadditiivinen, jos ja vain jos kustannusfunktio $c(S)$ on subadditiivinen.*

Todistus. Olkoon $S \subset N, T \subset N$ ja $S \cap T = \emptyset$.

Todistetaan suunta "⇒". Oletetaan siis, että karakteristinen funktio $v(S)$ on superadditiivinen. Kaava (3.1) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
c(S \cup T) &= \sum_{i \in S \cup T} c(i) - v(S \cup T) \\
&\leq \sum_{i \in S} c(i) + \sum_{i \in T} c(i) - (v(S) + v(T)) \\
&= \sum_{i \in S} c(i) - v(S) + \sum_{i \in T} c(i) - v(T) \\
&= c(S) + c(T).
\end{aligned}$$

Eli funktion c on oltava subadditiivinen.

Nyt todistetaan suunta "⇐"vastaavasti. Oletetaan siis, että kustannusfunktio $c(s)$ on subadditiivinen. Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
v(S \cup T) &= \sum_{i \in S \cup T} c(i) - c(S \cup T) \\
&\geq \sum_{i \in S} c(i) + \sum_{i \in T} c(i) - (c(S) + c(T)) \\
&= \sum_{i \in S} c(i) - c(S) + \sum_{i \in T} c(i) - c(T) \\
&= v(S) + v(T).
\end{aligned}
$$

Eli funktion v on oltava superadditiivinen. Koska on saatu osoitettua implikaatio kumpaakin suuntaan, on väite todistettu.

□

Seuraavassa esimerkissä etsitään karakteristinen funktio kustannusfunktion kautta edellä kuvatulla tavalla.

Esimerkki 3.5. Tarkoituksena olisi rakentaa lentokenttä pitäjälle. Lentokenttää tulisi käyttää 3 eri tyyppistä konetta (1, 2 ja 3). Kone 1 tarvitsee kiitorataa 100 metriä, kone 2 tarvitsee vastaavasti 150 metriä ja kone 3 tarvitsee sitä 400 metriä. Näin ollen lentokenttä tarvitsee 400 metrin mittaisen kiitoradan. Kukin lentokoneista käyttää lentokenttää yhtä usein. Oletetaan, että lentokentän ylläpidosta aiheutuva kustannus on suoraan verrannollinen kiitoradan pituuteen. Haluamme siis selvittää, että kuinka suurta käyttömaksua lentokentästä kunkin koneista tulisi maksaa.

Ensin muodostetaan kustannusfunktio c asettamalla

$$
\begin{aligned}
&c(1) = 100,\ c(2) = 150,\ c(3) = 400, \\
&c(12) = 150,\ c(23) = 400,\ c(13) = 400 \ \text{ ja} \\
&c(123) = 400,
\end{aligned}
$$

joka kertoo, kuinka paljon kustannuksia kullekin koalitiolle koituisi vähintään.

Karakteristisen funktiolle v saadaan kaavaa (3.1) käyttäen laskettua arvot.

$$
\begin{aligned}
&v(1) = v(2) = v(3) = 0, \\
&v(12) = 100,\ v(13) = 100,\ v(23) = 150, \\
&v(123) = 250
\end{aligned}
$$

joka kuvastavat pelaajien tekemiä säästöjä verrattuna siihen, että kukin rakentaisi oman lentokentän. Vaihtoehtoisesti voitaisiin ratkaista tehtävä myös suoraan käyttäen kustannusfunktiota.

ϵ-ytimelle on voimassa $e(S,\vec{x}) \leq \epsilon$ kullekin koalitiolle ja jakovektorille, mistä saadaan rajoitteet

$$
\begin{aligned}
&-x_1 \leq \epsilon, \quad -x_2 \leq \epsilon, \quad 100 - x_1 - x_2 \leq \epsilon, \quad 100 - x_1 - x_3 \leq \epsilon, \\
&150 - x_2 - x_3 \leq \epsilon, \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 250.
\end{aligned}
$$

Viimeisin rajoite saadaan muotoon $x_3 = 250 - x_1 - x_2$, ja sijoittamalla tämä muihin rajoitteisiin saadaan ne muotoon

$$
-\epsilon \leq x_1, \quad -\epsilon \leq x_2, \quad x_1 + x_2 \leq \epsilon + 250, \quad 100 - \epsilon \leq x_1 + x_2, \quad x_2 \leq \epsilon + 150, \quad x_1 \leq \epsilon + 100.
$$

Yhdistelemällä rajoitteita saadaan ϵ-ydin

$$
\begin{aligned}
&C(\epsilon) = \{(x_1, x_2, x_3) \in X \mid e(S, x) \leq \epsilon, \forall\, \emptyset \neq S \in N\} \\
&= \{(x_1, x_2, 250 - x_1 - x_2) \mid -\epsilon \leq x_1 \leq \epsilon + 100, -\epsilon \leq x_2 \leq \epsilon + 150, 100 - \epsilon \leq x_1 + x_2 \leq \epsilon + 250\}.
\end{aligned}
$$

Huomataan, että pienin ϵ, jolla on voimassa $C(\epsilon) \neq \emptyset$, on $\epsilon^1 = -50$, sillä tätä pienemmällä arvolla kaksoisepäyhtälö $-\epsilon \leq x_1 \leq \epsilon + 100$ ei olisi voimassa. Tällöin on voimassa $x_1 = 50$. Sijoittamalla $\epsilon^1 = -50$ ja $x_1 = 50$ kaksoisepäyhtälöihin $-\epsilon \leq x_2 \leq \epsilon + 150$ ja $100 - \epsilon \leq x_1 + x_2 \leq \epsilon + 250$ saadaan $x_2 \in [50, 100]$ ja $x_2 \in [100, 150]$, eli toisin sanoen $x_2 = 100$. Pelaajien tekemät säästöt siis ovat $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ ja $x_3 = 250 - x_1 - x_2 = 100$. Siispä koneen 1 omistaja maksaa 50, koneen 2 omistaja 50 ja koneen 3 omistaja 300 metrin verran kiitoradasta.

