Tampereen yliopisto

Lassi Peura

SISÄTULOAVARUUDET: REAALISESTA KOMPLEKSISEEN

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Kesäkuu 2023

Tiivistelmä

Lassi Peura: Sisätuloavaruudet: reaalisesta kompleksiseen
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Kesäkuu 2023

Tämä tutkielma käsittelee vektorien välistä sisätuloa sekä reaali- että kompleksiluvuilla. Tutkielman tarkoitus on johdattaa matematiikan kandidaattiopiskelija kompleksilukuperustaiseen lineaarialgebraan.

Työssä lähdetään liikkeelle vektorin normin määrittelemisestä vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$. Myöhemmin nähdään, kuinka vektorin normi voidaan määrittää pistetulon avulla. Normin käsittelyn jälkeen päästään itse pistetulon määritelmään ja sen ominaisuuksiin. Ominaisuuksista yksi todistetaan. Kun pistetulon määritelmä ja vektorin normi on esitelty, voidaan niiden avulla määritellä vektorien välinen kulma vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$. Huomataan myös, kuinka vektorien välisen kohtisuoruuden todentamiseen voidaan käyttää pelkästään pistetulon arvoa. Lukija voi itse päätellä yhteyden kulman määritelmään. Reaalilukuperustaisessa osiossa todistetaan lisäksi klassiset lauseet: Pythagoraan lause ja Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö.

Tekstissä esitellään pistetuloon liittyen esimerkki, jonka on tarkoitus toimia yhteenvetona läpikäydyistä asioista. Kyseisessä esimerkissä osoitetaan kahden vektorin välinen kohtisuoruus mielivaltaisen moniulottuvuuksisessa vektoriavaruudessa.

Vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ euklidinen sisätulo pohjustetaan esittelemällä kompleksiluvut ja niiden väliset peruslaskutoimitukset. Lisäksi käydään läpi kompleksilukujen napakoordinaattiesitys. Vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ vektorien euklidista sisätuloa käsiteltäessä on tarkoitus nähdä sen samankaltaisuudet ja eroavaisuudet vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulon kanssa. Tämän vuoksi esimerkillä havainnoillistetaan, miksi vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ euklidiseen sisätuloon tarvitaan eroava määritelmä pistetuloon nähden.

Viimeiseksi esitellään yleinen sisätulo ainoastaan kompleksiluvuilla. Näin toimitaan, koska reaalilukujen katsotaan sisältyvän kompleksilukuihin. Euklidisen sisätulon aksioomien lisäksi esitellään vektorin normi sekä kahden mielivaltaisen vektorin välinen etäisyys yleisessä sisätuloavaruudessa.

Avainsanat: yleinen sisätulo, kompleksinen sisätuloavaruus, kompleksiluvut,
pistetulo, Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Tämä työ käsittelee vektorien sisätuloa reaali- ja kompleksiluvuilla. Sen tarkoitus on johdattaa kandidaattitason opiskelija reaalilukuperustaisesta lineaarialgebrasta kompleksilukuperustaiseen. Alussa lähdetään liikkeelle pistetulon määritelmästä reaaliluvuilla ja käsitellään siitä johdettuja lauseita. Tämän jälkeen lukijalle esitellään kompleksilukujen määritelmä ja aritmetiikka, mikä valmistaa lukijan euklidisen sisätulon käsittelyyn kompleksiluvuilla. Tekstissä on tarkoitus hyödyntää pistetulon ja kompleksisen vektoriavaruuden euklidisen sisätulon välistä analogiaa. Viimeisessä luvussa esitellään yleinen sisätulo käyttäen ainoastaan kompleksilukuja perustuen ajatukseen, että reaaliluvut ovat kompleksilukujen osajoukko.

Reaalilukuosiossa esitellään pistetulon ominaisuuksia ja niitä hyödyntämällä todistetaan kaksi klassista lausetta: Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö ja Pythagoraan lause. Luvussa esitellään myös määritelmä vektorien väliselle kulmalle perustuen pistetuloon. Joukkoon on lisätty esimerkki, jossa yhdistellään esiteltyjä asioita yhdeksi kokonaisuudeksi.

