Tampereen yliopisto

Marjaana Isokallio

BURALI-FORTIN PARADOKSI

Joukko-opin historiasta ja paradoksien synnystä

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2023

TIIVISTELMÄ

Marjaana Isokallio: Burali-Fortin paradoksi — Joukko-opin historiasta ja paradoksien synnystä
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2023

Tässä tutkielmassa käsitellään Burali-Fortin paradoksia, joukko-opin historiaa äärettömyyden näkökulmasta ja paradoksien vaikutusta joukko-oppiin.

Tutkielman alkuosa koostuu äärettömyyden käsittelystä, olemuksesta ja käsitteen kehittymisestä antiikin Kreikasta nykyaikaan, mikä on johtanut nykyiseen, joukko-opillisessa kontekstissa esitettävään määritelmään. Esitellään äärettömyyden potentiaalinen ja aktuaalinen luonne sekä äärettömyyden ymmärryksen kehittyminen keskiajalta äärettömyyden nykyiseen muotoonsa.

Matemaattisessa osiossa esitellään joukko-opin pohja naiivista joukko-opista alkaen esitellen käytettävät symbolit ja aksiomaat. Tämän jälkeen esitellään Burali-Fortin paradoksin kannalta oleellisimmat valmistelevat tarkastelut, kuten relaatiot ja hyvinjärjestykset, epsilon-kuvat, isomorfismi ja lopuksi ordinaaliluvut.

Tutkielman loppuosassa esitellään Burali-Fortin paradoksin synty Cesare Burali-Fortin artikkelista kaikkien ordinaalilukujen joukosta sekä tapahtumat, joiden kautta Cesare Burali-Fortin artikkelista syntyy paradoksi. Lopussa esitellään seuraukset, joita joukko-opin mukana tuomat paradoksit matematiikassa tuottivat viedessään matematiikkaa ja sen filosofiaa eteenpäin. Nämä loivat uuden käsittelytavan äärettömille joukoille ja uudenlaisen ymmärryksen äärettömyydestä.

Avainsanat: joukko-oppi, Burali-Fortin paradoksi, äärettömyys
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Matematiikka ja filosofia ovat vaikuttaneet toinen toisiinsa koko historiansa ajan. Kaksi tieteenalaa ovat kehittyneet eteenpäin kiinteässä vuoropuhelussa toistensa kanssa ja toisiaan muovaten aina antiikin Kreikasta asti. Matematiikan herättäessä perustavanlaatuisia kysymyksiä muun muassa äärettömyyden olemuksesta on se vaatinut filosofiaa avukseen näiden tarkasteluun. Vastavuoroisesti filosofisiin kysymyksiin matematiikka on tarjonnut kielen ja käsitteistön, joilla voidaan muodostaa objektiivisia perusteita argumentaatiolle. Äärimmäisyyksiin matematiikan ja filosofian yhteyttä vei Pythagoraan mukaan nimetty koulukunta, pythagoralaiset. Heidän mottonsa *Kaikki on numeroita* kuvasi heidän toimintaansa: pyrkimys esittää kaikki tieteestä uskontoihin ja filosofiaan numeroin [15].

Nykyinen maailmamme on jollain tapaa pythagoralainen, sillä numerot ja luvut ovat arjessamme vielä suuremmassa roolissa kuin Pythagoraan aikaan, joka oli noin 540 eaa., sillä käyttäessämme teknologiaa turvaudumme numeroihin 0 ja 1. Viestien lähettäminen, digitaalinen kaupankäynti ja verkkopankki ovat vain yksittäisiä esimerkkejä asioista, joiden salausjärjestelmä perustuu alkulukuihin, alkuluku on luku, joka on jaollinen vain yhdellä ja itsellään. Suurin tällä hetkellä löydetty alkuluku on $2^{82589933} - 1$, joka sisältää 24 862 048 numeroa ja kuulostaa siis *äärettömän* suurelta luvulta [21].

Äärettömyyden luonne, olemus ja sen manipulointi matemaattisesti ovat jakaneet matemaatikoita — miten voidaan vertailla äärettömyyttä ja jopa intuitiivisesti erilaisia äärettömyyksiä, kuten lukujoukkoja luonnolliset luvut ja parilliset luvut? Jos janalla on pisteitä ääretön määrä, miten tämä suhteutuu äärettömyyteen jatkuvan suoran pisteiden kanssa? Muun muassa näiden kaltaisten kysymysten äärellä matemaatikot ja filosofit, kuten Platon ja Aristoteleen, pohtivat äärettömyyttä. Äärettömyyttä, sen historiaa ja ymmärryksen kehitystä käsitellään tutkielman luvussa 2, Filosofia ja matematiikka.

Georg Cantor (1845 — 1918) loi uudenlaista matematiikkaa pyrkimyksenään koota matematiikan jo tällöin pitkälle eri osa-alueisiin ulottuvat haarat yhteen, aloittaen yhteisistä juurista, perusyksiköistä alkaen. Tätä Cantorin luomaa matematiikan osa-aluetta kutsutaan *joukko-opiksi*. Se erosi filosofisesti selvästi aiemmasta matematiikasta joukko-opin ollessa abstraktimpi ja näin riippumattomampi reaalimaailman kiusauksista ja rajoitteista. Tutkielmassa tarvittavia joukko-opin merkintöjä, aksiomatisointia ja tarvittavia tarkasteluja esitetään luvuissa 3 ja 4.

Vasta joukko-opilliset ajatusmallit äärettömyyksistä, niiden käsittelystä ja vertailusta, vastasivat kysymyksiin äärettömyyksien vertailusta. Kuitenkin äärettömyyden käyttö matematiikassa vasta jätti tilaa paradokseille, näistä ensimmäisenä pidetään Cesare Burali-Fortin (1861 — 1931) mukaan nimettyä Burali-Fortin paradoksia, joka on väite kaikkien ordinaalilukujen joukon olemassaolosta. Burali-Fortin paradoksin muodostuminen esitellään luvussa 5. Uudenlainen lähestyminen matematiikkaan ja uudenlaiset ongelmat loivat vastareaktiota osassa matemaatikoissa. Paradoksien avulla jotkut, kuten Henri Poincaré (1854 — 1912), pyrkivät todistamaan jotakin olennaista rikkonaisuutta ja vaillinaisuutta joukko-opissa. Vastareaktiot muutoksiin olivat kuitenkin normaaleja sata vuotta sitten, kuten tänä päivänkin. Ne eivät poista muutoksen tarvetta.

Paradoksien avulla saadulla ymmärryksen laajenemisella voitiin joukko-oppia määritellä siten, että naiivin joukko-opin paradoksit poistettiin. Silti täydellistä paradokseilta vapaata matematiikkaa ei ole saavutettu — kysymykseksi jää, onko se mahdollista vai onko ongelmana ihmismielen tarve siirtää matemaattiset oliot reaalimaailmaan. Reaalimaailma tuo rajoituksia, joihin intuitiivinen ihmismieli tarraa helpoiten: pyrkimys yksinkertaistaa asia helpommin ymmärrettäväksi luo ansan itselleen ja mahdollistaa väärinymmärryksiä. Monia reaalimaailman rajoituksia ei kuitenkaan matematiikassa ole, sillä matemaatiinen todellisuus on oma irrallinen, mutta todellinen, itsensä. Joka tapauksessa äärettömyyden tarkastelu ja Burali-Fortin paradoksi ovat hyviä esimerkkejä siitä, että paradokseilla on aina ollut ja tulee varmasti myös aina olemaan tärkeä rooli matematiikan kehittymisessä, sillä ne haastavat vallitsevia käsityksiä ja vievät ajatteluamme eteenpäin jättäen samalla historiaan palasia ajan kuvasta.

2 Filosofia ja matematiikka

Matematiikka on kehittynyt antiikin Kreikan ajoilta asti, välillä edeten hitaasti ja johdonmukaisesti, toisinaan nopeasti ja testaten. Matematiikan historiassa ei ole vältytty harha-askelilta, kuten myöhemmin luvussa *Potentiaalisesta aktuaaliseen äärettömyyteen* esitetään. Esimerkiksi nykytiedon valossa pisteen ominaisuuksista on tehty historian aikana monia vääriä tulkintoja. Kyseenalaistaminen ja jatkuva tarkastelu matemaattisissa käsitteissä vei kuitenkin ymmärrystä eteenpäin. Merkittävimmistä harhailuista on syntynyt myös suurimpia oivailluksia — kuten käsittelyssä oleva Burali-Fortin paradoksi osoittaa [11]. Moderni matematiikka keskittyi abstraktiin matematiikkaan ja kysymyksiin, kuten äärettömyyden käsitteeseen, jota aiempien vuosisatojen matemaatikot eivät olleet pystyneet aukottomasti määrittämään. Samojen kysymyksien äärellä olivat myös filosofit, jotka pyrkivät lähestymään matemaatikoiden esiin nostamia kysymyksiä eri kulmista — muun muassa empirismin, realismin, intuitionismin tai formalismin kautta [4]. Filosofian suuntaukset ja tieteentekijät vaikuttivat myös toiseen suuntaan — matemaatikoihin ja matematiikan rakentumiseen, äärettömyyden olemukseen ja sen ymmärtämisen kehitykseen.

Tämän luvun päälähteenä käytetään Friendin kirjaa *Introducing Philosophy of Mathematics* [5].

2.1 Äärettömyydestä

Äärettömyys on olennainen käsite matematiikassa, jossa se on todellisuutta, kun taasen reaalimaailmassa äärettömyys menettää merkityksensä. Emme voi rakentaa äärettömän pitkää tietä käytettävän materiaalin välttämättömästi loppuessa. Tai maalata äärettömän ohutta kerrosta maalia, sillä pienimmilläkin rakenneosasilla on fysikaalinen koko, eikä näin ollen voida saavuttaa äärettömän ohutta kerrosta. Reaalimaailmassa meitä rajoittavat aina materian fysikaaliset ominaisuudet, jolloin jäljelle jää vain äärettömyyden tarkastelu abstraktissa ajattelun maailmassa.

Äärettömyyden luonne ja olemus on pohdituttanut filosofeja ja matemaatikoita aina ja sen käsittelyn varhaisimmat kirjalliset todisteet löytyvät antiikin Kreikasta. Antiikin Kreikan ajoista meille periytyy kaksi erilaista näkökantaa äärettömyyden olemuksesta: Aristoteleen *potentiaalinen äärettömyys* ja Platonin *aktuaalinen äärettömyys*.

Aristoteleen potentiaalinen äärettömyys perustui havaintoihin ja oletuksiin loputtomuudesta. Hänen mukaansa lukuja voidaan esimerkiksi luetella loputtomasti, koska aina voidaan lisätä lukuun yksi ja jatkaa näin ollen lukujen luettelemista. Vastaavasti ajan voidaan olettaa jatkuvan äärettömyyteen: jokaisen sekunnin jälkeen tulee seuraava sekunti. Näissä molemmissa esimerkeissä äärettömyys perustuu oletuksiin, että näin on tapahtunut tähän asti poikkeuksetta, eikä ole syytä olettaa, ettei näin tapahtuva prosessi voisi jatkua *potentiaalisesti* loputtomasti, äärettömyyksiin. Potentiaalisen äärettömyyden voidaankin kuvitella olevan viiva, jolla on alkupiste, muttei loppupistettä.