Määritelmä 3.6 ([1], Definition 6.1.8)**.** Olkoot $\vec{x} \in X$ ja $\vec{y} \in X$ maksuvektoreita ja olkoon $S \subset N$ ei-tyhjä koalitio. Jos $x_i > y_i$, jokaiselle $i \in S$ ja $\vec{x}(S) = \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$, niin maksuvektori $\vec{x}$ dominoi maksuvektoria $\vec{y}$ koalition S suhteen. Tätä voimme merkitä myös $\vec{x} \succ_S \vec{y}$.

Lause 3.7. *Pelin ydin on joukko, jossa yksikään maksuvektori ei ole dominoitu. Toisin sanoen*

$$
\begin{aligned}
C(0) &= \{\vec{x} \mid \text{ ei ole olemassa } \vec{z} \in X \text{ ja } S \in N \text{ siten, että } \vec{z} \succ_S \vec{x}\} \\
&= \{\vec{x} \mid \text{ ei ole olemassa } \vec{z} \in X \text{ ja } S \in N \text{ siten, että } z_i > x_i \forall i \in S \text{ ja } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)\}
\end{aligned}
$$

[1], Definition 6.1.9. Olkoon lauseen oikea puoli B. On siis osoitettava, että $C(0) \subseteq B$ ja $B \subseteq C(0)$. Oletetaan, että peli on normalisoitua (0, 1)-muotoa.

Todistetaan ensin, että $C(0) \subseteq B$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $\vec{x} \in C(0)$, jolle on voimassa $\vec{x} \notin B$. Tällöin on siis olemassa jokin $\vec{y} \in X$, joka toteuttaa ehdon $\vec{y} \succ_S \vec{x}$ jonkin koalition $S \subset N$ suhteen. Nyt siis $y_i > x_i$ kaikilla $i \in S$ ja $v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i$. Laskemalla yhteen kaikkien pelaajien $i \in S$ saamat maksut saadaan

$$
v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \Rightarrow e(S, \vec{x}) > 0,
$$

mikä on ristiriidassa oletuksen $\vec{x} \in C(0)$ kanssa. Vastaoletus on siis väärin ja on oltava $C(0) \subseteq B$.

Todistetaan nyt puolestaan, että $B \subseteq C(0)$. Olkoon $\vec{x} \in B$. Jos $\vec{x} \notin C(0)$, niin on oltava koalitio $S \subset N$, jolle on voimassa $e(S, \vec{x}) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i > 0$. Olkoon

$$\epsilon = v(S) - \sum_{i \in S} x_i > 0 \quad \text{ja} \quad \alpha = 1 - v(S) \geq 0.$$

Olkoon $s = |S|$ pelaajien määrä koalitiossa S ja

$$z_i = \begin{cases} x_i + \frac{\epsilon}{s} & \text{jos } i \in S, \\ \frac{\alpha}{n-s} & \text{jos } i \notin S. \end{cases} \tag{3.2}$$

Jos $i \in S$, niin jako z_i muodostetaan lisäämällä jakoon x_i tasaisesti jaettu ylimäärä koalitiossa S. Jos $i \notin S$, niin jako z_i muodostuu tasaisesti jaetusta osuudesta, joka jää jäljelle koalitiolle S jakamisen jälkeen.

Tarkoituksena on seuraavaksi osoittaa, että $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ on jakovektori ja että se dominoi vektoria $\vec{x}$ koalitiossa S, jolloin jako $\vec{z}$ on parempi kuin jako $\vec{x}$ koalition S pelaajille.

Tiedetään, että $z_i \geq 0$ ja

$$\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in S} \frac{\epsilon}{s} + \sum_{i \notin N-S} \frac{\alpha}{n-s} = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon + \alpha = v(S) + 1 - v(S) = 1.$$

Tällöin $\vec{z}$ on jakovektori.

Seuraavaksi osoitetaan, että jako $\vec{z}$ on parempi kuin jako $\vec{x}$ koalitiolle S. Jos $i \in S$, niin $z_i = x_i + \frac{\epsilon}{s} > x_i$ ja $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon = v(S)$. Tällöin jakovektori $\vec{z}$ dominoi jakovektoria $\vec{x}$, mistä seuraa, että $\vec{x} \notin B$. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, mistä johtuen on oltava $B \subseteq C(0)$. [1]

□

Lause 3.8. *Olkoon*

$$\epsilon^1 = \min_{\vec{x} \in X} \max_{S \subset N} e(S, \vec{x}).$$

Tällöin pienin ydin on $X^1 = C(\epsilon^1) \neq \emptyset$. Jos $\epsilon < \epsilon^1$, niin $C(\epsilon) = \emptyset$. Jos puolestaan $\epsilon > \epsilon^1$, niin $C(\epsilon^1) \subset C(\epsilon)$.

