Tampereen yliopisto

Mathias Koch

Mikä ihmeen joukko-oppi?

Joukko-opin ymmärtämisen ja kielentämisen mahdollisuudet sekä haasteet lukion pitkässä matematiikassa

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2023

Tiivistelmä

Mathias Koch: Mikä ihmeen joukko-oppi? : Joukko-opin ymmärtämisen ja kielentämisen mahdollisuudet sekä haasteet lukion pitkässä matematiikassa
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2023

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkitaan, mikä rooli joukko-opilla on nykypäivän suomalaisen lukiokoulutuksen pitkässä matematiikassa. Tutkielma pyrkii luomaan yleiskatsauksen joukko-opista sekä siihen liittyvistä tekijöistä oppimisen ja osaamisen näkökulmasta. Ennen varsinaista tutkimusta tutkielmassa käydään läpi joukko-opin ja sen opetuksen taustoja, teoreettisena viitekehyksenä joukko-oppia matematiikassa sekä siihen liittyvää matemaattista ajattelua ja kielentämistä sekä joukko-opin osuutta lukion pitkässä matematiikassa muun muassa opetussuunnitelmissa, oppikirjoissa ja pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa. Tutkimuksen painopiste on tutkia kyselytutkimuksena, miten lukion pitkän matematiikan opiskelijat osaavat joukko-oppia. Lisäksi tämän perusteella arvioidaan, mikä rooli oppikirjoilla on joukko-opin ymmärtämisessä ja kielentämisessä sekä mitkä ovat joukko-opin mahdollisuudet ja haasteet tulevaisuuden lukion pitkässä matematiikassa. Tutkimustulos osoittaa, että lukion pitkän matematiikan opiskelijat osaavat joukko-oppia yleisesti alkeellisella tasolla. Tämän perusteella voidaan päätellä, että lukion pitkässä matematiikassa olisi potentiaalia opettaa enemmän joukko-oppia ja tällä saattaisi olla yleisesti matematiikan oppimisen kannalta positiivisia vaikutuksia. Tähän liittyvät haasteet voivat ilmetä kuitenkin joukko-opin kielentämisessä, jonka perusteella on syytä pohtia muun muassa sitä, millä tavalla joukko-opin opetus toteutetaan didaktisesti, ja tässä esimerkiksi opetussuunnitelman ja oppikirjojen merkitys korostuu.

Tämän tutkielman tarkoitus on tuoda lisäarvoa pitkän matematiikan oppimäärän laadun arviointiin. Lisäksi tarkoitus on tuoda lisää tietoa joukko-opin vaikutuksista matematiikan ymmärtämiseen ja oppimiseen siten, että se palvelee pitkän matematiikan osaamista kokonaisuutena. Tutkielmasta saatava hyöty auttaa kehittämään pitkän matematiikan opetusta tulevaisuudessa.

Avainsanat: joukko-oppi, kielentäminen, lukio, pitkä matematiikka, matemaattinen ajattelu

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Matematiikkaa ei olisi olemassa ilman joukko-oppia. Tämä on väite, jonka voidaan ajatella pitävän paikkaansa, kun matematiikkaa tarkastellaan numeroina, jotka edelleen muodostuvat erilaisista matemaattisista olioista. Joukko-opin avulla voidaan perustella oikeastaan lähes kaikkien matematiikan osa-alueiden ja teorioiden olemassaoloa yhdessä logiikan kanssa. Esimerkiksi analyysissa joukko-oppi määrittelee paljon lukujen ja funktioiden välisiä suhteita ja algebrassa puolestaan ryhmien, renkaiden ja kuntien ominaisuuksia. Joukko-oppi on siis vaikuttamassa tavalla tai toisella matematiikan rakenteissa, ja siksi onkin tärkeää ymmärtää sen lainalaisuuksia, jotta voi ymmärtää myös laajempia matematiikan aihekokonaisuuksia.

Niin joukko-opissa kuin ylipäänsä matematiikassa on olennaista perehtyä kielentämisen käsitteeseen. Matematiikan oppiminen rakentuu kielentämiselle, sillä se muodostaa erilaisia merkityksiä matemaattisessa ajattelussa. Esimerkiksi jokin luku voidaan ilmaista sekä numeerisena symbolina, puhuttuna ja kirjoitettuna kielenä että kappaleiden määränä. Nämä erilaiset ilmaisutavat luovat edellytykset sille, miten matematiikkaa on mahdollista oppia ja opettaa. Erityisesti joukko-opissa nämä ilmaisutavat ovat varsin tavallisia ja niiden avulla voidaan helposti perustella erilaisia tilanteita toteen. On siis tärkeää, että joukko-opin avulla pystytään havainnollistamaan mahdollisimman monipuolisesti myös joukko-oppiin liittyviä rakenteita, sillä niiden tarve voi ilmetä myös muissa matematiikan osa-alueissa.

Joukko-oppia on myös syytä tarkastella tarkemmin osana matematiikan osaamista. Tässä tutkielmassa onkin tutkimusmielessä mielenkiintoista selvittää, miten tavallisessa koulumatematiikassa joukko-oppia ymmärretään. Tähän oiva kohderyhmä on lukion matematiikka, jossa joukko-oppi näyttäytyy ensimmäisen kerran alkeellisesti osana laskemista. Olennaista onkin tutkia muun muassa sitä, miten joukko-oppia ylipäänsä ymmärretään ja miten se auttaa hahmottamaan uusia matemaattisia merkintöjä ja abstrakteja rakenteita. Tähän liittyen on myös perusteltua luoda katsaus lukion pitkän matematiikan oppimateriaaleihin ja niiden esitystapoihin, sillä ne tarjoavat oppimisen kannalta hyvän oppimisympäristön ja tavan rakentaa oppimisprosessia. Kokonaisuutena edellä mainittujen asioiden tutkiminen luo käsityksen siitä, mikä on joukko-opin tila suomalaisessa koulumatematiikassa. Jotta tutkimusasetelma säilyy selkeänä ja mielekkäänä, tämä tutkielma keskittyy tarkastelemaan joukko-oppia rajatusti vain lukion pitkässä matematiikassa.

Tämän tutkielman tavoite on kertoa lukijalle, mikä merkitys joukko-opilla on koulumatematiikassa ja miksi se on merkityksellistä matematiikan oppijalle. Tarkoituksena on aluksi luvussa 2 selvittää joukko-opin ja sen opetuksen taustoja historiassa. Kyseinen luku antaa katsauksen joukko-opin alkujuurilta aina uuteen matematiikkaan sekä sen roolista suomalaiseen oppikouluun ja peruskouluun. Luvussa 3 käydään läpi joukko-opin teoreettinen osuus, jossa lukijalle tulee tarkemmin tutuksi sen matemaattinen luonne. Seuraavaksi luvussa 4 käydään läpi matematiikan ja kielentämisen välistä suhdetta ensin teoreettisen viitekehyksen kautta yleisellä tasolla. Samassa yhteydessä tarkastellaan kielentämistä konkreettisemmin myös joukko-opissa. Luvussa 5 luodaan katsaus lukion pitkään matematiikkaan ja miten siellä joukko-oppi ilmenee. Luvusta 6 lähtien toteutetaan tutkimus, josta edetään lukuun 7 esittelemään sen tulokset ja analyysi. Lopuksi luvussa 8 käydään läpi tutkimuksen johtopäätöksiä sekä luvussa 9 käydään läpi koko tutkielmaan liittyvää pohdintaa.

2 Joukko-opin ja sen opetuksen taustoja

Tässä luvussa käydään läpi lyhyesti joukko-opin ja sen opetuksen taustoja yleisellä tasolla. Luvun tarkoitus on antaa lukijalle perustietämystä joukko-opin historiasta, luoda katsaus tämän kautta uuteen matematiikkaan sekä esitellä joukko-opin roolia suomalaisen koulutusjärjestelmän kontekstissa. Lisäksi käydään läpi joukko-opin aiempaa tutkimusta vuosien varrelta.

2.1 Historia

Joukko-oppi on matematiikan ala, joka tutkii joukkoja ja niiden ominaisuuksia. Se on logiikan kanssa yksi matematiikan vanhimmista ja perustavimmista aloista ja sen merkittävimpänä perustajana on pidetty saksalaista matemaatikkoa Georg Cantoria (1845–1918). Poiketen matematiikan tavanomaisten oppialojen synnyistä ja kehityksistä, joissa ovat olleet tyypillisesti vuorovaikutuksessa monet eri tutkijat, joukko-oppi on saanut alkunsa Cantorin yhdestä teoksesta nimeltä *On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers*, joka on julkaistu vuonna 1874. Teos sisältää artikkelin nimeltä *Cantor's first set theory article*, jonka merkitys on suuri joukko-opin synnyssä. Ajatus Cantorin joukko-opin löytämiseen tulikin alun perin hänen työstään Fourier-sarjoista. (Cantor, 1874; Enderton, 1977)

Ennen Cantoria muun muassa äärettömän käsite oli monille matemaatikoille ongelmallinen. Aiheeseen oli kuitenkin perehtynyt kunnolla ensimmäisen kerran Bernard Bolzano (1781–1848), joka tutki äärettömien joukkojen olemassaoloa. Myöhemmin vuonna 1872 itse Cantor tapasi matemaatikko Richard Dedekindin (1831–1916), jolta hän sai vaikutteita ajatustyöhönsä, joka lopulta johti vuonna 1874 julkaistuun teokseen. Pian tämän jälkeen Cantorin joukko-oppi sai suosiota osakseen, kun hänen käsitteet ja teoriat osoittautuivat käyttökelpoisiksi esimerkiksi tutkittaessa bijektion ominaisuuksia, reaalilukujen ja kokonaislukujen joukkojen välistä mahtavuutta eli kardinaliteettia sekä "Cantorin paratiisia", joka havainnoi äärettömyyttä ja potenssijoukon ominaisuuksia. Myöhemmin vuonna 1901 kuitenkin keksittiin Russellin paradoksi, joka todistaa Cantorin naiivin joukko-opin ristiriitaiseksi, minkä seurauksena joukko-oppiin kehitettiin useita aksioomajärjestelmiä, joista tunnetuin on Zermelon-Fraenkelin aksioomat. (Dauben, 1979; Jech, 1978)

2.1.1 Uusi matematiikka

Uusi matematiikka on ollut käytetty käsite erityisesti 1960- ja 1970-luvuilla, jolloin sen suosio oli korkea länsimaissa. Uuden matematiikan synty tapahtui kuitenkin jo vuonna 1957, kun Neuvostoliitto laukaisi Sputnik nimisen satelliitin avaruuteen. Sorvalin (Lyyra, 2006) mukaan tämä johti länsimaissa siihen ajatukseen, että Neuvostoliitto edustaa edistyksellisyyttä ja tulevaisuutta suurvaltana. Tämän johdosta länsimaissa havahduttiin siihen, että matematiikan opetusta olisi tarvetta uudistaa. Matematiikan rooli nähtiinkin erityisesti teknologian kehityksenä, johon haluttiin vaikuttaa koulutuksen kautta. Kuitenkin jo vuodesta 1952 lähtien uudistustarvetta ilmeni länsimaissa, mutta varsinainen käännekohta tapahtui vasta Neuvostoliiton satelliitin laukaisusta.

Uusi matematiikka toi tullessaan monia uusia matematiikan aihealueita kouluopetukseen. Näitä olivat joukko-opin lisäksi muun muassa symbolinen logiikka, topologia, Boolen algebra ja abstrakti algebra. Näiden pyrkimyksenä oli syventää matematiikan ymmärrystä, ymmärtää paremmin sen rakennetta ja kannustaa oppilaita käsitteiden löytämiseen. Edelleen tämän uskottiin antavan virikkeitä matematiikan oppimiseen. (Kline, 1973, 17; Fremont, 1967, 80) Joukko-opin rooli oli kuitenkin tässä merkittävin, sillä sen käsitteiden avulla pystyttiin määrittelemään muiden aihealueiden peruskäsitteitä. Sen hyödyllinen ominaisuus olikin matemaattinen yhteys matematiikan eri aihealueiden välillä, mutta toisaalta sen pedagogisesta roolista oli paljon erimielisyyksiä. Tähän liittyen uuden matematiikan luonne oli pitkälti tutkimispainotteista, ja tästä syystä oppilaat työskentelivät usein ryhmissä keksiäkseen teorioita oppikirjoissa esitetyistä ongelmista, mikä osaltaan haastoi myös opettajia pedagogisesti enemmän.

Uusi matematiikka sai myös paljon arvostelua osakseen. Sen todettiin olevan liian kaukana tavanomaisesta matemaattisesta kokemusmaailmasta ja vievän tilaa perusasioiden, kuten aritmetiikan, opetuksesta. Tämä asetti opettajille uusia vaatimuksia, koska esimerkiksi joukko-oppi oli heille kohtalaisen vieras aihealue. (Junnila, 1995, 101) Myös vanhemmilla oli tämän takia usein haasteita neuvoa lapsiaan matematiikan tehtävissä. Lopulta todettiin, että uusi matematiikka ei toiminut ja se menetti suosiotaan. Myöhemmin Pariisissa pidettiin vuonna 1978 kansainvälinen kongressi, jonka teema oli "Back to Basics". Tämän tarkoitus oli edistää uudesta matematiikasta luopumista ja täten matematiikan opetuksen palauttamista takaisin ongelmanratkaisuun, joka vastaisi enemmän arkielämän matematiikan tarpeita. (Malaty, 2006, 38)

2.1.2 Oppikoulu ja peruskoulu

Uuden matematiikan nousu näkyi myös suomalaisessa koulutusjärjestelmässä. Suomessa toimi 1950-luvulta lähtien rinnakkaiskoulutusjärjestelmä, joka mahdollisti opiskelun joko kansakoulussa tai oppikoulussa. Kansakoulu oli tuohon aikaan vielä monen pääasiallinen reitti suorittaa opinnot ja oppikoulu profiloitui enemmän lahjakkaiden ja varakkaiden oppilaiden opiskeluun, johon oli haettava erikseen. Tämä jako näkyi myös matematiikan opettamisessa, sillä esimerkiksi kansakoulussa opetettiin pääasiassa laskentoa sekä mittausoppia ja oppikoulussa puolestaan algebraa sekä geometriaa. Kun myöhemmin uusi matematiikka otettiin käyttöön kouluopetuksessa, myös joukko-opin rooli kasvoi samalla oppikoulussa. Joukko-opin käyttöönotto matematiikan opiskelussa tarkoitti muun muassa sitä, että numerot korvattiin opetuksen alkuvaiheessa alkioilla ja joukoilla sekä yhteenlasku unioneilla ja myöhemmin niihin liittyvät laskutoimitukset opetettiin joukko-opin avulla. Esimerkiksi keskikoulun opetussuunnitelma 1972 määritti keskikoulun matematiikan sisällöt kouluvuosittain siten, että joukko-oppia opetettiin sekä viidentenä että seitsemäntenä kouluvuotena. Joukko-oppi sai kuitenkin osakseen kritiikkiä myös Suomessa. (Markkanen, 2008; Junnila, 1995, 119–120)

> *"Joukko-opin piti olla hyvä renki matematiikan opiskelussa, mutta se alkoikin käyttäytyä isännän elkein."*
> (lehtori Hellevi Putkonen (Markkanen, 2008))

Suomen koulutusjärjestelmä uudistettiin perusteellisesti 1960- ja 1970-lukujen aikana. Tällöin kehitettiin peruskoulujärjestelmä, joka mahdollisti yleissivistävän koulutuksen kaikille suomalaisille varallisuudesta riippumatta. (Yle, 2016) Tällöin myös uuden matematiikan suosio alkoi hiipua, kunnes vuonna 1976 Kouluhallitus esitteli matematiikan uuden perusoppimäärän. Ongelmaksi koettiin yleisesti se, että matematiikan opetusta pidettiin liian teoreettisena, symboleita ja nimityksiä korostavana ja käytännön elämälle vieraana. (Hassinen, 2006, 51) Joukko-opin opetus jatkui vielä osin myös peruskoulu-uudistuksen jälkeen, mutta siitä luovuttiin virallisesti vuonna 1983 (Markkanen, 2008). Kuitenkin tämän vuoden jälkeisissä matematiikan oppikirjoissa oli vielä osin havaittavissa joukko-opin jäänteitä.