Kompleksilukulaskenta käsitellään suppeasti omassa luvussaan. Se sisältää välttämättömät tiedot kompleksilukujen välisistä laskutoimituksista tekstin ymmärtämiseksi. Luvussa tehdään induktiotodistus kompleksilukujen potenssin kaavalle, minkä on tarkoitus selventää kompleksilukujen tasogeometrista luonnetta.

Kompleksisen vektoriavaruuden euklidista sisätuloa käsittelevässä luvussa on tarkoitus nähdä, kuinka kompleksisen avaruuden euklidinen sisätulo eroaa pistetulosta samankaltaisuudesta huolimatta.

Lopuksi esitellään yleinen sisätulo kompleksisessa vektoriavaruudessa. Sen lisäksi määritellään siinä pätevä vektorin normi sekä kahden mielivaltaisen vektorin välinen etäisyys. Esimerkkien esittelemistä ei nähdä mielekkääksi, koska yleisessä sisätulossa on hyödynnettävissä ainoastaan aksioomat eikä suoraan sovellettavaa kaavaa.

2 Pituus ja pistetulo vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$

2.1 Vektorin pituus

Tämän alaluvun tiedot pohjautuvat Larsonin ja Edwardin teoksen Elementary Linear Algebra sivuihin 246–248.

Aloitetaan määrittelemällä vektorin pituus ja vektorin pituuden merkintätapa.

Määritelmä 2.1. Vektorin $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pituus avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Kaksiulotteisessa avaruudessa vektorin $\overline{v}$ pituus voidaan samaistaa suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituuteen, kun vektoria $\overline{v}$ kuvaava nuoli on kolmion hypotenuusa ja kateetit ovat keskenään kohtisuorassa olevia komponenttivektoreita.

Huomautus. Vektorin pituutta kutsutaan myös *normiksi*. Jos vektorin pituus on 1, kutsutaan vektoria *yksikkövektoriksi*. Määritelmän mukaan vektorin pituus ei voi olla negatiivinen. Lisäksi jos vektorin pituus on 0, on vektori aina *nollavektori*.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *luonnollisessa kannassa* vektorien pituus on 1 ja täten ne ovat yksikkövektoreita. Insinööritieteissä ja fysiikassa niitä merkitään seuraavasti:

$$\mathbb{R}^2\colon\ (\overline{\imath}, \overline{\jmath}) = ((1,0),(0,1))$$
$$\mathbb{R}^3\colon\ (\overline{\imath}, \overline{\jmath}, \overline{k}) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

Jos avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreilla $\overline{v}$ ja $\overline{u}$ pätee $\overline{u} = c\overline{v}$, missä $c \in \mathbb{R}$, niin vektorit ovat yhdensuuntaiset. Lisäksi jos $c > 0$, niin vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat samansuuntaiset ja puolestaan jos $c < 0$, vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

Lause 2.1. *Olkoon $\overline{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori ja c skalaari, joka kuuluu joukkoon $\mathbb{R}$. Silloin $\|c\overline{v}\| = |c|\|\overline{v}\|$, missä $|c|$ on skalaarin c itseisarvo.*

Todistus. Kaavasta $c\overline{v} = (c\overline{v}_1, c\overline{v}_2, \ldots, c\overline{v}_n)$ seuraa, että

$$\begin{aligned}
\|c\overline{v}\| &= \|(c\overline{v}_1, c\overline{v}_2, \ldots, c\overline{v}_n)\| \\
&= \sqrt{(c\overline{v}_1)^2 + (c\overline{v}_2)^2 + \cdots + (c\overline{v}_n)^2} \\
&= \sqrt{c^2(\overline{v}_1^2 + \overline{v}_2^2 + \cdots + \overline{v}_n^2)} \\
&= |c|\sqrt{\overline{v}_1^2 + \overline{v}_2^2 + \cdots + \overline{v}_n^2} \\
&= |c|\|\overline{v}\|.
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{u}$ välinen etäisyys on $d(\overline{v}, \overline{u}) = \|\overline{v} - \overline{u}\|$

2.2 Pistetulo

Tässä alaluvussa käsitellään kahden vektorin välinen *pistetulo* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Kyseessä on eräs reaalikertoimisen sisätulon erikoistapaus. Aloitetaan määrittelemmällä kyseinen laskutoimitus.