[1], Definition 6.1.10. Jakovektorien joukon ollessa suljettu ja rajoitettu ja $\max_s e(S, \vec{x})$ on vähintään alhaalta jatkuva vektorin $\vec{x}$ suhteen. Tällöin on siis olemassa minimi $\vec{x_0}$, jolloin ϵ^1 on määritelmän mukaan olemassa ja $\epsilon^1 = \max_S e(S, \vec{x_0}) \geq e(S, \vec{x_0}), \forall S \subset N$. Näin ollen määritelmän mukaan $\vec{x_0} \in C(\epsilon^1)$ ja siten $C(\epsilon^1) \neq \emptyset$.

Toisaalta, jos $\epsilon < \epsilon^1 = \min_x \max_{S \subset N} e(S, \vec{x})$, niin jokaiselle jaolle $\vec{x} \in X$ on voimassa $\epsilon < \max_{S \subset N} e(S, \vec{x})$. Joten jokaisessa jaossa on vähintään yksi koalitio, jolle $\epsilon < e(S, \vec{x})$. Tästä seuraa, että jaosta riippumatta arvolle ϵ on voimassa $\vec{x} \notin C(\epsilon)$, eli toisin sanoen $C(\epsilon) = \emptyset$. Tästä voimme päätellä, että ϵ^1 on pienin ϵ, jolle $C(\epsilon) = \emptyset$. [1]

□

3.2 Nukleolialgoritmi

Seuraavaksi tarkastellaan tilanteita, joissa pienimmässä ytimessä on useampi kuin yksi jakovektori $\vec{x}$, jolloin vähennetään pienimpään ytimeen kuuluvien jakovektoreiden määrää. Pienimmässä ytimessä on tyytymättömimmän koalition $S \subset N$ tyytymättömyys minimissään. Nyt tavoitteena on etsiä kyseisestä ϵ-ytimestä koalitio, jolla toiseksi tyytymättömimmän koalition tyytymättömyys minimoituu. Tällä tavalla mahdollisten ratkaisujen joukosta poistetaan niin kauan jakovektoreita, että jäljelle jää enää vain yksi vektori. Seuraavaksi esitetään nukleolialgoritmi, joka etsii ratkaisun, eli nukleolin, kyseisellä periaatteella.

1. askel 0 (alustus): Aloitetaan kaikista mahdollisista koalitioista pois lukien koalitiot $\emptyset$ ja N. Asetetaan

$$X^0 \equiv X, \quad \Sigma^0 \equiv \{S \subset N,\ S \neq \emptyset\}.$$

2. askel $k \geq 1$: Peräkkäiset laskut

a) suurimman tyytymättömyyden minimointi määrittämällä luku

$$\epsilon^k \equiv \min_{\vec{x} \in X^{k-1}} \max_{S \in \Sigma^{k-1}} e(S, \vec{x}),$$

b) jakovektorit, jotka saavuttaa kyseisen minimax-tyytymättömyyden, ovat

$$\begin{aligned} X^k &\equiv \{\vec{x} \in X^{k-1} \mid \epsilon^k = \min_{\vec{x} \in X^{k-1}} \max_{S \in \Sigma^{k-1}} e(S, \vec{x}) = \max_{S \in \Sigma^{k-1}} e(S, \vec{x})\} \\ &= \{\vec{x} \in X^{k-1} \mid e(S, \vec{x}) \leq \epsilon^k,\ \forall S \subset \Sigma^{k-1}\}. \end{aligned}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan laskea myös pienin ϵ^k, jolla

$$C(\epsilon) = \{\vec{x} \in X \mid e(S, \vec{x}) \leq \epsilon, \forall S \subset \Sigma^{k-1}\} \neq \emptyset,$$

jolloin $X^k = C(\epsilon^k)$.

c) Niiden koalitioiden joukko, jotka saavuttavat minimax-tyytymättömyyden, on

$$\Sigma_k = \{S \in \Sigma^{k-1} \mid e(S, \vec{x}) = \epsilon^k,\ \forall \vec{x} \in X^k\}.$$

d) Poistetaan nämä koalitiot edellisestä joukosta määrittelemällä joukko

$$\Sigma^k \equiv \Sigma^{k-1} - \Sigma_k$$

3. askel: Jos $\Sigma^k = \emptyset$, niin algoritmi on edennyt loppuun. Muulloin alamme suorittaa 2. askelta $k+1$. kertaa.

Kun algoritmi suoriutuu loppuun kohdassa $k = m$, saadaan ytimen nukleoliksi X^m, jolle on voimassa

$$X^m \subset X^{m-1} \subset \cdots \subset X^1 = C(\epsilon^1) \subset X^0 = X.$$

Lisäksi $\Sigma^0 \supset \Sigma^1 \supset \Sigma^2 \supset \cdots \supset \Sigma^{m-1} \supset \Sigma^m = \emptyset$. Mahdollisten ratkaisujen joukkoa siis pienennetään niin kauan, että jää jäljelle enään vain yksi jakovektori, jota kutsutaan nukleoliksi.

Lause 3.9 ([1], Theorem 6.2.1)**.** *Nukleolialgoritmi päättyessään on käynyt äärellisen määrän $m < \infty$ vaiheita ja jokaiselle vaiheelle $k = 1, 2, \ldots, m$ on voimassa*

1. $-\infty < \epsilon < \infty$,
2. $X^k \neq \emptyset$ *ovat konvekseja, suljettuja ja rajoitettuja,*
3. $\Sigma_k \neq \emptyset$, *jokaisella* $k = 1, 2, \ldots, m-1$,
4. $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$.

Nukleoli X^m on yksittäinen piste, jolle on voimassa

$$X^m = \bigcap_{k=1}^{\infty} X^k$$

Seuraavaksi tarkastelemme, kuinka Pultti ja mutteri -esimerkin 2.3 tilanne voidaan ratkaista käyttäen nukleolialgoritmia.