2.2 Aiempi tutkimus

Matemaattisena sisältönä joukko-oppia ollaan viimeksi tutkittu perusteellisesti Ernst Zermelon ja Abraham Fraenkelin töiden yhteydessä vuonna 1922, kun joukko-opin aksioomajärjestelmä luotiin. Sittemmin joukko-opista on tullut modernin matematiikan perusta eikä uusia matemaattisia tutkimuskysymyksiä ole esitetty kirjallisuudessa. Sen sijaan joukko-oppi on ollut vaikuttamassa laajasti muihin tieteenaloihin, sillä sen käsitteet ja menetelmät ovat olleet tarpeellisia esimerkiksi tietotekniikassa ja teoreettisessa fysiikassa. Lisäksi tutkimus on keskittynyt joukko-opin pedagogiseen ja didaktiseen merkitykseen niin kuin edellä olleesta historiakatsauksesta on selvinnyt. Suomalaisessa kontekstissa joukko-oppia on tutkittu oppikirjojen ja opetussuunnitelmien kautta sekä yleisesti opetuksessa. Tutkimus on ollut myös tässä suhteessa historiapainotteista, sillä joukko-oppia on enemmän vertailtu eri aikakausina. Sen sijaan joukko-opin konkreettista osaamistasoa eri koulutusasteilla ei olla juurikaan tutkittu, ja tässä tutkielmassa päästäänkin myöhemmin toteuttamaan aiheeseen liittyen tutkimus, joka kohdistuu lukion pitkän matematiikan opiskelijoihin.

3 Joukko-oppi matematiikassa

Tässä luvussa esitellään joukko-oppia matematiikan kielellä. Tarkoituksena on rajata joukko-oppi käsittämään vain naiivin ja intuitiivisen lähestymistavan palvellakseen tarkoituksenmukaisemmin lukijaa ja tämän tutkielman kokonaisuutta. Tässä luvussa esitetään joukko-opin keskeisimpiä peruskäsitteitä, operaatioita, laskusääntöjä sekä kuvauksia. Päälähteenä tässä luvussa käytetään Kenneth H. Rosenin kirjaa *Discrete Mathematics and Its Applications*. Esitellään kuitenkin aluksi taulukkona eräiden lukujoukkojen nimityksiä ja merkintätapoja, jotka ovat standardeja ja joista osaa tullaan esittämään oletuksena myöhemmin tässä luvussa.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	**Luonnollisten lukujen** joukko
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	**Kokonaislukujen** joukko
$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$	**Positiivisten kokonaislukujen** joukko
$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$	**Negatiivisten kokonaislukujen** joukko
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$	**Rationaalilukujen** joukko
$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$	**Reaalilukujen** joukko
$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x > 0\}$	**Positiivisten reaalilukujen** joukko
$\mathbb{R}_- = \{x \mid x < 0\}$	**Negatiivisten reaalilukujen** joukko
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \notin \mathbb{Q}\}$	**Irrationaalilukujen** joukko
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, i^2 = -1$	**Kompleksilukujen** joukko

3.1 Peruskäsitteet

Tässä osiossa käsittelemme joukko-opin peruskäsitteitä intuitiivisesti. Joukko-opin perustana ovat kaksi oleellista käsitettä, jotka ovat joukko ja alkio. (Vrt. [Rosen, 2019, 116–117, 119])

Määritelmä 3.1. *Joukko* on järjestämätön kokoelma olioita, joita kutsutaan tämän joukon *alkioiksi*. Joukon sanotaan sisältävän alkionsa. Kirjoitetaan

$$a \in A$$

ilmaisemaan, että a on joukon A alkio. Merkintä

$$a \notin A$$

tarkoittaa, että a ei ole joukon A alkio.

Huomautus. Joukko ei voi olla itsensä alkio.

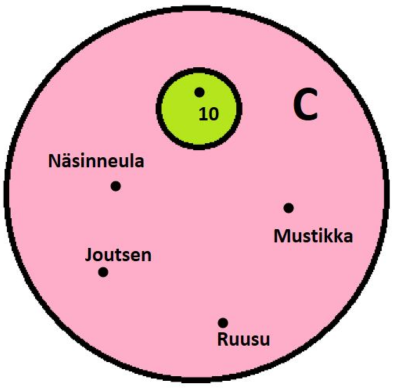
Intuitiivisessa joukko-opissa joukon ja alkion määritelmät eivät ole täysin täsmällisiä, joten riittää, että nämä ovat yksikäsitteisesti ymmärrettäviä asioita. On yleistä, että joukot merkitään isoilla kirjaimilla ja alkiot puolestaan pienillä kirjaimilla. Lisäksi yleisin tapa määrittää kaikki joukon alkiot on tehdä luettelo joukon alkioista, kuten $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tai määrittää muuten joukko aaltosulkeiden välissä. Joukkoja voidaan kuvata myös graafisesti *Venn-diagrammien* avulla.

Huomautus. Joukkoa $\{a\}$, johon kuuluu vain yksi alkio, kutsutaan *yksiöksi*.

Esimerkki 3.1. Olkoot A, B ja C joukkoja. Määritellään joukot seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, 10, 100, 1000\} \\
B &= \{\text{Tampere, Helsinki, } 10\} \\
C &= \{\text{Joutsen, Mustikka, } \{10\}\text{, Ruusu, Näsinneula}\}.
\end{aligned}
$$

Nyt voimme huomata, että joukon alkioilla ei tarvitse olla keskenään mitään yhteistä. Riittää siis, että alkiot ovat yksikäsitteisiä ja ne merkitsevät vain yhtä asiaa. Joukkoon voi kuulua myös joukkoja, kuten joukossa C. Huomaamme, että $\{10\} \in C$, mutta $10 \notin C$. Näin ollen $\{10\}$ on yksiö. Kuitenkin $10 \in A$ sekä $10 \in B$.



Kuva 3.1. Esimerkin 3.1 mukainen Venn-diagrammi havainnollistaa joukkoa C.

Esimerkki 3.2. Olkoot $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ja $\emptyset$ joukkoja. Ne määritellään yleisesti seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
\emptyset &= \{\}.
\end{aligned}
$$

Kun joukkoon kuuluu äärettömän monta alkiota, sitä voidaan merkitä yleisemmin tiettynä lukujoukkona, kuten luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$ ja kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$. Kun joukon alkiot voidaan järjestää siten, että ne noudattavat jotakin tiettyä säännöllisyyttä, voidaan näiden alkioiden edeltävät ja jälkeiset alkiot korvata kolmella pisteellä, kuten joukossa $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$.

Kun taas joukkoon ei kuulu yhtään alkiota, sitä kutsutaan *tyhjäksi joukoksi*, jota merkitään symbolilla $\emptyset$. Tällöin pätee, että $a \notin \emptyset$, kun a on mikä tahansa alkio.

Huomautus. Joukko $\{\emptyset\}$ ei ole tyhjä, sillä siinä on yksi alkio, joka on $\emptyset$.

Määritelmä 3.2. Kaksi joukkoa ovat *yhtä suuria*, jos ja vain jos niillä on samat alkiot. Näin ollen jos A ja B ovat joukkoja, tällöin A ja B ovat yhtä suuria, jos ja vain jos

$$\forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Toisin sanoen voidaan kirjoittaa, että

$$A = B,$$

jos ja vain jos A ja B ovat yhtä suuria joukkoja. Mikäli toisessa joukossa on ainakin yksi alkio, joka ei kuulu toiseen joukkoon, niin $A \neq B$.

Esimerkki 3.3. Olkoon A ja B joukkoja. Määritellään joukot seuraavasti:

$$A = \{3, 6, 9\}$$
$$B = \{9, 6, 3\}.$$

Nyt joukot $\{3, 6, 9\}$ ja $\{9, 6, 3\}$ ovat yhtä suuria, koska niillä on samat alkiot. On huomioitava, että joukon alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä. Myöskään sillä ei ole merkitystä, onko joukon alkio on listattu enemmän kuin kerran, joten $\{3, 6, 6, 9, 9, 9\}$ on sama joukko kuin $\{3, 6, 9\}$, koska niillä on samat alkiot.

Määritelmä 3.3. Joukko A on joukon B *osajoukko*, jos ja vain jos jokainen joukon A alkio on myös joukon B alkio. Toisin sanoen voidaan kirjoittaa, että

$$\forall x(x \in A \implies x \in B).$$

Tällöin merkitään

$$A \subseteq B.$$

Osoittaaksemme puolestaan, että joukko A ei ole joukon B osajoukko, meidän tarvitsee löytää ainakin yksi alkio, jolle $x \in A$ ja $x \notin B$. Toisin sanoen voidaan kirjoittaa, että

$$\exists x(x \in A \implies x \notin B).$$

Tällöin merkitään

$$A \nsubseteq B.$$

Lause 3.1. *Tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko. Toisin sanoen*

$$\emptyset \subseteq A,$$

kun A on mikä tahansa joukko.

Esimerkki 3.4. Olkoot A ja B joukkoja. Määritellään joukot seuraavasti:

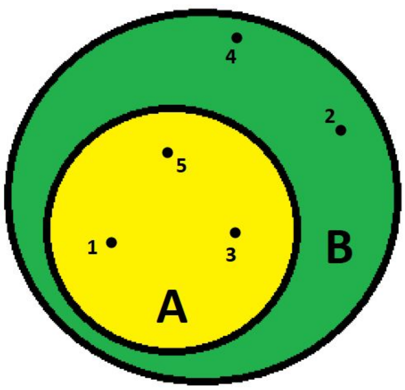
$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Nyt huomaamme, että kaikki joukon A alkiot ovat myös joukossa B, joten $A \subseteq B$.

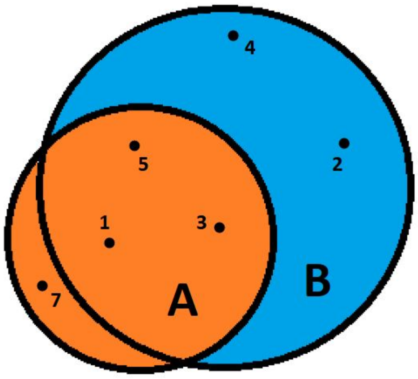
Esimerkki 3.5. Olkoot A ja B joukkoja. Määritellään joukot seuraavasti:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Nyt huomaamme, että $7 \in A$, mutta $7 \notin B$, joten $A \nsubseteq B$.



Kuva 3.2. Esimerkin 3.4 mukainen Venn-diagrammi havainnollistaa, miten $A \subseteq B$.



Kuva 3.3. Esimerkin 3.5 mukainen Venn-diagrammi havainnollistaa, miten $A \nsubseteq B$.

Esimerkki 3.6. Olkoon A joukko. Muodosta joukon $A = \{1, 3, 5\}$ kaikki osajoukot.

Ratkaisu. Kaikki joukon A osajoukot ovat

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 5\} \quad \text{ja} \quad \{1, 3, 5\}.$$

Nyt huomaamme lauseen 3.1 nojalla, että myös $\emptyset \subseteq A$. On huomioitava, että $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, joten $\{\emptyset\} \nsubseteq A$.

Lause 3.2 (Osajoukkojen ominaisuuksia)**.** *(Vrt. [Cusack, 2018, 49]) Olkoon A, B ja C joukkoja. Tällöin on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $A \subseteq A$ *(refleksiivisyys)*

(b) *Jos* $A \subseteq B$ *ja* $B \subseteq A$, *niin* $A = B$ *(antisymmetrisyys)*

(c) *Jos* $A \subseteq B$ *ja* $B \subseteq C$, *niin* $A \subseteq C$ *(transitiivisuus)*

Todistus. Todistamme lauseen 3.2.

(a) Mielivaltaisen joukon A jokainen alkio on selvästi joukon A alkio, joten $A \subseteq A$.

(b) Käytämme epäsuoraa todistusta. Teemme vastaoletuksen $A \neq B$. Nyt siis

$$\exists x(x \in A \implies x \notin B) \quad \text{tai} \quad \exists x(x \in B \implies x \notin A).$$

Ensimmäinen tapaus ei ole mahdollinen, koska jos $A \subseteq B$, niin jokainen joukon A alkio on aina myös joukon B alkio, joten ei ole sellaista alkiota x, jolle $x \in A$ ja $x \notin B$. Vastaavasti jälkimmäinenkään tapaus ei ole mahdollinen, koska jos $B \subseteq A$, niin jokainen joukon B alkio on aina myös joukon A alkio, joten ei ole sellaista alkiota x, jolle $x \notin A$ ja $x \in B$. Siis vastaoletus on väärin, joten $A = B$.

(c) Olkoon $x \in A$. Koska $A \subseteq B$, niin $x \in B$. Vastaavasti, koska $B \subseteq C$, niin $x \in C$. Nyt siis joukon A mielivaltainen alkio on myös joukon C alkio eli $A \subseteq C$.

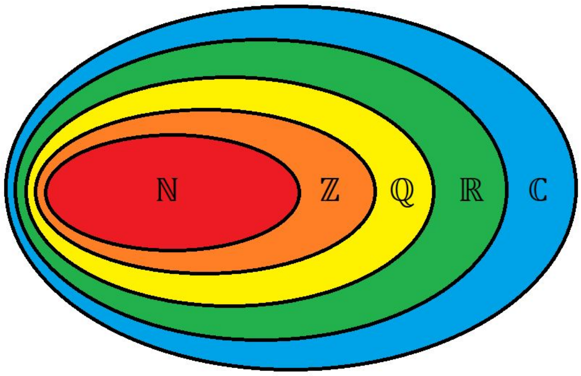
$\square$

Esimerkki 3.7. Tarkastellaan joukkoja $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$. Tunnemme aluksi, että

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Nyt transitiivisuuden nojalla voimme myös päätellä, että

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{C}, \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C} \quad \text{ja} \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}.$$



Kuva 3.4. Esimerkin 3.7 mukainen Venn-diagrammi havainnollistaa, miten $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Huomautus. Joukko A on joukon B *aito osajoukko*, jos $A \neq B$ ja $A \subseteq B$ (ks. määritelmät 3.2 ja 3.3). Tällöin merkitään $A \subset B$. Näin ollen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ voidaan merkitä myös muodossa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Käsitellään vielä lyhyesti potenssijoukon käsitettä siinä laajuudessa, että se täydentää osajoukon käsitettä laajennettuna.

