

Tuomas Haataja

YKSIULOTTEINEN LÄMPÖYHTÄLÖ SÄÄTÖONGELMANA

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Petteri Laakkonen
Elokuu 2023

TIIVISTELMÄ

Tuomas Haataja: Yksiolotteinen lämpöyhtälö säätöongelmana
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Elokuu 2023

Lämpöyhtälö on oivallinen esimerkitapaus säätöteorian ja robustin säädön tutkimuksessa. Tässä kandidaatintyössä tarkastellaan yksiolotteisen lämpöyhtälön ratkaisemista ja stabiiliutta. Säätöongelmana on selvittää, miten lämpöyhtälön käyttäytymistä voidaan ohjata, jotta kappaleen paikallinen lämpötila käyttäytyisi halutulla tavalla.

Yksiolotteisen lämpöyhtälön systeemi voidaan fysikaalisessa mielessä ajatella ohuena tangona, jota lämmitetään ja jäähdytetään. Tässä työssä lämmitys toteutetaan toisesta päästä. Lämmitys on systeemissä ohjaus, jolla voidaan vaikuttaa systeemin lämpötilaan. Vastetta, eli paikallista lämpötilaa mitataan samasta pisteestä, jolloin tangon ajatellaan olevan lämmitys- ja mittauspistettä lukuun ottamatta täysin eristetty. Tällöin yhdessä valitun säädön kanssa ohjaamattoman systeemin reunaehdoiksi saadaan Neumannin reunaehdot, mikä aiheuttaa tekee systeemistä epästabiilin.

Lämpöyhtälön käyttäytymistä voidaan säätää robustilla säätimellä, jotta vaste saadaan seuraamaan haluttua käyttäytymismallia, joka annetaan referenssisignaalin muodossa. Robusti säätö takaa, että säädin toimii häiriöistä ja säätimen epätarkkuuksista huolimatta. Matriiseilla laadittu säädin joudutaan kuitenkin rajoittamaan äärellisiin systeemeihin, eikä esimerkiksi kanttiaaltoa voida seurata matriiseihin perustuvalla säätimellä äärettömän tarkasti. Yksinkertaista sinimuotoista referenssisignaalia voidaan kuitenkin seurata jo dimensioltaan varsin pienillä matriiseilla, mikä onkin tämän työn tavoitteena.

Tässä työssä systeemi stabiloidaan negatiivisella takaisinkytkennällä ja robustilla säätimellä, jossa takaisinkytkentä on osana. Säätimen suunnittelu toteutetaan sisäisen mallin periaatteen mukaisesti sisällyttämällä tavoitellun referenssisignaalin dynamiikkoja säätimeen. Lopuksi säätimen toimintaa demonstroidaan simuloimalla systeemiä suunnitellulla säätimellä.

Lämpöyhtälön tarkastelussa tarvittavia matemaattisia työkaluja ovat muun muassa Fourier-sarjat, Laplace-muunnos ja tilaesitysmalli. Lämpötilan jakaumaa voidaan matemaattisesti kuvata Fourier'n sarjojen avulla, kun taas tilaesitys ja siirtofunktio kuvaavat systeemin käyttäytymistä ja stabiiliutta. Myös lämpöyhtälön yleinen ratkaisu havainnollistaa lämpötilan käyttäytymistä ajan funktiona.

Avainsanat: lämpöyhtälö, säätöteoria, Fourier-sarja, Laplace-muunnos, stabiilius, lohkoavioesitys, tilaesitys, siirtofunktio, robusti säätö

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ALKUSANAT

Ennen kandidaatintyöni aloittamista olin jo tehnyt päätöksen vaihtaa opintosuuntaani pois matematiikalta automaatio- ja systeemitekniikkaan. Työn edetessä – ja erityisesti loppuvaiheilla – päätökseni alkoikin horjua, sillä sukellus systeemiteorian maailmaan palautti mielenkiinnon juuri matematiikan opiskeluun. Työn aiheet yhdistelivät niin tuttua kuin tuntematontakin puolta matematiikasta ja erityisesti systeemiteoriasta, mikä herätti tiedonnälkää myös tämän työn ulkopuolisia asioita kohtaan.

Haluan erityisesti kiittää kandidaatintyöni ohjaajaa Petteri Laakkosta erittäin mielenkiintoisen aiheen ehdottamisesta, rakentavasta ja asiantuntevasta palautteesta, sekä kärsivällisyydestä aikataulultaan venähtäneen työn ohjauksessa. Lisäksi haluan kiittää ystäviäni niin jatkuvasta tuesta kirjoitusprosessin aikana, kuin myös lisäsilmäpareina toimimisesta tekstin lopullisen oikolukemisen yhteydessä.

Tampereella, 13. elokuuta 2023

Tuomas Haataja

SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto	1
2.	Matemaattiset ja säätöteoreettiset alkutiedot	3
2.1	Funktioiden muunnoksia.	3
2.1.1	Jaksollisuus ja Fourier-sarja	3
2.1.2	Laplace-muunnos	5
2.2	Säätöpiirit ja lohkokaavioesitys	7
2.3	Systeemin esitysmuotoja.	8
2.3.1	Tilaesitys	8
2.3.2	Siirtofunktio	10
2.4	Stabiilius	11
3.	Yksiulotteisen lämpöyhtälön reunasäätö	13
3.1	Lämpöyhtälön analyyttinen ratkaisu separoimalla.	14
3.2	Lämpöyhtälön siirtofunktio.	18
3.3	Reunasäädetyin lämpöyhtälön stabilointi	20
4.	Robusti säätö.	23
4.1	Säätöongelma tilaesitysmuodossa	23
4.2	Minimaalinen robusti säädin	24
4.3	Säätimen suunnittelu lämpöyhtälölle	25
5.	Yhteenveto	29
	Lähteet.	31

LYHENTEET JA MERKINNÄT

A, B, C, D	Tilaesityksen operaattorit
A^{-1}	Operaattorin A käänteisoperaattori
$G(s)$	Siirtofunktio
I	Identiteettioperaattori
O	Nollaoperaattori
$\mathcal{L}(f(t))$	Funktion $f(t)$ Laplace-muunnos
$\hat{f}(t)$	Funktion $f(t)$ Fourier-sarja
s	Laplace-muuttuja
t	Aika
u tai v	Systeemin ohjaus tai sisäänmeno
x	Paikka tai yleinen tilanmuuttuja
y	Systeemin vaste tai ulostulo
z	Lämpöjakauma yksiulotteisessa lämpöyhtälössä
μ	Lämmönjohtavuus

1. JOHDANTO

Vuonna 1822 Joseph Fourier [6] esitti kappaleen lämpötilan käyttäytymisen noudattavan erästä osittaisdifferentiaaliyhtälöä – lämpöyhtälöä. Lämpöyhtälö on oleellinen useissa sovelluksissa [2], mutta samalla se on matemaattisesti suhteellisen yksinkertainen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden joukossa. Lämpöyhtälö onkin säätöteoriassa oivallinen esimerkki muun muassa systeemin stabiiliuden tutkimuksessa, sillä lämpöyhtälö ei reunaehdoistaan riippuen ole välttämättä stabiili, mutta sen ratkaisujen tyypillisen muodon nojalla se on melko helppo stabiloida.

Tämän työn tavoitteena on demonstroida säätöteorian tavoitteita ja käsitteitä käyttäen esimerkkinä intuitiivisesti lähestyttävää systeemiä – eli lämpöyhtälöä. Matemaattinen taso on työssä jätetty säätöteorian puitteissa tarkoituksella matalalle. Esimerkiksi funktionaalianalyysin menetelmiä ei tässä työssä edes mainita, vaikka ne ovat säätöteoriassa hyvinkin perustavanlaatuisessa osassa [10].

Tässä työssä tarkastellaan lämpöyhtälöä yksiulotteisessa tapauksessa. Säätöteoreettiseen stabiiliuden tarkastelua tehdään muun muassa siirtofunktioiden avulla. Tähän tarvitaan lämpöyhtälön ratkaisuja, joiden löytämiseksi käytetään Fourier'n esittelemää funktioiden ominaisuutta – Fourier'n sarjakehitelmää. Siirtofunktioiden löytämiseksi tarvitaan myös Laplace-muunnosta, joka onkin yksi säätö- ja systeemiteorian tärkeimmistä työkaluista. Työssä esitellään myös näitä käsitteitä ja työkaluja suppeasti lukemisen helpottamiseksi.

Stabilointi toteutetaan tässä työssä sekä suoralla negatiivisella takaisinkytkennällä, sekä robustilla säätimellä. Robusti säätö tarkoittaa käytännössä, että systeemin säädin toimii täydellisesti pienten häiriöiden ja epävarmuuksien vaikutuksesta huolimatta [15]. Systeemin parametrit – esimerkiksi kappaleen lämmönjohtavuus tai pituus – voivat olla hieman epätarkasti määritettyjä, mutta robusti säädin toimii systeemin sisäiseen stabiiliuteen perustuen täydellisesti. Tämä on erityisen olennaista todellisissa, fyysisissä systeemeissä, joissa mittausepätarkeyttä ja häiriötä esiintyy väistämättä.

Robusti säädin suunnitellaan sisäisen mallin periaatteella. Käytännössä systeemin paikallisen lämpötilan halutaan seuraavan tietynlaista signaalia, josta myöhemmin käytetään nimitystä *referenssi-signaali*. Sisäisen mallin periaatteen mukaan referenssisignaalin dynamiikat kopioidaan säätimeen. Säätimen tilaesityksestä ratkaistaan siirtofunktio, jonka avulla säätimelle voidaan ratkaista reaali-tilaesitys. Lopuksi suunnitellun säätimen toimintaa demonstroidaan simuloimalla systeemiä hyödyntäen reaalista tilaesitystä.

Työn rakenne on melko lineaarinen ja kumulatiivinen; jokainen luku nojautuu suoraan edelliseen. Lämpöyhtälön säätöteoreettisen tarkastelun kannalta välttämättömät matemaattiset ja säätöteoreettiset alkutiedot esitellään luvussa 2. Luvussa 3 puolestaan esitellään lämpöyhtälö ja reunasäädön perusidea, todennetaan säätämättömän systeemin epästabiilius sekä osoitetaan takaisinkytkennän

stabiloivan systeemin. Takaisinkytkentään perustuva säädin konstruoidaan luvussa 4 seuraten robotin säädön periaatteita. Lopuksi luku 5 kokoaa yhteen työn keskeiset aiheet ja tulokset. Lisäksi luvussa on pohdintaa, miten työtä voisi jatkaa, tai mihin voitaisiin syventyä.