Esimerkki 3.10. Jatketaan pultti ja mutteri -esimerkkiä 2.3. Tilannetta kuvastaa siis karakteristinen funktio

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \qquad v(12) = 30, \qquad v(13) = 45, \qquad v(23) = 0, \qquad v(123) = 75.$$

Etsitään pienin ydin, eli toisin sanoen etsitään pienin ϵ, jolle on voimassa muotoa $e(S, \vec{x}) \leq \epsilon$ olevat rajoitteet:

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq \epsilon, & -x_2 &\leq \epsilon, & -x_3 &\leq \epsilon, \\ 30 - x_1 - x_2 &\leq \epsilon, & 45 - x_1 - x_3 &\leq \epsilon, & -x_2 - x_3 &\leq \epsilon \text{ ja} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 75 \end{aligned}$$

Viimeisintä rajoitetta hyödyntäen voidaan käyttää sijoitusta $x_3 = 75 - x_1 - x_2$, jonka avulla muut rajoitteet saadaan muotoon

$$\begin{aligned} -\epsilon \leq x_1 &\leq \epsilon + 75, \\ -\epsilon \leq x_2 &\leq \epsilon + 30, \\ 30 - \epsilon \leq x_1 + x_2 &\leq \epsilon + 75. \end{aligned}$$

Huomataan, että pienin ϵ, joka toteuttaa edellä esitetyt yhtälöt, on $\epsilon^1 = -15$, koska tätä pienempi arvo tekisi keskimmäisestä kaksoisepäyhtälöstä epätoden. Lisäksi tällä arvolla rajoitteista seuraa

$$\begin{aligned} &x_2 = 15, \\ &15 \leq x_1 \leq 60, \\ &45 \leq x_1 + x_2 \leq 60. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $x_2 = 15$ kaksoisepäyhtälöön $45 \leq x_1 + x_2 \leq 60$ saadaan $30 \leq x_1 \leq 45$, joka on tiukempi rajoite kuin $15 \leq x_1 \leq 60$. Eli pienin ydin on tällöin

$$X^1 = C(\epsilon^1) = \{(x_1, 15, 75 - x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in [30, 45]\},$$

jossa on huomataan olevan useita alkioita. Tutkimalla ylijäämäfunktion $e(S, \vec{x})$ arvoja huomataan, että

$$e(13, \vec{x}) = e(2, \vec{x}) = -15 = \epsilon^1.$$

Tällöin poistuvat koalitiot ovat $\Sigma_1 = \{2, 13\}$. Jäljelle jäävät siis koalitiot $\Sigma^1 = \Sigma^0 - \Sigma_1 = \{1, 3, 12, 23\}$. Nyt etsitään pienin ϵ, jolla on voimassa $X^2 = C(\epsilon^2) \neq \emptyset$. Jäljelle jääneille koalitioille siis oltava $e(S, \vec{x}) \leq \epsilon$. Jolloin aikaisemmalla tavalla saadaan rajoitteiksi

$$-\epsilon \leq x_1 \leq \epsilon + 75 \quad \text{ja} \quad 30 - \epsilon \leq x_1 + x_2 \leq \epsilon + 75.$$

Joukossa $\vec{x} \in X^1$, jossa on voimassa $x_2 = 15$, on ylempi kaksoisepäyhtälö on redudantti alemman ollessa voimassa. Rajoitteet saadaan siis yhdeksi kaksoisepäyhtälöksi $15 - \epsilon \leq x_1 \leq \epsilon + 60$. Huomataan, että optimointiongelman ratkaisuksi saadaan $\epsilon^2 = -22,5$. Eli saadaan siis $x_1 = 37,5$ ja $x_3 = 75 - 37,5 - 15 = 22,5$. Nyt huomataan, että nukleolissa $X^2 = (37,5; 15; 22,5)$ on vain yksi jakovektori, joka on jakamisongelman ratkaisu.

Ratkaisuksi siis saatiin jakamistapa, jossa $x_1 = v(12)/2 + v(13)/2$, $x_2 = v(12)/2$ ja $x_3 = v(13)/2$. Eli kaksi pelaajaa jakavat yhdessä saadun rahasumman puoliksi.

4. SHAPLEY-ARVO

Tässä osiossa määritellään reilu jakaminen eri tavalla kuin edellisessä kappaleessa.

Olkoon funktio $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$, joka kuvaa karakteristisen funktion jakovektoriksi. Oletetaan lisäksi, että funktiolla φ on voimassa seuraavat ominaisuudet:

1. $v(N) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v)$ eli ryhmän rationaalisuusominaisuus on voimassa,
2. Jos pelaajille i ja j on voimassa $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ jollekin kaolitiolle $i \notin S$, $i \notin S$, niin $\varphi_i = \varphi_j(v)$,
3. Jos pelaajalle i on kaikilla koalitioilla $i \notin S$ voimassa $v(S \cup i) = v(S)$, niin $\varphi_i(v) = 0$,
4. Jos v_1 ja v_2 ovat karakteristisia funktioita, niin $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

Lisaksi pelaajan saama osuus karakteristisien funktioiden summana tulisi olla jokaisen karakteristisen funktion vastaavan jaon summa. Ainoalle edellä määritellyt ehdot toteuttavalle funktiolle on voimassa

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \in \Pi^i} [v(S) - v(S - i)] \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

Tälläistä fuktiota kutsutaan Shapley-arvoksi. Tämä määritellään tarkemmin seuraavasti.