Potentiaalinen äärettömyys on siis prosessiorientoitunutta, ja sen voidaan ajatella vastaavan *loputtomuutta* [14]. Prosessien kautta äärettömyys on siis olemassa, mutta itsenäistä äärettömyyttä ei — voimme siis toistaa äärettömästi esimerkiksi summausta tai kertolaskuja, mutta äärettömän kertominen äärettömällä olisi mahdotonta [4]. Potentiaalista äärettömyyttä kannattivat ja käyttivätkin konstruktivismin kannattajat, joiden mukaan matemaattinen olemassaolo perustui äärettömyyden muodostamiseen, konstruointiin. Konstruktivismin valossa ei olisi siis äärettömyyttä itsenäisenä omana objektinaan, vaan se on aina jonkin tulos, eikä voi esiintyä irrallisena osana.

Konstruktivistit mieltävät matematiikan välineenä: se on tapa kuvata maailmaa ja prosesseja, jotka ovat olemassa. Koska maailmamme on äärellinen, pitäisi tällöin matematiikkaa tarkastella myös äärellisestä näkökulmasta. Tämä ajatus sopi hyvin yhteen muun muassa geometrian käsittelyn kanssa [4]. Konstruktivistien mielestä äärettömyyden tarkastelussa monet prosessit johtivat mielettömyyksiin, kun lopputulos oli joko äärettömän suurta tai pientä, mikä voidaan liittää joko materian kokoon tai lukumäärään — matemaattiset tulokset ja prosessit haluttiin pitää osana reaalimaailmaa tai vähintään mahdollisina sovelluksina reaalimaailmassa.

Potentiaalisen äärettömyyden vastakohtana voidaan pitää aktuaalista äärettömyyttä, Platonin äärettömyyttä. Platonismissa numerot ja muut abstraktit asiat ovat tosia olemassa olevia olioita, jotka ovat itsenäisiä fyysisestä maailmasta, jolloin matematiikassa voidaan operoida näillä abstrakteilla olioilla [1]. Näin Platonin aktuaalisen äärettömyyden lähtökohtana on äärettömyyden abstrakti luonne — äärettömyyttä ei voi esiintyä reaalimaailmassa, mutta se on todellinen asia, joka on olemassa [3].

Platonistisesta oliosta esimerkkinä on Gabrielin torvi, joka saadaan, kun funktion $x \mapsto \frac{1}{x}, x \geq 1$ kuvaaja pyörähtää x—akselin ympäri. Tällöin saadaan torven muotoinen kappale, jonka tilavuus rajoittuu π:hin. Kun x lähestyy ääretöntä kohti ääretöntä, niin pinta-ala $f(x)$ kasvaa kohti ääretöntä. Kappale on siis samaan aikaan äärellinen tilavuuden suhteen, mutta ääretön pinta-alan suhteen. Gabrielin torvi ja sen ominaisuudet keksittiin 1640-luvulla, jolloin vallalla oli aristoteelinen käsitys äärettömästä. [17]

2.2 Potentiaalisesta aktuaaliseen äärettömyyteen

Myöhäiskeskiajalla nousi esiin lisää ristiriitaisuutta potentiaalisen ja aktuaalisen äärettömän olemuksesta matematiikassa. Tällöin äärettömyyttä tarkasteltiin vielä läheisesti keskittyen materiaan ja kappaleiden fysikaalisiin ominaisuuksiin. 1300-luvun aikakauden ajattelijoita irtautui ajatuksesta aristoteelisestä potentiaalisesta äärettömyydestä, sillä he ajattelivat, ettei aktuaalisen äärettömän olettamisesta seuraa ristiriitaa. Kuitenkin äärettömyys liitettiin läheisesti vielä ajatukseen äärettömästä lukumäärästä tai suuruudesta. Tämä vaikeutti teorioiden määrittelyä ilman ristiriitoja. Tuon ajan näkemykset voidaan jakaa karkeasti kolmeen ryhmään:

1. jatkuva olio, kuten suora, koostuu aktuaalisen äärettömästä määrästä jakamattomia elementtejä, joilla ei ole ulottuvuutta
2. jatkuva olio koostuu aktuaalisen äärettömästä määrästä elementtejä, mutta jaettujen osien rajat eivät ole reaalisia
3. jatkuva olio koostuu aktuaalisen äärettömästä määrästä äärettömän pieniä elementtejä. [9]

Jokaisella kolmella eri näkökulmalla oli kannattajakuntansa. Ensimmäinen kohta todettiin ristiriitaiseksi, kun otetaan esimerkiksi jana AB, joka on äärettömästi jaettavista ja koostuu näin ollen äärettömästä määrästä jakamattomia pisteitä. Jos nyt tälle janalle asetetaan kulkemaan jokaista pistettä vastaan kohtisuoraan suora, jonka jälkeen käännetään alkuperäistä suoraa 45 astetta. Nyt janan AB läpi osuu vain osa alkuperäisistä kohtisuoraan olevista suorista, joka tarkottaisi janan AB jakamattomien osien vähenevän vain sen aseman muuttumisesta. Tämä voidaan todeta modernin, nykymatematiikan keinoin triviaalisti ristiriitaiseksi, sillä janan asemoiminen ei vähennä sen pisteiden määrää. Toisaalta, jos todettaisiin janaa AB kohtisuoraa tulleisiin suorien määrän olevan sama sen asemoinnin jälkeen, voitaisiin havaita neliön sivun ja lävistäjän olevan yhtä suuret, mikä johtaa myöskin triviaaliin ristiriitaan. [9]

Toisen kohdan kannattajien ryhmän kanta vie äärettömyyttä hieman abstraktimpaan suuntaan, mutta pitäen edelleen turhasta, fysikaalisiin määreisiin liittyvästä äärellisyydestä kiinni, joka aiheuttaa vastaavia ongelmia kuin edellisessä kappaleessa esitetyssä janaesimerkissä. Tämän näkemyksen kannattajat uskoivat, että oltaessa missä tahansa todellisuudessa tai oliossa, on siellä olemassa reaalisesti tämä olio sekä sen osat, joita on ääretön määrä. Nämä olion osat olivat osa jotakin janaa, tasoa tai aikaa. Huomion arvoista on, etteivät tämän ajatuksen kannattajat ajatelleet, että todellisuudessa olisi pisteitä, suoria tai tasoja, mutta siinä tietyssä oliossa tai ulottuvuudessa oli reaalisesti olemassa ääretön määrä jako-osia sitä kyseistä oliota tai ulottuvuutta. Nämä jako-osat ovat kuitenkin finiittisiä, äärellisiä, joka aiheuttaa vastaavaa ristiriitaisuutta lähemmässä tarkastelussa kuten ensimmäisen kannan esimerkeissä havaitaan. [9]

Viimeinen kolmas kanta esittää äärettömyydestä muotoa, joka on lähimpänä modernin matematiikan käsitystä. Tällöin missä tahansa todellisuudessa tai oliossa on olemassa osia aktuaalisesti äärettömästi, niiden kaikki osat ovat todellisesti ja samanaikaisesti olemassa. Nämä ajatukset eroavat edellisestä siinä suhteessa, etteivät osat ole äärellisiä — tämä vaatii abstraktimpaa ymmärrystä, joka oli ajankuvaan nähden edistyksellistä. [9]

Nämä kolme jakoa osoittavat, että äärettömyys oli alati muuttuva, kehittyvä ja matemaatikoita jakava asia — kuitenkin matemaatikot olivat vielä vahvasti kiinni reaalimaailmassa ja sen tuomissa reunaehdoissa.

Äärettömyyden ajattelu muun kuin prosessin kautta alkoi myös yleistyä keskiajan jälkeen. Galileo Galilei (1564-1642) esitti huomion äärettömyydestä ja sen olemuksesta luvun ja sen neliön yhteytenä. Hän mielestään osoitti äärettömyyden mahdottomuuden esittämällä, että jokaisella luonnolliselle luvulla oli olemassa vain yksi luvun neliö [14]. Luetellen luonnollisia lukuja yhdestä eteenpäin voidaan siis muodostaa yksi-yhteen lista sen luvun neliön kanssa:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & 66 & \ldots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \ldots & 4\,356 & \ldots \end{array}$$

Nämä molemmat listaukset jatkuvat aktuaalisesti äärettömyyteen ja niissä on koko ajan todellisesti yksi yhteen -vastaavuus. Kuitenkin samalla on selvää, että luvun neliöt sisältyvät itsessään luonnollisiin lukuihin ja näin ollen listaus lukujen neliöistä olisi pienempi kuin luonnollisten lukujen listaus. Totuus ei kuitenkaan vastaa intuitiota luonnollisten lukujen listauksen sisältyvän sen neliöiden listaukseen, vaan listaukset jatkuvat äärettömyyteen asti, eikä näin ollen näitä aktuaalisia äärettömyyksiä voida vertailla käyttäen sanoja suurempi tai pienempi [9].

2.3 Absoluuttinen äärettömyys

Idealismi vaikutti vahvana suuntauksena 1800-luvun alun Saksassa, jolloin potentiaalisesta äärettömyydestä puhuttiin myös heikkona äärettömyytenä [4]. Vuosisadan loppupuolella ja sen vaihtuessa Georg Cantor, joukko-opin isä, vei matematiikan filosofiaa eteenpäin käsitellessään äärettömyyttä tavalla, joka erosi kaikesta aiemmasta radikaalisti.

Cantorin joukko-opissa esimerkiksi aiemmin esitettyjä äärettömiä listauksia luonnollisista luvuista ja niiden neliöistä voidaan kutsua äärettömiksi joukoiksi. Niiden jäsenet voidaan luetella siten, että jokaista vastaa vain luonnollinen luku eli joukko on *numeroituva* [6]. Tällaisia joukkoja ovat kaikki äärelliset joukot ja kaikki ne äärettömät joukot, joiden osat voidaan laittaa yksi-yhteen -vastaavuuteen eli bijektioon luonnollisten lukujen kanssa.