Määritelmä 3.4. (Vrt. [Pesonen, 2004, 36]) Olkoon $\mathcal{P}(A)$ joukon A kaikkien osajoukkojen joukko, jolle

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Joukkoa $\mathcal{P}(A)$ sanotaan joukon A *potenssijoukoksi*.

Esimerkki 3.8. Olkoon A joukko. Muodosta joukon A potenssijoukko $\mathcal{P}(A)$, kun $A = \{a, b, c\}$.

Ratkaisu. Nyt esimerkin 3.6 mukaan voimme kirjoittaa joukon A osajoukot, jotka muodostavat yhdessä potenssijoukon $\mathcal{P}(A)$. Joukolla $A = \{a, b, c\}$ on siis yhteensä kahdeksan osajoukkoa, joten niiden potenssijoukko on

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

3.2 Operaatiot ja laskusäännöt

Tässä osiossa käsittelemme yleisiä joukko-operaatioita sekä niihin liittyviä laskusääntöjä. (Vrt. [Rosen, 2019, 127–131])

Määritelmä 3.5. Olkoot A ja B joukkoja. Joukkojen A ja B *yhdiste* eli *unioni* on joukko, jolle

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

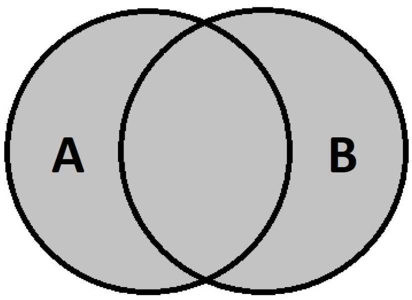
Tässä konjunktio $\vee$ merkitsee sitä, että x kuuluu joukkoon A tai joukkoon B.

Määritelmä 3.6. Olkoot A ja B joukkoja. Joukkojen A ja B *leikkaus* on joukko, jolle

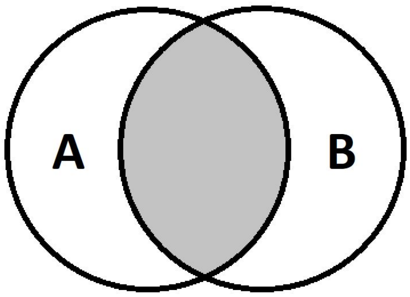
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Tässä konjunktio $\wedge$ merkitsee sitä, että x kuuluu sekä joukkoon A että joukkoon B.

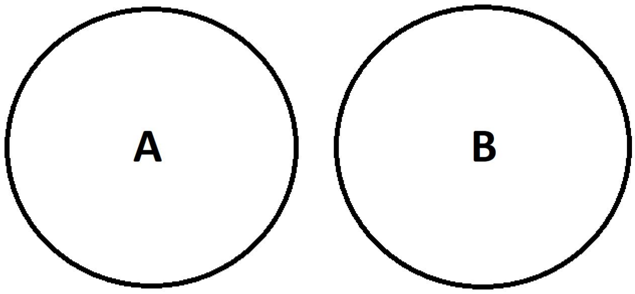
Huomautus. Jos joukot A ja B ovat keskenään alkiovieraita eli erillisiä, niin $A \cap B = \emptyset$.



Kuva 3.5. Joukkojen A ja B unioni eli $A \cup B$.



Kuva 3.6. Joukkojen A ja B leikkaus eli $A \cap B$.



Kuva 3.7. Joukot A ja B ovat erillisiä eli $A \cap B = \emptyset$.

Esimerkki 3.9. Olkoot A ja B joukkoja. Muodosta joukkojen $A = \{2, 4, 6\}$ ja $B = \{4, 6, 8\}$ unioni.

Ratkaisu. Joukkojen A ja B unioni on

$$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 6, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Esimerkki 3.10. Olkoot A ja B joukkoja. Muodosta joukkojen $A = \{2, 4, 6\}$ ja $B = \{4, 6, 8\}$ leikkaus.

Ratkaisu. Joukkojen A ja B leikkaus on

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 6, 8\} = \{4, 6\}.$$

Esimerkki 3.11. Olkoot A ja B joukkoja. Muodosta joukkojen $A = \{1, 3, 5\}$ ja $B = \{2, 4, 6\}$ leikkaus.

Ratkaisu. Joukkojen A ja B leikkaus on

$$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset.$$

Lause 3.3 (Unionin ja leikkauksen ominaisuuksia.)**.** *(Vrt. [Pesonen, 2004, 28–30]) Olkoot A, B ja C joukkoja. Tällöin on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $A \cup A = A$
$A \cap A = A$

(b) $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

(c) $A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$

(d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(f) $A \cup B = B \iff A \subseteq B$

$A \cap B = B \iff A \subseteq B$

(g) $A \subseteq A \cup B \quad ja \quad B \subseteq A \cup B$

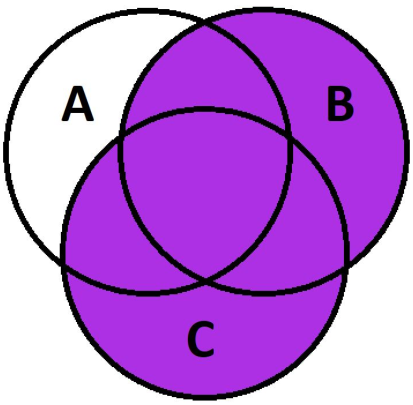
$A \cap B \subseteq A \quad ja \quad A \cap B \subseteq B$

Todistus. Todistetaan (e)-kohdan osittelulait soveltamalla logiikan perusteita:

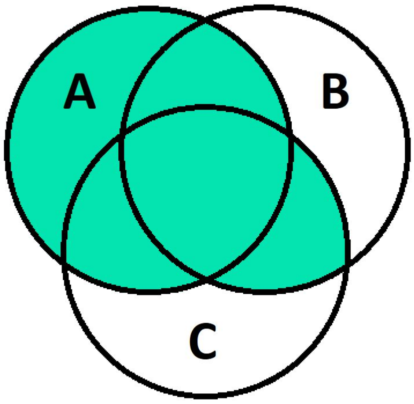
$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \land x \in B \cup C\} \\
&= \{x \mid x \in A \land (x \in B \lor x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \land x \in B) \lor (x \in A \land x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \cap B) \lor (x \in A \cap C)\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \lor x \in B \cap C\} \\
&= \{x \mid x \in A \lor (x \in B \land x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \cup B) \land (x \in A \cup C)\} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

□



Kuva 3.8. Joukkojen A, B ja C 1. osittelulaki eli $A \cap (B \cup C)$.



Kuva 3.9. Joukkojen A, B ja C 2. osittelulaki eli $A \cup (B \cap C)$.

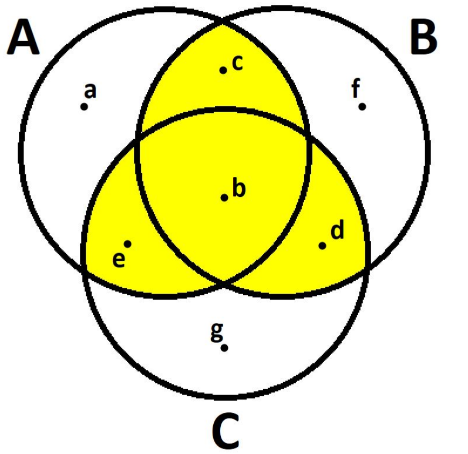
Esimerkki 3.12. Olkoot A, B ja C joukkoja. Määritellään joukot seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
A &= \{a, b, c, e\} \\
B &= \{b, c, d, f\} \\
C &= \{b, d, e, g\}.
\end{aligned}
$$

Havainnollista Venn-diagrammilla joukkojen A, B ja C joukkoa

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

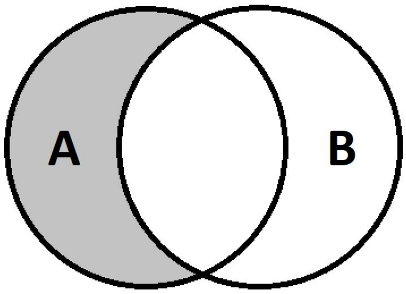
Ratkaisu. Muodostetaan Venn-diagrammi. Nyt kuva 3.10 havainnollistaa, miten $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.



Kuva 3.10. Esimerkin 3.12 mukainen Venn-diagrammi havainnollistaa joukkoa $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Määritelmä 3.7. Olkoot A ja B joukkoja. Joukkojen A ja B *erotus* on joukko, jolle

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Kuva 3.11. Joukkojen A ja B erotus eli $A \setminus B$.

Huomautus. Joukkojen A ja B erotusta voidaan kutsua myös joukkojen komplementiksi. Tällöin joukon A komplementti sisältää kaikki ne alkiot, jotka eivät kuulu joukkoon B.

Lause 3.4 (Erotuksen ominaisuuksia.)**.** *(Vrt. [Pesonen, 2004, 32], [Cusack, 2018, 129]) Olkoot A, B ja C joukkoja. Tällöin on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $A \setminus A = \emptyset$

(b) $A \setminus \emptyset = A$
$\emptyset \setminus A = \emptyset$

(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Todistus. Todistetaan (c)-kohta soveltamalla logiikan perusteita:

$$\begin{aligned}
A \setminus (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \setminus (B \cup C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \wedge x \notin (B \cup C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C))\} \\
&= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C)\} \\
&= \{x \mid x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)\} \\
&= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.13. Olkoot A ja B joukkoja. Muodosta joukkojen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ erotus.

Ratkaisu. Joukkojen A ja B erotus on

$$A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{7, 9\}.$$

Joukkoja operoitaessa on hyvä määritellä myös niiden perusjoukko. Tämä tulee kyseeseen etenkin silloin, kun ollaan tekemisissä komplementtien kanssa. Perusjoukko ei siis ole jokaisessa tilanteessa jokin tietty joukko, vaan se voidaan valita kuhunkin tilanteeseen sopivaksi. Merkitsemme perusjoukkoa joukkona X.

Määritelmä 3.8. Olkoon X *perusjoukko*. Joukon A *komplementti* $\overline{A}$ perusjoukossa X on

$$\overline{A} = X \setminus A = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}.$$

Esimerkki 3.14. Olkoon perusjoukko $X = \mathbb{Z}_+$ ja A joukko, jolle

$$A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}_+\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

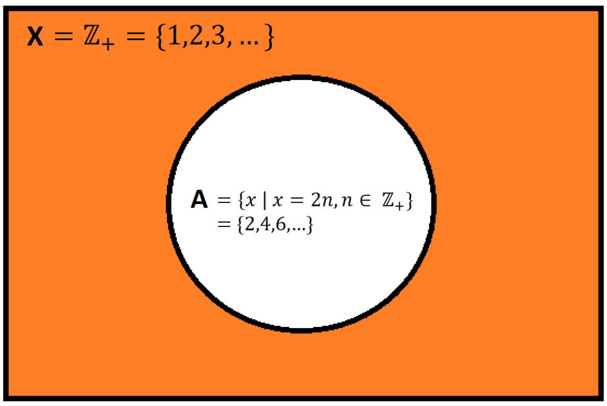
Määritä joukon A komplementti $\overline{A}$.

Ratkaisu. Nyt joukon A komplementti $\overline{A}$ on joukon A komplementti perusjoukossa X eli

$$\overline{A} = X \setminus A = \{1, 2, 3, \dots\} \setminus \{2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\},$$

joten

$$\overline{A} = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{Z}_+\} = \{1, 3, 5, \dots\}.$$



Kuva 3.12. Esimerkin 3.14 mukainen Venn-diagrammi havainnollistaa, miten oranssi alue on $\overline{A} = \{1, 3, 5, \dots\}$, kun perusjoukko on $X = \mathbb{Z}_+$.

Lause 3.5 (Komplementin ominaisuuksia.). *(Vrt. [Pesonen, 2004, 31–32], [Rosen, 2019, 131]) Olkoot A, B ja X joukkoja. Tällöin on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $\overline{\overline{A}} = A$

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(c) $A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} = X$

(d) $\overline{\emptyset} = X$
$\overline{X} = \emptyset$

(e) $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$

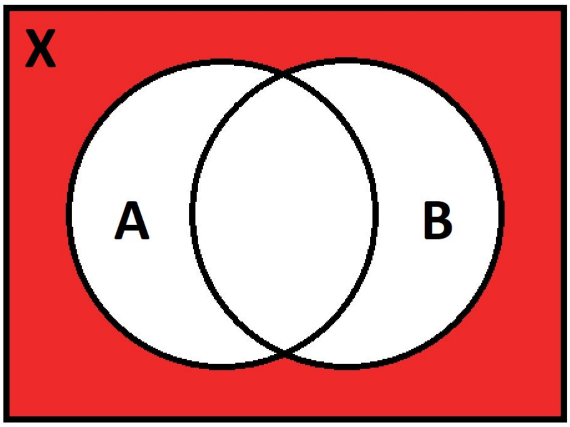
(f) $A = B \iff \overline{A} = \overline{B}$

Todistus. Todistetaan (b)-kohdan De Morganin lait soveltamalla logiikan perusteita:

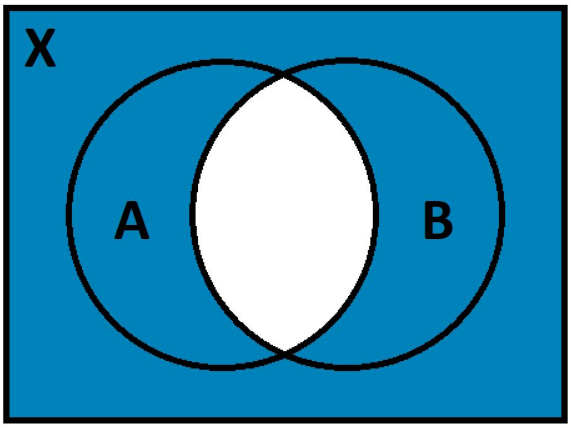
$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \{x \mid x \notin A \cup B\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cup B))\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \vee x \in B)\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cap \overline{B}\} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

□



Kuva 3.13. Joukkojen A ja B De Morganin 1. laki eli $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.