Määritelmä 4.1 ([1], Definition 6.3.1)**.** Jakovektori $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ on Shapley-arvo, jos

$$x_i = \sum_{S \in \Pi^i} [v(S) - v(S - i)] \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.1}$$

missä Π^i on kaikkien sellaisten koalitioiden joukko $S \subset N$, joihin pelaaja i kuuluu. Koalition kuuluvien pelaajien lukumäärää merkitään termeillä $|S|$ ja $|N| = n$.

Huomiotavaa on, että n määrästä pelaajia voidaan muodostaa $n!$ erilaista jonoa. Oletetaan, että pelaaja i kuuluu koalitioon S. Tarkastellaan jonoa, jossa on ensin joukko $S \setminus \{i\}$ ja sitten pelaaja i, jonka jälkeen jonossa on loput pelaajat $N \setminus S$. Tälläinen jono voidaan muodostaa $(|S| - 1)!(|N| - |S|)!$ eri tavalla. Nyt todennäköisyys sille, että satunnaisesti muodotetusta jonosta muodotuu juuri tälläinen jono, on

$$P(Z_i = S) = \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!}.$$

Jos pelaajat tulisivat satunnaisessa järjestyksessä huoneeseen siten, että aina huoneeseen tulevalle annetaan se hyöty, mitä hän pystyy kyseisen joukkoon tuomaan, kertoisi Shapley-arvo pelaajan i

saaman osuuden odotusarvon

$$x_i = E[v(Z_i) - v(Z_i - i)] = \sum_{S \in \Pi^i} [v(S) - v(S - i)] P(Z_i = S).$$

Esimerkki 4.2. Tutkitaan jälleen aikaisempaa pultti ja mutteri jakamisongelmaa. Karakteristinen funktio on

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \qquad v(12) = 30, \qquad v(13) = 45, \qquad v(23) = 0, \qquad v(123) = 75.$$

Pelaaja 1 kuuluu koalitioihin 1, 12 ja 123. Kaavan (4.1) mukaisesti pelaajalle 1 saadaan Shapley-arvoksi

$$\begin{aligned} x_1 &= (v(1) - v(\emptyset))\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} + (v(12) - v(2))\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} \\ &+ (v(13) - v(3))\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} + (v(123) - v(23))\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} \\ &= (0-0)\frac{0! \cdot 2!}{3!} + (30-0)\frac{1! \cdot 1!}{3!} + (45-0)\frac{1! \cdot 1!}{3!} + (75-0)\frac{2! \cdot 0!}{3!} \\ &= 0 + 5 + 7,5 + 25 = 37,5. \end{aligned}$$

vastaavasti pelaajien 2 ja 3 Shapley-arvot ovat

$$\begin{aligned} x_2 &= (v(2) - v(\emptyset))\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} + (v(12) - v(1))\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} \\ &+ (v(23) - v(3))\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} + (v(123) - v(13))\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} \\ &= (0-0)\frac{0! \cdot 2!}{3!} + (30-0)\frac{1! \cdot 1!}{3!} + (0-0)\frac{1! \cdot 1!}{3!} + (75-45)\frac{2! \cdot 0!}{3!} \\ &= 0 + 5 + 0 + 10 = 15 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x_2 &= (v(3) - v(\emptyset))\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} + (v(13) - v(1))\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} \\ &+ (v(23) - v(2))\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} + (v(123) - v(12))\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} \\ &= (0-0)\frac{0! \cdot 2!}{3!} + (45-0)\frac{1! \cdot 1!}{3!} + (0-0)\frac{1! \cdot 1!}{3!} + (75-30)\frac{2! \cdot 0!}{3!} \\ &= 0 + 7,5 + 0 + 15 = 22,5. \end{aligned}$$

Huomataan, että Shapley-arvon laskeminen on huomattavasti yksinkertaisempaa kuin nukleolialgoritmin avulla ratkaiseminen. Huomataan myös, että Shapley-arvoksi saadaan tässä esimerkkitilanteessa samat lukuarvot kuin nukleolialgoritmilla.

Vaikka edeltävässä esimerkissä saatiin Shapley-arvoiksi sama tulos kuin nukleolialgoritmilla, näin ei kuitenkaan aina ole. Seuraava esimerkki havainnollistaa tätä.

Esimerkki 4.3. Tässä esimerkissä laskemme aikaisemman lentokenttäongelman Shapley-arvot. Lentokenttäongelman karakteristinen funktio on

$$\begin{aligned}
&v(1) = v(2) = v(3) = 0,\\
&v(12) = 100,\ v(13) = 100,\ v(23) = 150,\\
&v(123) = 250,
\end{aligned}$$

Hyödyntäen kaavaa (4.1) saamme seuraavat Shapley-arvot pelaajille 1, 2 ja 3.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 100 \cdot \frac{1 \cdot 1}{6} + 100 \cdot \frac{1 \cdot 1}{6} + (250 - 150) \cdot \frac{2 \cdot 1}{6} = 66\frac{2}{3}\\
x_2 &= 100 \cdot \frac{1 \cdot 1}{6} + 150 \cdot \frac{1 \cdot 1}{6} + (250 - 100) \cdot \frac{2 \cdot 1}{6} = 91\frac{2}{3}\\
x_3 &= 150 \cdot \frac{1 \cdot 1}{6} + 100 \cdot \frac{1 \cdot 1}{6} + (250 - 100) \cdot \frac{2 \cdot 1}{6} = 91\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Shapley-arvoksi saadaan jakovektori $(66\frac{2}{3}, 91\frac{2}{3}, 91\frac{2}{3})$, joka kustannuksiksi muutettuna kaavan (3.1) avulla olisi
$(33\frac{1}{3}, 58\frac{1}{3}, 308\frac{1}{3})$, eli pelaaja 1 maksaisi $33\frac{1}{3}$, pelaaja 2 maksaisi $58\frac{1}{3}$ ja pelaaja 3 maksaisi $308\frac{1}{3}$. Huomataan, että tämä poikkeaa nukleolialgoritmin antamasta ratkaisusta, jonka mukaan pelaajat 1, 2 ja 3 maksavat 50, 50 ja 300 metrin osalta. Shapley-arvot suosivat tässä tilanteessa pelaajaa 1.