2. MATEMAATTISET JA SÄÄTÖTEOREETTISET ALKUTIEDOT

2.1 Funktioiden muunnoksia

Funktioille voidaan eri käyttötarkoituksia ja sovelluskohteita varten tehdä monia erilaisia muunnoksia. Tässä työssä tarkastellaan kahta varsin yleistä muunnosta: Fourier'n sarjakehitelmää ja Laplace-muunnosta. Fourier'n muunnosta ei erikseen tässä työssä tarkastella, mutta Fourier-muunnos voidaan nähdä Laplace-muunnoksen rajoittumana.

2.1.1 Jaksollisuus ja Fourier-sarja

Fourier'n sarja on tehokas työkalu jaksollisten funktioiden tarkasteluun yksinkertaisten sini- ja kosinifunktioiden avulla. Määritellään aluksi kirjan [8, s. 499] mukaan, mitä funktion jaksollisuudella tarkoitetaan.

Määritelmä 2.1. Funktio $f(x)$ on jaksollinen, jos löytyy luku $T \neq 0$, joka toteuttaa yhtälön

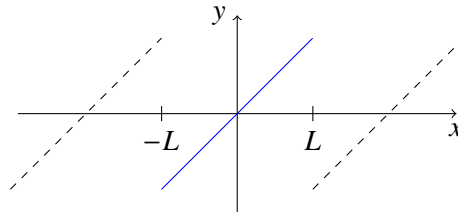
$$f(x) = f(x + T).$$

Tällöin T on funktion jakso. Sitä kutsutaan perusjaksoksi, jos se on pienin positiivinen luku, joka toteuttaa yhtälön.

Huomautus 2.2. Vakiofunktio on jaksollinen funktio, vaikka sillä ei ole perusjaksoa.

Joseph Fourier [6] esitti, että mikä tahansa (jaksollinen) funktio voidaan esittää trigonometrisista funktioista koostuvana sarjana. Myöhemmin on osoitettu, että näin ei täsmälleen ole, vaan funktion tulee täyttää esimerkiksi Dirichlet'n ehdot [7, kappale 2.2]. Esimerkiksi Dirichlet'n funktiota ei voida esittää Fourier-sarjan avulla. Tässä työssä tarkasteltavat funktiot kuitenkin täyttävät nämä ehdot.

Äärellisellä välillä $[-L, L]$ määritelty funktio voidaan jatkaa välille $(-\infty, \infty)$ *jaksollisella laajennuksella*. Laajennuksen jakso on tällöin funktion määrittelyväli, ja sen arvot kopioidaan toistumaan joka jaksolla. Kuvassa 2.1 on hahmoteltuna eräs jaksollinen laajennus.



Kuva 2.1. Funktion $f(x) = x$, $-L \leq x \leq L$ jaksollinen laajennus.

Jaksollista laajennusta tarvitaan Fourier-sarjaa [8, s. 504] varten.

Lause 2.3. Välillä $-L \leq x \leq L$ jatkuvan ja itseisesti integroituvan funktion $f(x)$ jaksollinen laajennus $\hat{f}(x)$ voidaan esittää jaksollisten funktioiden sarjana – eli Fourier-sarjana

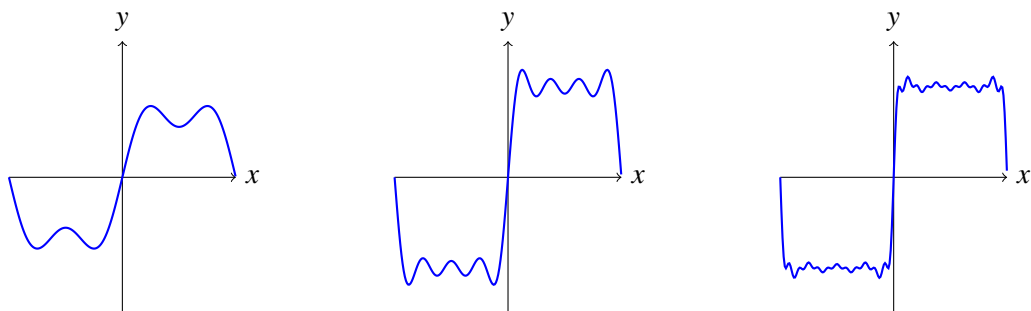
$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

jossa sini- ja kosinitermien kertoimet ovat muotoa

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

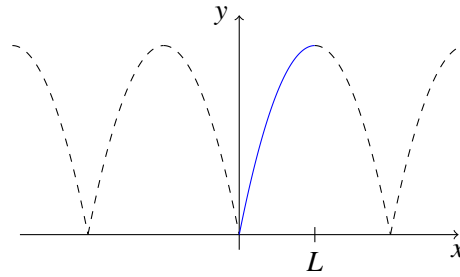
Todistus. Sivuuetaan. □

Fourier'n sarja on siis sarja sini- ja kosinitermejä, joiden kertoimet riippuvat alkuperäisen funktion arvoista ja jaksot sen määrittelyalueesta. Fourier'n sarjaa on havainnollistettu kuvassa 2.2, jossa tarkastellaan kanttiaallon Fourier-sarjan muodostumista.



Kuva 2.2. Sinimuotoisten funktioiden summa lähestyy kanttiaallon muotoa sarjan osasumman termejä lisättäessä.

Funktio, jonka määrittelyalue on $0 \leq x \leq L$, voidaan esittää Fourier-sarjana myös pelkkien sini- tai kosinitermien avulla, jolloin voidaan käyttää nimitystä *sini-* tai *kosinisarja* [1, s. 627]. Tällöin funktiota voidaan jatkaa koko reaaliakselille parillisena tai parittomana funktiona. Kuva 2.3 havainnollistaa, miten parillinen jatke muodostetaan. Parillinen jatke saadaan matemaattisesti asettamalla välillä $[0, L]$ määritelty funktio $f(x) = f(-x)$, kun $-L \leq x < 0$ ja tekemällä tälle välillä $[-L, L]$ määritellylle funktiolle edellä esitely jaksollinen laajennos.



Kuva 2.3. Paraabelin puolikas on määritelty välillä $0 \leq x < L$, mutta sitä vastaava parillinen jatke on määritelty kaikille reaaliluvuille. Parillinen jatke on parillinen funktio.

Lause 2.4. Funktion $f(x)$, $0 \leq x < L$ parillinen jatke on Fourier-sarja muotoa

$$\hat{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1)$$

jossa $a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$ ja $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, kun $n \geq 1$.

Todistus. Ks. [1, s. 627]. □

2.1.2 Laplace-muunnos

Laplace-muunnos on eräs integraalimuunnos. Se on tehokas työkalu esimerkiksi differentiaaliyh-tälöiden ratkaisemiseen. Tässä työssä sitä käytetään lähinnä systeemien siirtofunktioiden ratkai-semiseen. Muunnoksen määritelmä on kirjasta [8, s. 282].

Määritelmä 2.5. Oletetaan, että funktio $f(t)$ on ajan t funktio, ja $t \geq 0$. Funktion $f(t)$ Laplace-muunnos on

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

kun integraalin raja-arvo on olemassa. Muuttuja s on kompleksiluku, ja sitä kutsutaan usein Laplace-muuttujaksi.

Jos Laplace-muunnos on olemassa muuttujalla s_0 , on se olemassa kaikilla s , jotka toteuttavat ehdon $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$. Tarkastellaan kahta muunnoksen esimerkkitapausta.

Esimerkki 2.6. Määritetään trigonometrisen funktion $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ Laplace-muunnos. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \sin(\omega t + \varphi)e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Integraalilla on raja-arvo, kun $\operatorname{Re}(s) > 0$. Suoraviivaisella osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty -\sin(\omega t + \varphi) \frac{e^{-st}}{s} - \int_0^\infty \omega \cos(\omega t + \varphi) \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \sin(\varphi) + \frac{\omega}{s} \int_0^\infty \cos(\omega t + \varphi) e^{-st} dt.\end{aligned}$$

Edelleen osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \frac{1}{s} \sin(\varphi) + \frac{\omega}{s} \left(\int_0^\infty \cos(\omega t + \varphi) \frac{e^{-st}}{-s} - \int_0^\infty -\omega \sin(\omega t + \varphi) \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) \\ &= \frac{1}{s} \sin(\varphi) + \frac{\omega}{s} \left(\frac{1}{s} \cos(\varphi) - \frac{\omega}{s} \mathcal{L}(f(t)) \right) \\ &= \frac{1}{s} \sin(\varphi) + \frac{\omega}{s^2} \cos(\varphi) - \frac{\omega^2}{s^2} \mathcal{L}(f(t)).\end{aligned}$$

Saadaan

$$s^2 \mathcal{L}(f(t)) + \omega^2 \mathcal{L}(f(t)) = s \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \frac{s \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{s^2 + \omega^2}.$$

Jos vaihe $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, saadaan sini- ja kosinifunktioiden Laplace-muunnokset

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.3)$$

Tarkastellaan vielä vakiofunktion Laplace-muunnosta.

Esimerkki 2.7. Olkoon $f(t) = k$ vakiofunktio. Sen Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \int_{0^-}^\infty k e^{-st} dt \\ &= k \int_{0^-}^\infty e^{-st} dt \\ &= k \left(0 - \left(-\frac{1}{s} \right) \right) = \frac{k}{s}.\end{aligned}$$

Huomautus 2.8. Jos funktion $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ kulmataajuus on nolla, kyseessä on vakiofunktio $f(t) = \sin(\varphi)$. Sen Laplace-muunnokseksi saadaan edellisen esimerkin nojalla

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\sin(\varphi)}{s}.$$

Laplace-muunnoksella on olemassa käänteisoperaatio, jonka olemassaolo takaa, että Laplace-muunnosta voidaan käyttää differentiaaliyhtälöiden yksikäsitteiseen ratkaisemiseen [8, s. 283]. Jätetään kuitenkin käänteisoperaatio tarkastelematta, ja tutkitaan derivoituvan funktion aikaderivaatan Laplace-muunnosta. Derivaatan Laplace-muunnos voidaan määrittää derivoimatta funktiota ensiksi.

Lause 2.9. *Funktion ensimmäisen aikaderivaatan Laplace-muunnos on*

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{ds}\right) = sF(s) - f(0_-). \quad (2.4)$$

Todistus. Määritelmän mukaan

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt,$$

joka on osittaisintegroidussa muodossa

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} - (-s) \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Yhtälöstä voidaan tunnistaa funktion $f(t)$ Laplace-muunnos $F(s)$ Määritelmän 2.5 mukaisesti. Tällöin derivaatan Laplace-muunnokselle saadaan muoto

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) e^{-s\tau} - f(0_-)\right) + sF(s). \quad (2.5)$$

Koska Laplace-muunnos $F(s)$ on olemassa, ja se on integraali äärettömällä välillä, joten integrandi lähestyy välttämättä nollaa. Näin ollen derivaatan Laplace-muunnokseksi saadaan

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0_-).$$

□

Huomautus 2.10. Derivaatan Laplace-muunnos voidaan määrittää vain Laplace-muunnettavalle funktiolle. Muutoin yhtälön (2.5) termi $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau)$ ei suppene nollaan.