Määritelmä 2.3 (vrt. [1, s. 250])**.** Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen pistetetulo on seuraavan kaavan mukainen:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Pistetulolla on muutamia ominaisuuksia, jotka käydään seuraavaksi läpi ja sen jälkeen todistetaan niistä kaksi.

Lause 2.2. *Vektorit $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ kuuluvat vektoriavaruuten $\mathbb{R}^n$ ja skalaari $c \in \mathbb{R}$. Silloin pistetulolle on totta seuraavat väittämät:*

1. $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$

2. $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$

3. $c(\overline{u} \cdot \overline{v}) = (c\overline{u}) \cdot \overline{v} = \overline{u} \cdot (c\overline{v})$

4. $\overline{v} \cdot \overline{v} = \|\overline{v}\|^2$

5. $\overline{v} \cdot \overline{v} \geq 0$, *ja vektorin $\overline{v}$ ollessa nollavektori $\overline{v} \cdot \overline{v} = 0$.*

Edellä esitellyn lauseen jälkeen siirrytään todistuksiin.

Todistus (vrt. [1, s. 251]). Käytetään ensimmäisen väitteen todistamisessa apuna pistetulon määritelmää ja reaalilukujen joukossa määriteltyä vaihdannaisuutta.

$$\begin{aligned} \overline{u} \cdot \overline{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n \\ &= \overline{v} \cdot \overline{u} \end{aligned}$$

□

Todistus.

$$\begin{aligned} c(\overline{u} \cdot \overline{v}) &= c(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) \\ &= c u_1 v_1 + c u_2 v_2 + \cdots + c u_n v_n \\ &= (c u_1) v_1 + (c u_2) v_2 + \cdots + (c u_n) v_n \\ &= (c\overline{u}) \cdot \overline{v} \end{aligned}$$

Seuraava päättely eroaa edellisestä siten, että kaavan termeissä vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ koordinaattien paikat vaihdetaan keskenään reaalilukujen vaihdannaisuuden perusteella.

$$\begin{aligned} c(\overline{u} \cdot \overline{v}) &= c(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\ &= c(v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n) \\ &= cv_1u_1 + cv_2u_2 + \cdots + cv_nu_n \\ &= (cv_1)u_1 + (cv_2)u_2 + \cdots + (cv_n)u_n \\ &= (c\overline{v}) \cdot \overline{u} \end{aligned}$$ □

2.3 Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Seuraavaksi käsitellään Cauchy-Schwarzin epäyhtälö ja sovelletaan sen todistukseen edellä määriteltyjä pistetulon ominaisuuksia.

Lause 2.3. *Kun $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita, silloin pitää paikkansa, että $|\overline{u} \cdot \overline{v}| \leq \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|$. Tässä $|\overline{u} \cdot \overline{v}|$ tarkoittaa vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ pistetulon itseisarvoa.*

Todistus (vrt. [1, s. 252–253]). Jotta Cauchy-Schwarzin epäyhtälö voidaan todistaa, tarvitsee käsitellä kaksi erillistä tapausta. Ensimmäisessä tapauksessa $\overline{u} = \mathbf{0}$. Tästä seuraa, että $|\overline{u} \cdot \overline{v}| = |\mathbf{0} \cdot \overline{v}| = 0$ ja $\|\overline{u}\|\|\overline{v}\| = 0\|\overline{v}\|$. Täten lause pitää paikkansa vektorin $\overline{u}$ ollessa nollavektori. Sama pätee myös vektorille $\overline{v}$ johtuen pistetulon vaihdannaisuudesta.