Aiemmin kuvatut tulkinnat keskiajan olioiden ja kappaleiden luonteesta muuttuivat kriittisesti, kun tietyn kappaleen osat, eli alkiot, voitiin kuvitella sisältyvän kappaleeseen ilman, että näillä alkioilla on paikkaa kappaleessa. Esimerkiksi jana AB voidaan olettaa joukoksi, joka sisältää äärettömän määrän pisteitä, ilman että niitä pyritään tulkitsemaan aktuaalisina, reaalimaailman kaltaisina pisteinä, joilla on lukittu paikka tai muita ominaisuuksia. Näitä pisteitä ei voida luetella ensimmäisestä alkaen, sillä jo seuraavan pisteen esittäminen aiheuttaa ongelman. Jos meillä jana, joka on pisteestä x_1 pisteeseen x_2, voidaan niiden välistä ottaa myös piste $x_{1,2}$ ja ottaa pisteitä edelleen tämän ja edellisen välistä niiden äärettömän määrän takia. Tämä esimerkki voidaan esittää myös reaalilukujen avulle, kun otetaan joukoksi kaikki reaaliluvut väliltä $[0, 1]$. Ajatellaan näiden kaikkien reaalilukujen listaa ja rajoitetaan väliä ottaen siitä uudeksi alarajaksi pienin seuraava alaraja ja vastaavasti ylärajaksi seuraavaksi suurin mahdollinen yläraja. Toistaen tätä operaatiota uusien ala- ja ylärajojen muuttamiseksi saadaan väli, joka suppenee. Tämän supetessa huomataan, että ottaessa aina uudet ala- ja ylärajan päädytään tilanteeseen, missä väliin jää luku, joka ei ole ala- tai yläraja, koska lisäämällä lukuun desimaaleja voidaan aina ottaa luku ala- ja ylärajan välistä. Näin ollen pisteiden määrä janassa ja väli $[0, 1]$ on ylinumeroituva [6]. Välin $[0, 1]$, ja näin ollen koko reaalilukujen joukon, ylinumeroituvuuden kuuluisin todistus on nimeltään Cantorin diagonaaliargumentti [6].

Numeroituvat joukot voidaan järjestää pienimmästä alkiosta alkaen, jolloin voidaan viitata joukon alkioihin järjestyslukuina *ensimmäinen, toinen* ja niin edelleen aina äärettömyyteen asti. Jos otetaan luonnollisten lukujen viimeinen järjestysluku, ääretön α ja summataan se luonnollisten lukujen neliöiden viimeisellä järjestysluvulla, myös äärettömällä β, saadaan äärettömyyksien laskutoimitus. Tämä mullisti matemaattista suhdetta äärettömyyteen, sillä näin voitiin operoida laskutoimituksin äärettömillä luvuilla. Näitä palataan tarkastelemaan myöhemmin, tutkielman osassa 4.4.

Cantorin esitykset numeroituvista ja ylinumeroituvista äärettömyyksistä sekä äärettömyyksien laskutoimitukset olivat mullistavia aikana, jolloin äärettömyydellä operointia kaihdettiin ja matematiikan tieteen harjoittajissa oli henkilöitä, jotka uskoivat vahvasti matematiikan pitäytyvän äärellisten numeroiden operaatioissa [4]. Äärettömyys, joka sisältäisi kaiken eli absoluuttinen äärettömyys voidaan matemaattisesti koota äärettömien joukkojen kokoelmaksi [16]. Absoluuttinen äärettömyys on siis olemassa matemaattisesti, mutta sitä ei voida käsitellä matemaattisena oliona — absoluuttinen äärettömyys vastaa Cantorin mukaan matematiikassa filosofista äärettömyyttä, saavuttamattomuutta [16]. Matematiikan ja filosofian käsitys äärettömyydestä, joka sisältää kaiken, on yhtenevä.

3 Sanoista symboleiksi

Tässä luvussa esitellään tutkielmassa käytettävä joukko-opin symboliikka ja aksiomatisointi, joka noudattaa Zermelo-Fraenkelin aksioomia täydennettynä valinta-aksioomilla. Lisäksi esitellään joukkojen muodostaminen kumulatiivisesti sekä luonnollisten lukujen määrittäminen tyhjästä joukosta. Tutkielman esitystavat noudattavat Endertonin [8] merkintöjä.

3.1 Alkiosta joukoksi

Yhtäsuuruus, *joukko* ja *alkio* ovat perustavanlaatuisia termejä, joita voidaan vain kuvailla, muttei määritellä muiden termien avulla — nämä kolme termiä ovat joukko-opin, matematiikan *perustuksen* alkuasetelmat. Näiden päälle on muodostettu *aksiomaattinen järjestelmä*, jolla kuvataan niitä intuitiivisia, aina paikkansa pitäviä lauseita matematiikassa, joita ei voida osoittaa epätosiksi. Alla on esitelty tässä tutkielmassa käytettäviä matemaattisia merkintätapoja. [13]

- *Joukko* on alkioiden kokoelma, joka on itsenäinen objekti.
- Merkintä $a \in A$ tarkoittaa a:n olevan joukon A alkio eli alkio a *kuuluu* joukkoon A. Vastaavasti merkinnällä $a \notin A$ osoitetaan, että alkio a *ei kuulu* joukkoon A.
- Merkintä $A \subseteq B$ tarkoittaa joukon A *sisältyvän* joukkoon B eli B sisältää joukon A jokaisen alkion. Vastaavasti merkinnällä $A \nsubseteq B$ osoitetaan, ettei joukko B sisällä joukkoa A.
- Joukkojen A ja B *yhdiste* $A \cup B$ on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A tai joukkoon B.
- Joukkojen A ja B *leikkaus* $A \cap B$ on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A ja joukkoon B.
- Joukon A *potenssijoukolla* $\mathcal{P}(A)$ merkitään joukon A osajoukkojen joukkoa.
- Mikä tahansa kokoelma C joukkoja on *luokka*.
- Käytettäviä loogisia operaattoreita:

$\neg$	ei
$\wedge$	ja
$\vee$	tai
$\rightarrow$	jos ... niin
$\leftrightarrow$	jos ja vain jos
$\forall$	kaikille
$\exists$	on olemassa

Cantorin joukko-oppi jäi antinomeille eli ristiriidoille vapaaksi alueeksi, mikä toimi Zermelon motivaattorina muodostaa pitävä perusta joukko-opille. Zermelon ensimmäisen, vuoden 1906, aksiomaattisen järjestelmän **Z** aksioomat ovat *ekstentiaalisuusaksiooma, alkeisjoukkojen aksiooma, erotteluaksiooma, potenssijoukkoaksiooma, yhdisteaksiooma, valinta-aksiooma ja äärettömyysaksiooma*. Vielä tässä vaiheessa Zermelon aksiomatisoinnissa oli aukkoja. 1920-luvulla Zermelo julkaisi joukko-opin aksioomat uudelleen nimellä *Zermelo-Fraenkelin aksioomat*, **ZF**. Zermelo-Fraenkelin aksioomiin lisättäessä *valinta-aksiooma* saadaan alla esitelty luettelo standardiaksiomatisoinnista, **ZFC**-aksioomista. [7]

3.2 Aksioomat

Alla olevat **ZFC**:n mukaiset aksioomat on esitetty Herbert Endertonin mukaisesti [8].

Ekstensionaalisuusaksiooma — kahden joukon sisältäessä täysin samat alkiot ne ovat sama joukko.

$$\forall A \forall B\, (\forall x\, (x \in A \;\leftrightarrow\; x \in B) \to A = B)$$

Tyhjän joukon aksiooma — on olemassa tyhjä joukko

$$\exists B \forall x(\; x \notin B).$$

Pariaksiooma — mille tahansa parille u ja v on olemassa joukko B, jonka alkioina ovat vain u ja v.

$$\forall u \forall v\; \exists B\; \forall x\, (x \in B \quad\leftrightarrow\quad x = u \;\vee\; x = v)$$

Yhdisteaksiooma — yhdisteaksiooman ensimmäisessä, heikossa versiossa esitetään, että kaikille joukoilla a ja b on olemassa yhdiste C, jonka jäsenet kuuluvat joko joukkoon a tai b tai molempiin.

$$\forall a \forall b \exists C \forall x\, (x \in C \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b))$$

Myöhemmin esitetty, vahva esitys yhdisteaksioomasta kuuluu: mille tahansa joukolle A on olemassa joukko B, jonka alkioina ovat joukon A alkioiden alkiot.

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

Yhdistettä B merkitään

$$\bigcup A = \{\, x \mid \exists y\, (y \in A \wedge x \in y)\}\,.$$

Potenssijoukkoaksiooma — mille tahansa joukolle A on olemassa joukko, jonka alkiot ovat joukon A osajoukot.

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \;\leftrightarrow\; x \subseteq A),$$

missä $x \subseteq A$ on sisältyvyyden symbolin, $\subseteq$, määritelmän mukaan

$$\forall t (t \in x \to t \in A).$$

Äärettömyysaksiooma — on olemassa induktiivinen joukko

$$\exists A \left(\varnothing \in A \wedge \forall a \in A (a^+ \in A) \right).$$

Äärettömyysaksiooman avulla voidaan määrittää luonnolliset luvut sekä nimensä mukaisesti voidaan todistaa äärettömien joukkojen olemassaolo.

Merkintä a^+ tarkoittaa seuraajaa, joka luonnollisille luvuille on $a^+ = a + 1$. Määritelmä seuraajajoukolle esitellään kohdassa 4.16.

Erotteluaksiooma eli **osajoukkoaksiooma** — kaikille joukko-opillisille kaavoille $\varphi\, (x,\, t_0,\ldots,t_{n-1})$ alla oleva on aksiooma

$$\forall t_0 \ldots \forall t_{n-1}\; \forall A\; \exists B\; \forall x\, (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi\, (x,\, t_0,\ldots,t_{n-1}))\,,$$

eli on olemasssa joukko B, jonka alkiot ovat ne, jotka toteuttavat joukossa A kaavan φ. Tällöin joukko B on automaattisesti myös joukon A osajoukko. Joukolle B saadaan siis seuraava merkintämuoto: $B = \{x \in A \mid \varphi\,(x, t_0,...,t_{n-1})\}$.

Korvausaksioomat — epätyhjä joukko A sisältää alkion x. Merkintä $\forall x \in A\phi$ on sama kuin $\forall x(x \in A \to \phi)$ Kaikille joukko-opillisille kaavoille $\varphi(x, y)$ alla oleva on aksiooma

$$\forall A\,((\forall x \in A)\,\forall y_1 \forall y_2\,(\varphi\,(x,y_1) \wedge \varphi\,(x, y_2) \to y_1 = y_2)\ \to \exists B \forall y\ \ (y \in B\ \leftrightarrow\ (\exists x \in A)\,\varphi\,(x,y)))].$$

Kaava $\varphi(x, y)$ ei saa sisältää joukkoa B, koska joukko B muodostuu kaavan $\varphi(x, y)$ mukaisesti ja on kaavan muodostama maalijoukko.

Säännöllisyysaksiooma eli **perustusaksiooma** — epätyhjä juokko A sisältää alkion m ja joukot A ja m ovat erilliset joukot, eli

$$\forall A\,(A \neq \varnothing \to \exists m\ \in A = m \cap A = \varnothing)\,.$$

Säännöllisyysaksioomasta seuraa, ettei mikään joukko ole itsensä alkio eikä edes ole olemassa ääretöntä jonoa, joista muodostuu laskeva $\in$-ketju.

Valinta-aksiooma — valinta-aksiooman avulla voidaan muodostaa *valintakuvaus*, relaatio, jolla valitaan alkioita epätyhjistä joukoista. Valinta-aksiooma on lisäys ZF:n aksiomaattiseen järjestelmään.

$$(\forall R(\exists F)(F \subseteq R \wedge \operatorname{dom} F = \operatorname{dom} R),$$

jossa F on kuvaus ja dom-merkintä tarkoittaa määrittelyjoukkoa.