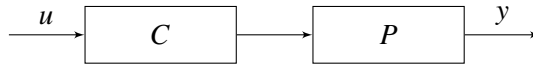
2.2 Säättöpiirit ja lohkokaaavioesitys

Tässä työssä tutkitaan, miten kappaleen lämpötilaa voidaan säätää. Täten on syytä tutustua säädön perusteisiin ja lohkokaaavioesityksiin, jotka on esitelty tässä alaluvussa. Erilaisten säättöpiirien esittely perustuu Salivahananin kirjaan [17]. Lohkokaaavioita ei tule sekoittaa esimerkiksi virtapiireihin, sillä lohkojen välillä on haarautumisista riippumatta aina sama signaali, toisin kuin virtapiirien tapauksessa Kirchhoffin lakien mukaan. Lohkoilla operointi noudattaa yleisesti eri laskusääntöjä kuin virtapiirin tapauksessa.

Lohkokaaavioesityksessä nuolia sisäänmenosta ulostuloon kutsutaan *menohaaraksi*. Mahdollisia, ikään kuin vastakkaiseen suuntaan kulkevia haaroja puolestaan kutsutaan *paluuhaaroiksi*. Yksittäinen lohko operoi paikallista sisäänmenoa vasemmalta, ellei toisin erikseen mainita. Esimerkiksi kuvan 2.4 lohkokaaavio voitaisiin matemaattisesti esittää muodossa $y = PCu$. Yleisesti, esimerkiksi matriisien tapauksessa operointi ei ole kommutatiivista.

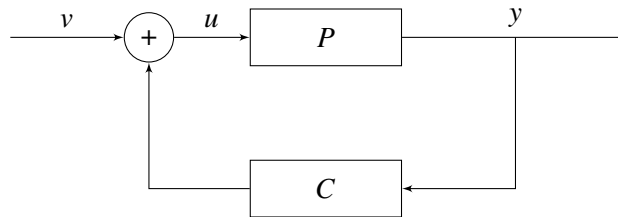
Yksinkertaisimmillaan lohkokaaavio kuvaa *avointa säättöpiiriä*, jossa ulostulon tuottavaa prosessia ohjataan. Monesti ohjaussignaalia saatetaan käsitellä ennen sen ohjaamista prosessiin. Tätä

kutsutaan *etukompensoinniksi* (engl. open-loop control). Kuvassa 2.4 prosessia P ohjataan etukompensaattorin C käsittelemällä ohjaussignaalia u . Prosessin ulostulo on tällöin y .



Kuva 2.4. Avoin, etukompensoitu systeemi.

Avoimen säätöpiirin heikkous on, että ulostulon mittausta ei voida hyödyntää ohjauksessa. Jos näin halutaan tehdä, tarvitaan takaisinkytkentää, joka on hyvin perustavanlaatuinen työkalu säädön puitteissa [17]. Kuvassa 2.5 on esitetty yksinkertainen takaisinkytkentä lohkokaavioesityksenä.



Kuva 2.5. Takaisinkytketty systeemi.

Kuvassa u on ohjaussignaali, P prosessi ja y prosessin ulostulo. Paluuhaarassa C on jokin säädin, jolla muokataan ohjaussignaalia ulostulon, käytännössä mittauksen perusteella. Yleensä säätimessä on negatiivista vakiovahvistusta, jolloin kyseessä on negatiivinen takaisinkytkentä. Yksinkertaisimmillaan negatiivisen takaisinkytkennän säädin on vakiovahvistin, jonka arvo on -1 [17]. Monesti kirjallisuudessa saatetaan merkitä takaisinkytkentähaaran vahvistusta positiivisena ja negatiivisuus summalohkossa vähennyksenä.

2.3 Systemin esitysmuotoja

Systeemit jaetaan sisäänmenojen ja ulostulojen määrien mukaan karkeasti kahtia: *SISO-systeemeihin* (engl. single-input, single-output) ja *MIMO-systeemeihin* (engl. multiple-input, multiple-output). Tässä työssä tarkastellaan lähinnä SISO-systeemeitä. Systemien toimintaa voidaan matemaattisesti kuvata esimerkiksi tilaesitysmalleilla tai siirtofunktiolla. Ulkoisesti samalla tavalla käyttäytyviä systeemejä voidaan kuvata äärettömän monella tilaesityksellä, mutta vain yhdellä yksikäsitteisellä siirtofunktiolla.

2.3.1 Tilaesitys

Tilaesitys toimii niin SISO- kuin MIMO-systeemeille [17]. Tilaa kuvataan tilanmuuttujilla x ja y ja operaattoreilla A, B, C, D . Tilaesitys on yleisesti muotoa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{2.6}$$

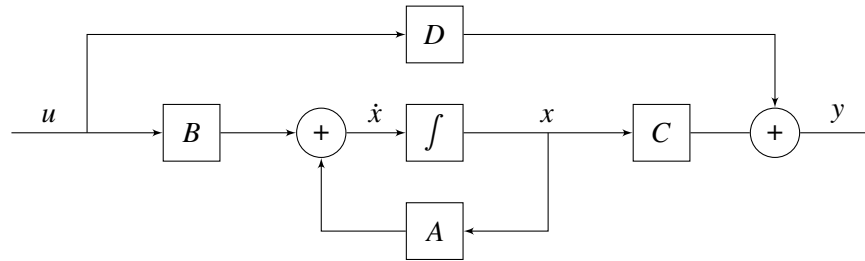
jossa operaattorit A, B, C, D ovat tila-, ohjaus-, ulostulo- ja läpivientiooperaattori. Nämä operaattorit ja niiden määrittelyjoukot määräytyvät systeemin mukaisesti. Merkitään systeemin tila-avaruutta tunnuksella X , sisäänmenoavaruutta tunnuksella U ja ulostuloavaruutta tunnuksella Y . Tällöin

$$A : X \rightarrow X, \quad B : U \rightarrow X,$$

$$C : X \rightarrow Y \quad \text{ja} \quad D : U \rightarrow Y.$$

Lisäksi systeemillä on jokin alkutila $x(0) = x_0 \in X$. Kun operaattorit eivät riipu ajasta, lineaarisen systeemin sanotaan olevan aikainvariantti, eli *LTI-systeemi* (engl. linear, time-invariant). Tässä työssä tutkittava lämpöyhtälö voidaan esittää tässä muodossa. Tätä tarkastellaan myöhemmin luvussa 3.

Tilaesitysmalli voidaan esittää havainnollistamisen vuoksi lohkokaavioesityksenä. Lohkokaaviosta nähdään, mikä mallin (A, B, C, D) parametri vaikuttaa systeemiin milläkin tavoin.



Kuva 2.6. LTI-systeemin tilaesitysmalli lohkokaavioesityksenä.

Lohkokaavioesityksestä nähdään, että operaattori A on systeemin paluuharassa, joten se kuvaa systeemin sisäistä käyttäytymistä. Näin ollen operaattori A määrittää systeemin stabiiliuden, mistä tarkemmin alaluvussa 2.4. Systeemeissä, joissa ohjaus ei suoraan vaikuta vasteeseen, läpivientiooperaattori $D = O$. Tässä työssä tarkasteltava systeemi on tällainen.

Huomautus 2.11. Lineaarisen mallin ulkoista käyttäytymistä kuvaava tilaesitysmalli voidaan muodostaa äärettömän monella tavalla [19, s. 73].

Jätetään tämä osoittamatta, mutta todennetaan huomautusta esimerkin avulla. Tarkastellaan esimerkkinä LTI-systeemin tilaesityksen similariteettimuunnosta.

Esimerkki 2.12. Olkoon Q kääntyvä operaattori ja tilanmuuttuja $x = Qx_q$. Nyt tilaesitys (2.6) voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q\dot{x}_q = AQx_q + Bu$$

$$y = CQx_q + Du,$$

joka puolestaan saadaan muotoon

$$\dot{x}_q = Q^{-1}AQx_q + Q^{-1}Bu$$

$$y = CQx_q + Du.$$

Huomautuksen 2.11 nojalla systeemin similariteettimuunnoksen tilaesitys kuvaa samaa systeemiä kuin alkuperäinen. Tulos on intuitiivinen, sillä muunnoksesta huolimatta sisäänmeno u tuottaa ulostulon y . Muunnetulla systeemillä on kuitenkin yleisesti eri tilanmuuttuja. Tässä työssä ei tarkastella similariteettimuunnosta tarkemmin, mutta se havainnollistaa Huomautusta 2.11.

2.3.2 Siirtofunktio

Systeemin siirtofunktio $G(s)$ on kuvaus sisäänmenon vaikutuksesta ulostuloon alkutilasta riippumatta. Tämän vuoksi siirtofunktiota laadittaessa oletetaan systeemin olevan niin sanotussa *nolla-alkutilassa*, eli systeemin alkutilaksi oletetaan nolla. Funktio $G(s)$ on siirtofunktio sisäänmenosta u ulostuloon y , jos ulostulon ja sisäänmenon Laplace-muunnoksilla $U(s)$ ja $Y(s)$ on yhteys

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (2.7)$$

SISO-systeemin siirtofunktio voidaan yleisesti kirjoittaa muodossa

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Lause 2.13. *LTI-systeemin siirtofunktio voidaan esittää tilaesityksen operaattoreiden avulla muodossa*

$$G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D. \quad (2.8)$$

Todistus. Systeemin siirtofunktio kuvaa sisäänmenon ja ulostulon yhteyttä Laplace-tasossa. Tilaesityksen Laplace-muunnos on Lauseen 2.9 nojalla

$$\begin{aligned} sX(s) + x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s). \end{aligned}$$

Siirtofunktiota määritettäessä tilanmuuttujille oletetaan nolla-alkutila, eli $x_0 = x(0) = 0$. Tilaesityksen Laplace-muunnoksesta saadaan

$$(Is - A)X(s) = BU(s) \Leftrightarrow X(s) = (Is - A)^{-1}BU(s).$$

Sijoittamalla tulos yhtälöön (2.7) saadaan

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(Is - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \left(C(Is - A)^{-1}B + D \right) U(s) = G(s)U(s). \end{aligned}$$

□

Myös lohkokaaavioesityksistä saadaan usein siirtofunktio varsin helposti, joskin sisäänmeno ja ulostulo kirjoitetaan tällöin Laplace-muunnoksina. Esimerkiksi kuvan 2.5 takaisinkytketyn SISO-systeemin siirtofunktio G_{uy} sisäänmenon Laplace-muunnoksesta U ulostulon Laplace-muunnokseen

Y saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} Y &= P(u + Cy) \\ \Leftrightarrow Y &= Pu + PCY \\ \Leftrightarrow Y(1 - PC) &= PU \\ \Leftrightarrow Y &= \frac{P}{1 - PC}U = G_{uy}U, \end{aligned}$$

jossa C on säätimen siirtofunktio. Jos systeemiä säädetään ainoastaan negatiivisella takaisinkytkennällä, C on negatiivisesti vahvistava operaattori – SISO-systeemin tapauksessa siis vakio. Minkä tahansa negatiivisesti takaisinkytketyn systeemin siirtofunktio voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\frac{P}{1 - PC}.$$

Huomautus 2.14. Kirjallisuudessa negatiivisen takaisinkytkennän siirtofunktio kirjoitetaan monesti muodossa

$$\frac{P}{1 + PC}, \quad (2.9)$$

jolloin operaattorin C tulkitaan vahvistavan positiivisesti, mutta takaisinkytkentä vähennetään menohaaraan summattaessa.