Toisessa tapauksessa $\overline{u} \neq \mathbf{0}$. Olkoon t mielivaltainen reaaliluku, ja määritellään sen avulla vektori $t\overline{u} + \overline{v}$. Vektorin pistetulo itsensä kanssa on suurempi tai yhtäsuuri kuin 0 ja siitä seuraa, että $(t\overline{u} + \overline{v}) \cdot (t\overline{u} + \overline{v}) \geq 0$. Tämän jälkeen voimme päätellä, että

$$\begin{aligned} (t\overline{u} + \overline{v}) \cdot (t\overline{u} + \overline{v}) &= (t\overline{u} + \overline{v}) \cdot t\overline{u} + (t\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{v} \\ &= t\overline{u} \cdot (t\overline{u} + \overline{v}) + \overline{v} \cdot (t\overline{u} + \overline{v}) \\ &= t^2(\overline{u} \cdot \overline{u}) + 2t(\overline{u} \cdot \overline{v}) + \overline{v} \cdot \overline{v} \geq 0. \end{aligned}$$

Nyt merkitään, että $a = \overline{u} \cdot \overline{u}$ ja $b = 2(\overline{u} \cdot \overline{v})$ ja $c = \overline{v} \cdot \overline{v}$. Muodostetaan sitten toisen asteen epäyhtälö $at^2 + bt + c \geq 0$. Koska yhtälön vasen puoli ei ole koskaan negatiivinen ja sillä on korkeintaan yksi nollakohta, täytyy sen perusteella muodostetun toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan diskriminantti olla pienempi tai yhtäsuuri kuin

0. Näin ollen

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &\leq 0 \\ b^2 &\leq 4ac \\ 4(\overline{u} \cdot \overline{v})^2 &\leq 4(\overline{u} \cdot \overline{u})(\overline{v} \cdot \overline{v}) \\ (\overline{u} \cdot \overline{v})^2 &\leq (\overline{u} \cdot \overline{u})(\overline{v} \cdot \overline{v}). \end{aligned}$$

Kun molemmilta puolilta otetaan neliöjuuri saadaan $|\overline{u} \cdot \overline{v}| \leq \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}\sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}} = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|$.

□

2.4 Kahden vektorin välinen kulma avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Nyt kun avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on määritelty vektorin normi ja kahden vektorin välinen pistetulo, niin niiden avulla voidaan määritellä kahden vektorin välinen kulma avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 2.4. Vektorien $\overline{u} \neq \mathbf{0}$ ja $\overline{v} \neq \mathbf{0}$ välinen kulma θ määritellään seuraavasti:

$$\cos\theta = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|},$$

missä $0 \leq \theta \leq \pi$. [2, s. 203]

Kun kaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoria ovat keskenään kohtisuoria, niitä sanotaan keskenään *ortogonaaleiksi*. Kahden vektorin välisen ortogonaalisuuden voi todentaa tarkistamalla, onko niiden välinen pistetulo 0. [1, s. 254]

Esimerkki 2.1. Määritellään neljä vektoria, jotka kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^m$, missä $m \in 2\mathbb{N}$. Lisäksi kiinnitetään m.

$$\begin{aligned} \overline{a} &= (1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots, 0) \\ \overline{b} &= (0, -2, 0, -3, 0, -4, 0, \ldots, -\tfrac{m+2}{2}) \\ \overline{c} &= (2, 0, 3, 0, 4, 0, \ldots, 0) \\ \overline{d} &= (0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots, \tfrac{m}{2}) \end{aligned}$$

Osoitetaan, että vektorit $\overline{u} = (\overline{a} + \overline{b})$ ja $\overline{v} = (\overline{c} + \overline{d})$ ovat keskenään ortogonaaliset. Tämä tehdään tarkistamalla onko vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen pistetulo nolla.

Lasketaan ensin tarvittavien vektorien summat, jotta saadaan muodostettua vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ koordinaatit.

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \overline{a} + \overline{b} = (1, -2, 2, -3, 3, -4, \ldots, -\tfrac{m+2}{2}) \\ \overline{v} &= \overline{c} + \overline{d} = (2, 1, 3, 2, 4, 3, \ldots, \tfrac{m}{2}) \end{aligned}$$

Tämän jälkeen voimme laskea vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ pistetulon.

$$\begin{aligned}
\overline{u} \cdot \overline{v} &= 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + \cdots + \tfrac{m}{2}\tfrac{m+2}{2} - \tfrac{m+2}{2}\tfrac{m}{2} \\
&= (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2) + (3 \cdot 4 - 4 \cdot 3) + \cdots + \left(\tfrac{m}{2}\tfrac{m+2}{2} - \tfrac{m+2}{2}\tfrac{m}{2}\right) \\
&= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Koska kaksi peräkkäistä termiä kumoaa toisensa, ja lisäksi koska m on parillinen, yksikään termi ei jää kumoutumatta. Näin päädytään lopputulokseen, että vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat keskenään ortogonaaliset.