Sovelluksissa voi olla kuitenkin paljon enemmän pelaajia kuin edellisissä esimerkeissä. Pelissä, jossa on n pelaajaa, on myös 2^n erilaista koalitiota. Tällöin yksittäinen pelaaja kuuluu 2^{n-1} koalitioon. Jos jokaiselle pelaajalle lasketaan omat Shapley-arvon osuudet, joudutaan laskemaan $n \cdot 2^{n-1}$ kappaletta $[v(S) - v(S - i)]\frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}$-muotoista termiä. Esimerkiksi 10 pelaajan pelissä kyseisiä termejä olisi laskuissa $10 \cdot 2^{10-1} = 5120$ kappaletta. Tästä syystä joudutaan usein tekemään kyseisiä laskelmia tietokonetta hyödyntäen. Tutkielman liitteestä 1 löytyy Matlab-funktio, joka laskee Shapley-arvoja.

Seuraavaksi keskitymme peleihin, joilla voidaan tutkia mm. äänestäjän poliittista vaikutusvaltaa.

Määritelmä 4.4 ([1], Definition 6.3.2)**.** Jos karakteristisen funktion arvo kullekin koalitioille $S \subset N$ on joko $v(S) = 0$ tai $v(S) = 1$, peliä kutsutaan **yksinkertaiseksi peliksi**. Jos tällaisessa pelissä koalitiolle S on voimassa $v(S) = 1$, niin koalitiota kutsutaan **voittavaksi koalitioksi**. Jos $v(S) = 0$, koalitiota S kutsutaan **häviäväksi koalitioksi**. Olkoon joukko

$$W^i = \{S \in \Pi^i \mid v(S) = 1, v(S - i) = 0\},$$

joka sisältää kaikki sellaiset koalitiot S, jotka voittavat pelaajan i kuuluessa koalitioon mutta häviävät, jos pelaaja i poistettaisiin koalitiosta. Kyseiset koalitiot $S \in W^i$ ovat voittavia koalitioita, joissa pelaaja i on **kriittinen**.

Yksinkertaiset pelit ovat tärkeitä vaaleja ja äänestyksiä tutkittaessa. Tällainen on esimerkiksi peli, jossa suuremman määrän pelaajia sisältävä koalitio voittaa. Tällöin koalitiolle S on voimassa

$v(S) = 1$, jos on voimassa $|S| > n/2$. Häviävälle koalitiolle S on voimassa $|S| < n/2$ ja $v(S) = 0$. [[1], s.342]

Yksinkertaisessa pelissä voittavalle koalitiolle $S \in W^i$ on voimassa $v(S) - v(S - i) = 1$, kun pelaaja i on kriittisessä asemassa. Muussa tapauksessa on voimassa $v(S) - v(S - i) = 0$. Kun yksinkertaiselle pelille lasketaan Shapley-arvoja, voimme siis kirjoittaa kyseisen kaavan muotoon

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{S \in \Pi^i} [v(S) - v(S - i)] \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!} \\ &= \sum_{S \in W^i} \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!}. \end{aligned}$$

Tällaisiä Shapley-arvoja kutsutaan **Shapley-Shubik indekseiksi**, joka on eräs poliitiisen vaikutusvallan tunnusluku. Kyseisiä arvoja voitaisiin ajatella myös todennäköisyydeksi, jolla kyseisen pelaajan valinta vaikuttaa pelin lopputulokseen, jos pelaajien valinnat oletetaan toisistaan riippumattomiksi ja satunnaisiksi.

Esimerkki 4.5. Lasketaan Shapley-Shubik-indeksit Suomen eduskunnan eduskuntaryhmille vaalikaudella 2023–2027. Kansanedustajia on yhteensä 200. Määrittelemme eduskuntaryhmät pelaajiksi ja ryhmien jäsemäärän painoarvoiksi. Määritellään karakteristinen funktio siten että $v(S) = 1$, kun koalitio S muodostaa enemmistön ja $v(S) = 0$, kun koalitio S muodostaa vähemmistön. Kansanedustajia on parillinen määrä. Jos eduskunnassa nappiäänestys menee tasan, seuraa lippuäänestys. Jos myös lippuäänestys menee tasan, suoritetaan arvonta. Olkoon tällöin $v(S) = \frac{1}{2}$, jos koalition S ryhmien jäsenmäärien summa on tasan 100.

Suomen eduskuntaryhmien jäsenmäärät ovat seuraavan taulukon mukaiset.