Usein siirtofunktiot ovat rationaalifunktiota. Säättöteorian ja -tekniikan näkökulmasta yleensä ollaan kiinnostuneita näiden rationaalifunktioiden nimittäjäpolynomien nollakohdista, eli siirtofunktion navoista, jotka liittyvät vahvasti systeemin stabiiliuteen.

2.4 Stabiilius

Stabiilius on säättöteoriassa systeemin tavoitteen saavuttamisen kannalta tärkeä ominaisuus [11, s. 72]. Yleistäen stabiilius takaa, että systeemin vaste pysyy rajoitettuna rajoitetuilla ohjaussignaaleilla, mitä kutsutaan usein *BIBO-stabiiliudeksi* (eng. bounded-input, bounded-output). Tällainen ajatustapa kuvaa systeemin *ulkoista stabiiliutta* [19, s. 218]. Tämän lisäksi systeemin todellisen käyttäytymisen tutkimiseksi tulee tarkastella *sisäistä stabiiliutta* esimerkiksi tilaesityksen avulla.

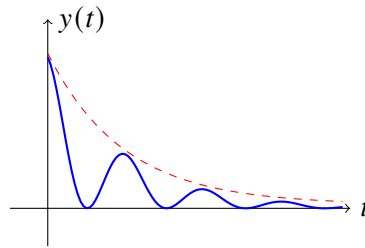
Stabiiliudelle on esitetty kirjallisuudessa useita määritelmiä. Tässä työssä tarkastellaan LTI-systeemin *eksponentiaalista stabiiliutta*. Määritelmä on mukaelma kirjasta [5, s. 6, 215].

Määritelmä 2.15. LTI-systeemi (2.6) on eksponentiaalisesti stabiili, jos löydetään sellaiset positiiviset kertoimet M ja α , että

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Intuitiivisesti määritelmä takaa, että eksponentiaalisesti stabiilin funktion tila, ja siten myös vaste lähestyy nollaa eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$. Stabiiliutta tutkitaan ilman ohjausta,

eli $u(t) = 0$. Kuvassa 2.7 on havainnollistettu eksponentiaalisesti stabiilin systeemin vasteen käyttäytymistä, kun ohjaus ei vaikuta systeemiin.

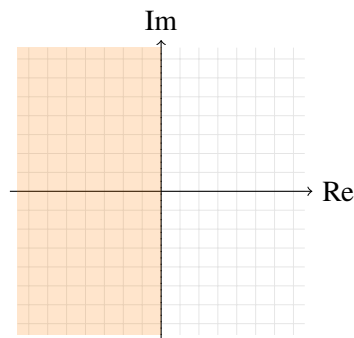


Kuva 2.7. Systeemin vaste (sin.) lähestyy nollaa eksponentiaalisesti, kun $t \rightarrow \infty$.

Jos tilaoperaattori on lineaarinen ja äärellisulotteinen, eli matriisi, koostuu sen spektri ainoastaan ominaisarvoista. Eksponentiaalinen stabiilius toteutuu, jos näiden ominaisarvojen reaalisosat ovat negatiivisia.

Jos LTI-systeemi on *ohjattava* ja *havaittava*, voidaan stabiiliutta tutkia ainoastaan siirtofunktion napojen avulla [14, s. 675]. Tämä on karkeasti otettuna seurausta siitä, että systeemin siirtofunktio kuvaa sen sisäistä käyttäytymistä täydellisesti, jos sekä ohjattavuuden että havaittavuuden ehdot täyttyvät. Käsitteitä ohjattavuus ja havaittavuus ei tämän työn puitteissa tarkastella lähemmin, mutta niihin voi perehtyä tarkemmin esimerkiksi kirjassa [5].

Jos systeemin siirtofunktion navat ovat täsmälleen tilaoperaattorin ominaisarvot, stabiilius tarkoittaa, että navat sijaitsevat kompleksitason vasemmassa puolitasossa.



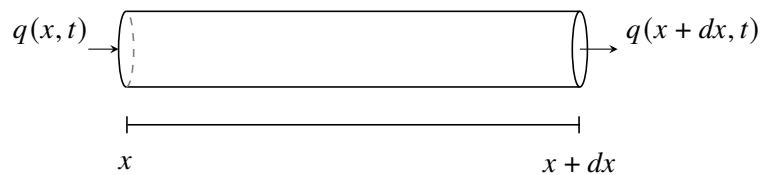
Kuva 2.8. Tilaoperaattorin stabiilit ominaisarvot sijaitsevat imaginaariakselin vasemmalla puolella. Huomattavaa on, että imaginaariakseli ei kuulu tähän stabiiliin puoliskoon.

3. YKSIULOTTEISEN LÄMPÖYHTÄLÖN REUNASÄÄTÖ

Tarkastellaan kauttaaltaan eristettyä yksiulotteista kappaletta. Sen lämpötila tasoittuu ajan myötä johonkin vakiolämpötilaan sen alkuperäisestä lämpötilajakaumasta riippumatta. Tätä voidaan mallintaa yleisesti osittaisdifferentiaaliyhtälöllä, josta myöhemmin käytetään nimitystä lämpöyhtälö. Yksiulotteisen kappaleen lämpöyhtälö on

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t), \quad \mu > 0 \quad \text{ja} \quad 0 < x < 1. \quad (3.1)$$

Lämpöyhtälön muoto perustuu fysikaalisesti karkeasti otettuna *Fourierin lakiin* [8, s. 512], mitä on havainnollistettu kuvassa 3.1. Tarkempi fysikaalinen merkitys jätetään kuitenkin tämän työn puitteissa tarkastelematta.

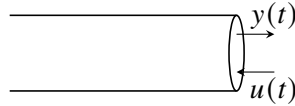


Kuva 3.1. Lämmön virtaus mielivaltaisen lyhyellä matkalla.

Lämpöyhtälön (3.1) rajojen lisäksi myös reunat $x = 0$ ja $x = 1$ vaikuttavat systeemin käyttäytymiseen ja lämpöyhtälön ratkaisemiseen. Tyypillisiä lämpöyhtälön reunaehtoja ovat Dirichlet'n, Neumannin ja Robinin reunaehdot [3] [13]. Tässä työssä tarkastellaan kahta jälkimmäistä. Valitaan aluksi Neumannin reunaehdot reunasäädöllä

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) &= u(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tarkastellaan hyvin ohutta homogeenista sauvaa. Se on kauttaaltaan eristetty, lukuun ottamatta sen oikeaa päätä $x = 1$, jota voidaan lämmittää tai jäädyttää. Tätä kutsutaan reunasäädöksi. Tässä työssä valitaan mittaukseksi lämpötila kohdassa $x = 1$, eli $y(t) = z(1, t)$. Lämmönsäädön lisäksi kappaleen lämpötilaa voidaan mitata samasta kohdasta. Sääteoteoreettisesti nämä ovat systeemin ohjaus ja mittaus, mitä on havainnollistettu kuvassa 3.2.



Kuva 3.2. Ohuen sauvan lämpötilaa ohjataan reunasäädöllä $u(t)$ lämmittämällä tai jäädyttämällä ohuen putken oikeaa päätä. Systemin ulostulo $y(t)$ on lämpötilan mittaus samasta kohdasta.

Reunasäädetty lämpöyhtälö voidaan nyt kirjoittaa tilaesitysmuodossa, jossa tilanmuuttujana on systeemin sisäinen lämpötila z . Sisäänmeno ja ulostulo ovat edellä mainitut ohjaus ja mittaus. Tilaesitys on

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cz(t).\end{aligned}$$

Operaattori A on toinen derivaatta paikan x suhteen – kuten lämpöyhtälössä (3.1) – ja tila-avaruus on $L^2[0, 1]$. Sen sijaan operaattorit B ja C eivät ole aivan itsestään selviä. Tässä työssä tilaesitystä ei tarkemmin käsitellä, mutta yleistäen voidaan todeta, että operaattori B määrittää, miltä kohtaa systeemiin tuodaan ohjaussignaali $u(t)$ ja vastaavasti C kertoo, mistä otetaan mittaus $y(t)$. Tarkemmin operaattori B seuraa reunaehdosta (3.2) ja voidaan esittää Diracin deltafunktion δ avulla. Operaattori C taas toteuttaa yhtälön $Cz(x, t) = z(1, t)$. Koska ohjaus ei vaikuta suoraan systeemin ulostuloon, jätetään D tilaesityksessä nollaoperaattoriksi. [13]

3.1 Lämpöyhtälön analyttinen ratkaisu separoimalla

Tässä työssä pyritään havainnollistamaan systeemin stabiiliutta hyödyntäen lämpöyhtälön analyttisiä ratkaisuja. Täysin eristetyssä tapauksessa lämpöyhtälö voidaan ratkaista analyttisesti. Hyödyntämällä osittaisdifferentiaaliyhtälön separoituvuutta, voidaan osittaisdifferentiaaliyhtälö kirjoittaa kahtena differentiaaliyhtälönä. Edetään kirjan [8, s. 520] ratkaisuperiaatteen mukaisesti.

Tutkitaan ratkaisuja, jotka voidaan esittää separoidussa muodossa

$$z(x, t) = X(x)T(t).$$

Tällöin ratkaisujen osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = X(x)T'(t) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = X''(x)T(t).$$

Oletetaan vielä, että $X(x) \neq 0 \neq T(t)$, eli lämpöyhtälön ratkaisu ei ole yleisesti ja identtisesti nolla. Tämä triviaali tapaus tulisi tarkastella erikseen, mutta riittää todeta, että nollafunktio on tasapainotila. Nolla-alkutila siis säilyy nollana kaikilla muuttujien x ja t arvoilla.