2.5 Pythagoraan lause

Seuraavaksi käsitellään Pythagoraan lause lineaarialgebran näkökulmasta.

Lause 2.4. *Kun avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat keskenään ortogonaalisia, niin pätee, että $\|\overline{u}+\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2$[1, s. 256].*

Todistus (vrt. [2, s. 205]). Tässä vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kuuluvat vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^n$.

$$\|\overline{u}+\overline{v}\|^2 = (\overline{u}+\overline{v}) \cdot (\overline{u}+\overline{v}) = \|\overline{u}\|^2 + 2(\overline{u} \cdot \overline{v}) + \|\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 \qquad \square$$

3 Kompleksilukujen käsite ja aritmetiikka

Kompleksi lukuja voidaan pitää reaalilukujen laajennoksena. Kompleksiluvut koostuvat reaaliluvuista ja *imaginääriluvusta* i. Imaginääriluvun i määritelmä on $i^2 = -1$. Kompleksiluvut muodostuvat reaaliluvun ja reaalikertoimisen imaginääriluvun summasta. Näin ollen mielivaltainen kompleksiluku z voidaan ilmaista muodossa $z = a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukosta käytetään merkintää $\mathbb{C}$. [2, s. 422]

Määritelmä 3.1. Kompleksiluvut $a + bi$ ja $c + di$ ovat samat, jos ja vain jos $a = c$ ja $b = d$[2, s. 424].

Jokaisesta kompleksiluvusta voidaan muodastaa uusi luku, jota kutsutaan *kompleksiluvun konjugaatiksi*. Se saadaan vaihtamalla kompleksiluvun sisältämä yhteenlasku vähennyslaskuksi. Kompleksi luvun $z = a + bi$ konjugaatti on $\overline{z} = a - bi$. Kuten reaaliluvuilla myös kompleksiluvuilla on itseisarvo.[2, s. 429]

Määritelmä 3.2. Kompleksiluvun $z = a + bi$ itseisarvon $|z|$ määritelmä on $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$[2, s. 430].

Siirrytään seuraavaksi käsittelemään kompleksilukujen aritmetiikkaa aloittamalla kompleksilukujen vastaluvun ja yhteenlaskun määrittelemisellä. Määritellään kompleksiluvun yhteenlasku seuraavasti:

Määritelmä 3.3.

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

[2, s. 424]

Tästä seuraa että kompleksivun $z = a + bi$ vastaluku on $z = -a - bi$, sillä

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0 = 0.$$

Kompleksilukujen kertolaskussa tulee huomioda, että imaginääriluku i tuottaa itsellä kerrottaessa luvun -1.

Määritelmä 3.4 (vrt. [2, s. 426])**.** Kompleksilukujen kertolaskun määritelmä on seuraava:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Kompleksiluvuista on olemassa myös napakoordinaattiesitys. Idea perustuu ajatukseen, että kompleksiluku on kaksiulotteisen ortogonaalisen koordinaatiston piste. Mielivaltaisen kompleksiluvun z imaginääriosa määrittelee y-koordinaatin arvon ja vastaavasti reaaliosa x-koordinaatin arvon. Esitetään tämä seuraavaksi formaalisti.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta,$$

missä $r \geq 0$ on kompleksiluvun z normi ja $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ kulma, joka trigonometristen funktioiden parametrina toteuttaa edellä mainitut yhtälöt. Eli kompleksiluku z voidaan esittää muodossa $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.[2, s. 437] Tämä voidaan ilmaista vielä lyhyemmin muodossa $z = re^{i\theta}$[2, s. 444].