Kuva 3.14. Joukkojen A ja B De Morganin 2. laki eli $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Esimerkki 3.15. Olkoon X perusjoukko $X = \mathbb{Z}$, joukko A joukon $\mathbb{Z}_+$ osajoukko ja joukko B joukon $\mathbb{Z}_-$ osajoukko. Nämä ovat tarkemmin määritelty seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z} = X = \{\ldots, 3, 2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
&\mathbb{Z}_+ = A = \{1, 2, 3, \ldots\} \\
&\mathbb{Z}_- = B = \{\ldots, -3, -2, -1\}.
\end{aligned}$$

Osoita, että $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ratkaisu. Nyt joukkojen $A \cup B$ komplementti $\overline{A \cup B}$ perusjoukossa X on

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\ldots, -3, -2, -1\}} = \{0\}.$$

Vastaavasti joukon A komplementti on $\overline{A} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ ja joukon B komplementti on $\overline{B} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ perusjoukossa X, joten

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \cap \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{0\}.$$

Siis $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.3 Kuvaukset

Tässä osiossa käsittelemme kuvauksia eli funktioita, jotka ovat keskeisimpiä peruskäsitteitä matematiikassa. Tarkastelu keskittyy pääasiassa eri kuvausjoukkojen laatuun sekä niiden välisiin yleisimpiin riippuvuussuhteisiin. Kuvauksien avulla voidaan keskeisesti tutkia esimerkiksi analyysia. (Vrt. [Rosen, 2019, 139, 141–144])

Määritelmä 3.9. Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. *Kuvaus* eli funktio joukolta A joukkoon B liittää täsmälleen yhden joukon B alkion joukon A jokaiselle alkiolle. Kirjoitetaan

$$f(a) = b,$$

jos b on joukon B yksikäsitteinen alkio, jonka funktio f liittää joukon A alkiolta a. Jos f on funktio joukolta A joukkoon B, kirjoitetaan

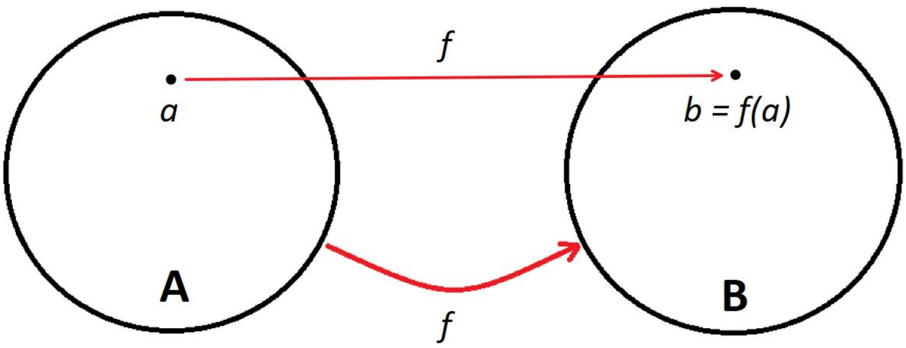
$$f : A \to B.$$

Määritelmä 3.10. Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja ja $f : A \to B$ funktio. Tällöin A on funktion f *määrittelyjoukko* ja B on funktion f *maalijoukko*. Nyt b on alkion a *kuva*, jos

$$f(a) = b,$$

ja alkion b *alkukuva* on joukko

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$



Kuva 3.15. Funktio f kuvaa joukon A joukkoon B eli $f : A \to B$.

Huomautus. Jos funktion määrittelyjoukkoa ei ole annettu, se on laajin mahdollinen joukko, jossa funktio on määritelty.

Määritelmä 3.11. Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja ja $f : A \to B$ funktio. Funktion f *arvojoukko* eli *kuvajoukko* on joukon A alkioiden kaikkien kuvien joukko. Tällöin f kuvaa joukon A joukkoon B. Vastaavasti funktion f *alkukuvajoukko* on joukon B alkioiden kaikkien alkukuvien yhdiste.

Tutummin alkioita voidaan merkitä myös muuttujilla x ja y, jolloin voidaan merkitä $f(x) = y$, kun $f : X \to Y$ ja $x \in X$ ja $y \in Y$.

Esimerkki 3.16. Olkoon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, jolle

$$f(x) = x^2.$$

Nyt funktion f määrittelyjoukko on kaikkien kokonaislukujen joukko, maalijoukko on kaikkien kokonaislukujen joukko ja arvojoukko on

$$\{0, 1, 4, 9, \dots\}.$$

Lause 3.6. *Olkoon f_1 ja f_2 funktioita, joille $X \to \mathbb{R}$. Nyt myös $f_1 + f_2$ ja $f_1 f_2$ ovat myös funktioita, joille $X \to \mathbb{R}$ ja jotka ovat määritelty kaikille $x \in X$. Tällöin ovat voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(1) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

(2) $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$.

Esimerkki 3.17. Olkoon f_1 ja f_2 funktioita, joille $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f_1(x) = x \quad \text{ja} \quad f_2(x) = -x + 1.$$

Muodosta funktiot $f_1 + f_2$ ja $f_1 f_2$.

Ratkaisu. Nyt lauseen 3.6 nojalla

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x + (-x + 1) = 1$$

ja

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = x(-x + 1) = -x^2 + x.$$

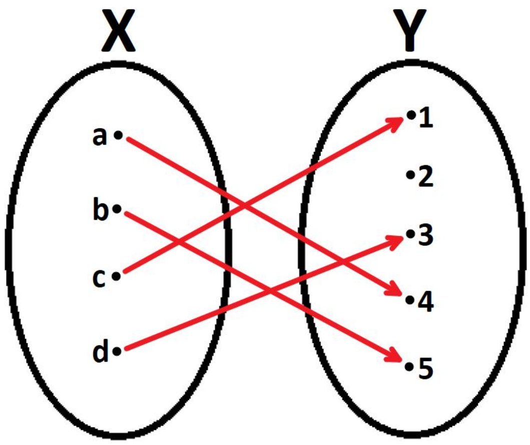
Määritelmä 3.12. Olkoon $f : X \to Y$. Funktio f on *injektio*, jos ja vain jos

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

eli

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$

kaikille alkioille a ja b funktion f määrittelyjoukossa. Funktion sanotaan olevan *injektiivinen*, jos mitkä tahansa kaksi määrittelyjoukon eri alkioita eivät kuvaudu samalle maalijoukon alkiolle.



Kuva 3.16. Funktion $f : X \to Y$ injektio.

Esimerkki 3.18. Selvitä, onko funktio

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

injektiivinen, kun $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ei ole injektiivinen, koska esimerkiksi

$$f(1) = f(-1) = 1,$$

mutta

$$1 \neq -1.$$

Nyt siis määrittelyjoukon alkiot 1 ja -1 kuvautuvat samalle maalijoukon alkiolle eli alkiolle 1, joten f ei ole injektio.

Esimerkki 3.19. Selvitä, onko funktio

$$f(x) = x + 5$$

injektiivinen, kun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Funktio $f(x) = x + 5$ on injektiivinen, koska

$$x + 5 \neq y + 5,$$

kun $x \neq y$.

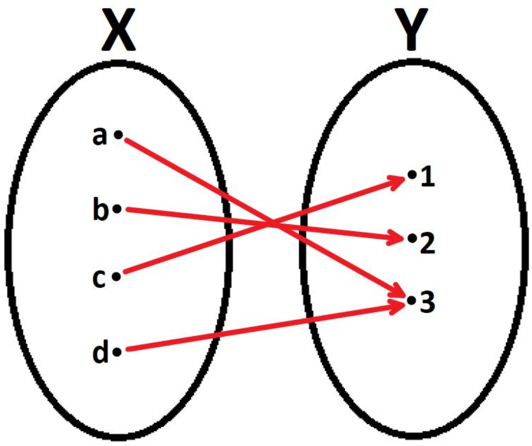
Nyt siis mitkä tahansa kaksi määrittelyjoukon eri alkioita eivät kuvaudu samalle maalijoukon alkiolle, koska $x \neq y$, joten f on injektio.

Määritelmä 3.13. Olkoon $f : X \to Y$. Funktio f on *surjektio*, jos ja vain jos

$$\forall b \exists a (b \in Y, a \in X \mid f(a) = b).$$

Funktion sanotaan olevan *surjektiivinen*, jos jokaiselle maalijoukon alkiolle kuvautuu ainakin yksi määrittelyjoukon alkio. Toisin sanoen funktion f arvojoukko on sen maalijoukko eli

$$Y = f(X).$$



Kuva 3.17. Funktion $f : X \to Y$ surjektio.

Esimerkki 3.20. Selvitä, onko funktio

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

surjektiivinen, kun $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ei ole surjektiivinen, koska ei ole esimerkiksi olemassa sellaista kokonaislukua x, jolle

$$\frac{1}{x^2} = -1.$$

Nyt siis kaikki määrittelyjoukon alkiot eivät kuvaudu jokaiselle maalijoukon alkiolle, joten f ei ole surjektio.

Esimerkki 3.21. Selvitä, onko funktio

$$f(x) = x + 5$$

surjektiivinen, kun $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Ratkaisu. Funktio $f(x) = x + 5$ on surjektiivinen, koska nyt $f(x) = y$, jos ja vain jos

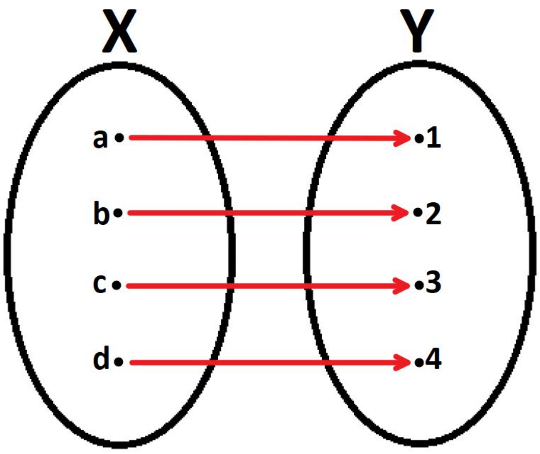
$$x + 5 = y,$$

mikä pätee, jos ja vain jos

$$x = y - 5.$$

Nyt siis jokaiselle maalijoukon alkiolle kuvautuu jokin määrittelyjoukon alkio, joten f on surjektio.

Määritelmä 3.14. Olkoon $f : X \to Y$. Funktio f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio. Funktion sanotaan olevan *bijektiivinen*, jos maalijoukon jokainen alkio on määrittelyjoukon täsmälleen yhden alkion kuva.



Kuva 3.18. Funktion $f : X \to Y$ bijektio.

Esimerkki 3.22. Selvitä, onko funktio

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

bijektiivinen, kun $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ei ole bijektiivinen, koska esimerkkien 3.18 ja 3.20 nojalla sama funktio ei ole injektiivinen eikä surjektiivinen. Nyt siis maalijoukon jokainen alkio ei ole määrittelyjoukon täsmälleen yhden alkion kuva, joten f ei ole bijektio.

Esimerkki 3.23. Selvitä, onko funktio

$$f(x) = x + 5$$

bijektiivinen, kun $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Ratkaisu. Funktio $f(x) = x + 5$ on bijektiivinen, koska esimerkkien 3.19 ja 3.21 nojalla sama funktio on sekä injektiivinen että surjektiivinen. Nyt siis maalijoukon jokainen alkio on määrittelyjoukon täsmälleen yhden alkion kuva, joten f on bijektio.

Esimerkki 3.24. Selvitä, onko funktio

$$f(x) = \sqrt{x}$$

bijektiivinen, kun $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$.

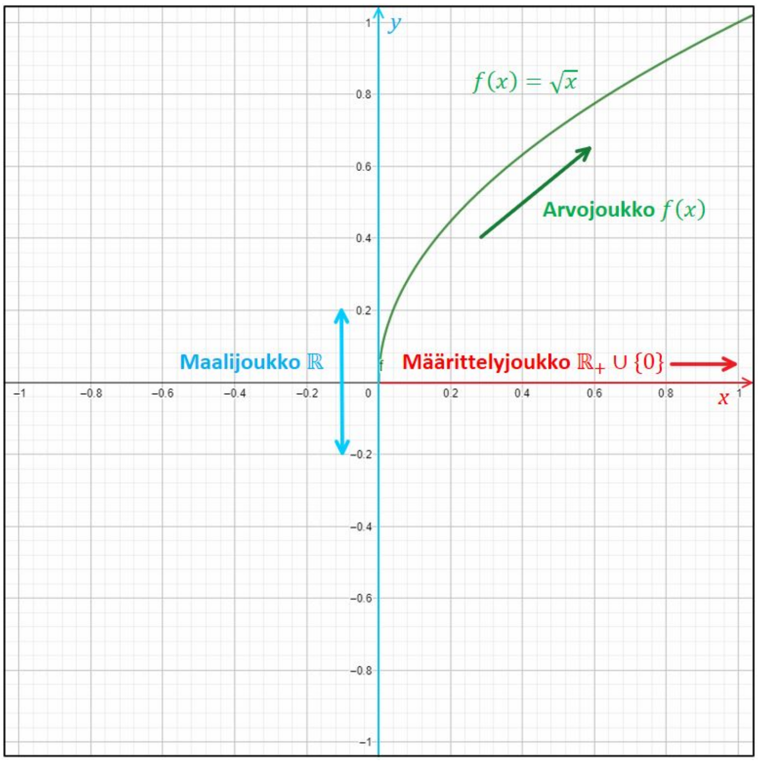
Ratkaisu. Ensinnäkin funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on injektiivinen, koska

$$\sqrt{x} \neq \sqrt{y},$$

kun $x \neq y$. Nyt siis mitkä tahansa kaksi määrittelyjoukon eri alkiota eivät kuvaudu samalle maalijoukon alkiolle, joten f on injektio. Toisaalta funktio $f(x) = \sqrt{x}$ ei ole surjektiivinen, koska ei ole esimerkiksi olemassa sellaista reaalilukua x, jolle

$$\sqrt{x} = -1.$$

Nyt on olemassa alkioita, joille mikään määrittelyjoukon alkio ei kuvaudu, joten f ei ole surjektio. Täten funktio $f(x) = \sqrt{x}$ ei ole bijektiivinen, koska se ei ole samaan aikaan sekä injektiivinen että surjektiivinen. Nyt siis maalijoukon jokainen alkio ei ole määrittelyjoukon täsmälleen yhden alkion kuva, joten f ei ole bijektio.



Kuva 3.19. Esimerkin 3.24 funktion $f(x) = \sqrt{x}$ kuvaaja sekä x- ja y-akselit havainnollistavat joukkoja ja sitä, miten f ei ole bijektio.

4 Matematiikka ja kielentäminen

Tässä luvussa käydään läpi matematiikkaa kielentämisen näkökulmasta hyödyntäen teoreettista viitekehystä sekä tarkemmin joukko-opin kontekstia. Luvun tarkoitus on antaa lukijalle kokonaisvaltainen kuva siitä, mitä matematiikan kielentäminen tarkoittaa ja miten sitä voidaan soveltaa joukko-opissa.