Sijoittamalla separoidun muodon osittaisderivaatat yhtälöön (3.1) saadaan

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) &= \mu X''(x)T(t) \\ \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{1}{\mu} \frac{T'(t)}{T(t)} \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on riippumaton muuttujasta t ja oikea puoli riippumaton muuttujasta x . Yhtäsuuruuden nojalla kummatkin puolet ovat riippumattomia muuttujista x ja t . Näin ollen yhtälön molemmat puolet ovat jokin vakio $-\sigma$, eli

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\mu} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\sigma.$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälö (3.1) voidaan siis kirjoittaa kahtena differentiaaliyhtälönä

$$\begin{aligned} X''(x) + \sigma X(x) &= 0 \\ T'(t) + \mu\sigma T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ensimmäistä yhtälöä vastaava karakteristinen polynomi yritteellä $X(x) = e^{\lambda x}$ on muotoa

$$\lambda^2 + \sigma = 0,$$

jonka juuret ovat

$$\lambda = \pm\sqrt{-\sigma}.$$

Kauttaaltaan eristetyyn kappaleen systeemissä kyseessä on Neumannin reunaehdot

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) = 0 \quad (3.3)$$

ilman reunasäättöä. Näillä reunaehdoilla tarkasteltuna karakteristisen polynomin ratkaisut $\lambda \geq 0$ johtavat aina triviaaliin ratkaisuun $z(x, t) = 0$, joten tarkastellaan tapausta $\lambda < 0$, $\lambda = -\lambda^2$ [18]. Lämpöyhtälön separoituvien ratkaisujen tekijät voidaan esittää funktioina

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\sigma}x) + c_2 \cos(\sqrt{\sigma}x) \quad (3.4)$$

$$T(t) = e^{-\mu\sigma t}. \quad (3.5)$$

Funktion $T(t)$ kertoimeksi on tässä tapauksessa valittu mielivaltaisesti yksi, sillä todellinen kerroin voidaan sisällyttää funktion $X(x)$ kertoimiin c_1 ja c_2 . Huomionarvoista on myös, että $T(0) = 1$, eli separoidussa muodossa funktio $X(x)$ kuvaa alkuhetken lämpöjakaumaa. Kohdassa $x = 0$ reunaehto saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) &= X'(0)T(t) \\ &= (c_1\sqrt{\sigma} \cos(\sqrt{\sigma} \cdot 0) - c_2\sqrt{\sigma} \sin(\sqrt{\sigma} \cdot 0)) e^{-\mu\sigma t} \\ &= c_1\sqrt{\sigma}e^{-\mu\sigma t}, \end{aligned}$$

joka Neumannin ehtojen (3.3) perusteella on nolla. Näin ollen vaaditaan $c_1 = 0$ tai $\sigma = 0$, joka tuottaa triviaaliratkaisun. Tarkastellaan tapaus $c_1 = 0$. Nyt toista reunaehto kuvaa yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(1, t) &= X'(1)T(t) \\ &= (c_1\sqrt{\sigma}\cos(\sqrt{\sigma}) - c_2\sqrt{\sigma}\sin(\sqrt{\sigma}))e^{-\mu\sigma t} \\ &= -e^{-\mu\sigma t}c_2\sqrt{\sigma}\sin(\sqrt{\sigma}),\end{aligned}$$

josta saadaan reunaehdon perusteella joko $c_2 = 0$ tai $\sigma = n^2\pi^2$. Jos valittaisiin $c_2 = 0$, saataisiin lämpötilan funktioksi nollafunktio, joka vastaa aiemmin mainittua tasapainotilaa $z(x, t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$. Tarkastellaan siis tilannetta, jossa $\sigma = n^2\pi^2$. Näin ollen funktio $z(x, t) = X(x)T(t)$ voidaan esittää kaikkien reunaehdot toteuttavien funktioiden summana

$$X(x)T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t),$$

jossa termien tekijät ovat muotoa

$$X_n(x) = c_n \cos(n\pi x) \quad \text{ja} \quad T_n(t) = e^{-\mu n^2 \pi^2 t}.$$

Lämpötilan funktio voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x) e^{-\mu n^2 \pi^2 t}.$$

Alkuhetkellä $t = 0$ tarkastellaan lämpötilan jakaumaa $X(x) = z(x, 0)$. Tällöin lämpöyhtälön ratkaisu on muotoa

$$z(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x) = X(x).$$

Tarkastellaan lämpötilan jakaumaa kuvaavaa funktiota $X(x)$, $0 < x < 1$. Lauseen 2.4 perusteella funktio voidaan kirjoittaa Fourier-sarjana, kun sille tehdään parillinen laajennus

$$X(x) = X(-x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Symmetrian ja funktion $X(x)$ parillisuuden nojalla Fourier-sarja on muotoa

$$\hat{X}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

eli kyseessä on (2.1) mukainen kosinisarja.

Parillinen laajennus takaa, että jakson T pituus on $T = L - (-L) = 2L$. Pituus L on tämän työn systeemissä 1, mutta esimerkiksi funktiota $X(x) = x - x^2$ tarkastellessa $L = \frac{1}{2}$, sillä funktio on symmetrinen akselin $x = \frac{1}{2}$ suhteen (vrt. kuva 2.3).

Lämpötilan yleiseksi funktioksi saadaan näin ollen

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\mu n^2 \pi^2 t}. \quad (3.6)$$

Toisin sanoen kaikki separoituvat ratkaisut voidaan esittää tässä muodossa. Sarjan kertoimet riippuvat alkutilasta $X(x)$, sillä kertoimet voidaan esittää muodossa

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L X(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L X(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Kun $t \rightarrow \infty$, sarjaan jää ainoastaan alkutilan vakio-termi a_0 . Fysikaalisessa mielessä lämpötila siis tasoittuu vakio- μ -lämpötilaan $z(\cdot, t_\infty) = a_0$. Tarkastellaan esimerkkitapausta.

Esimerkki 3.1. Olkoon lämpötilan jakaumaa kappaleessa ajanhetkellä $t = 0$ kuvaava funktio

$$X(x) = 60(x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Funktio on symmetrinen akselin $x = \frac{1}{2}$, joten sen parillinen jatke voidaan muodostaa funktion $X_h(x) = 60(x - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ parillisena jatkeena. Tällöin $L = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 1$. Lämpötilan funktioksi saadaan näin ollen

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x) e^{-\mu n^2 \pi^2 t}.$$

Kertoimet puolestaan riippuvat alkutilasta $z(x, 0) = X(x)$. Tarkastellaan tapaus $n = 0$ erikseen, jotta mahdolliselta nolalla jakamiselta vältyttäisiin.

$$a_0 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} X(x) dx.$$

Muut kertoimet puolestaan ovat muotoa

$$a_n = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} X(x) \cos(2n\pi x) dx, \quad n \geq 1.$$

Suoraviivaisella integroinnilla saadaan nolanneksi kertoimeksi

$$a_0 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 60(x - x^2) dx = 20 \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 - 2x^3 = 20 \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{8} \right) = 10.$$

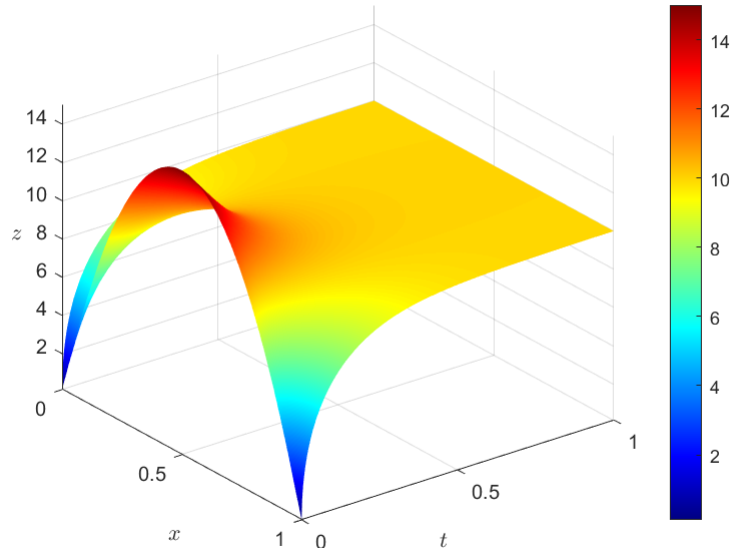
Muut puolestaan ovat muotoa

$$a_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 60(x - x^2) \cos\left(\frac{1}{2}n\pi x\right) dx = \frac{-60}{n^2\pi^2} \cos(2n\pi x), \quad n \geq 1.$$

Lämpöyhtälö on näin ollen muotoa

$$z(x, t) = 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-60}{n^2 \pi^2} \cos(2n\pi x) e^{-\mu n^2 \pi^2 t}.$$

Kuvassa 3.3 on havainnollistettu lämpöjakauman tasoittumista. Paraabeliksi jakautunut lämpötila tasoittuu vakiofunktioiksi, kun $t \rightarrow \infty$.



Kuva 3.3. Lämpö tasoittuu eristetyssä kappaleessa ajan funktiona arvoon $a_0 = 10$.

Stabiilius vaatii, että ilman ohjausta systeemin ulostulo suppenee kohti nollaa kaikilla alkutiloilla. Eristetyn kappaleen systeemissä näin ei käy, lukuun ottamatta erikoistapauksia, joissa $a_0 = 0$. Tarkasteltava systeemi ei siis ole stabiili. Jos tarkasteltavan systeemin reunaehdot olisivat olleet Dirichlet'n ehdot $z(0, t) = z(1, t) = 0$, olisi systeemi stabiili [4]. Fysikaalisessa mielessä tällainen systeemi ei ole kauttaaltaan eristetty, vaan lämpövuoto pääsee kulkemaan kappaleen päistä, jolloin systeemin lämpötila tasoittuu ulkoiseen lämpötilaan 0.

3.2 Lämpöyhtälön siirtofunktio

Lämpöyhtälö on ohjattava ja havaittava systeemi [20], joten sen stabiiliutta on mielekästä tutkia myös siirtofunktion avulla. Lauseen 2.13 nojalla systeemi voidaan kirjoittaa muodossa

$$Y(x, s) = C(I\lambda - A)^{-1}BU(x, s),$$

jossa $C(I\lambda - A)^{-1}B$ on lämpöyhtälön siirtofunktio.

Tarkastellaan lämpöyhtälöä Laplace-tasossa. Tarkastelu noudattaa artikkelin [4] esimerkkiä. Olkoon mittauksen Laplace-muunnos $Y(s) = Z(1, s)$ ja reunasäädön $u(t)$ Laplace-muunnos $U(s)$. Näiden välille voidaan määrittää sellainen siirtofunktio $G(s)$, että yhtälö $Y(s) = G(s)U(s)$ toteu-

tuu.