Lause 3.1 (vrt. [2, s. 445])**.** *Kompleksilukujen kertolasku ja jakolasku napakoordinaattimuodossa toteuttaa seuraavat yhtälöt:*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Nyt kun perusaritmetiikka kompleksilukujen osalta on käsitelty, on vielä hyvä perustellusti esitellä kompleksilukujen pottenssilasku.

Lause 3.2 (vrt. [2, s. 441])**.** *Valitaan mielivaltainen kiinnitetty luku $n \in \mathbb{Z}_+$ ja mielivaltainen luku $z \in \mathbb{C}$. Silloin pätee, että $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.*

Todistus. Todistetaan edellinen lause induktiolla. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Perusaskel:

Valitaan n:n arvoksi 1. Silloin $z^n = z^1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Induktioaskel: Valitaan nyt n:ksi mielivaltainen luonnollinen luku k. Tehdään oletus, että $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$. Väitetään nyt, että $z^{k+1} = r^{k+1}(\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta))$. Oletetaan todistuksessa käytetyt sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat tunnetuiksi.

$$\begin{aligned}
z^k z &= r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= r^{k+1}(\cos(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta) i\sin\theta + i\sin(k\theta)\cos\theta + i\sin(k\theta) i\sin\theta) \\
&= r^{k+1}((\cos(k\theta) i\sin\theta + i\sin(k\theta)\cos\theta) + (\cos(k\theta)\cos\theta + i\sin(k\theta) i\sin\theta)) \\
&= r^{k+1}(i\sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta)) \\
&= r^{k+1}(\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta))
\end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla voidaan todeta alkuperäisen väitteen pätevän kaikilla arvoilla $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4 Euklidinen sisätulo vektoriavaruudessa $\mathbb{C}^n$

Nyt päästään siirtymään reealisesta vektoriavaruudesta kompleksiseen vektoriavaruuteen. Lukijan tulee kiinnittää huomiota siihen, milloin yläviiva merkitsee vektoria ja milloin kompleksiluvun konjugaattia. Kompleksisen vektoriavaruuden mielivaltainen vektori $\overline{w} \in \mathbb{C}^n$ on muotoa $\overline{w} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, missä $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}$.[2, s. 447]

Aloitetaan käsittelemällä euklidisen sisätulon määritelmää ja ominaisuuksia avaruudessa $\mathbb{C}^n$. Aloitetaan euklidisen sisätulon määritelmästä.

Määritelmä 4.1. Olkoon $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ja $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ avaruuden $\mathbb{C}^n$ vektoreita. Silloin niiden välisen euklidisen sisätulon $\overline{u} \cdot \overline{v}$ määritelmä on

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + \cdots + u_n\overline{v}_n,$$

missä kompleksiluvut $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ ovat kompleksilukujen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ konjugaatteja. [2, s. 449]

Listataan seuraavaksi avaruuden $\mathbb{C}^n$ euklidisen sisätulon ominaisuudet, kuten edellä tehtiin pistetulon suhteen.

Lause 4.1. *vrt. [2, s. 450] Kun $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat mielivaltaisia avuruuden $\mathbb{C}^n$ vektoreita ja $k \in \mathbb{C}$, niin silloin seuraavat väitteet pätevät:*

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{\overline{v} \cdot \overline{u}} \tag{4.1}$$

$$(\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{w} = \overline{u} \cdot \overline{w} + \overline{v} \cdot \overline{w} \tag{4.2}$$

$$(k\overline{u}) \cdot \overline{v} = k(\overline{u} \cdot \overline{v}) \tag{4.3}$$

$$\overline{v} \cdot \overline{v} \geq 0 \tag{4.4}$$

Todistus. Todistetaan edellisen lauseen viimeinen kohta, jossa väitetetään, että $\overline{v} \cdot \overline{v} \geq 0$, missä $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$.