4.1 Teoreettinen viitekehys

Oppimisen ehdoton edellytys on kieli. Samantapaisesti toteaa myös Vygotskyn (1982, 18), jonka mukaan kieli on ennen kaikkea sosiaalisen kanssakäymisen väline. Ilman yhteistä kieltä ei siis ole kommunikaatiota ja vuorovaikutusta, joiden kautta opitaan uusia tietoja ja taitoja. Kielen lisäksi myös kielentäminen on olennainen rinnakkaiskäsite, sillä se pyrkii selvittämään, miten kieltä käytetään. Tässä osiossa tarkastellaan sitä, mitä kieli on ja mikä on sen suhde matemaattiseen ajatteluun kielentämisen välineenä. Tämän jälkeen pyritään tarkastelemaan kielentämisen ja didaktiikan välistä suhdetta matematiikan oppimiseen.

4.1.1 Kieli ja ajattelu

Kielen ominaispiirteenä pidetään yleisesti sitä, että se toimii erilaisten symbolien järjestelmänä, jossa symboli eli kielellinen merkki koostuu sisällöstä ja muodosta (Koppinen ym., 1989, 9). Nämä luovat todellisuuden, jonka avulla ihmiskunta voi sopimuksenvaraisesti kommunikoida keskenään. Kieli toimii myös keskeisellä tavalla kognitiivisissa kehitysprosesseissa, jossa tarvitaan lisäksi muun muassa muistia, ajattelua, havaitsemista ja tarkkaavaisuutta. Nämä prosessit mahdollistavat sen, että kieltä voidaan käyttää myös puhutun ja kirjoitetun kielen lisäksi esimerkiksi kuvina, ilmeinä ja eleinä. Kieli on myös ajattelun työväline, jonka tehtävä on muun muassa jonkin uuden asian sanallinen formulointi. Tämän teorian mukaan ihmisen ajatus eli älyllinen toiminto syntyy aina ensisijaisesti ulkoisena toimintona. (Leontjev, 1979, 20) Kielen tehtävät voidaankin luokitella siten, että kieli on ajattelun, tiedonhankinnan, välittämisen, vaikuttamisen, sosiaalisten suhteiden luomisen ja ylläpitämisen, tunteiden ilmaisemisen, kielellisen luomisen sekä oman ja toisten käyttäytymisen säätelemisen väline (Koppinen ym., 1989, 22). Edelleen nämä luovat kokonaisuutena toimintaympäristön sille, miten kielennämme kieltä tai ymmärrämme sen avulla matematiikkaa, sillä kielen arvo ja siihen liittyvät merkitykset eivät synny koskaan tyhjiössä.

Kieli on myös ajattelun työvälineen lisäksi tiedon työväline. Tietoa käytetään usein loogisena päättelynä, jossa arvostelmat ja ilmaisutavat vaikuttavat keskenään. Vaikka tiedon ilmaisutapoja on pääasiassa vain yksi, eli kielellinen, on sillä erityinen asema matematiikassa, sillä matematiikan etu kieleen verrattuna on sen helppous harjoittaa operaatioita. Näissä voidaan suorittaa nopeasti ja tarkasti matemaattisia laskutoimituksia diskursiivisen ajattelun sijaan. (Leuontjev, 1979, 39) Kielen ja ajattelun kannalta diskursiiviset merkitykset ovat yleensä hyvin moniulotteisia, mikä haastaakin usein muun muassa niin kielentämistä kuin tiedon perimmäistä luonnetta siitä, miten tietoa tulisi käsitellä. Matemaattisesti tiedon luonne on sen sijaan hyvin yksinkertainen, kun kyse on abstraktien ja visuaalisten asioiden liittämisestä omiin havaintoihin ympäröivästä maailmasta. Matematiikan diskurssi onkin kielellisesti usein selkeää ja yhdenmukaista, mikä helpottaa matematiikan ymmärtämistä ja oppimista eräänä kielenä.

4.1.2 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu on kognitiivinen kehitysprosessi, joka perustuu kumulatiiviseen oppimiseen. Tämä voidaan nähdä myös osana konstruktivistista oppimista, joka teoriana tarkastelee oppimista aktiivisena uusien kokemusten ja tietojen sovittamisena aiempiin tietorakennelmiin (Tynjälä, 1999, 37). Matemaattinen ajattelu siis edellyttää pohjimmiltaan konstruktivistista kielentämistä, jotta näitä tietorakennelmia voidaan kehittää kumulatiivisesti. Tietorakennelmien kumulatiivisuutta voidaan edelleen kehittää uusien käsitteiden avulla, johon tarvitaan yhä kielen ja ajattelun käyttöä. Esimerkiksi Leontjev (1979, 36) luonnehtii käsitteen käsitettä muun muassa funktionaaliseksi eli toiminnalliseksi tunnusmerkiksi, jonka voi tässä tapauksessa rinnastaa myös koskemaan matematiikan eri proseduureja. Matemaattisen ajattelun prosessit tapahtuvatkin pitkälti vuorovaikutuksessa todellisuuden kanssa, jota pystymme havainnollistamaan käsitteiden kautta. Näiden yhdistelmänä on edelleen käytetty Hiebertin ja Lefevren (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, 416) käyttämää tiedon jakoa konseptuaaliseen tietoon *(conceptual knowledge)* ja proseduraaliseen tietoon *(procedural knowledge)*, joissa vaikuttavat yhteydet muihin tietoverkkoihin sekä matematiikan symbolinen esittämisjärjestelmä, algoritmit, proseduurit ja säännöt matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi.

Verraten useimpiin muihin ajatteluihin matemaattisen ajattelun erityispiirteenä erottuu sen yksiselitteinen abstraktisuus, joka koostuu puhtaista matemaattisista rakenteista. Abstraktisuuden haasteeksi voi kuitenkin muodostua formalismin ilmeneminen, joka näyttäytyy muodollisuuksina ohittaen käsitteet ja näin ollen myös kielen sisällön. (Stenberg & Talia, 1996, 290) Tämä voi haitata matematiikan oikeaa ymmärtämistä ja hämärtää kielentämisen merkityksen, jonka tarkoitus on muodostaa myös assosiaatioita kielen luoman todellisuuden kanssa. Todellisuuden näkökulmasta Sternberg & Talia (1996) kuvaavat myös erilaisia lähestymistapoja ja tutkimuskohteita esittämään matemaattista ajattelua taulukon 4.1 mukaisesti.

Lähestymistapa matemaattiseen ajatteluun	**Keskeisiä tutkimuskohteita**
Psykometria	– Kykyfaktorit
Informaation prosessointi	– Matemaattisessa ongelmanratkaisussa tarvittavat mentaaliset prosessit – Matemaattinen ymmärrys – Tiedon käsite
Antropologia	– Kansallinen kulttuuri – Arkipäivän matematiikka
Pedagogiikka	– Matematiikan oppimisen ohjaaminen – Oppijoiden asenteet – Uskomukset – Sosiaaliset suhteet
Tiedematematiikka	– Ajattelun esteettisyys – Oppijan itseluottamus – Analoginen päättely – Tiedon struktuurinen ymmärtäminen – Ongelmien tulkinta – Visuaalinen päättely – Käänteinen ajattelu – Ajattelun joustavuus

Taulukko 4.1. Erilaiset lähestymistavat ja niitä vastaavat keskeiset tutkimuskohteet liittyen matemaattiseen ajatteluun (mukaillen Sternberg & Talia, 1996; Joutsenlahti, 2003).

Taulukossa 4.1 olevat erilaiset lähestymistavat korostavat kukin eri tavalla matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä. Esimerkiksi antropologia keskittyy tarkastelemaan matemaattista ajattelua yhteiskuntatieteen kautta, kun puolestaan psykometria pyrkii tutkimaan matemaattisen ajattelun psykologisia ominaisuuksia soveltaen tilastotiedettä. Huomionarvoista on se, että matemaattisen ajattelun määritelmälle ei olla asetettu mitään yksiselitteistä määritelmää, jolla olisi jokin tieteellinen konsensus, vaan asiaa voidaan tarkastella kunkin lähestymistavan tutkimuksen kautta. Myös oppijan oma subjektiivinen käsitys matemaattisesta ajattelusta asettaa reunaehdot sille, että matemaattiselle ajattelulle ei ole mitään yleispätevää käsitystä, sillä jokaisella oppijalla on omat kyvyt suoriutua matemaattisessa ajattelussaan.

Kielentäminen on erityisesti matematiikassa olennainen termi, sillä se merkitsee matemaattisen ajattelun ilmaisemisen tapahtumista kielen avulla pääsääntöisesti suullisesti tai kirjallisesti (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, 410). Kielentäminen luo myös tilanteen, jossa vaikuttaa hyvin moniulotteinen todellisuus. Esimerkiksi Leontjev (1797, 20) kuvaa laskemisen oppimista tapahtumana, jossa täytyy ensin oppia operoimaan todellisilla esineillä. Toisin kuin monessa muussa oppiaineessa, matematiikan kieli voidaan nähdä niin *formaalin kielen*, *luonnollisen kielen*, *kuviokielen* kuin *taktiilisen toiminnan kielen* avulla, jotka muodostavat multimodaalisen kokonaisuuden muun muassa symboliikan ja kuvien kautta (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, 414; O'Halloran, 2015, 4). Arkitilanteissa luonnollisen kielen rooli korostuu selkeimmin osana formaalin kielen kanssa, ja näiden välinen suhde onkin näkyvintä peruskoulun ja lukion matematiikassa, kun matematiikka on eräänlainen sekakieli. Koulumaailmassa matemaattinen ajattelu ja matematiikan kieli perustuvat pitkälti oppijan näkökulmasta informaation prosessointiin, jossa korostuvat metakognitiiviset taidot. Informaation prosessointi perustuu siis affektiiviseen toimintaan, jossa esimerkiksi reagoinnilla on merkittävä vaikutus oppia matematiikkaa yksilön aikaisempien tietojen pohjalta. Myös tässä korostuu matematiikan konstruktivistinen ja kumulatiivinen luonne, kun kyse on metakognitiivisten taitojen hyödyntämisestä.

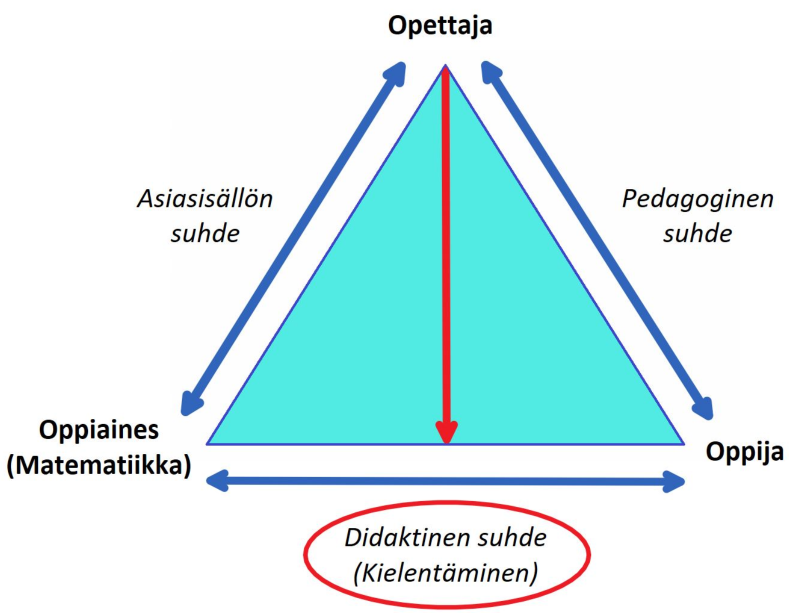
4.1.3 Didaktinen suhde

Matematiikka ja matemaattinen ajattelu ovat välineitä ymmärtää, analysoida ja ratkaista ympäröivän yhteiskunnan ongelmia. Tällä on erityinen merkitys etenkin tulevaisuudessa kestävän kehityksen kannalta, sillä esimerkiksi käsitteellistämisen avulla voidaan opettaa soveltamaan matematiikkaa. (Perkkilä & Joutsenlahti, 2020, 167) Matemaattisen ajattelun tutkimisessa onkin syytä tarkastella myös didaktista käytänteitä ja suhteita, jotka tukevat matemaattista kompetenssia hyödyntää matemaattista ajattelua. Kun puhutaan didaktiikasta, keskiöön nousevat opettajat ja matematiikan akateemisen lukutaidon muuttujat, jotka mahdollistavat matematiikan hyvän opetuksen. Opettajan asiantuntijuuden näkökulmasta matematiikan akateemisen lukutaidon ja kestävän kehityksen koulutus ovat keskeisessä asemassa matematiikan opetuksen toimijuudessa ja aineenhallinnassa. Seuraavassa taulukossa Perkkilä & Joutsenlahti (2020, 168) luonnehtivat akateemista lukutaitoa matematiikassa eri osa-alueiden ja tekijöiden kautta.

Akateeminen lukutaito matematiikassa	
Matemaattinen taito	– Konseptuaalinen ymmärrys – Proseduurinen sujuvuus – Strateginen kompetenssi – Adaptiivinen päättely – Matematiikkakuva
Matemaattiset käytännöt	– Merkityksen tekeminen – Pitkäjänteisyys – Abstrakti päättely – Ratkaisun perustelu – Rakentava kritiikki – Mallintaminen – Sopivat työkalut – Täsmällisyys – Rakenteet – Säännönmukaisuudet
Kielentäminen (vrt. matemaattinen diskurssi)	– Luonnollinen kieli – Formaali kieli – Kuviokieli – Taktiilinen toiminnan kieli – Yhteistyöllinen ajattelu

Taulukko 4.2. Matematiikan akateemisen lukutaidon eri osa-alueita ja niitä vastaavat keskeiset tekijät liittyen matematiikan didaktiikkaan (Perkkilä & Joutsenlahti, 2020, 168).

Taulukossa 4.2 olevat eri osa-alueet ja tekijät korostavat kukin eri tavalla matematiikan didaktiikkaa. Kuitenkin kielentäminen on näistä osa-alueista tärkein, koska vain sen avulla voidaan vasta saavuttaa matemaattisen taidon ja matemaattisten käytäntöjen kehittämistä. Jotta siis kielentämistä voidaan soveltaa kielen ja ajattelun tavoin teoriasta käytäntöön, se tarvitsee toimintaympäristön. Tämä toimintaympäristö voidaan nähdä niin ikään didaktiikan kautta, sillä se pyrkii etsimään vastausta kysymykseen, millaista on hyvä opetus, ja tässä toimintaympäristössä korostuu matemaattisten käytäntöjen merkitys. Esimerkiksi Radford (Dingman ym., 2019, 33) kuvaa didaktiikkaa sosiaalisessa ympäristössä oppimisen ja yksilöiden loogisten matemaattisten ideoiden käsittelytapojen suhteeksi, joka liittyy matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimuksiin. Siinä tarkastellaan kontekstuaalisia tekijöitä, kuten ongelmien tyyppejä ja tapaa, jolla niitä esitetään ja tutkitaan luokkahuoneessa. Edelleen Schoenfeld (Dingman ym., 2019, 33) hahmotteli ja tarkensi näitä ajatuksia suhteessa matematiikkaan, opettajaan ja oppijaan, mitä hän luonnehti *didaktiseksi kolmioksi*. Kuvasta 4.1 nähdään, miten eri vuorovaikutussuhteet vaikuttavat oppiaineksen, opettajan ja oppijan välillä sekä miten opettajan tehtävä on luoda didaktinen suhde oppiaineen ja oppijan välille.