Lämpöyhtälön (3.1) Laplace-muunnokseksi saadaan Lausetta 2.9 soveltaen

$$sZ(x, s) - z(x, 0) = \mu \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x, s),$$

jossa $z(x, 0) = 0$, eli oletetaan muunnoksen tekemiseksi nolla-alkutila. Kirjoitetaan differentiaaliyhtälö selkeämmässä muodossa

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x, s) - \frac{s}{\mu} Z(x, s) = 0. \quad (3.7)$$

Vastaavasti reunaehtojen Laplace-muunnokset ovat

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(0, s) = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(1, s) = U(s). \quad (3.9)$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälön (3.7) yleinen ratkaisu on

$$Z(x, s) = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\mu}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{\mu}}x}.$$

Olkoon vakiot muotoa $c_1 = \frac{C_1 + C_2}{2}$ ja $c_2 = \frac{C_1 - C_2}{2}$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} Z(x, s) &= \frac{C_1 + C_2}{2} e^{\sqrt{\frac{s}{\mu}}x} + \frac{C_1 - C_2}{2} e^{-\sqrt{\frac{s}{\mu}}x} \\ &= C_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\mu}}x} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\mu}}x}}{2} + C_2 \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\mu}}x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\mu}}x}}{2}, \end{aligned}$$

joka voidaan kirjoittaa hyperbolisten funktioiden avulla muodossa

$$Z(x, s) = C_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}x\right) + C_2 \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}x\right).$$

Reunaehdosta (3.8) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x}(0, s) &= C_1 \sqrt{\frac{s}{\mu}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}} \cdot 0\right) + C_2 \sqrt{\frac{s}{\mu}} \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}} \cdot 0\right) \\ &= C_2 \sqrt{\frac{s}{\mu}} = 0, \end{aligned}$$

josta seuraa $C_2 = 0$ tai $s = 0$. Tarkastellaan näistä ensimmäistä tapausta, sillä tapaus $s = 0$ on triviaali ratkaisu. Lämpöyhtälön yleisen ratkaisun Laplace-muunnos on muotoa

$$Z(x, s) = C_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}x\right).$$

Vastaavasti ehdosta (3.9) saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial x}(1, s) &= C_1 \sqrt{\frac{s}{\mu}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right) + C_2 \sqrt{\frac{s}{\mu}} \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right) \\ &= C_1 \sqrt{\frac{s}{\mu}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right) = U(s).\end{aligned}$$

Systeemin siirtofunktio ohjaus- ja mittauspisteessä $x = 1$ on

$$G(1, s) = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(1, s)}{U(s)} = \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\mu}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}. \quad (3.10)$$

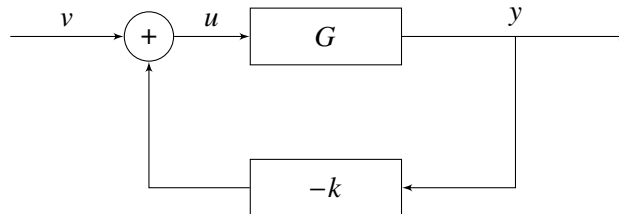
Navat ovat siirtofunktion nimittäjän nollakohdat

$$s = -\mu\pi^2 n^2.$$

Systeemi on epästabiili, koska sen siirtofunktiolla on napa origossa. Originapa kuvautuu systeemin vasteessa vakiona, mikä oli nähtävissä eristetyn systeemin esimerkissä 3.1. Muut navat ovat reaaliakselilla imaginaariakselin vasemmalla puolella – eli ne ovat stabiileja napoja.

3.3 Reunasäädetyn lämpöyhtälön stabilointi

Stabilointi voidaan toteuttaa negatiivisella takaisinkytkennällä [4, Lause E.2]. Tarkastellaan negatiivisesti takaisinkytkettyä ja ulkoisesti ohjattua systeemiä. Tällöin $u(t) = -ky(t) + v(t)$, jossa $k > 0$. Kuvassa 3.4 on havainnollistettu takaisinkytkentä negatiivisellä takaisinkytkennällä.



Kuva 3.4. Lämpöyhtälö negatiivisesti takaisinkytkettynä systeeminä. Menohaaran lohko G kuvaa edellä laskettua siirtofunktiota 3.10.

Takaisinkytketyn systeemin reunaehdot ovat

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, t) + kz(1, t) = v(t), \quad (3.12)$$

eli Robinin reunaehdot [13]. Ne voidaan superpositioperiaatteen perusteella kirjoittaa muodossa

$$X'(0)T(t) = 0$$

$$X'(1)T(t) + kX(1)T(t) = v(t).$$

Takaisinkytkentä muuttaa vain reunaehtoja, joten ratkaisu koostuu yhtälöiden (3.4) ja (3.5) mukaisesti. Kuten edellä, ensimmäisestä reunaehdosta seuraa $c_1 = 0$, joten toinen reunaehto on muotoa

$$(k c_2 \cos(\sqrt{\sigma}) - c_2 \sqrt{\sigma} \sin(\sqrt{\sigma})) e^{-\mu \sigma t} = v(t).$$

Olkoon $\tilde{v}(t) = v(t)e^{\mu \sigma t}$. Tällöin saadaan

$$k c_2 \cos(\sqrt{\sigma}) - c_2 \sqrt{\sigma} \sin(\sqrt{\sigma}) = \tilde{v}(t).$$

Tarkastellaan tapausta, jossa $v(t) = 0$. Tällöin yhtälö voidaan kirjoittaa implisiittisenä yhtälönä

$$k c_2 \cos(\sqrt{\sigma}) = c_2 \sqrt{\sigma} \sin(\sqrt{\sigma}).$$

Jos $\sigma = 0$, yhtälö toteutuu, jos ja vain jos $c_2 = 0$, joka tuottaa triviaalin ratkaisun. Tarkastellaan tapausta $\sigma > 0$, jolloin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{k} = \frac{\cos(\sqrt{\sigma})}{\sin(\sqrt{\sigma})}.$$

Yhtälön ratkaisut lähestyvät muuttujan σ – eli vasemman puolen – kasvaessa sinifunktion nollakohtia $\sigma = \pi^2 n^2 > 0$. Näin ollen ratkaisut voidaan kirjoittaa muodossa

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(t), \quad (3.13)$$

jossa $Y_n(t) = e^{-\mu \sigma t}$ ja jokainen $X_n(x)$ on rajoitettu funktio. Koska $\sigma > 0$, $Y(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Yksittäisten ratkaisuiden superpositiona saatu yleisempi ratkaisu (3.13) lähestyy nollaa eksponentiaalisesti. Tämä vastaa systeemin eksponentiaalista stabiiliutta.

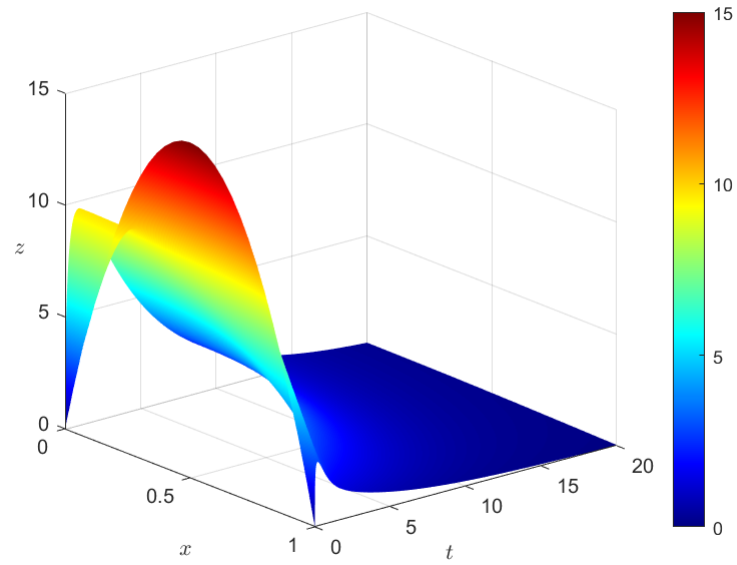
Tarkastellaan vielä takaisinkytketyn systeemin siirtofunktiota. Robinin reunaehdon (3.12) Laplace-muunnos on

$$C_1 \sqrt{\frac{s}{\mu}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right) + k C_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right) = V(s).$$

Tällöin systeemin siirtofunktioksi saadaan

$$G_{vy}(1, s) = \frac{Z(1, s)}{V(s)} = \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\mu}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right) + k \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}, \quad (3.14)$$

joka on stabiili, sillä mikäli $k > 0$, niin nimittäjällä ei ole nollakohtia, joilla $Re(s) \geq 0$ [13]. Samaan tulokseen oltaisiin päästy myös hyödyntämällä yhtälöä (2.9). Takaisinkytketyn systeemin käyttäytymistä on havainnollistettu kuvassa 3.5. Simulointiin on käytetty differenssimenetelmään perustuvaa, paketista [16] muokattua versiota.



Kuva 3.5. Takaisinkytkettynä systeemin vaste painuu nollaan.

Takaisinkytketyn systeemin siirtofunktiota voidaan soveltaa esimerkiksi minimaalisen robustin säätimen suunnittelussa [15]. Tätä tarkastellaan seuraavassa luvussa.

4. ROBUSTI SÄÄTÖ

Tässä luvussa suunnitellaan lämpöyhtälön säätöä varten minimaalinen robusti säädin mukaillen Paunosen artikkelia [15]. Säätimen tavoitteena on saada systeemin lämpötila havainnointipisteessä seuraamaan jotakin referenssisignaalia. Robusti säädin sietää pieniä epävarmuuksia ja perturbatioita, joten esitetyt säätimen suunnitteluperiaatteet toimivat pienten häiriöidenkin vaikuttaessa. Tällaisia häiriöitä voi olla esimerkiksi pienet epähomogeenisuudet sauvan rakenteessa, tai epätarkkuus lämmönjohtavuuden μ määrittämisessä. Häiriöitä ei tämän työn puitteissa tarkastella tarkemmin, mutta on mainitsemisen arvoista, että suunniteltu säädin toimii halutulla tavalla pienistä epätarkkuuksista huolimatta.

4.1 Säättöongelma tilaesitysmuodossa

Säättöongelmana on siis saada mittauksen ja referenssisignaalin erotus $y(t) - y_r(t)$ lähestymään nollaa, kun $t \rightarrow \infty$. Tässä työssä tarkasteltavat referenssisignaalit voidaan muodostaa vakiolla ja äärellisellä määrällä sini- ja kosinitermejä. Jos signaali olisi esimerkiksi kanttiaalto, tarvittaisiin tämän täydelliseen Fourier-sarjaan äärettömän monta termiä. Käytännössä kuitenkin mitä tahansa periodista referenssisignaalia voidaan approksimoida äärellisellä määrällä sarjan termejä.

Koska nyt tarkastellaan äärellistämistä referenssisignaalia

$$y_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\omega t + \varphi),$$

on se sellaisen eksosysteemin

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= Sv(t), & v(0) &= v_0 \\ y_r(t) &= -Fv(t) \end{aligned}$$

generoima, missä S on matriisi [15]. Tässä työssä jätetään eksosysteemin tarkempi matemaattinen merkitys huomiotta, ja tarkastellaan ainoastaan sen ulostuloa y_r ja tilaoperaattoria S . Operaattori S on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalilla on täsmälleen referenssisignaalin Laplace-muunnoksen navat, eli

$$S = \text{diag}(i\omega_1, \dots, i\omega_q).$$

Äärellistämisen referenssisignaalien Laplace-muunnosten navat ilmenevät aina imaginaariakselilla. Vakiotermin Laplace-muunnoksella on yksinkertainen napa origossa. Sini- ja kosinitermien

Laplace-muunnoksilla taas on kaksi napaa, jotka ilmenevät kompleksikonjugaattipareina, mikä on nähtävissä yhtälöistä (2.2) ja (2.3).