3.3 Kumulatiivinen hierarkia

Joukkoja voidaan muodostaa käyttämällä potenssijoukko-operaatiota. Ensimmäisen joukon alkioita kutsutaan *atomeiksi*, jotka ovat alkualkioita. Atomit eivät kuitenkaan ole alkioita siinä mielessä kuten olemme niitä käyttäneet ZFC-aksiomaattisessa järjestelmässä. Atomeita käytettiin kuvaamaan potenssijoukon edellisen "tason"osia, joista oli mahdollista lähteä potenssijoukolla luomaan kasvavaa joukkojen kokoelmaa.

Kuten aiemmin on esitetty, Zermelo-Fraenkelin aksioomattinen järjestelmä perustuu kahteen perusasiaan: joukkoon ja joukon alkioon. Tässä aksiomaattisessa järjestelmässä ei ole käytössä atomia, joten ensimmäiseksi joukoksi voidaan ottaa tyhjä joukko, $W_0 = \emptyset$. Kun joukosta otetaan potenssijoukko ja näin muodostuvasta joukosta uudelleen potenssijoukko, voidaan muodostaa kasvava juokkoketju, *kumulatiivinen hierarkia*:

$$W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \ldots.$$

Esitetään yllä oleva ketju avaten joukot aloittaen tyhjästä joukosta $W = \emptyset$. Nyt voidaan muodostaa tyhjästä joukkojen hierarkiaa:

$$
\begin{aligned}
W_0 &= \emptyset \\
W_1 &= \mathcal{P}(W_0) = \{\emptyset\} \\
W_2 &= \mathcal{P}(W_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
W_3 &= \mathcal{P}(W_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots \\
W_{n+1} &= \mathcal{P}(W_n)
\end{aligned}
$$

Tyhjästä joukosta rakennettua joukkojen hierarkiaa käytetään myös standardimääritelmänä luonnollisten lukujen muodostamiselle ja tätä kutsutaan von Neumannin määritelmäksi. Luonnolliset luvut esitetään seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots \\
n + 1 &= \{0, 1, 2, \ldots, n\}.
\end{aligned}
$$

Palataan tarkastelemaan alkuperäistä esitystä joukkojen kumulatiivisesta hierarkiasta. Nyt kun on määritelty W_n kaikilla luonnollisilla luvuilla n, voidaan asettaa $W_\omega = \bigcup_{n\in\omega} W_n$, missä ω on luonnollisten lukujen joukko. Tämän jälkeen voidaan muodostaa $W_{\omega+1} = W_\omega \cup \mathcal{P}(W_\omega)$ ja jatkaa tästä taas tasoja ylöspäin äärettömyyteen. Näin ollen aina kun on saavutettu n-vaihe hierarkian muodostamisessa, otetaan yhdistelmä aiemmista joukoista $W_\alpha = \bigcup_{\omega\in\alpha} W_\omega$. Nyt voidaan muodostaa taas seuraava vaihe $W_{\alpha+1} = W_\alpha \cup \mathcal{P}(W_\alpha)$. Edelllä esitetyt konstruktion vaiheet ω ja α ovat ordinaalilukuja, joihin palataan luvussa 4.4.

Näin muodostettu joukkojen kumulatiivinen hierarkia kokoaa kaikki joukot. Näin ollen siis A joukko, jos ja vain jos on se esiintyy kumulatiivisessa hierarkiassa — on siis oltava vaihe α, jolle $A \in W_{\alpha+1}$.

4 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä osassa käydään Burali-Fortin paradoksia varten tarvittavia määritelmiä ja todistetaan oleellisimpia lauseita, jotka on koostettu Endertonin teoksesta [8].

4.1 Relaatiot ja hyvinjärjestys

Joukko-opissa pari ei määrää alkioiden paikkaa, sillä esimerkiksi $\{x, y\} = \{y, x\}$ on tosi, vaikka $x \neq y$. Jotta voidaan määritellä joukko-opillisesti funktio, tarvitaan tapa merkitä alkiopareja uniikisti joukkona. Esimerkiksi funktiolle $f(x) = x + 1$ voidaan esittää annettu muuttujan arvo ja funktion arvo pareina, kuten $(3, 4)$, joka on samalla joukko, jonka alkiot ovat 3 ja 4. Nämä pitää voida merkitä uniikista, paikkatiedon säilyttäen joukko-opillisesti ilmaistua, jotta funktioilla operointi onnistuu. *Järjestetty pari* tarkoittaa, että alkiot ovat ainutlaatuisia. Järjestettyä paria merkitään $\langle x, y\rangle$.

Määritelmä 4.1. *Järjestetty pari* on $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Lause 4.2. *$\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$, jos ja vain jos on $u = x$ ja $v = y$.*

Todistus. Jos $u = x$ ja $v = y$, niin selvästi $\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$.

Oletetaan $\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$ eli $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Tällöin $\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ja $\{u,v\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Eli on oltava

$$\text{(i)}\ \{u\} = \{x\} \qquad \text{tai} \qquad \text{(ii)}\ \{u\} = \{x, y\}\,.$$

Vastaavasti

$$\text{(iii)}\ \{u,v\} = \{x\} \qquad \text{tai} \qquad \text{(iv)}\ \{u,v\} = \{x, y\}\,.$$

Oletetaan, että (ii) pitää paikkansa, jolloin $u = x = y$. Tällöin kohdat iii ja iv ovat siis ekvivalentit, eli $u = v = x = y$, jolloin lauseen väite pätee. Vastaava lopputulos syntyy, jos oletetaan kohta (iii) todeksi.

Jos oletetaan, että kohta i on tosi, pätee $u = x$, jolloin kohdasta iv seuraa, että $u = y$ tai $v = y$. Ensimmäisessä näistä kohta ii on voimassa ja todistus etenee, kuten edellä on esitelty. Jos jälkimmäinen pätee, $u = x$ ja $v = y$.

□

Relaatiolla tarkoitetaan tietyssä joukossa olevaa alkioiden suhdetta toisiinsa, esimerkkinä järjestysrelaatio $<$, jolloin voidaan tarkastella tämän relaation suhteen joukon alkioita toisiinsa. Joukko $\{2, 0, 5\}$ voidaan $<$-järjestää, jolloin saadaan $0 < 2, 0 < 5, 2 < 5$. Edellä esitettyjä toisiinsa vertailtuja lukupareja voidaan merkitä järjestettyinä pareina $\langle 0, 2\rangle, \langle 0, 5\rangle, \langle 2, 5\rangle$ sekä joukkona $< = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 0, 5\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$. Vastaavasti voidaan muodostaa muiden relaatioiden määrittämä joukko järjestettyjä pareja, joka onkin joukko-opin määritelmä relaatiolle:

Määritelmä 4.3. *Relaatio* on joukko järjestettyjä pareja. Jos joukko R on relaatio, niin tällöin siis

$$\forall u \in R \exists x \exists y\, (u = \langle x, y\rangle)\,.$$

Relaatiota $\langle x, y\rangle \in R$ voidaan merkitä myös lyhyemmin xRy. Tulevia relaation tarkasteluja varten määritetään relaatiolle seuraavat ominaisuudet:

Määritelmä 4.4. Olkoon R joukko. Tällöin joukolle R voidaan määrittää

määrittelyjoukko $\mathrm{dom}(R)$
$$x \in \mathrm{dom}(R) \leftrightarrow \exists y\ \langle x, y\rangle \in R,$$

arvojoukko $\mathrm{ran}(R)$
$$y \in \mathrm{ran}(R) \leftrightarrow \exists t\ \langle t, y\rangle \in R,$$

kenttä $\mathrm{fld}(R)$
$$\mathrm{fld}(R) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)\,.$$

Matematiikassa kuvaukset eli funktiot ovat sääntöjä, joilla liitetään lähtöjoukon (määrittelyjoukko) tietty alkio toisen joukon (arvojoukko) tiettyyn alkioon.

Määritelmä 4.5. *Funktio* on relaatio F, jolle kaikilla $x \in \mathrm{dom}(F)$ on olemassa vain yksi $y \in \mathrm{ran}(F)$, joka toteuttaa relaation xFy.

Merkintä xFy tarkoittaa, että funktio F saa pisteessä x arvon y. Tällöin voidaan merkitä myös $F(x) = y$.

Funktiota F kutsutaan funktioksi joukosta A joukkoon B, eli $F\colon A \to B$, jos $\mathrm{dom}(F) = A$ ja $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$.

Määritelmä 4.6. Olkoon $F\colon A \to B$ funktio. Tällöin funktio

$F\colon A \to B$ on *surjektio*, jos
$$\mathrm{ran}(F) = B.$$

$F\colon A \to B$ on *injektio*, jos
$$\forall x \in A \forall y \in A\ (F(x) = F(y) \to x = y)$$

$F\colon A \to B$ on *bijektio*, jos funktio F on sekä surjektio että injektio.

Seuraavia operaatioita käytetään yleensä vain funktioille, mutta ne ovat sovellettavissa myös relaatioille.

Määritelmä 4.7. Olkoot A, F ja G joukkoja. Näille voidaan määrittää

a) Joukon F *käänteisrelaatio* on
$$F^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid yFx\}\,.$$

b) Joukkojen F ja G *yhdistetty joukko* on
$$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t\colon (xGt \wedge tFy)\}\,.$$

c) Joukon F *rajoittuma joukkoon* A on
$$F \restriction A = \{\langle x, y\rangle \mid (xFy \wedge x \in A)\}\,.$$

d) Joukon A *kuva* joukon F *suhteen* on
$$F[A] = \mathrm{ran}(F \restriction A) = \{y \mid \exists x \in A (xFy)\}\,.$$

Määritellään seuraavaksi muutamia relaatioiden ominaisuuksia.

Määritelmä 4.8. Olkoot R relaatio ja A joukko. Tällöin

a) R on *refleksiivinen joukossa* A, jos

$$\forall x \in A(xRx)$$

b) R on *irrefleksiivinen*, jos

$$\forall x \in A(\neg xRx)$$

c) R on *symmetrinen*, jos

$$\forall x \forall y(xRy \to yRx)$$

d) R on *antisymmetrinen*, jos

$$\forall x \forall y(xRy \land yRx \to x = y)$$

e) R on *transitiivinen*, jos

$$\forall x \forall y \forall z(xRy \land yRz \to xRz).$$

Luonnollisten lukujen joukossa yhtäsuuruus toteuttaa yllä esitetyistä relaation ominaisuuksista selkeästi refleksiivisyyden, symmetrian ja transitiivisuuden ehdot. Laajennetaan ajatusta abstraktille tasolle:

Ajatellaan koulua, joka koostuu luokista ja voidaan määritellä relaatio R "kuuluu samalle luokalle". Tarkasteltaessa oppilaita a, b ja c relaation R suhteen, voidaan todeta, että: aRa, eli oppilas kuuluu itsensä kanssa samalle luokalle, olevan tosi R on reflektiivisyyden. Kun aRb on tosi eli oppilaat a ja b ovat samalla luokalla on R symmetrinen. Kun aRb ja bRc eli oppilaat a ja b ovat samalla luokalla ja oppilaat b ja c ovat samalla luokalla, tällöin selvästi myös oppilaat a ja c ovat samalla luokalla eli aRc. Täten R on myös transitiivinen.