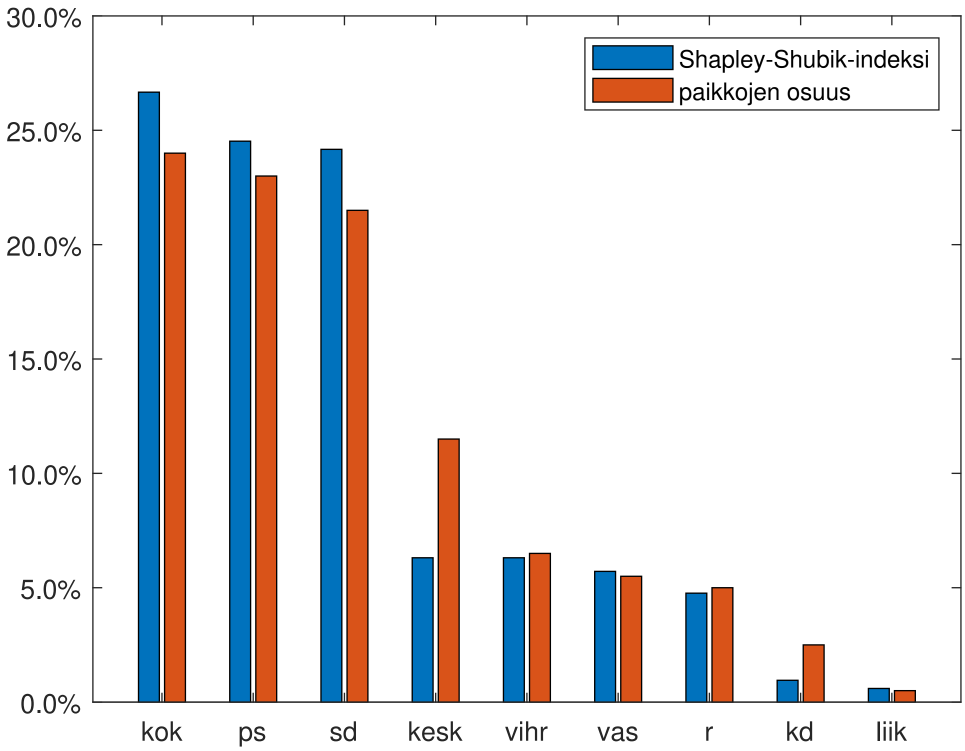
Taulukko 4.1. *Suomen eduskuntaryhmien jäsenmäärät vaalikaudella 2023-2027 [2]*

Eduskuntaryhmä	Jäsenmäärä
Kansallisen kokoomuksen eduskuntaryhmä /kok	48
Perussuomalaisten eduskuntaryhmä /ps	46
Sosialidemokraattinen eduskuntaryhmä /sd	43
Keskustan eduskuntaryhmä /kesk	23
Vihreä eduskuntaryhmä /vihr	13
Vasemmistoliiton eduskuntaryhmä /vas	11
Ruotsalainen eduskuntaryhmä /r	10
Kristillisdemokraattinen eduskuntaryhmä /kd	5
Liike Nyt -eduskuntaryhmä /liik	1

Liitteessä 2 olevalla koodilla on laskettu Shapley-arvo edellä mainitulla karakteristisella funktiolla. Liitteen 2 koodissa kutsuttavat funktiot ovat määritelty Liitteessä 1. Seuraavassa taulukossa on esitetään eduskuntaryhmien osuudet eduskunnan paikoista ja Shapley-Shubik-indeksit.

Taulukko 4.2. *Suomen eduskunta ryhmien osuudet kaikista eduskuntapaikoista ja Shapley-Shubik-indeksit vaalikaudella 2023-2027.*

Eduskuntaryhmä	paikoista-%	Shapley-Shubik-%
Kansallisen kokoomuksen eduskuntaryhmä /kok	24,0	26,7
Perussuomalaisten eduskuntaryhmä /ps	23,0	24,5
Sosialidemokraattinen eduskuntaryhmä /sd	21,5	24,2
Keskustan eduskuntaryhmä /kesk	11,5	6,3
Vihreä eduskuntaryhmä /vihr	6,5	6,3
Vasemmistoliiton eduskuntaryhmä /vas	5,5	5,7
Ruotsalainen eduskuntaryhmä /r	5,0	4,8
Kristillisdemokraattinen eduskuntaryhmä /kd	2,5	1,0
Liike Nyt -eduskuntaryhmä /liik	0,5	0,6



Kuva 4.1. *Eduskuntaryhmien Shapley-Shubik-indeksien vertailu paikkojen osuuksiin vaalikaudella 2023–2027.*

Taulukon 4.2 tietoja havainnollistetaan visuaalisesti pylväsdiagrammilla kuvassa 4.1.

Pylväsdiagrammissa on esitettynä eduskuntaryhmien Shapley-Shubik-indeksien vertailu paikkojen suhteelliseen määrään. Huomataan esimerkiksi, että Keskustan ja Vihreiden eduskuntaryhmillä on saman suuruiset Shapley-Shubik-indeksien arvot, vaikka niiden jäsenmäärät eroavat toisistaan huomattavasti. Keskustan eduskuntaryhmällä on 23 jäsentä ja Vihreiden eduskuntaryhmällä on 13 jäsentä.

5. YHTEENVETO

Reilun voitonjakamisen ongelmissa ratkaisumenetelmä riippuu siitä, miten ongelmassa oikeudenmukaisuus määritellään. Tämä tutkielma tarjoaa katsauksen reilun voitonjakamisen ongelmiin ja erilaisiin ratkaisumenetelmiin, jotka voivat olla hyödyllisiä päätöksenteon ja resurssien jakamisen kannalta.

Tutkielmassa ensin esitettiin koalitiot, karakteristiset funktiot ja niiden ominaisuuksia. Lisäksi määriteltiin jakovektorit ja esiteltiin siltä vaaditut yksilön ja ryhmän rationaalisuusominaisuudet. Esiteltiin myös pelin normalisointi, jota hyödynnettiin myös tutkielmassa esitellyissä todistuksissa.