Kuva 4.1. Didaktisen kolmion punainen nuoli havainnollistaa, miten opettaja toteuttaa opetuksen oppilaan ja oppiaineksen välillä. Näiden välinen didaktinen suhde voidaan nähdä myös kielentämisen prosessina.

Didaktinen suhde onkin opettajalle tärkeä väline tarkastella tapoja, joilla oppija saavuttaa osaamistavoitteet. Matematiikassa tämä tarkoittaa sitä, että didaktinen suhde vaatii onnistuakseen erityistä kielentämistä, jossa didaktisen kolmion mukaan opettajan suhde oppijan ja oppiaineksen välillä toimii. Vaikka formaali kieli on matematiikalle ominaisin kielentämisen muoto, myös muut kielentämisen muodot tukevat usein toisiaan, jolloin asian oppiminen tehostuu. On esimerkiksi hyvin tavallista, että koulutaipaleen alkupuolella käytetään pääasiassa formaalia ja kuviokieltä, jotta abstraktit asiat, kuten numerot tai laskutoimitukset, assosioidaan konkreettisten kappaleiden määrään. Myös Sfardin (Tossavainen & Leppäaho, 2018, 301–302) havainnot siitä, että uusi matemaattinen käsite näyttäytyy oppijalle yleensä aluksi yksittäisinä toimenpiteinä tai niiden kohteena, täsmentää ajatusta siitä, että kielentämistä tarvitaan assosiaation välineenä. Tämä edelleen kehittää taulukon 4.2 mukaan oppijan matemaattista taitoa sekä matemaattisia käytäntöjä, joiden kautta on mahdollista konstruoida matemaattisen ajattelun prosesseja laajemmin ja syvemmin.

Vaikka didaktisen kolmion teoreettinen lähtökohta on hyvä opetusprosessin havainnollistajana, haasteeksi muodostuu kuitenkin sen puute erottaa kielentämisen tasoja matemaattisen ajattelussa. Esimerkiksi informaation prosessoinnin kannalta metakognitiivisilla taidoilla sekä matematiikan diskurssilla on tärkeä rooli siinä, miten matemaattisia abstrakteja rakenteita muodostetaan. Kun matemaattinen ajattelu on tarpeeksi kehittynyt abstraktilla tasolla, on hyvä kehittää sitä seuraavaksi luonnollisen kielen tasolla, jolloin tämän kautta pystytään hahmottamaan myös puheesta ja tekstistä matemaattisia rakenteita, kun kyse on esimerkiksi sanallisista tehtävistä tai päässälaskuista. Multimodaliteetin näkökulmasta semioottisten järjestelmien väliset merkitykset voivat olla kuitenkin epäyhtenäisiä, kun puhuttua kieltä käytetään selittämään matemaattisia käsitteitä, mikä hankaloittaa formaalisen, luonnollisen ja kuviokielen yhteistä ymmärtämistä (O'Halloran, 2015, 11). Myös matematiikan oppimisessa matematiikan representaation käytöllä on merkitystä, koska se mahdollistaa joidenkin käsitteiden konkretisoinnin oppilaiden oppimisvaikeuksien vähentämiseksi, jolloin matematiikasta tulee vuorovaikutteisempaa, mielenkiintoisempaa ja se voi helpottaa opiskelijoiden kognitiivisten kykyjen yhdistämistä matematiikan representaatioon (Iskak, 2020, 2). Lopulta on kuitenkin tärkeää, että näiden eri kielien ja keinojen kautta otetaan huomioon yhä matemaattisen ajattelun perusta, jota hyödyntämällä voidaan didaktisesti tukea oppijan konseptuaalista ja proseduurista tietoa osana informaation prosessointia.

4.2 Joukko-opin kielentäminen

Joukko-opin luonne mahdollistaa hyvin erityisellä tavalla eri kielentämisen muodot. Joukko-opin hienous korostuu kuitenkin kuviokielessä, sillä sen avulla nähdään visuaalisesti eri matemaattisia tilanteita. Tämä voi havainnollistaa monimutkaisiakin tilanteita yksinkertaisemmiksi, jolloin asian ymmärtäminen muuttuu helpommaksi. Jotta joukko-oppia voi kuitenkin ymmärtää täsmällisesti, on sen rakenteisiin perehdyttävä myös formaalin ja luonnollisen kielen avulla. Poiketen kielentämisen yleisestä määritelmästä taktiilista toiminnan kieltä ei yleensä esiinny joukko-opissa eikä sitä myöskään tässä osiossa esitellä. Tässä osiossa käydään läpi tarkemmin formaalia, luonnollista ja kuviokieltä joukko-opin näkökulmasta.

4.2.1 Formaali kieli

Formaalilla kielellä tarkoitetaan matematiikassa usein samaa kuin symbolikieli. Formaalissa kielessä jokin symboli tai merkki edustaa jotakin tiettyä merkitystä. Niin kuin tavallisesti matematiikassa, myös joukko-oppi koostuu erilaisista symboleista, jotka rakentavat joukko-opille merkityksen. Esimerkiksi symbolit $\mathbb{R}$ ja $\cap$ ovat joukko-opin formaalia kieltä, jonka merkitys on avattava ja ymmärrettävä erikseen. Tarkastelemme seuraavaksi luvun 3 määritelmää 3.4.

Olkoon $\mathcal{P}(A)$ joukon A kaikkien osajoukkojen joukko, jolle

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Joukkoa $\mathcal{P}(A)$ sanotaan joukon A *potenssijoukoksi*.

Huomaamme, että kyseinen määritelmä koostuu monista eri symboleista. Itse formaalin kielen osuus ilmenee määritelmän formaalina lausekkeena, joka on $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Jotta lausekkeen voi ymmärtää, on siis tiedettävä, mitä symbolit $\mathcal{P}(A)$, A, B, $=$, $|$, $\subseteq$ ja $\{\}$ tarkoittavat. Symbolit voidaan toki nimetä yksittäisinä tarkoittamaan jotakin tiettyä asiaa, mutta kokonaisuutena ne muodostavat ikään kuin kätketyn lauseen, jonka voi lukea kuin minkä tahansa virkkeen. Kuten kyseisestä määritelmästä voimme huomata, sen alkupuoli koostuu ymmärrettävistä sanoista päälauseen muodossa ja loppupuoli koostuu formaalista lausekkeesta sivulauseen muodossa. Koska kyseessä on normaali virke, lauseiden päätteeksi tulee myös piste.

Syy, miksi formaalia kieltä tarvitaan joukko-opissa tai ylipäänsä matematiikassa, on se, että se mahdollistaa useimmiten täsmällisen ja yleistettävän tulkinnan erilaisista rakenteista, joita voi soveltaa muissa matemaattisissa tilanteissa helposti. Lisäksi esimerkiksi formaali kieli on tehokas kuvattaessa käsitteiden kvantitatiivisia muutoksia (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, 415). Tämä palvelee enemmän matemaattista tarkoitusta, koska se edistää matematiikan substanssiosaamista. Formaali kieli tehostaa myös didaktiikan näkökulmasta matemaattisessa taidossa proseduurista sujuvuutta ja adaptiivista päättelyä sekä matemaattisissa käytännöissä abstraktia päättelyä ja rakenteita (ks. taulukko 4.2).

4.2.2 Luonnollinen kieli

Luonnollisella kielellä tarkoitetaan matematiikassa yleisesti puhuttua ja kirjoitettua kieltä. Sitä esiintyy tavallisesti koulumatematiikassa sanallisissa tehtävissä, mutta sitä on oikeastaan yleensä jonkin verran myös muissa matematiikan tehtävissä. Joukko-opissa luonnollinen kieli esiintyy tavallisesti formaalin kielen yhteydessä, kun selitetään merkityksiä, joita ei voi merkitä symbolikielen avulla. Tarkastelemme seuraavaksi luvun 3 määritelmän 3.3 alkuosaa.

Joukko A on joukon B *osajoukko*, jos ja vain jos jokainen joukon A alkio on myös joukon B alkio. Toisin sanoen voidaan kirjoittaa, että

$$\forall x(x \in A \implies x \in B).$$

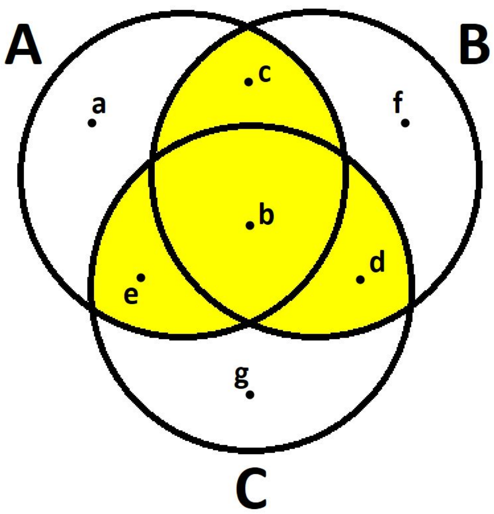
Tällöin merkitään

$$A \subseteq B.$$

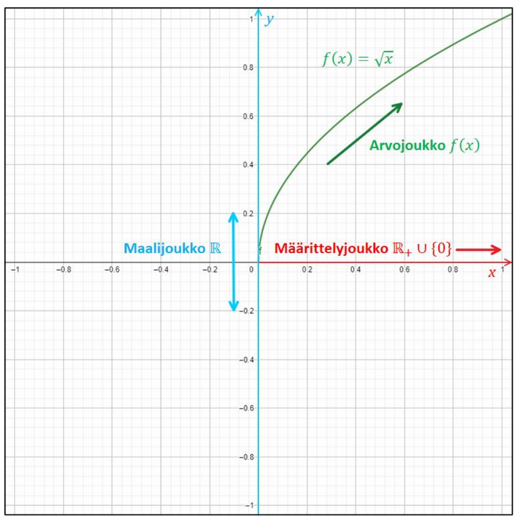
Huomaamme, että kyseinen määritelmä koostuu sekä luonnollisesta että formaalista kielestä. Luonnollisen kielen osuus ilmenee heti määritelmän alkuosasta, josta seuraa heti formaalin kielen osuus. On tavallista, että erityisesti matemaattisissa määritelmissä määritelmä pyritään esittämään ensin luonnollisen kielen keinoin, jonka jälkeen sama määritelmä esitetään formaalin kielen avulla. Tämä tukee assosiaatiota luonnollisen ja formaalin kielen välillä. Kun käsitteille haetaan merkityksiä niiden kvalitatiivisten ominaisuuksien perusteella, luonnollinen kieli on tällöin tehokas keino (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, 415). Tämä puolestaan tukee ymmärtämään matematiikkaa ilmiölähtöisellä tavalla, kun käsitteet ymmärretään abstraktien rakenteiden lisäksi pragmaattisesti. Joukko-opin näkökulmasta pragmaattisuus onkin erityisen perusteltua, sillä se pyrkii luomaan mielikuvien kautta todellisuuden hyödyntäen joukko-opin toimintaa sen ympäristössä. Matemaattisena ajatteluna tämä edistää myös informaation prosessointia, kun matemaattinen ymmärrys ja tiedon käsite vuorovaikuttavat toisiinsa, sekä tiedematemaattisuutta, kun muun muassa analoginen päättely, tiedon struktuurinen ymmärtäminen ja ajattelun joustavuus niin ikään vuorovaikuttavat toisiinsa (ks. taulukko 4.1). Lisäksi luonnollinen kieli tehostaa myös didaktiikan näkökulmasta matemaattisessa taidossa konseptuaalista ymmärrystä sekä matemaattisissa käytännöissä merkityksen tekemistä ja ratkaisun perusteluita (ks. taulukko 4.2).

4.2.3 Kuviokieli

Kuviokielellä tarkoitetaan matematiikassa visualisointia, jonka avulla voidaan esittää esimerkiksi kuvioita, kuvia ja kuvaajia. Toisin sanoen kuviokieli pyrkii esittämään informaatiota visuaalisen kielen kautta, jonka tarkoitus on muodostaa ja kehittää tietoa sisäisten mallien avulla. Kuviokielen tarpeellisuus on usein aihealueesta riippuvaista, ja esimerkiksi geometriassa se on hyödyllinen kielentämisen muoto. Myös joukko-opissa kuviokieli on hyödyllinen kielentämisen muoto, sillä se visualisoi joukko-opillisia merkityksiä, joita esiintyy formaalissa ja luonnollisessa kielessä. Tarkastelemme seuraavaksi luvun 3 kuvia 3.10 ja 3.19.



Kuva 3.10



Kuva 3.19

Huomaamme, että yllä olevat kuvat ilmentävät kuviokieltä ja että kuvat ovat keskenään eriluonteisia. Joukko-opissa on yleistä kuvastaa joukkoja Venn-diagrammien avulla kuvan 3.10 tapaan. Venn-diagrammi on tärkeä kuviokielen väline joukko-opissa, sillä se kuvaa matemaattiset ja loogiset yhteydet joukkojen välillä, mukaan lukien operaatiot. Tämä tukee joukko-opissa formaalin ja luonnollisen kielen yhteisvaikutusta, jossa eri kielet assosioivat toisiaan ja kehittävät matemaattista ajattelua kokonaisvaltaisesti. Kokonaisuutena kuviokieli siis tehostaa käsitteiden välisiä yhteyksiä (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, 415). Luonnollisen kielen tavoin kuviokieli edistää pragmaattista suhtautumista joukko-oppiin, sillä se auttaa hahmottamaan erilaisia tilanteita käytännöntasolla ja ilmiölähtöisesti osana arkipäivän matematiikkaa. Matemaattisessa ajattelussa tämä voidaankin nähdä ennen kaikkea antropologisena ilmiönä mutta myös informaation prosessointina ja tiedematemaattisuutena (ks. taulukko 4.1). Lisäksi kuviokieli tehostaa myös didaktiikan näkökulmasta matemaattisessa taidossa strategista osaamista sekä matemaattisissa käytännöissä matemaattista mallintamista (ks. taulukko 4.2).