Tämänkaltaisia relaatioita kutsutaan *ekvivalenssirelaatioiksi*.

Määritelmä 4.9. Relaatio R on *ekvivalenssirelaatio* joukossa A, jos ja vain jos se on refleksiivinen joukossa A, symmetrinen ja transitiivinen.

Joukon jako erillisiin osajoukkoihin määrittelee sen ekvivalenssirelaation. Tällöin jos tunnetaan ekvivalenssirelaatio R joukossa A, voidaan määritellä joukon A jako osajoukkoihin eli joukon A ositus. Yksinkertaisena esimerkkinä relaatio "olla sukua Cantorille" jakaa maailman ihmisistä osajoukon niistä ihmisistä, jotka ovat Cantorille sukua. Osajoukkoa, joka muodostuu ekvivalenssirelaation tuloksena kutsutaan *ekvivalenssiluokaksi*.

Tämän luvun alussa esiteltiin relaatioiden avulla esimerkki <-järjestämisestä joukossa. Laajennetaan tämä ajatus seuraavaksi:

Määritelmä 4.10. R on *lineaarinen järjestys* joukossa A jos ja vain jos R on relaatio joukossa A ja toteuttaa ehdot:

1) R on transitiivinen,

2) R toteuttaa trikotomian joukossa A, tällöin kaikille $x, y \in A$ pätee tasan yksi seuraavista ehdoista

$$xRy, \quad yRx, \quad x = y.$$

Olkoon R relaatio joukossa A. Tällöin järjestettyä paria $\langle A, R \rangle$ kutsutaan *struktuuriksi*.

Lause 4.11. *Olkoon R lineaarinen järjestys joukossa A. Tällöin on voimassa:*

i) Irrefleksiivisyys: Ei ole olemassa alkiota $x \in A$, jolle xRx.

ii) Yhtenäisyys: Kaikilla $x, y \in A, x \neq y$ vain toinen ehdoista xRy tai yRx pätee.

iii) R ei sisällä syklejä: joukossa A ei ole olemassa alkioita $x_1, \ldots, x_n$ siten, että

$$x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}Rx_n \wedge x_1.$$

Lineaarijärjestyksiä kutsutaan myös *ketjuiksi*.

Todistus. Oletetaan, että R on lineaarinen järjestys joukossa A.
Nyt (i) ja (ii) seuraavat selvästi trikotomian ehdoista.
(iii) Oletetaan, että $n \in A$ ja n_1Rn_2, n_2Rn_3 ja n_3Rn_1. Transitiivisuuden nojalla n_1Rn_1. Tästä aiheutuu ristiriita aiemmin osoitetun irreflektivisyyden nojalla.

□

Lineaarista järjestystä merkitään yleensä symbolilla <, jolloin voidaan merkitä esimerkiksi $x < y$.

Määritelmä 4.12. Relaatio R on *osittainen järjestys*, jos

1) R on transitiivinen,

2) R on irrefleksiivinen.

Lause 4.13. *Olkoon < osittainen järjetys. Tällöin*

i) vain yksi ehdoista on tosi

$$x < y, x = y, x > y.$$

ii) jos $x \leq y$ tai $y \leq x$ niin $x = y$.

Määritelmä 4.14. Joukon A *hyvinjärjestetys* on lineaarinen järjestys, jossa jokaisella A:n epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio.

Luonnollisten lukujen joukon tavallinen järjestys on selvästi hyvinjärjestys, joka siis on lineaarisesti järjestetty ja sisältää pienimmän alkion. Kokonaislukujen joukolla sen sijaan ei ole hyvinjärjestystä, sillä se ei toteuta pienimmän alkion ehtoa.

Lause 4.15. *Olkoon < joukon A lineaarijärjestys. Tällöin < on hyvinjärjestys, jos ja vain jos ei ole olemassa mitään funktiota $f \colon \omega \to A$, jolle $f(n^+) < f(n)$ kaikille $n \in \omega$.*

Lauseessa 4.15 esitettyä funktiota kutsutaan myös *väheneväksi ketjuksi*. Merkinnällä n^+ tarkoitetaan seuraajajoukkoa, joka muodostuu joukon n yhdisteestä joukon $\{n\}$ kanssa, kuten alla on esitetty.

Määritelmä 4.16. Jos n on joukko, niin sen *seuraajajoukko* on

$$n^+ = n \cup \{n\} \ .$$

Von Neumannin mukainen luonnolliseten lukujen seuraaja tarkoittaa määritelmän mukaan $n^+ = n + 1$.

Alla lauseen 4.15 todistus.

Todistus. Oletetaan, että on olemassa vähenevä ketju f eli $f : \omega \to A$ toteuttaa ehdon $f(n^+) < f(n)$ jokaisella $n \in \omega$. Tällöin $\mathrm{ran}(f) \subseteq A$ on epätyhjä joukko, jolla ei ole pienintä alkiota, jonka takia < ei ole hyvinjärjestys.

Tehdään oletus, että < ei ole hyvinjärjestys. Tällöin on olemassa $B \subseteq A$, jolla ei ole pienintä alkiota eli

$$\forall x \in B \exists y \in B (y < x)$$

Määritellään funktio $f : \omega \to A$ seuraavasti hyödyntäen valinta-aksioomaa:

> $b_0 \in B, f(0) = b_0$
>
> koska b_n ei ole joukon B pienin alkio, voidaan valita $b_{n^+} \in B$, jolle $b_{n^+} < b_n$ ja määritellä $f(n^+) = b_{n^+}$.

On siis todistettu, että $f(n^+) < f(n)$ kaikille $n \in \omega$. □

Määritelmä 4.17. Jos < on osittainen järjestys A:ssa ja $t \in A$, niin joukko

$$\mathrm{seg}\, t = \{x \mid x < t\}$$

on t:n määräämä *alkusegmentti*.

Määritelmä 4.18. Joukko A on *transitiivinen joukko*, jos ja vain jos sen jokaisen alkion alkio on A:n alkio, eli

$$\forall x \forall a \, (x \in a \land a \in A \to x \in A) \ .$$

Transfiniittisen induktion periaate: Olkoon < hyvinjärjestys joukossa A. Oletetaan, että $B \subseteq A$ ja kaikille $t \in A$ pätee

$$\mathrm{seg}\, t \subseteq B \ \to t \in B.$$

Tällöin $B = A$.

Transfiniittinen rekursioteoreema: Mille tahansa joukko-opilliselle kaavalle $\gamma(x, y)$ seuraava on teoreema:

> *Olkoon < hyvinjärjestys joukossa A. Oletetaan, että mille tahansa funktiolle f on olemassa yksikäsitteinen y, jolle $\gamma(f, y)$ on tosi. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen funktio F, jolle* $\mathrm{dom}(F) = A$ ja
>
> $$\gamma(F \restriction \mathrm{seg}\, t, F(t))$$
>
> *pätee kaikilla $t \in A$.*

4.2 Epsilon-kuvat

Olkoon $<$ hyvinjärjestys joukossa A ja $\gamma(x, y)$ kaava $y = \operatorname{ran}(x)$. Tällöin transfiniittinen rekursio antaa yksikäsitteisen funktion E, jolla

$$\begin{aligned} E(t) &= \operatorname{ran}(E \upharpoonright \operatorname{seg} t) \\ &= E[\operatorname{seg} t] \\ &= \{E(x) \mid x < t\} \quad \text{jokaisella } t \in A. \end{aligned}$$

Tätä merkitään $\alpha = \operatorname{ran}(E)$ ja joukkoa α kutsutaan struktuurin $\langle A, < \rangle$ *epsilonkuvaksi* eli ϵ-kuvaksi.

Lause 4.19. *Olkoon $<$ hyvinjärjestys joukossa A, $E(t) = \operatorname{ran}(E \upharpoonright \operatorname{seg} t)$ ja $\alpha = \operatorname{ran}(E)$. Tällöin*

a) $E(t) \notin E(t)$ jokaisella $t \in A$,

b) E on bijektio $A \to \alpha$,

c) Mille tahansa $s, t \in A$ pätee

$$s < t \leftrightarrow E(s) \in E(t),$$

d) α on transitiivinen joukko.

Todistus. a) Tehdään vastaoletus: Oletetaan, että joukko $B = \{t \in A \mid E(t) \in E(t)\}$ on epätyhjä. Olkoon pienin alkio t'. Funktion E määritelmän perusteella on siis olemassa $s < t'$, jolla $E(t') = E(s)$. Tällöin $E(s) \in E(s)$, josta seuraa, että $s \in B$. Tämä aiheuttaa ristiriidan pienimmän alkion t':n määritelmän kanssa, eli a-kohta on näin todistettu.

b) Koska $\alpha = \operatorname{ran}(E)$, on E selvästi surjektio. Pitää siis osoittaa, että E on myös injektio. Olkoot $s, e \in A$ ja $s \neq t$. Tällöin trikotomian mukaan on oltava joko $s < t$ tai $t < s$, oletetaan että $s < t$. Nyt funktion E määritelmän mukaan $E(s) \in E(t)$. Tiedetään a-kohdan perusteella, että $E(s) \notin E(s)$, joten $E(s) \neq E(t)$. Nyt E on todistettu olevan sekä surjektio että injektio, joten se on myös bijektio.

c) Funktion E määritelmän mukaan aina kun $s < t$, seuraa, että $E(s) \in E(t)$. Todistetaan toiseen suuntaan. Oletetaan, että $E(s) \in E(t)$, jolloin on olemassa $x < t$, jolle $E(x) = E(s)$. Koska edellisen kohdan perusteella E on injektio, on oltava $x = s$. On siis $s < t$.

d) Olkoon $E(t) \in \alpha$ ja $u \in E(t)$, kun $t \in A$. Nyt $u = E(s)$, missä $s \in A$ ja $s < t$, joten $u \in \alpha$. $\square$

4.3 Isomorfismi

Isomorfialla kuvataan samankaltaisuutta tai rakenteiden yhtäläisyyksiä varsinkin luonnontieteissä [18]. Matematiikassa rakenteiden yhtäläisyyttä tarkastellaan kuvauksen, *isomorfismin* avulla. Tämän luvun lauseiden todistukset on sivuutettu niiden teknisyyden takia, todistukset löytyvät lähteestä [8] sivuilta 186 — 187.