4.2 Minimaalinen robusti säädin

Kun säätöongelma tunnetaan, voidaan suunnitella systeemille *minimaalinen robusti säädin* takaisinkytkentää ja referenssisignaalia hyödyntäen. Säätimen tilaesitys on

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= \mathcal{G}_1 w(t) + \mathcal{G}_2 e(t) \\ u(t) &= K w(t).\end{aligned}$$

Säätimen robustius tarkoittaa, että säädin pääsee tavoitteeseen $y - y_r \rightarrow 0$, vaikka operaattoreissa olisi pieniä epävarmuuksia tai niiden parametreja muutettaisiin hieman.

Säädin toteuttaa sisäisen mallin periaatteen, eli operaattori \mathcal{G}_1 sisältää eksosysteemin sisäisen mallin täydellisesti [15, s. 4]. Käytännössä tämä saavutetaan kopioimalla eksosysteemin tilaoperaattori S säätimen tilaoperaattoriin, joka on tällöin muotoa

$$\mathcal{G}_1 = \text{diag}(i\omega_1 I_Y, \dots, i\omega_q I_Y).$$

Tässä työssä systeemin mittausavaruuden Y dimensio on yksi, joten $\mathcal{G}_1 = \text{diag}(i\omega_1, \dots, i\omega_q) = S$.

Operaattorin $K = \varepsilon [K_0^1 \dots K_0^q]$ komponentit tulee valita sellaisiksi, että $G(i\omega_k)K_0^k$ on kääntyvä kaikilla $k \in \{1, \dots, q\}$. Valitaan $K_0^k = G(i\omega_k)^{-1}$, jolloin $G(i\omega_k)K_0^k = I = \mathcal{G}_2^k$. Tällöin saadaan operaattori $\mathcal{G}_2 = [\mathcal{G}_2^1 \dots \mathcal{G}_2^q]^\top = [-I \dots -I]^\top$.

Minimaalisen robustin säätimen suunnitteluun käytetään takaisinkytketyn systeemin siirtofunktiota. Operaattorimatriisin K komponentit saadaan tämän siirtofunktion käänteisalkion avulla. Olkoon siirtofunktion käänteisalkio

$$G(s)^{-1} = \frac{\sqrt{\frac{s}{\mu}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)} + k. \quad (4.1)$$

Tällöin operaattori K voidaan kirjoittaa muodossa

$$K = \varepsilon \left[G(i\omega_1)^{-1} \dots G(i\omega_q)^{-1} \right].$$

Huomautus 4.1. Funktio $G(s)^{-1}$ toteuttaa ominaisuuden

$$G(\bar{s})^{-1} = \overline{G(s)^{-1}} \Rightarrow G(-i\omega)^{-1} = \overline{G(i\omega)^{-1}}. \quad (4.2)$$

4.3 Säätimen suunnittelu lämpöyhtälölle

Tässä alaluvussa tarkoitusta on demonstroida säätimen toimintaa. Tarkastellaan esimerkkitapausta edellisen alaluvun ratkaisuperiaatteen mukaan, kun referenssisignaali on

$$y_r(t) = 2 + \cos(2t),$$

ja takaisinkytketyn siirtofunktion kerroin $k = 1$. Säädintä varten tarvitaan referenssisignaalin Laplace-muunnoksen navat. Kosini- ja vakiofunktion Laplace-muunnokset ovat esimerkkeihin 2.6 ja 2.7 nojaten

$$\mathcal{L}(\cos(2t)) = \frac{s}{s^2 + 4} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}(2) = \frac{2}{s}.$$

Vakiofunktion napa on origossa, ja kosinifunktion navat ovat muotoa $s = \pm 2i$, eli ne sijaitsevat imaginaariakselilla. Eksosysteemin operaattori S on siis diagonaalimatriisi muotoa

$$S = \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}.$$

Koska mittausavaruuden Y dimensio on $\dim Y = 1$, saadaan säätimen tilaoperaattoriksi matriisi

$$\mathcal{G}_1 = S,$$

jonka aste on kolme, eli $q = 3$. Näin ollen saadaan

$$\mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Operaattori K on $1 \times q$ dimensioinen vaakavektori ja sen komponentit ovat funktion (4.1) arvot referenssisignaalin navoissa. Vektorilla on myös kerroin $\varepsilon > 0$, jonka arvo voidaan stabiiliuden rajoissa päättää mielivaltaisesti. Tällöin operaattoriksi saadaan

$$K = \varepsilon \left[G(-2i)^{-1} \quad G(0)^{-1} \quad G(2i)^{-1} \right].$$

Käytännössä säätimen tilaesityksen matriisien halutaan olevan reaalisia, sillä reaalista tilaesitystä tarvitaan säädetyn systeemin simulointiin. Tässä työssä ei perehdytä realisaatioiden teoriaan tarkemmin, mutta siihen voi tutustua esimerkiksi lähteessä [9]. Lähteessä esitetty tapa realisoida tilaesitys perustuu siirtofunktion reaalisiin kertoimiin. Ratkaistaan siis säätimen siirtofunktio.

Säätimen siirtofunktioksi saadaan yhtälön (2.8) mukaan

$$\tilde{G}(s) = \varepsilon \begin{bmatrix} G(-2i)^{-1} & G(0)^{-1} & G(2i)^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+2i & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-2i \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

joka puolestaan yhtälön (4.2) nojalla saadaan muotoon

$$\tilde{G}(s) = \varepsilon \begin{bmatrix} \overline{G(2i)^{-1}} & G(0)^{-1} & G(2i)^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+2i & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-2i \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Operaattorin K alkioiden arvoja ei voida navoissa $s = \pm 2i$ sieventää yksinkertaiseen muotoon. Säätimen robustius takaa kuitenkin, että säädin toimii myös likiarvoilla. Numeerisesti voidaan ratkaista $G(2i)^{-1} \approx 1,8 - 1,4i$. Navassa $s = 0$ saadaan $G(0)^{-1} = k$. Merkitään $G(-2i)^{-1} = g$ ja $G(2i)^{-1} = \overline{G(-2i)^{-1}} = \bar{g}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \varepsilon \begin{bmatrix} g & k & \bar{g} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+2i & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-2i \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon \begin{bmatrix} g & k & \bar{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+2i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s-2i} \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon \left(-\frac{k}{s} - \frac{g}{s+2i} - \frac{\bar{g}}{s-2i} \right) \\ &= -\varepsilon \left(\frac{k}{s} + \frac{g(s-2i) + \bar{g}(s+2i)}{s^2+4} \right) \\ &= -\varepsilon \left(\frac{k}{s} + \frac{(g+\bar{g})s + 2i(\bar{g}-g)}{s^2+4} \right) \\ &= -\varepsilon \left(\frac{k}{s} + \frac{2 \operatorname{Re}(g)s + 4 \operatorname{Im}(g)}{s^2+4} \right) \\ &= -\varepsilon \frac{(2 \operatorname{Re}(g) + k)s^2 + 4 \operatorname{Im}(g)s + 4k}{s^3 + 4s}. \end{aligned}$$

Valitaan simulointia varten $\varepsilon = 1$. Siirtofunktion likiarvoksi saadaan

$$\tilde{G}(s) \approx \frac{-4,6s^2 - 6,5s - 4}{s^3 + 4s},$$

joka robustiuden nojalla toimii likiarvoista huolimatta halutulla tavalla. Säätimen siirtofunktion kertoimet ovat reaalisia, joten sitä vastaava tilaesitys voidaan muodostaa reaalisilla matriiseilla.

Siirtofunktiosta voidaan ratkaista eräs sitä vastaava tilaesitys. Tässä työssä siirtofunktio on muotoa

$$\tilde{G}(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0},$$

eli se on *minimaalisessa reaaliossa muodossa*, mikä tarkoittaa, että kaikki kertoimet ovat reaalilukuja, ja nimittäjäpolynomin korkeimman asteen termin kerroin on yksi.

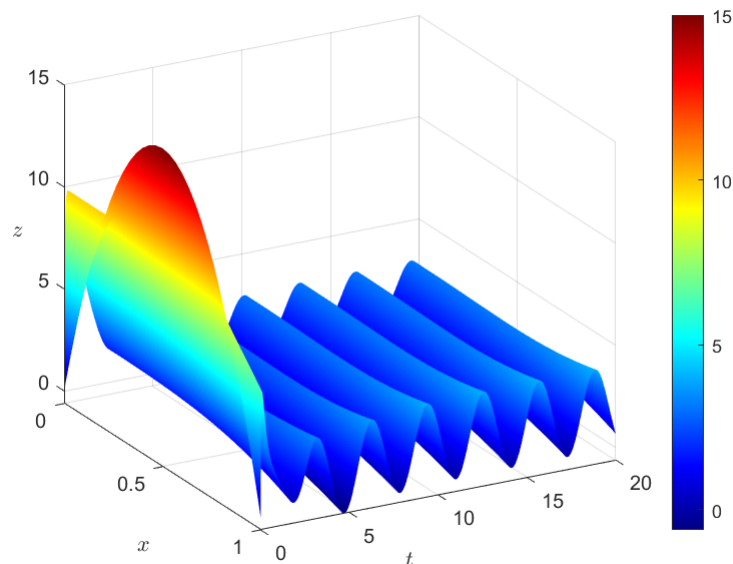
Eräs *kanoninen realisatio* tälle systeemille on kirjan [9, s. 50] mukaan

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \begin{bmatrix} -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \tilde{K} = [a_2 \quad a_1 \quad a_0],$$

joka on numeerisesti

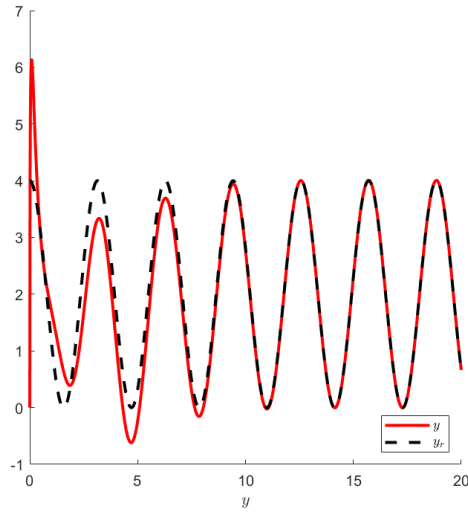
$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \tilde{K} = [-4,6 \quad -6,5 \quad -4].$$

Aiemmin tarkastellun alkutilan $f(x) = 60(x - x^2)$ käyttäytymistä säädetyssä systeemissä on havainnollistettu kuvassa 4.1. Simulointiin on jälleen käytetty paketista [16] muokattua versiota.