Joukko-opissa joukkoja kuvataan tavallisesti ympyröillä. Kuvasta 3.10 voimme esimerkiksi myös huomata, että joukkoon voi kuulua myös alkioita, joita kuvataan pisteillä, sekä joukot voivat leikata toisiaan. Kokonaisuutena kuvan 3.10 Venn-diagrammi ilmaisee kuviokielen avulla formaalin kielen tilannetta, jossa $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Joukkoja voidaan myös ilmaista kuvauksien eli funktioiden avulla, kuten kuvassa 3.19. Itse joukko-opissa tämä on harvinaisempaa, mutta sovellettuna analyysiin tämä on tyypillistä, kun tutkitaan funktioita esimerkiksi koordinaatistossa. Joukkojen tarkastelu koordinaatistossa on perusteltua, kun tutkitaan funktion ja sen arvojoukon suhdetta määrittelyjoukon ja maalijoukon välillä. Edelleen tämän avulla voidaan tutkia esimerkiksi sitä, onko funktio injektiivinen, surjektiivinen tai bijektiivinen. Kuvasta 3.19 huomaamme, miten funktio $f(x) = \sqrt{x}$ käyttäytyy xy-koordinaatistossa ja miten x-akseli kuvastaa määrittelyjoukkoa (punainen), y-akseli maalijoukkoa (sininen) ja funktio f arvojoukkoa (vihreä). Kuviokieli on siis tehokas tapa kielentää matematiikkaa visuaalisesti, sillä se konkretisoi erilaisia rakenteita, mutta se vaatii rinnalleen usein formaalin ja luonnollisen kielen merkityksiä toimiakseen tarkoituksenmukaisella tavalla.

5 Joukko-oppi ja lukion pitkä matematiikka

Tässä luvussa käydään läpi joukko-oppia lukion pitkässä matematiikassa. Luvun tarkoitus on antaa lukijalle tietoa lukion opetussuunnitelmista, pitkän matematiikan oppikirjoista sekä pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta. Lisäksi tarkoituksena on tarkastella tarkemmin lukion opetussuunnitelmien, oppikirjojen ja matematiikan ylioppilaskokeiden välisiä yhteyksiä ja eroavaisuuksia keskenään.

5.1 Opetussuunnitelmat

Lukion opetussuunnitelmat ovat kokonaisuutena kokeneet suuria muutoksia vuosikymmenten aikana. Joukko-opin rooli lukion matematiikan opetussuunnitelmissa on ollut vähäinen uuden matematiikan suosion laskettua. Tätä ennen joukko-opin olemassaolo näkyi oikeastaan vain oppikoulun opetussuunnitelmassa, joka vuoden 1982 jälkeen on muuttunut osana lukiojärjestelmän uudistusta. Tämän jälkeen lukion opetussuunnitelman perusteita on uudistettu vuosina 1985, 1994, 2003, 2015 ja 2019. Vaikka lukion opetussuunnitelman perusteita on uudistettu useana vuotena aina vuodesta 1982, rajataan näiden tarkastelu tässä tutkielmassa koskemaan vain lukion opetussuunnitelmia 2003 (LOPS 2003), 2015 (LOPS 2015) ja 2019 (LOPS 2019), joista on saatavilla Opetushallituksen luomat julkiset asiakirjat (Opetushallitus, 2003; Opetushallitus, 2015; Opetushallitus, 2019).

Matematiikkaa kuvataan yleisesti lukion eri opetussuunnitelmissa hyvin käytännönläheisenä oppiaineena, jossa painotetaan sen kulttuurista ja yhteiskunnallista ulottuvuutta. Opetussuunnitelmien yhteisenä tekijänä näkyy erityisesti tutustuttaminen matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan peruskäsitteisiin ja rakenteisiin. Myöskin matematiikan kieltä, mallintamista ja ongelmanratkaisutaitoja tuodaan esiin. Ajan henki ilmenee kuitenkin selkeästi eri opetussuunnitelmien välillä, sillä esimerkiksi LOPS 2003 poiketen LOPS 2015 ja LOPS 2019 ottavat huomioon digitalisaation, jossa ohjelmistoja on mahdollisuus käyttää osana matematiikan opiskelua. Opetuksen tavoitteet ja arviointi kuvataan niin ikään hyvin samoja periaatteita painottaen. Pitkän matematiikan opinnot koostuvat pääasiassa pakollisista ja syventävistä kursseista, joista LOPS 2019 -kauteen asti pakollisia oli kymmenen ja valtakunnallisia syventäviä kolme. Kun LOPS 2019 astui voimaan syksyllä 2021, kurssien sisällöt myös paikoin muuttuivat ja kurssien laajuudet otettiin käyttöön opintopisteinä.

Kun kuitenkin tarkastellaan pitkän matematiikan kurssien keskeisiä tavoitteita ja sisältöjä, joukko-opista ei ole suoria mainintoja missään opetussuunnitelmassa. On kuitenkin tiedossa, että erityisesti pakollisella kurssilla *Todennäköisyys ja tilastot* (LOPS 2003 mukaan MAA6, LOPS 2015 mukaan MAA10 ja LOPS 2019 mukaan MAA8) käsitellään esimerkiksi permutaatioita ja kombinaatioita, jotka liittyvät joukko-oppiin hyvin alkeellisesti.

5.2 Oppikirjat

Pitkän matematiikan oppikirjat toteuttavat hyvin eri tavalla opetussuunnitelmien asettamia tavoitteita sisällöllisesti joukko-opin näkökulmasta. Sisältöön ovat vaikuttaneet myös osaltaan LOPS-kaudet. Tarkastellaan seuraavaksi Pyramidi, Juuri, Moodi, Sigma, Tekijä ja Pitkä matematiikka -kirjasarjojen esitystapoja taulukkona, jossa vertaillaan joukko-opin näkyvyyttä kursseittain (ks. Liite 1).

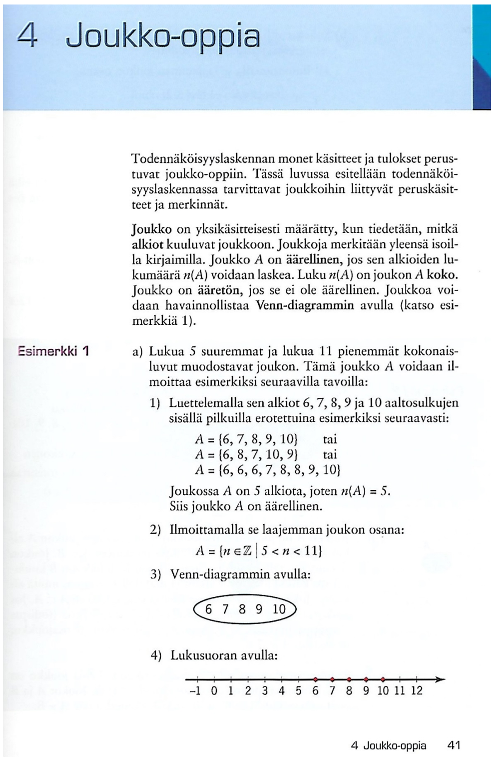
Joukko-opin näkyvyys kursseittain		
Oppikirja	LOPS	Kurssit
Pyramidi	2003	MAA1, **MAA6**, MAA7, MAA8, MAA9, **MAA11**
Juuri	2015 / 2019	*MAY1*, *MAA10/MAA8*
Moodi	2019	MAY1, *MAA8*
Sigma	2003	MAA1, MAA6
Tekijä	2015	MAY1, MAA10
Pitkä matematiikka	2003	*MAA1*

Taulukko 5.1. Joukko-opin näkyvyys kursseittain eriteltynä oppikirjojen (Liite 1), LOPS-kauden ja kurssien mukaan. Näkyvyyden kriteerinä ovat joukko-opilliset aihealueet. Lihavoitu merkintä tarkoittaa joukko-opin näkyvyyttä omana aihealueena, tavallinen merkintä yleistä näkyvyyttä ja kursivoitu merkintä heikkoa tai epäsuoraa näkyvyyttä.

Taulukosta huomataan selkeästi, että eri kirjasarjoilla on vaihtelua joukko-opin näkyvyydessä. Esimerkiksi Pyramidi-kirjasarjassa joukko-oppia näkyy runsaasti, kun taas nykyisissä Juuri- ja Moodi-kirjasarjoissa sitä ei näy juurikaan. Yhtenä erottavana tekijänä voidaan huomata erityisesti LOPS-kausien eroavaisuus. Esimerkiksi LOPS

2003 -kauden kirjasarjoissa joukko-oppia on käytetty rohkeammin kuin tuoreimmissa LOPS-kausissa. Poikkeuksen tekee kuitenkin Pitkä matematiikka -kirjasarja, jossa joukko-opillisia merkintöjä vältetään merkittävästi ja ainoaksi käsittelyksi joukko-opista jää ensimmäisen kurssin lukujoukkojen suppea esittely. Tuoreinta LOPS-kautta edustaa muun muassa Juuri-kirjasarja, joka on ollut käytössä jo LOPS 2015 -kaudesta lähtien laajasti, ja kyseistä kirjasarjaa on tämän jälkeen päivitetty vastaamaan myös LOPS 2019 -kautta. Kummassakaan versiossa joukko-oppia ei esiinny oleellisin osin muuten kuin permutaatioiden ja kombinaatioiden osalta. Myös Moodi-kirjasarjan rakenne on hyvin samankaltainen. Puolestaan Pyramidi-kirjasarjan erikoisuutena on kaikkiin muihin kirjasarjoihin verrattuna sen omat joukko-oppia käsittelevät luvut (ks. kuvat 5.1 ja 5.2) kursseilla MAA6 (*Todennäköisyys ja tilastot*) ja MAA11 (*Lukuteoria ja logiikka*), jotka ovat taulukossa 5.1 lihavoituna. Kyseisissä luvuissa käsitellään joukko-oppia hyvin monipuolisesti sillä painotuksella, että kurssilla MAA6 käsitellään joukko-opin peruskäsitteet ja operaatiot lyhyesti ja kurssilla MAA11 käsitellään näiden lisäksi vielä muun muassa De Morganin kaavat, relaatio, kuvaukset, mahtavuudet sekä kuva ja alkukuva. Sisällöllisesti näiden kurssien välillä on voimakas ero, ja kurssilla MAA11 onkin paljon sellaisia asioita, jotka voisi mieltää opeteltavaksi vasta yliopistossa, kuten relaatio, mahtavuudet sekä kuvauksiin liittyen injektio, surjektio ja bijektio. Lisäksi samalla kurssilla esitetään rohkeasti terminologiaa, määritelmiä ja todistuksia, joita esitellään tavallisesti vasta yliopistomatematiikassa. Kurssilla MAA1 (*Funktiot ja yhtälöt*) joukko-oppia esitellään myös näkyvästi kirjan alussa lukujoukkoja käsittelevässä kappaleessa sekä funktioita käsittelevässä luvussa. Lukujoukkoja käsittelevä kappale keskittyy esittelemään joukko-oppia hyvin alkeellisella tasolla, jossa ovat mukana eri lukujoukkojen merkinnät ja niiden selitykset, kuten luonnollisten lukujen joukko, kokonaislukujen joukko, rationaalilukujen joukko ja reaalilukujen joukko. Funktioita käsittelevässä luvussa käsitellään puolestaan muun muassa määrittelyjoukkoa, maalijoukkoa ja arvojoukkoa. Kyseisen luku sisältää joukkomerkintöjen lisäksi myös havainnollistavia Venn-diagrammeja, jotka auttavat ymmärtämään määrittelyjoukon ja maalijoukon välistä suhdetta funktioon. Muilla Pyramidi-kirjasarjan kursseilla näitä käsitteitä käydään lisäksi vaihtelevasti kertauksenomaisella tavalla, mutta ei enää perusteellisesti. Sigma-kirjasarjan versio kurssista MAA1 on joukko-opin osalta hyvin samankaltainen rakenteeltaan Pyramidin kanssa, mutta se ei ole yhtä kattava kuin Pyramidin versio.

Kaiken kaikkiaan tässä kirjasarjavertailussa selvä voittaja on Pyramidi. Muissa kirjasarjoissa joukko-oppia näkyy oikeastaan vain ensimmäisen pitkän matematiikan (MAA1 tai MAY1) tai todennäköisyyttä ja tilastoja käsittelevän kurssin (MAA6, MAA8 tai MAA10) kohdalla. Näidenkin kurssien kohdalla on kuitenkin paljon painotuseroja, sillä jotkut kirjasarjat, kuten Pyramidi ja Sigma, esittävät esimerkiksi ensimmäisen pitkän matematiikan kurssilla funktioon liittyviä määrittely-, maali- ja arvojoukkoja selkeämmin kuin toiset. Opiskelijan näkökulmasta onkin merkillepantavaa, että kaikki pitkän matematiikan kirjasarjat eivät siis kohtele heitä yhdenvertaisesti. Lukiot, joissa on ollut esimerkiksi käytössä Pyramidi-kirjasarja, ovat voineet olla joukko-opin oppimisessa ja ymmärtämisessä etusijalla verrattuna niihin lukioihin, joissa on ollut jokin muu kirjasarja. On erikoista, miten Pyramidi-kirjasarja on tehnyt merkittävän irtioton kaikkiin muihin kirjasarjoihin nähden, vaikka mikään LOPS ei erikseen vaadi joukko-opin sisällyttämistä kurssien sisältöihin. Lienee kuitenkin selvää, että oppimiserot joukko-opin suhteen eri lukioiden opiskelijoiden välillä ovat olleet olemassa, ja tämä on voinut vaikuttaa kokonaisuutena pitkän matematiikan laaja-alaisempaan ymmärtämiseen.



4 Joukko-oppia

Todennäköisyyslaskennan monet käsitteet ja tulokset perustuvat joukko-oppiin. Tässä luvussa esitellään todennäköisyyslaskennassa tarvittavat joukkoihin liittyvät peruskäsitteet ja merkinnät.

Joukko on yksikäsitteisesti määrätty, kun tiedetään, mitkä **alkiot** kuuluvat joukkoon. Joukkoja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla. Joukko A on **äärellinen**, jos sen alkioiden lukumäärä $n(A)$ voidaan laskea. Luku $n(A)$ on joukon A **koko**. Joukko on **ääretön**, jos se ei ole äärellinen. Joukkoa voidaan havainnollistaa **Venn-diagrammin** avulla (katso esimerkkiä 1).

Esimerkki 1

a) Lukua 5 suuremmat ja lukua 11 pienemmät kokonaisluvut muodostavat joukon. Tämä joukko A voidaan ilmoittaa esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

1) Luettelemalla sen alkiot 6, 7, 8, 9 ja 10 aaltosulkujen sisällä pilkuilla erotettuina esimerkiksi seuraavasti:

$A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ tai
$A = \{6, 8, 7, 10, 9\}$ tai
$A = \{6, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10\}$

Joukossa A on 5 alkiota, joten $n(A) = 5$.
Siis joukko A on äärellinen.

2) Ilmoittamalla se laajemman joukon osana:

$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 5 < n < 11\}$

3) Venn-diagrammin avulla:

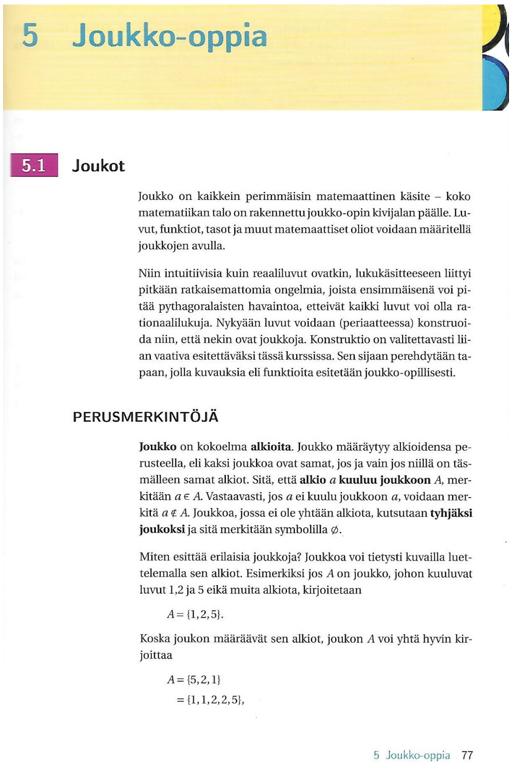
6 7 8 9 10

4) Lukusuoran avulla:

–1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

4 Joukko-oppia 41

Kuva 5.1. Pyramidin kirja kurssista MAA6 (Kontkanen ym., 2012, 41).