Lauseen 4.19 mukaan nähdään, että hyvinjärjestetty struktuuri $\langle A, <\rangle$ oli samankaltainen sen ϵ-kuvan kanssa, eli $\langle \alpha, \epsilon\rangle$ struktuurin kanssa. Jotta struktuurien samankaltaisuutta voidaan hyödyntää, pitää määritellä isomorfismi:

Määritelmä 4.20. Olkoon $\langle A, R\rangle$ ja $\langle B, S\rangle$ struktuureja. *Isomorfismi* struktuurista $\langle A, R\rangle$ struktuuriin $\langle B, S\rangle$ on bijektio $f\colon A \to B$, jolla on voimassa

$$\forall x \in A y \in A \left(xRy \leftrightarrow f(x)\, S f(y)\right).$$

Funktiota f kutsutaan isomorfismiksi ja struktuurien välistä isomorfismia merkitään $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$.

Lause 4.21. *Olkoon $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ ja $\langle C, T\rangle$ struktuureja. Tällöin:*

1) $\langle A, R\rangle \cong \langle A, R\rangle$,

2) Jos $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$, niin $\langle B, S\rangle \cong \langle A, R\rangle$,

3) Jos $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle \cong \langle C, T\rangle$, niin $\langle A, R\rangle \cong \langle C, T\rangle$. □

Lause 4.22. *Hyvinjärjestetyt struktuurit ovat isomorfisia, jos ja vain jos niillä on sama ϵ-kuva.* □

Apulause 4.23. Oletetaan, että funktio $f\colon A \to B$ on injektio ja $<_B$ on osittainen järjestys. Määritetään joukossa A relaatio $<_A$ seuraavasti

$$x <_A y, \text{ jos ja vain jos } f(x) <_B f(y),$$

kun $x, y \in A$. Tällöin seuraa

a) Relaatio $<_A$ on osittainen järjestys joukossa A

b) jos $<_B$ on lineaarinen järjestys, niin myös $<_A$ on lineaarinen järjestys

c) jos $<_B$ on hyvinjärjestys, niin myös $<_A$ on hyvinjärjestys.

4.4 Ordinaaliluvut

Hyvinjärjestettyjen struktuurien vertailua voidaan suorittaa vertailemalla niiden järjestyslukua eli *ordinaalilukua* [8].

Määritelmä 4.24. Olkoon $<$ hyvinjärjestys joukossa A. *Ordinaaliluku* on struktuurin $\langle A, < \rangle$ ϵ-kuva α.

Ordinaaliluku eli *ordinaali* on joukko, joka on hyvinjärjestetty ja sisältää kaikki sitä edeltävät ordinaalit. Äärellisten järjestettyjen joukkojen tapauksessa ordinaalit vastaavat luonnollisia lukuja ja niitä voidaan tarkastella von Neumannin luonnollisten lukujen määrittelyn kautta [19]. Luonnolliset luvut määriteltiin luvussa 3.3 ja tämän määritelmän mukaisesti kaikki edeltävät luonnolliset luvut olivat seuraavan luvun osajoukkoja. Näin töteutuu myös äärellisten joukkojen ordinaalilukujen kanssa.

Luvussa 2.3 sivuttiin karkealla tasolla joukon jäsenten järjestyslukuja eli ordinaalilukuja. Kuten edellä esitettiin, ordinaaliluvut vastaavat äärellisten järjestettyjen joukkojen tapauksissa suoraan luonnollisia lukuja, mutta myös äärettömien joukkojen tapauksessa voidaan määrittää äärettömälle hyvinjärjestetylle joukolle yllä olevan määritelmän mukainen ordinaaliluku — näistä pienin on ω, ensimmäinen transfiniittenen ordinaaliluku. Koska ω on ensimmäinen ääretön ordinaali, ei ole mahdollista muodostaa $\omega - 1$ tai se ei olisi ääretön — luvulla 0 ja ω on yhteys siten, ettei kummallakaan ole välitöntä edeltäjää, mutta näillä molemmilla on välitön seuraaja. Ordinaaleja, joilla ei ole välitöntä edeltäjää kutsutaan rajaordinaaleiksi, joista 0 on ensimmäinen ja seuraava on ω, ensimmäinen transfiniittinen rajaordinaali. [5]

Nyt voidaan lisätä ensimmäiseen äärettömään luonnollisia lukuja muodostaen lukujono

$$\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, ...$$

kunnes saavutetaan tämän listauksen äärettömyys, eli $\omega + \omega$. Tämä on seuraava rajaordinaali, joka voidaan esittää tulona $\omega \cdot 2$. Tälle voidaan jatkaa vastaava operaatiota ja jatkaa näin ollen ordinaalien luettelemista. Alla esimerkki rajaordinaaleista aloittaen ordinaalien luettelemista.

$$\begin{aligned}
&0, 1, 2, 3, , \ldots \\
&\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots \\
&\omega \cdot 2, (\omega \cdot 2) + 1, (\omega \cdot 2) + 2, \ldots \\
&\vdots \\
&\omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots \\
&\vdots \\
&\omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots \\
&\lambda
\end{aligned}$$

Ordinaalien esittämistä voidaan siis jatkaa aina edelleen, löytäen seuraavia rajaordinaaleja ja jatkaen niistä eteepäin. Näin ollen ei ole vain äärettömästi ordinaaleja — on äärettömästi äärettömiä ordinaaleja. [5]

Lause 4.25. *Oletetaan, että $<$ on joukon A osittainen järjestys sekä $C \subseteq A$. Tällöin $<$ on osittainen järjestys joukossa C. Jos A on hyvinjärjestys, saadaan $<$ hyvinjärjestys joukossa C.*

Todistus. Joukon C identtinen funktio $\mathrm{id}_C \colon C \to A$ on injektio, joten väite seuraa nyt suoraan apulauseesta 4.23. □

Lause 4.26. *Joko kaksi hyvinjärjestettyä struktuuria ovat isomorfiset tai toinen on isomorfinen toisen alkuosan kanssa. Siis jos $\langle A, <_A\rangle$ ja $\langle B, <_B\rangle$ ovat hyvinjärjestettyjä struktuureja, niin yksi seuraavista on tosi*

$$\langle A, <_A\rangle \cong \langle B, <_B\rangle \langle A, <_A\rangle \cong \langle \operatorname{seg} b, <_B\rangle\ \exists b \in B \langle \operatorname{seg} a, <_A\rangle \cong \langle B, <_B\rangle\ \exists a \in A.$$

Todistus. Ohitetaan, ks. [8] s. 190. □

Määritelmä 4.27. ϵ-relaatio *hyvinjärjestää* joukon A, jos relaatio $\epsilon_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \in y\}$ on joukon A hyvinjärjestys.

Lause 4.28. *Olkoon α transitiivinen joukko, joka on ϵ-relaatiolla hyvinjärjestetty. Tällöin α on ordinaaliluku.*

Todistus. Olkoon E funktio, joka muodostuu rakenteesta $\langle \alpha, \epsilon_\alpha\rangle$ sen α sen ϵ-kuvan. Osoitetaan, että $E(x) = x$ jokaisella $x \in \alpha$. Tällöin pätee

$$\operatorname{ran}(E) = \{E(x) \mid x \in \alpha\} = \{x \mid x \in \alpha\} = \alpha$$

Joukon α transitiivisuuden perusteella

$$x \in t \Leftrightarrow x \epsilon_\alpha t.$$

Tästä seuraa, että $\operatorname{seg} t = t$.

Oletetaan, että $E(x) = x$ pätee kaikilla $x \in \operatorname{seg} t$. Tällöin

$$\begin{aligned} E(t) &= \{E(x) \mid x \epsilon_\alpha t\} \\ &= \{x \mid x \epsilon_\alpha t\} \\ &= \operatorname{seg} t \\ &= t. \end{aligned}$$

Transfiniittisen induktion perusteella saadaan siis, että $E(x) = x$ eli E on identtinen kuvaus. □

Lause 4.29. *Olkoot α, β ja γ ordinaaleja. Tällöin seuraavat ovat tosia kaikille α, β ja γ:*

a) *Ordinaaliluvut muodostavat transitiivisen luokan: jokainen α:n alkio on ordinaali.*

b) *Ordinaalilukujen transitiivisuus: $\alpha \in \beta \in \gamma \to \alpha \in \gamma$.*

c) *Ordinaalilukujen irrefleksiivisyys: $\alpha \notin \alpha$.*

d) *Trikotomia: vain ja ainoastaan vain yksi vaihtoehto alla olevista on tosi*

$$\alpha \in \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \alpha \notin \beta.$$

e) *Kaikille epätyhjille joukoille S ordinaaleja on olemassa pienin alkio μ, ts. joukolla on hyvinjärjestys*

$$\mu \in \alpha \ tai \ \mu = \alpha \ kaikille \ \alpha \in S.$$

Todistus. a) Oletetaan, että $x \in \alpha$. Nyt α on ϵ-kuva jollekin hyvinjärjestetylle struktuurille $\langle A, < \rangle$. On olemassa $t \in A$, jolle $E(t) = x$. Osoitetaan, että x on ordinaali osoittamalla, että se on struktuurin $\langle \operatorname{seg} t, < \rangle$ ϵ-kuva.

Lauseen 4.25 mukaan struktuuri $\langle \operatorname{seg} t, < \rangle$ on hyvinjärjestetty. Struktuurin $\langle \operatorname{seg} t, < \rangle$ ϵ-kuvan on $E[\operatorname{seg} t] = E(t) = x$. Nyt siis on todettu, että x on ordinaali.

b) Tämä seuraa suoraan lauseen 4.19 c-kohdasta, jonka mukaan kaikki ϵ-kuvat ovat transitiivisia joukkoja.

c) Kuten lauseen 4.19 a-kohdassa todistettiin, aiheuttaa tässä vastaavasti vastaoletus $\alpha \in \alpha$ ristiriidan. On siis oltava $\alpha \notin \alpha$.

d) Trikotomian *korkeintaan yksi* -ehto seuraa transitiivisuudesta ja irrefleksiivisyydestä. Osoitetaan, että vain yksi ehto pätee. Lauseen 4.26 mukaan joko $\langle \alpha, \epsilon_\alpha \rangle \cong \langle \beta, \epsilon_\beta \rangle$ tai toinen on isomorfinen toisen segmentille. Tarkastellaan näitä kolmea tapausta.
1. $\langle \alpha, \epsilon_\alpha \rangle \cong \langle \beta, \epsilon_\beta \rangle$. Tällöin molemmilla on sama ϵ-kuva ja lauseen 4.28 mukaan $\alpha = \beta$.
2. $\langle \alpha, \epsilon_\alpha \rangle \cong \langle \operatorname{seg} \sigma, \epsilon_\beta \rangle$, missä $\sigma \in \beta$. Nyt σ on ordinaali, jolle $\operatorname{seg} \sigma = \sigma$ ja $\epsilon_\beta = \epsilon_\sigma$. Näin ollen saadaan

$$\langle \alpha, \epsilon_\alpha \rangle \cong \langle \sigma, \epsilon_\sigma \rangle.$$

Tästä saadaan 1. kohdan mukaisesti, että $\alpha = \sigma$, josta seuraa että $\alpha \in \beta$.
3. Vastaavasti kuin 2. kohta, voidaan määrittää tilanne, jossa $\langle \operatorname{seg} \sigma, \epsilon_\alpha \rangle \cong \langle \beta, \epsilon_\beta \rangle$. Tästä saadaan, että $\beta \in \alpha$.

e) Olkoon S epätyhjä ordinaalien joukko ja $\beta \in S$. Jos $\beta \cap S = \emptyset$, niin määritellään $\beta = \min S$. Kaikille $\alpha \in S$ pätee $\alpha \notin \beta$ ja nyt trikotomian perusteella joko $\beta \in \alpha$ tai $\beta = \alpha$.