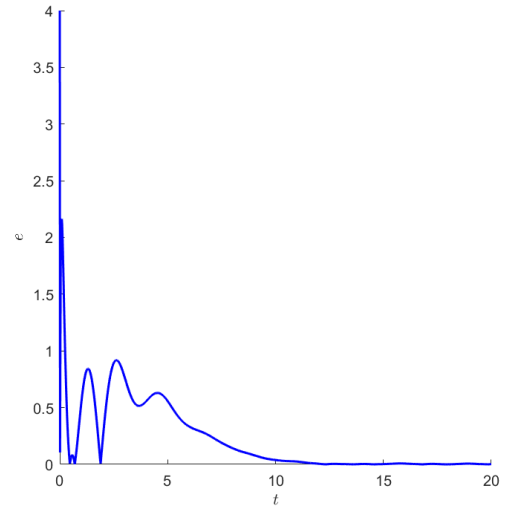


Kuva 4.1. *Systeemi alkaa havainnointipisteessä seuraamaan referenssisignaalia ajan funktiona.*

Kuvissa 4.2a ja 4.2b on havainnollistettu säädetyksen käyttäytymistä havainnointipisteessä $x = 1$ tarkemmin. Huomataan, että mittauksen ja referenssisignaalin välinen erotus häviää, eli säädin toimii halutulla tavalla.



(a) Ulostulo $y(t)$ ja referenssisignaali $y_r(t)$.



(b) Absoluuttinen virhe $|y(t) - y_r(t)|$.

Kuva 4.2. Ulostulo lähestyy referenssisignaalia asymptoottisesti. Absoluuttinen virhe lähestyy nollaa.

5. YHTEENVETO

Tässä työssä tutustuttiin lämpöyhtälöön, sen ratkaisemiseen, stabilointiin ja ohjaukseen. Tavoitteena oli tutustua säätöteorian käsitteisiin valitun esimerkin kautta. Ennen varsinaista lämpöyhtälön tarkastelua esiteltiin muutamia matemaattisia ja säätöteoreettisia käsitteitä ja työkaluja, joita soveltamalla yhtälö voitiin ratkaista, sen stabiiliutta voitiin tarkastella, ja sille voitiin laatia robusti säädin.

Esitiedoissa esiteltiin niin matemaattiset, kuin säätöteoreettiset tiedot ja työkalut, joita lämpöyhtälön ratkaisemiseksi tarvittiin. Fourier'n sarjakehitelmää tarvittiin lämpöyhtälön yleiseen ratkaisuun Neumannin reunaehdoilla, sillä separoituva yleinen ratkaisu (3.6) saatiin kosinisarjan ja vähenevän eksponenttifunktion tuloksi. Myös simulointia varten tarvittava lämpötilan alkutilan muoto oli mielekästä kirjoittaa Fourier-sarjan osasummana, jolloin alkutila vastasi ratkaisun muotoa simulointitarkkuuden puitteissa hyvin, kuten Esimerkin 3.1 Kuvassa 3.3. Matemaattisissa esitiedoissa esiteltiin myös Laplace-muunnos ja muutamia sen ominaisuuksia, kuten derivoituvuus. Tässä osiossa tarkasteltiin esimerkkinä myös trigonometristen funktioiden ja vakiofunktion Laplace-muunnoksia, joita sovellettiin myöhemmin robustin säätimen suunnittelussa alaluvussa 4.3. Esitiedoissa esiteltiin myös lohkoavioesitys, tilamalli ja systeemin siirtofunktio, joihin nojaututtiin työn eri vaiheissa useasti. Lopuksi luvussa esiteltiin lyhyesti stabiiliuden käsite – erityisesti eksponentiaalinen stabiilius, sillä lämpöyhtälö on stabiloituna juurikin eksponentiaalisesti stabiili, kuten alaluvussa 3.3 todettiin.

Luvussa 3 esiteltiin lämpöyhtälö, ja se ratkaistiin yleisesti ilman reunasäätöä. Esimerkissä 3.1 todennettiin systeemin olevan tällöin epästabiili, joskaan vielä tätä ei yleisesti osoitettu. Tämän jälkeen stabiiliustarkastelu tehtiin yleisemmin siirtofunktion avulla. Laplace-muunnosta soveltamalla huomattiin lämpöyhtälön systeemin siirtofunktiolla olevan origonapa, joka näyttäytyy systeemin vasteessa nolasta poikkeavana vakiona, mikä onkin linjassa Esimerkin 2.7 kanssa. Tämän jälkeen systeemi stabiloitiin takaisinkytkennällä pitkälti samoilla ratkaisuperiaatteilla kuin edellä. Stabiloidun systeemin siirtofunktio todensi Huomautuksen 2.14 tulosta (2.9).

Luvun 4 tarkoituksena oli esitellä robustin säädön perusajatus ja matemaattinen tausta kandidaattityöhön sopivalla tarkkuudella. Ajatuksena oli saada systeemin vaste seuraamaan referenssisignaalia, joka voitiin tämän työn puitteissa määrittää täydellisesti äärellisellä määrällä sinimuotoisia termejä. Säätimen suunnitteluun käytettiin edellisessä luvussa ratkaistua takaisinkytketyn systeemin siirtofunktiota (3.14) ja sen käänteisalkiota (4.1). Käyttäen hyväksi stabiloidun systeemin siirtofunktion ominaisuuksia huomattiin säätimen siirtofunktion olevan reaalikertoiminen, ja sille löydettiin reaalin realisaatio. Lopuksi systeemiä simuloitiin ja sen mittauksen todennettiin lähestyvän referenssiä asymptootisesti. Tarkempi matemaattinen tarkastelu kuitenkin jätettiin tämän

työn laajuuden rajoissa, ja se löytyy pääasiallisesta lähteestä [15].

Tässä työssä rajoituttiin yksiulotteiseen kappaleeseen, mutta samat periaatteet toimivat korkeammissakin ulottuvuuksissa. Esimerkiksi artikkelissa [15] minimaalinen robusti säädin suunniteltiin kaksiulotteiselle kappaleelle. Tähänkään ei tarvitsisi rajoittua, vaan lämpöyhtälö voidaan kirjoittaa n -ulotteisessa tapauksessa artikkelin [12] mukaan

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \right).$$

Korkeammat ulottuvuudet eivät tähän työhön olisi tuoneet juurikaan lisäarvoa, sillä säätimen suunnitteluperiaatteet ovat pääpiirteittäin samat korkeammissakin ulottuvuuksissa. Samanlaiset suunnittelumenetelmät toimivat myös muillekin osittaisdifferentiaaliyhtälöille, ja työssä olisi voitu tarkastella lämpöyhtälön säädön sijaan esimerkiksi aaltoyhtälön säätöä. Säätimen suunnitteluperiaatteisiin ei perehdytty tässä työssä kovin syvällä matemaattisella tasolla, sillä se olisi huomattavasti ylittänyt tämän kandidaatintyön laajuuden. Systeemin kompleksilukuterminen tilaesityksen realisointiin ei tässä työssä pureuduttu juuri ollenkaan. Näihin realisoinnin menetelmiin – erityisesti kanoniseen realisaatioon – voisi perehtyä tarkemmin jossakin vastaavan laajuisessa katsauksessa, esimerkiksi toisessa kandidaatintyössä.

LÄHTEET

- [1] J. Bird. *Higher Engineering Mathematics*. Third edition. Newnes, 1999. ISBN: 0-7506-4110-X.
- [2] J. R. Cannon. *The one-dimensional heat equation*. eng. Encyclopedia of mathematics and its applications ; volume 23. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. ISBN: 1-139-88165-5.
- [3] A. Cheniguel. Numerical method for the heat equation with Dirichlet and Neumann conditions. eng. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. Vol. 2209. January. 2014, 535–539.
- [4] R. Curtain ja K. Morris. Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial. eng. *Automatica (Oxford)* 45.5 (2009), 1101–1116. ISSN: 0005-1098.
- [5] R. F. Curtain. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. eng. Texts in applied mathematics ; 21. New York: Springer, 1995. ISBN: 0-387-94475-3.
- [6] J. B. J. Fourier. *The Analytical Theory of Heat*. fr; eng. Alkup. Théorie analytique de la chaleur, 1822. Cambridge [Eng.] University Press, 1878. xxiii, 466.
- [7] S. Ghosh. *Signals and Systems*. eng. Pearson India, 2005. 475 s.
- [8] B. Goodwine. *Engineering Differential Equations Theory and Applications*. eng. 1st ed. 2011. New York, NY: Springer New York, 2011. ISBN: 1-4419-7919-0.
- [9] T. Kailath. *Linear systems*. eng. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1980. ISBN: 0-13-536961-4.
- [10] J. R. Leigh, B. Fuchssteiner ja U. Author. *Functional Analysis and Linear Control Theory*. eng. Vol. 156. Mathematics in science and engineering. Oxford: Elsevier Science, 1980. ISBN: 0080959989.
- [11] X. Liu. *Systems Control Theory*. eng. De Gruyter Textbook. Berlin ; De Gruyter, 2018. ISBN: 3-11-057527-2.
- [12] S. Michalik. Summability of divergent solutions of the n-dimensional heat equation. eng. *Journal of Differential Equations* 229.1 (2006), 353–366. ISSN: 0022-0396.
- [13] V. Natarajan, D. S. Gilliam ja G. Weiss. The State Feedback Regulator Problem for Regular Linear Systems. eng. *IEEE transactions on automatic control* 59.10 (2014), 2708–2723. ISSN: 0018-9286.
- [14] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. eng. Vol. 5. Prentice Hall, 2010. ISBN: 0-13-615673-8.
- [15] L. Paunonen. Controller Design for Robust Output Regulation of Regular Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 61.10 (2016), 2974–2986.
- [16] L. Paunonen ja J.-P. Humaloja. *CDC22-Matlab-simulations*. <https://github.com/lassipau/CDC22-Matlab-simulations>. Viitattu: 2023-07-27. 2021.
- [17] S. Salivahanan. *Control systems engineering*. eng. 1st edition. Always learning. Chennai: Pearson, 2014. ISBN: 9789332558267.

- [18] N. Subani, F. Jamaluddin, M. A. H. Mohamed ja A. D. H. Badrolhisam. Analytical Solution of Homogeneous One-Dimensional Heat Equation with Neumann Boundary Conditions. *Journal of Physics: Conference Series* 1551.1 (2020), 12002–. ISSN: 1742-6588.
- [19] R. L. Williams II ja D. A. Lawrence. *Linear State-space Control Systems*. Wiley, 2007. ISBN: 978-0-471-73555-7.
- [20] E. Zuazua. Chapter 7 - Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some Results and Open Problems. Toim. C. Dafermos ja E. Feireisl. Vol. 3. *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations*. North-Holland, 2007, 527–621.