Seuraavaksi määriteltiin ylijäämäfunktio ja joukkoja, jotka sisältävät oikeudenmukaisimman jakotavan koalitioiden suurimman tyytymättömyyden minimisoimiseen. Edellä mainittuja joukkoja ovat ydin, kohtuullisen jaon joukko ja pienin ydin. Koska pienin ydin voi sisältää useamman ratkaisun, voimme joutua minimoimaan seuraavaksi tyytymättömimpien koalitioiden tyytymättömyyttä. Tällöin apuna voidaan käyttää nukleolialgoritmia yksikäsitteisen ratkaisun löytämiseksi, mitä havainnollistettiin esimerkin avulla. Tutkielmassa esiteltiin myös menetelmiä oikeudenmukaisen kustannustenjakamisongelman muuttamiseen voitonjakamisen ongelmaksi. Kustannusten jakamisen ongelman ratkaisua havainnollistettiin esimerkin avulla.

Viimeisessä kappaleessa esiteltiin Shapley-arvot, jotka määrittelevät reiluuden omien aksioomiensa mukaisesti. Lopuksi laskettiin aikaisemmille esimerkkitilanteille Shapley-arvoja ja vertailtiin niitä nukleolialgoritmin antamiin tuloksiin. Lisäksi esiteltiin Shapley-arvojen ja poliittisen vaikutusvallan tunnusluvun, Shapley-Shubik-indeksin, välinen yhteys. Lisäksi havainnollistettiin Shapley-arvojen laskemista ohjelmiston avulla laskemalla Shapley-Shubik-indeksit vaalikauden 2023-2027 Suomen eduskuntaryhmille.

LÄHTEET

[1] E. N. Barron. *Game theory an introduction*. Hoboken, N.J. : John Wiley Sons, Inc., 2013.

[2] *Eduskunta voimasuhteet. eduskunta.fi*. 19. toukokuuta 2023. URL: https://www.eduskunta.fi/FI/kansanedustajat/tilastot/Sivut/hex8110_Eduskuntaryhmien%20voimasuhteet.aspx (viitattu 19. 05. 2023).

LIITE1: MATLAB-FUNKTIO SHAPLEY-ARVOJEN LASKEMISEKSI

```
function x = shapleyValue(C,v)
%  shapleyValue Laskee Shapley-arvon annetulle jakamisongelmalle.
%  x = shapleyValue(C,v) palauttaa Shapley-arvot annetuille
%  koalitiomatriisille C ja sen koalitioiden karakteristisen funktion
%  arvot. Koalitiomatriisissa C rivit vastaavat koalitioita ja sarakkeet
%  pelaajia. Kyseisessä matriisissa arvo 1 tarkoittaa, että kyseinen
%  pelaaja kuuluu koalitioon ja arvo 0 tarkoittaa, että pelaaja ei kuulu
%  kyseiseen koalitioon. Karakteristisen funktioiden arvot ovat vektorissa
%  v samassa järjestyksessä kuin arvoja vastaavat koalitiot matriisissa C.

n = size(C,2);        % pelaajien määrä
P = @(s,n) factorial(s-1)*factorial(n-s)/factorial(n);
x = zeros(1,n);       % jakovektorin alustus
for S_index = 1:length(v)
    coalition = C(S_index,:);
    for i=1:n
        is_in_coalition = coalition(i);
        if is_in_coalition
            % koalitio ilman pelaajaa i
            f = coalition;
            f(i)=0;

            % alkuperäiseen koalitioon kuuluvien pelaajien määrä
            s = sum(coalition);

            % koalition, josta pelaaja i on poitettu, indeksi
            j = find(ismember(C,f,'rows'));

            % Lisätään termi pelaajan Shapley-arvon osuuteen
            x(i) = x(i) + (v(S_index)-v(j))*P(s, n);
        end
    end
end
end
```

LIITE2: MATLAB-KOODI EDUSKUNTARYHMIEN SHAPLEY-SHUBIK-INDEKSIEN LASKEMISEEN

```
format long
% painokertoimet (jäsenmäärät)
w = [48, 46, 43, 23, 13, 11, 10, 5, 1]';
% pelaajien eli ryhmien määrä
n = length(w);
% jäsenmäärät yhteensä
s = sum(w);

% parametrit cartesian-funktiolle
a = [1 0]';
args = {};
for i = 1:n
    args{i} = a;
end

% välitetään parametrit ja saadaan matriisi koalitioista.
C = cartesian(args{:});

% jokaisen koalition painokertoimet yhteensä
sums = C*w;

% muodotetaan karakteristisen funktioiden arvot kullekkin koalitiolle
v_g = sums > s/2;
v_eq = (sums == s/2)*1/2;
v = v_g + v_eq;

x = shapleyValue(C,v);

% paikkojen osuudet
suht_w = w/s

% ryhmien lyhenteet pylväsdiagrammiin
names = categorical({'kok', 'ps', 'sd', 'kesk', 'vihr', 'vas', 'r', 'kd', 'liik'});
```

```
names = reordercats(names,{'kok', 'ps', 'sd', 'kesk', 'vihr', 'vas', 'r', 'kd', 'liik'});

% pylväsdiagrammin muodostus
bar(names, [x;suht_w'])
legend('Shapley-Shubik-indeksi', 'paikkojen osuus')
ytickformat('%.1f%%')
```

```
function C = cartesian(varargin)
args = varargin;
n = nargin;

[F{1:n}] = ndgrid(args{:});

for i=n:-1:1
    G(:,i) = F{i}(:);
end

C = unique(G , 'rows');
end
```