Koska joukolla B on hyvinjärjestys ϵ_β, on tällöin joukossa $\beta \cap S$ pienin alkio μ. Oletetaan, että $\mu = \min S$ ja $\alpha \in S$. Jos nyt $\alpha \notin \beta$ niin trikotomian perusteella joko $\alpha \in \beta$ tai $\alpha = \beta$, joten varmasti $\mu \in \alpha$. Jos $\alpha \in \beta$ niin $\alpha \in \beta \cap S$, joten nyt *mu*:n minimaalisuuden perusteella joko $\mu \in \alpha$ tai $\mu = \alpha$.

$$\alpha \notin \beta \Rightarrow \beta$$

□

5 Ristiriidat ja paradoksit

Tässä luvussa esitellään Burali-Fortin paradoksin syntyyn johtaneet tapahtumat Cesare Burali-Fortin ordinaalilukujen artikkelista aina paradoksin muodostumiseen asti, joka kantaa nykyisin Burali-Fortin nimeä. Paradoksin muodostuminen lähtee liikkeelle Italiasta Burali-Fortin artikkelista, mutta saavuttaa muotonsa myöhemmin Bertrand Russellin (1872 — 1970) kautta pala kerrallaan. Luvun päälähteenä käytetään Mooren ja Garciadiegon artikkelia [11].

5.1 Cesare Burali-Forti

Italialainen matemaatikko Cesare Burali-Forti (1861-1931) oli ensimmäinen, jonka julkaistu artikkeli sisälsi joukko-opin antinomian [6]. Antinomia muodostuu kahdesta näennäisesti virheettömistä argumenteista, jotka johtavat vastakkaisiin johtopäätöksiin eli ristiriitaan [4].

Burali-Forti luennoi Peanon matemaattisesta logiikasta Torinon yliopistossa 1893-1894, jonka aikana hän julkaisi myös artikkelin Cantorin oppien mukaisesti transfiniittisista ordinaaleista Italialaisessa tieteellisessä lehdessä Logica Matematica otsikolla Sulle classi ordinate e i numeri transfinite. Burali-Forti kunnioitti ja peilasi Cantorin teoriaa artikkelissaan, mutta käsitti väärin hyvinjärjestetyn joukon määritelmän. Cantorin mukainen, vapaasti suomennettu määritelmä kuului seuraavasti:

> Järjestetty joukko on hyvinjärjestetty, jos se sisältää ensimmäisen alkion ja jokaisella alkiolla paitsi suurimmalla alkiolla on välitön seuraaja. Jokaisella äärellisellä tai äärettömällä joukolla alkioita, jolla on aito yläraja, on välitön seuraaja.

Seuraaja-alkiolla tarkoitetaan järjestetyssä joukossa seuraavaa joukkoa tai alkiota. Esimerkiksi luonnollisten lukujen hyvinjärjestys on $\mathbf{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$, jossa pienin alkio on 0 ja seuraava alkio 1, eli alkion 0 seuraaja-alkio on 1.

Burali-Forti sisällytti artikkelissaan kuitenkin vain seuraavat osat Cantorin määritelmästä:

> Järjestetty joukko on hyvinjärjestys jos
>
> a) joukossa on ensimmäinen alkio,
>
> b) jokaisella alkiolla, jolla on seuraaja-alkio, on myös välitön seuraaja-alkio.

Cantorin laveasanaisessa määritelmässä hyvinjärjestykselle Burali-Forti jätti huomioimatta, että jokaiselle äärettömälle joukolle, jolla on yläraja, on pienin yläraja. Tämän jälkeen Burali-Forti keskittyi kardinaalilukujen trikotomiaan ja muodosti kardinaalien trikotomialle seuraavat ehdot:

1) Jos A on erillinen perhe epätyhjiä joukkoja, niin joukon A kardinaaliluku on yhtä suuri tai pienempi kuin joukon A yhdisteen kardinaaliluku.
2) Joukoille A ja B on olemassa funktio $f\colon A \to B$, joka on yksi-yhteen tai surjektio.

Seuraavaksi Burali-Forti pyrki muodostamaan trikotomian pitävyyttä ordinaalilukujen välillä. Hän pyrki määrittämään kaksi "täydellisesti järjestettyä" joukkoa, α ja β, jotka muodostaisivat ristiriidan trikotomian suhteen. Tämä ristriita trikotomian suhteen tarkoittaisi ettei mikään näistä olisi totta: $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ tai $\beta \in \alpha$. Burali-Forti lisäsi hyvinjärjestyksen ehtoihin kohdan, jolloin nämä kolme ehtoa muodostivat täydellisesti järjestyn joukon ehdot. Täydellisesti järjestetyn joukon ehdot olivat:

a) joukossa on pienin alkio,

b) jokaisella alkiolla, jolla on seuraava alkio on myös seuraava alkio,

c) joukossa A kaikille x pätee, että jos x:lle on olemassa edeltäjä, niin on olemassa y, jolla ei ole edeltäjää ja x:n ja y:n välissä on määrällisesti elementtejä.

Burali-Forti aloitti kaikkien täydellisesti järjestettyjen joukkojen eli kaikkien ordinaalilukujen joukon määrittelyn trikotomian kautta. Hän aloitti olettamalla täydellisesti järjestetyn, kaikkien erilaisten täydellisesti järjestetyn joukkojen joukon NO, *numeri ordinale*. Täydellisesti järjestetty joukko vastaa siis nykykielessä ordinaalia ja kaikkien täydellisten joukkojen joukko vastaa kaikkien ordinaalien joukkoa. Pitäydyn kuitenkin tutkielman tässä vaiheessa esittämään Burali-Fortin artikkelin sisältöä sen julkaisun aikasella tavalla.

Burali-Forti osoitti, että NO:n toteuttaessa trikotomian, oli NO itsessään myös täydellisesti järjestetty joukko. NO:n määritelmän mukaan joukon NO ordinaali Ω kuului joukkoon NO. Nyt joukon NO järjestys α kuluu joukkoon NO. Burali-Fortin hyvinjärjestelyn määritelmän mukaan seuraa, että $\alpha \leq \Omega$ sekä täydellisesti järjestetyn joukon ehtojen mukaan nyt myös Ω:n seuraaja $\omega + 1$ kuuluu joukkoon NO. Tämä tarkoittaa, että molemmat $\Omega < \Omega + 1$ sekä $\Omega + 1 \leq \Omega$ ovat paikkansa pitäviä samanaikaisesti, mistä muodostuu ristiriita. Burali-Forti ei tehnyt eroa myöskään ordinaalilukujen joukon ordinaalille ja sen sisältämille ordinaaleille, vaan ne olivan "samanarvoisia", joukkoja. Myöhemmin tutkielmassa esitellään Russellin ajatuksia kaikkien ordinaalilukujen joukosta, jossa hän selvästi viittaa, että kaikkien NO joukossa olevien ordinaalien ja koko NO joukon ordinaalin tyypillä on ero. Kuitenkin, tästä ordinaalilukujen ristiriidasta johtuen Burali-Forti uskoi löytäneensä Cantorin ordinaalien teoriasta rajoituksen — ei paradoksia.

Burali-Fortin määrittelmille ehdoille hyvinjärjestetylle joukolle on esimerkiksi:

$$A = \{\arctan m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{\pi + \arctan n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Tämä tuottaa joukon, jolla on Burali-Fortin ehtojen mukaisesti ensimmäinen alkio ja jokaisella alkiolla, paitsi suurimmalla alkiolla, on seuraaja-alkio. Kuitenkin verrattuna hyvinjärjestyksen ehtoihin 4.14, jossa jokaisella A:n epätyhjällä osajoukolla on pienin alkoi. Nyt määritelty joukko A ei tätä toteuta, sillä n saa arvoja funktion $\arctan x$ mukaisesti, jolloin jokaiselle osavälille ei voida määrittää pienintä alkiota, koska väli on ylinumeroituva.

5.2 Ristiriidasta paradoksiksi

Burali-Forti päättyi artikkelissaan ristiriitaan, joka osoitti hänestä ehtojen riittämättömyyden. Samana vuonna Burali-Fortin artikkelin [2] julkaisunsa jälkeen hän luki Cantorin artikkelia, jossa Cantor esitti hyvinjärjestyksen ordinaalien toteuttavan trikotomian, joka oli vastoin Burali-Fortin artikkelin oletuksia.

Burali-Forti ei kyseenalaistanut Cantoria, vaan julkaisi huomatuksen, jossa ilmoitti väärin ymmärtäneensä Cantorin määritelmän hyvinjärjestykselle. Julkaisussaan hän kävi läpi artikkeliaan nykyisten tietojensa valossa. Vastoin alkuperäistä artikkeliaan, hän päätteli nyt kaikkien hyvinjärjestysluokkien olevan täydellisesti järjestettyjä, mutta kaikki täydellisesti järjestellyt joukot eivät olleet hyvinjärjestyksiä. Tässä vaiheessa Burali-Forti oli uskossa, ettei hänen ja Cantorin tutkimuksissa ole ristiriitaa.

Bertrand Russell teki merkittävää työtä kerätessään matematiikkaa yksiin kansiin kirjoittaessaan kirjaa *Principia Mathematica*, jossa myös Burali-Fortin paradoksi ensimmäistä kertaa mainitaan sivulla 60 ristiriitana [20]. Russellin kiinnostus paradokseihin on todennäköisesti herännyt jo ennen hänen työtään matematiikan parissa ja kohdistunut filosofisiin paradokseihin 1800-luvun lopun Saksassa. Russell uskoi löytäneensä Cantorin joukko-opista virheellisyyksiä, kuten suurimman kardinaalin ongelman ja kaikkien joukkojen joukon ristiriitaisuuden. Russell käsitti osittain kaikkien ordinaalilukujen joukon käsittelevän samaa ongelmaa, mitä hän oli kardinaalilukujen osalta yrittänyt selvittää.

Russell tutki samanaikaisesti monia paradokseja, joissa oli samankaltaisuuksia. Näitä olivat nykyään Russellin nimeä kantava paradoksi, joka käsittelee niiden joukkojen joukkoa, jotka eivät ole itsensä alkioita sekä kaikkien joukkojen joukon kardinaliteettia, jotka kutsutaan Cantorin paradoksiksi. Huomatessaan, ettei sen aikaisten joukko-opillisten operaatioiden kanssa ollut mahdollista sulkea paradokseja pois, tuli niistä teema hänen kirjaansa.