Olkoon $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$. Silloin $\overline{v} \cdot \overline{v} = v_1\overline{v_1} + v_2\overline{v_2} + \cdots + v_n\overline{v_n}$. Valitaan nyt mielivaltainen luonnollinen luku $k \leq n$. Olkoon a ja b reaalilukuja. Mielivaltaisesti valittu sisätulon kaavan termi on muotoa

$$v_k\overline{v_k} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bia - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$$

Koska $a^2 \geq 0$ ja $b^2 \geq 0$, niin siitä seuraa, että $a^2 + b^2 \geq 0$. Koska jokainen sisätulon kaavan termi on suurempi tai yhtäsuuri kuin 0, niin silloin sisätulo $\overline{v} \cdot \overline{v}$ on suurempi tai yhtäsuuri kuin 0. $\square$

Kuten avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille myös avaruuden $\mathbb{C}^n$ vektoreille voidaan määrittää normi.

Määritelmä 4.2. Valitaan mielivaltainen vektori $\overline{u} \in \mathbb{C}^n$. Silloin sen normi on

$$\|\overline{u}\| = (\overline{u} \cdot \overline{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + \cdots + |u_n|^2}.$$

[2, s. 450]

Esimerkki 4.1. Tässä esimerkissä tarkastellaan, miksi kompleksisen vektoriavaruuden normille tarvitaan oma määritelmä eikä voida käyttää reaalisen avaruuden määritelmää.

Olkoon $\overline{u} = (i, 1)$. Silloin avaruuden $\mathbb{R}^n$ määritelmän mukaan vektorin $\overline{u}$ normi olisi $\|\overline{u}\| = \sqrt{i^2 + 1^2} = 0$. Tällöin vektorin normi voisi olla nolla, vaikka vektori ei ole nollavektori, mikä ei olisi tyydyttävää.[2, s. 449] Kompleksisen avaruuden määritelmän mukaan vektorin $\overline{u}$ normi on $\|\overline{u}\| = \sqrt{|i|^2 + |1|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Normin kaavan avulla voimme laskea mielivaltaisten vektorien $\overline{u} \in \mathbb{C}^n$ ja $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$ välisen etäisyyden. Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen etäisyys on

$$\|\overline{u} - \overline{v}\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + |u_3 - v_3|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2}.$$

[2, s. 450–451]

5 Yleinen sisätulo vektoriavaruudessa $\mathbb{C}^n$

Tässä viimeisessä luvussa käsitellään yleistä siäsätuloa ainoastaan kompleksilukujen näkökulmasta, sillä reaaliluvut ovat kompleksilukujen osajoukko. Samaistetaan siis luvut a ja $a + 0i$, missä $a \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 5.1 (vrt. [2, s. 454])**.** Avaruuden $\mathbb{C}^n$ yleinen sisätulo on funktio, joka liittää kompleksiluvun $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$ kuhunkin vektoripariin $\overline{u} \in \mathbb{C}^n$ ja $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$ siten, että neljä seuraavaksi lueteltavaa aksioomaa täyttyvät.

Olkoon $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ avaruuden $\mathbb{C}^n$ vektoreita ja olkoon $k \in \mathbb{C}$ skalaari.

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \overline{\langle \overline{v}, \overline{u} \rangle} \tag{5.1}$$

$$\langle \overline{u} + \overline{v}, \overline{w} \rangle = \langle \overline{u}, \overline{w} \rangle + \langle \overline{v}, \overline{w} \rangle \tag{5.2}$$

$$\langle k\overline{u}, \overline{v} \rangle = k\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \tag{5.3}$$

$$\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle \geq 0 \tag{5.4}$$

Määritelmä 5.2. vrt. [2, s. 456] Yleisessä sisätuloavaruudessa vektorin $\overline{u}$ normi on $\|\overline{u}\| = \langle \overline{u}, \overline{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Määritelmä 5.3. vrt. [2, s. 456] Kahden mielivaltaisen vektorin $\overline{u} \in \mathbb{C}^n$ ja $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$ välinen etäisyys on

$$\|\overline{u} - \overline{v}\| = \langle \overline{u} - \overline{v}, \overline{u} - \overline{v} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Lähteet

[1] R. Larson & B. H. Edwards *Elementary Linear Algebra* Toronto: D. C. Heath and Company, 1988.

[2] H. Anton *Elementary Linear Algebra* New York: John Wiley & Sons, 1987