Vuonna 1903 kirjansa ensimmäisessä painoksessa kirjaansa Russell esittelee Burali-Fortin artikkelin löydöksen viitaten sen muodostavan ristiriidan seuraavasti, vapaasti suomennettuna:

> Voidaan osoittaa, että jokaisella hyvinjärjestetyllä sarjalla on ordinaaliluku, ordinaalilukujen sarja aina annettuun ordinaaliin sisältää annetun ordinaalin ja ylittää sen, sisältäen myös annetun ordinaalin seuraajan. Täten kaikkien ordinaalien sarja on hyvinjärjestetty ja sen ordinaaliluku on Ω. Mutta nyt kaikkien ordinaalilukujen sarja sisältää Ω sekä $\Omega + 1$, joka on suurempi kuin Ω. Täten Ω ei ole kaikkien ordinaalilukujen ordinaali. [20]

Kuten Burali-Fortin yhtenä ongelmana oli Cantorin sanojen väärin ymmärtäminen, käytti Russell teoksessaan joukoista muotoa sarja. Tällaisia kielellisiä eroavaisuuksia saman asian käsittelyssä kohtaa nykyään matematiikassa harvoin. Tämä on Russellin ja Whitheadin matematiikkaa yhteen kokoavan työn ansiota

Russell kutsui Burali-Fortin paradoksin kaltaista *kaikkiin* viittaamista *noidankehä virheeksi*. Burali-Fortin paradoksissa noidankehän aiheuttaa ordinaalilukujen määritelmän käyttö eri tapauksissa. Alkutapauksena on kaikkien ordinaalilukujen joukko. Tämän jälkeen Russellin mukaan muodostetaan eri tapaus, eli kaikkien ordinaalilukujen joukon ordinaalin muodostaminen. Kuten aiemminkin, tässä kohtaa muodostuisi ristiriita. Russell esittää, että nämä ovat eri tapaukset eikä kaikkien ordinaalilukujen joukon ordinaalia voida käsitellä kuten sen sisältämiä ordinaaleja. [20]

Kuitenkin, Russell myös esittää, että tämä paradoksi voidaan estää olettamalla kaikkien ordinaalien luokan olevan aina hyvinjärjestetty.

1900-luvun alussa joukko-oppi sai vastustusta osaksi juurikin sen sisältämien paradoksian takia. Ne kirvoittivat keskustelua alan lehdissä, sillä joukko-oppia halveksivat ottivat paradokseja käsittelyyn perustellakseen sen puutteita. Näin teki muun muassa Henri Poincaré, joka analysoi Burali-Fortin artikkelia kirjoittaessaan artikkelejaan joukko-oppia vastaan. Hän esitti Burali-Fortin väärinymmärryksen täydellisesti järjestettyjen ja hyvinjärjestettyjen joukkojen välillä sekä vaikkei Burali-Fortin artikkeli itsessään sisältänyt paradoksia, oli se hyvin helposti muokattavissa paradoksaaliseksi.

Paradoksit ovat nostaneet tunteita matemaatikoissa, osaa kiehtoen ja lumoten, osaa vihastuttaen. Molemmissa tunteiden ääripäissä on kuitenkin tapahtunut matematiikan kannalta vain positiivista, kiihkeästi asiaan suhtautuneiden henkilöiden pyrkiessä joko todistamaan paradoksaaliset ominaisuudet vääriksi tai toisten osapuolten näitä puolustaessa, lopputulema on sama: tietoisuuden lisääntyminen.

5.3 Burali-Fortin paradoksi

Esitän tässä Burali-Fortin paradoksin sen nykyisessä muodossaan, jonka Russell on muodostanut.

Burali-Fortin paradoksi

Ei ole olemassa kaikkien ordinaalilukujen joukkoa.

Todistus. Lauseen 4.29 mukaan kaikkien ordinaalien luokka on hyvinjärjestetty ϵ-relaatiolla.

Olkoon kaikkien ordinaalien joukko Ω. Tällöin lauseen 4.28 mukaan joukko Ω on itse ordinaali, mistä seuraa että $\Omega \in \Omega$ eli kaikkien ordinaalian joukko olisi itsensä alkio. Tämä aiheuttaa ristiriidan lauseen 4.29 irreflektiivisyyden kanssa. □

Kuten huomataan, nykyisen joukko-opin valossa voidaan Burali-Fortin paradoksi yksinkertaisesti todistaa epätodeksi **ZFC** aksiomaattisessa järjestelmässä. Burali-Fortin paradoksilla olikin juuri aksiomatisointiin vauhdittava vaikutus. Cantor itsessään ei pitänyt Burali-Fortin paradoksia ongelmallisena, sillä hän oli jo aiemmin oivaltanut, että jotkut joukot ovat liian suuria joukoiksi [10]. Esimerkiksi kaikkien ordinaalilukujen joukkoa Cantor ei pitänyt joukkona, joka itsessään poisti hänen mielessään tämän paradoksaalisuuden [10]. Kuten tätä joukkoa ja muita *kaikkiin* viittaavia joukkoja hän piti itsessään liian suurina koottaviksi yhdeksi joukoksi ja kutsuikin näitä absoluuttisiksi äärettömiksi [10].

Kuitenkaan Cantorin ajatukset eivät yksinään riittäneet ja paradoksit vauhdittivatkin joukko-opin aksimatisointia ja määrittelyä siksi, millaisena se on tässä tutkielmassa esitetty.

6 Seuraukset

Paradoksit ovat matematiikan kehitystä eteenpäin ajava voima. Kokonaan uuden matematiikan haaran muodostuminen 1900-luvulla oli merkityksellistä, kuten myös siitä kehittynyt filosofinen käsitys. Joidenkin matemaatikoiden mielestä paradoksit veivät pohjan kokonaan joukko-opilta. Kuitenkin Burali-Fortin ja sen kaltaisten joukkojen joukko -paradoksien olemassaolo voitiin poistaa määrittämällä joukko seuraavien ehtojen kautta.

> Joukko on mikä tahansa kokoelma olioita, jos se täyttää seuraavat ehdot:
>
> 1. Jokaisesta oliosta voidaan logiikan sääntöjen mukaan perustella, kuuluuko se kokoelmaan.
> 2. Mistä tahansa kahdesta kokoelman jäsenestä voidaan päätellä logiikan sääntöjen mukaisesti, ovatko ne samat eli identtiset. [16]

Cantor oli aiemmin jo esittänyt, ettei hänen käsityksensä joukosta ollut mikä tahansa kokoelma olioita ilman rajoitteita, mikä mahdollisti joukko-opillisten paradoksien muodostumisen. Tälläisiä ovat esimerkiksi kaikkien joukkojen joukko. Cantorin joukko-oppia käytettiin siis väärin käyttäen intuitiivisen triviaalia joukon käsitettä, jolla voidaan muodostaa joukko mistä vain, mikä aiheutti väärin ymmärrystä ja jopa riitaisuutta matematiikan yhteisössä. Joukko-opin paradoksit olivat olennainen osa ymmärryksen kehityksessä kohti nykyaikaista käsitystä äärettömyydestä – nyt voitiin riidattomasti operoida erilaisilla äärettömyyksillä ja vertailla näitä. Nämä johtivat täysin uudenlaiseen käsitykseen äärettömyydestä eli absoluuttiseen äärettömyyteen, joka toi matematiikkaan uuden ulottuvuuden.

Paradokseja joukko-opissa tutkivat sekä joukko-opin kannattajat että myös sen kaatamiseen pyrkivät – puolustajat pyrkivät löytämään paradokseilta vapaan, puhtaan pohjan kaikelle matematiikalle ja toinen osapuoli taas pyrki osoittamaan paradokseilla joukko-opin perustavanlaatuisia vaillinaisuuksia. Kuitenkin nämä molemmat puolet veivät matematiikkaa eteenpäin ja paikkasivat joukko-opin ymmärrystä, minkä takia siitä on muotoutunut nykyisen matematiikan perusta.

Paradoksaalisuus on olennainenkin osa matematiikkaa. Sitä ei ole saatu poistettua, eikä luotua täysin puhdasta pohjaa matematiikalle. Toisaalta voidaan pohtia myös, onko se mielekästä? Matematiikan ymmärryksen koko ajan kohentuessa on osa paradokseista hyväksyttävä olevan osa matematiikkaa, kuuluvan osaksi matematiikan luontoa — jota emme välttämättä vieläkään ymmärrä. Osa paradokseista johtuu myös vain ihmismielen intuition vastaisuudesta – se miten ajattelemme olevan ja tapahtuvan, ei matemaattisesti olekaan lainkaan paradoksaalista paradoksaalista, vaan ihmismielen pyrkimys siirtää asiat reaalimaailmaan, joka on matematiikassa rajoite monin tavoin.

Lähteet

[1] Balaguer, M. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, New York. ProQuest Ebook Central 1998.

[2] Burali-Forti. C. Una Questione Sui Numeri Transfiniti, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 11 1897*, 154-164.

[3] Côté, G. Mathematical Platonism and the Nature of Infinity, *Open Journal of Philosophy, 3, 2013*, 372-375.

[4] Ferreirós, J. *Labyrinth of Thought — A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, 2007.

[5] Friend, M. *Introducing Philosophy of Mathematics*, Routledge, 2007.

[6] Grattan-Guinness I. *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*, Geral Duckworth, 1980.

[7] Ebbinhaus, H. *Ernst Zermelo — An Approach to His Life and Work*, Springer, 2007.

[8] Enderton, H. *Elements of set theory*, New York Academic press inc., 1977.

[9] Knuuttila. S. Äärettömän käsitteestä myöhäiskeskiajalla, toim. Oikkonen, J. kokoelmassa: *Katsauksia matematiikan historiaan*, Ab Gaudeamus Oy, 1982

[10] Moore, A. W. *The Infinite*, Taylor Francis Group, London 1991.

[11] Moore, G.. Garciadiego, A. Burali-Forti's Paradox: a Reappraisal of Its Origins, *Historia Mathematica, 8, 1981*, 319-350.

[12] MOT Oxford Dictionary of English: *Platonism*, Kielikone Oy. Haettu 22.9.2022

[13] Schimmerling E. *A Course on Set Theory*, Cambridge University Press, 2011.

[14] Stillwell, J. *Roads to Infinity : The Mathematics of Truth and Proof*, CRC Press LL, 2010.

[15] Stillwell, J. *Mathematics and Its History*, Springer, 2010.

[16] Väänänen, J. Äärettömyyden käsite Georg Cantorilla, toim. Oikkonen, J. kokoelmassa: *Katsauksia matematiikan historiaan*, Ab Gaudeamus Oy, 1982

[17] Wijeratne, C., Zazkis, R. On Painter's Paradox: Contextual and Mathematical Approaches to Infinity, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2015, 163–186.

[18] Tieteen termipankki *Isomorfia*, Haettu 1.12.2022

[19] Quine, W. V. *Set theory and its logic*, Cambridge Press, 1969.

[20] Whitehead, A. N., Russell, B. *Principia mathematica*. Silver Spring: Merchant, 2007.

[21] Williams, R. S. How Big is the "Biggest" Prime Number? *Math Horizons, 28, 2021*, 5-7.