5 Joukko-oppia

5.1 Joukot

Joukko on kaikkein perimmäisin matemaattinen käsite – koko matematiikan talo on rakennettu joukko-opin kivijalan päälle. Luvut, funktiot, tasot ja muut matemaattiset oliot voidaan määritellä joukkojen avulla.

Niin intuitiivisia kuin reaaliluvut ovatkin, lukukäsitteeseen liittyi pitkään ratkaisemattomia ongelmia, joista ensimmäisenä voi pitää pythagoralaisten havaintoa, etteivät kaikki luvut voi olla rationaalilukuja. Nykyään luvut voidaan (periaatteessa) konstruoida niin, että nekin ovat joukkoja. Konstruktio on valitettavasti liian vaativa esitettäväksi tässä kurssissa. Sen sijaan perehdytään tapaan, jolla kuvauksia eli funktioita esitetään joukko-opillisesti.

PERUSMERKINTÖJÄ

Joukko on kokoelma **alkioita**. Joukko määräytyy alkioidensa perusteella, eli kaksi joukkoa ovat samat, jos ja vain jos niillä on täsmälleen samat alkiot. Sitä, että **alkio** a **kuuluu joukkoon** A, merkitään $a \in A$. Vastaavasti, jos a ei kuulu joukkoon a, voidaan merkitä $a \notin A$. Joukkoa, jossa ei ole yhtään alkiota, kutsutaan **tyhjäksi joukoksi** ja sitä merkitään symbolilla $\emptyset$.

Miten esittää erilaisia joukkoja? Joukkoa voi tietysti kuvailla luettelemalla sen alkiot. Esimerkiksi jos A on joukko, johon kuuluvat luvut 1,2 ja 5 eikä muita alkiota, kirjoitetaan

$A = \{1, 2, 5\}$.

Koska joukon määräävät sen alkiot, joukon A voi yhtä hyvin kirjoittaa

$A = \{5, 2, 1\}$
$= \{1, 1, 2, 2, 5\}$,

5 Joukko-oppia 77

Kuva 5.2. Pyramidin kirja kurssista MAA11 (Ernvall-Hytönen ym., 2006, 77).

5.3 Pitkän matematiikan ylioppilaskoe

Tarkastellaan seuraavaksi pitkän matematiikan eri ylioppilaskokeita taulukkona, jossa vertaillaan joukko-opin näkyvyyttä tehtävittäin lähtien vuodesta 2005, jolloin LOPS 2003 astui voimaan.

Joukko-opin esiintyvyys ylioppilaskokeessa tehtävittäin		
Tutkintovuosi	**Tutkintokerta**	
	Kevät	Syksy
2005 (LOPS 2003)	8	–
2006	13	–
2007	–	14
2008	13	14
2009	7,9,10,15	13,15
2010	15	–
2011	10	**13**
2012	12,14	4,9,10
2013	–	**13**,15
2014	3,15	11,**12**,15
2015	4,11,12,13,15	1
2016 (LOPS 2015)	9	13
2017	13	4,8,10
2018	12	1
2019	10,13	4,9,13
2020	1,10	9,10,11
2021 (LOPS 2019)	4,9,13	6
2022	5,8,13	9,12

Taulukko 5.2. Joukko-opin näkyvyys esiintyvyys ylioppilaskokeessa tehtävittäin eriteltynä tutkintovuoden ja tutkintokerran mukaan. Esiintyvyyden kriteerinä ovat joukko-opilliset merkinnät. Lihavoitu merkintä tarkoittaa joukko-opin selkeää esiintyvyyttä ja tavallinen merkintä epäsuoraa esiintyvyyttä. (Ylioppilastutkintolautakunta)

Taulukosta nähdään, että monessa pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa on jonkin verran joukko-opin esiintyvyyttä. Taulukko on täytetty melko kevyillä perusteilla, sillä tehtävän merkitsemiseen on riittänyt esimerkiksi se, että tehtävässä esiintyy vähintään joukko-opin merkintöjä, kuten $\in$ tai $\mathbb{R}$, vaikka tehtävä itsessään ei käsittelisi joukko-oppia. Syy tähän on se, että kokelaan on täytynyt tunnistaa, mitä tietty symbolimerkintä tehtävänannossa tarkoittaa. Taulukkoon merkityt tehtävät ovat pääasiassa tehtävätyyppejä, joissa käsitellään analyysia, funktioita tai yhtälöitä. Muutamassa tehtävässä kuitenkin joukko-oppia esiintyy selkeästi siten, että kokelaalla on oltava tietämystä aihetta kohtaan menestyäkseen tehtävässä (nämä tehtävät ovat merkitty taulukkoon 5.2 lihavoidusti). Tästä voidaan tehdä myös se huomio, että kyseiset tehtävät ovat sijoittuneet kokeissa viimeisten tehtävien joukkoon, mikä kertoo siitä, että kokelaalta odotetaan syventävää osaamista aiheeseen liittyen.

12. Olkoon **R** reaalilukujen joukko ja $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ luonnollisten lukujen joukko. Onko seuraava väite tosi vai epätosi? Perustele vastauksesi.

a) $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R}\ :\ x \leq y$

b) $\exists y \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}\ :\ x \leq y$

c) $\exists x \in \mathbf{N}\ \forall y \in \mathbf{N}\ :\ x \leq y$

Kuva 5.3. Tehtävä 12 syksyn 2014 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta. (Ylioppilastutkintolautakunta)

Esimerkiksi kuvan 5.3 tehtävä 12 syksyn 2014 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta perustuu selkeästi joukko-oppiin, sillä kokelaan on täytynyt ymmärtää reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ja luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ välisen yhteyden vastatessaan, onko tehtävään liittyvät matemaattiset väitteet tosia vai epätosia.

13. Osoita epäsuoraa todistusta käyttämällä, että $\sqrt[3]{2}$ ei ole rationaaliluku.

Kuva 5.4. Tehtävä 13 syksyn 2013 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta. (Ylioppilastutkintolautakunta)

Lisäksi kuvan 5.4 tehtävä 13 syksyn 2013 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta käsittelee joukko-oppia rationaalilukukäsitteen muodossa, jossa kokelaan on täytynyt tunnistaa, että luku $\sqrt[3]{2}$ kuuluu irrationaalilukujen joukkoon ja suorittaa epäsuora todistus tämän tiedon avulla.

13. Osoita epäsuoraa todistusta käyttämällä, että $\lg 50$ ei ole rationaaliluku. $(\lg = \log_{10})$

Kuva 5.5. Tehtävä 13 syksyn 2011 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta. (Ylioppilastutkintolautakunta)

Samantyylinen tehtävä on myös kuvan 5.5 tehtävä 13 syksyn 2011 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta. Edellä mainitut tehtävät ovat kuitenkin joukko-opin näkökulmasta enemmän soveltavia, sillä niihin liittyy esimerkiksi logiikkaa käsitteleviä rakenteita ja abstrakteja päätelmiä.

Vaikka pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävien perusteella joukko-opin merkintöjen esiintyvyys on paikoitellen runsasta, on kuitenkin ilmeistä, että kokelaan osaamista ei ole tarkoitus mitata joukko-opissa. Suurin osa tehtävistä on tehty siten, että ne ovat ratkaistavissa erilaisten oletusten perusteella. Esimerkiksi funktioita käsittelevissä tehtävissä merkintä $x \in \mathbb{R}$ tehtävänannossa on hyvin tyypillinen oletus siitä, että funktioon käy mikä tahansa x:n arvo eli toisin sanoen funktio on määritelty kaikkialla. Merkintä on usein huomaamaton, mutta sen merkitys on taustalla suuri, sillä jos reaalilukujen joukon tilalla olisi vaikka kokonaislukujen joukko, tehtävän merkitys muuttuisi täysin, koska esimerkiksi tällöin funktio ei ole enää jatkuva. Myös merkintä $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on hyvin tavanomainen ilmaisemaan funktion jatkuvuutta usein itsestäänselvyytenä, mutta jos kuvauksen määrittelyjoukon tilalla olisikin merkintä $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, kuten tehtävässä 10 kevään 2011 pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa, tehtävän luonne muuttuu määrittelyjoukon ehdon myötä, sillä kokelaan on tiedettävä sinifunktion määrittelyjoukon välinen suhde tämän maalijoukkoon. Tästä syystä kokelaan on hyvä tietää tarkemmin funktioita käsittelevissä tehtävissä määrittelyjoukon ja maalijoukon välinen suhde joukko-opissa, jotta hän tunnistaa eri joukkojen ominaisuuksia osatakseen ratkaista tehtävän oikein.

6 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa toteutetaan tutkimus, jonka aihealue on jatkoa luvun 5 teemoille. Tarkoituksena on tutkia tarkemmin pitkää matematiikkaa opiskelevien opiskelijoiden osaamistasoa joukko-oppia käsittelevissä aiheissa. Tutkimus on toteutettu Tampereen yliopiston normaalikoulun lukiolla ja kohderyhmäksi on valittu kolmannen vuoden pitkän matematiikan opiskelijat. Ajankohtana on ollut 1.12.–2.12.2022 ja 8.12.2022.

6.1 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen keskeiset tutkimuskysymykset pyrkivät selvittämään lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden näkökulmasta heidän edellytyksiä oppia joukko-oppia. Tutkimuskysymykset jakautuvat kolmeen osaan:

(1) Miten lukion pitkän matematiikan opiskelijat osaavat joukko-oppia?

(2) Mikä rooli kielentämisellä on joukko-opin ymmärtämisessä?

(3) Mitkä ovat joukko-opin mahdollisuudet ja haasteet tulevaisuuden lukion pitkässä matematiikassa?

Tämän tutkielman tutkimusasetelma perustuu tapaustutkimukselle ja se on rakennettu pääasiassa tutkimuskysymyksen (1) ympärille, jonka avulla saadaan myöhemmin tietoa tutkimuskysymyksiin (2) ja (3) soveltaen luvun 5 aihealueita. Tutkimuskysymys (1) toteutetaan kyselylomakkeella (ks. alaluku 6.3).

6.2 Tutkimusmenetelmät

Tässä tutkimuksessa käytetään sekä kvalitatiivista että kvantitatiivista tutkimusotetta siten, että kvalitatiivinen tutkimusote on osin vahvemmassa roolissa. Tämän tutkielman näkökulmasta kvalitatiivisen tutkimusmenetelmän hyöty on sen ominaisuus vastata erityisesti tässä tutkielmassa olleisiin laadullisiin aihealueisiin, jotka koskevat tutkimuskysymyksiä (2) ja (3). Tutkimuksen kvantitatiivisuus ilmenee tutkimuskysymyksen (1) empiriassa. Tutkimus myös muistuttaa eniten hermeneuttista tutkimusmenetelmää, jossa tarkoitus on tulkintojen tekeminen suhteessa tutkimuskohteen syvälliseen ja inhimilliseen ymmärtämiseen (Jyväskylän yliopisto, 2018).

6.3 Kyselylomake

Tämän tutkimuksen varsinainen aineisto kerätään kyselylomakkeella (ks. Liite 2), jolla saadaan tietoa tutkimuskysymykseen (1). Kyselylomake toimii samalla myös opetusmateriaalina, sillä se sisältää opittavaa tietoa. Kyselylomake on tehty digitaalisesti Microsoft Forms -ohjelmalla ja siihen vastaaminen tapahtuu myös digitaalisesti ja nimettömänä. Kyselylomakkeessa on kahdeksan osaa, joista osa 1 koskee taustakysymyksiä, osat 2–6 varsinaisia tehtäviä, osa 7 palautetta kyselystä ja osa 8 suostumusta tutkimukseen osallistumiseen. Opiskelijoilta ei edellytetä esitietovaatimuksia, joten varsinaisissa tehtävissä on annettu johdattelevaa esitietoa ja esimerkkejä, jotta opiskelijat osaavat soveltaa tietoa vastatessaan tehtäviin. Kyselyyn annetaan vastausaikaa noin 30 minuuttia. Tarkemmin avattuna kyselylomakkeen osat ovat seuraavanlaisia:

(Osa 1) **Taustakysymykset**: Kartoitetaan ensin opiskelijoiden mahdollisia aiempia esitietoja joukko-opista ja selvitetään tyypillistä pitkän matematiikan kurssiarvosanaa aiemmilta kursseilta.

(Osa 2) **Joukkojen peruskäsitteitä**: Tehtävänä on määritellä annetut joukot Venn-diagrammien mukaan.

(Osa 3) **Lukujoukkoja osa 1**: Tehtävänä on antaa annetuista lukujoukoista esimerkkejä.

(Osa 4) **Lukujoukkoja osa 2**: Tehtävänä on selvittää, mitkä osajoukoista ovat voimassa annetuilla lukujoukoilla.

(Osa 5) **Funktioita osa 1**: Tehtävänä on ratkaista annetun määrittelyjoukon ja maalijoukon perusteella, mikä on kyseisen funktion arvojoukko.

(Osa 6) **Funktioita osa 2**: Tehtävänä on selvittää, mitkä annetuista kuvauksista ovat voimassa kyseisillä lukujoukoilla.

(Osa 7) **Palaute tutkimuskyselystä**: Kysytään, millaisena kysely koettiin, kuinka tuttuja kyselyssä olleet käsitteet ja merkinnät olivat entuudestaan sekä miten kyselyssä olleet uudet käsitteet ja merkinnät koettiin ymmärrettävän.

(Osa 8) **Suostumus tutkimukseen osallistumiseen**: Kysytään suostumusta käyttää vastauksia tutkimukseen.

6.4 Aineisto ja analyysi

Tämän tutkimuksen aineisto kerätään alaluvun 6.3 mukaisesti kyselylomakkeella. Aineisto analysoidaan siten, että sen määrällisestä kokonaiskuvasta voidaan tehdä johtopäätöksiä tutkimuskysymykseen (1) sekä laadullisesti tutkimuskysymyksiin (2) ja (3). Aineiston käsittelyssä otetaan huomioon erityisesti kyselylomakkeen eri osat, joiden perusteella voidaan tulkita, miten vastaajat ovat pystyneet esimerkiksi soveltamaan kyselyssä aiempia olleita tietoja hyödykseen. Lisäksi on oleellista havainnoida aineiston perusteella sitä, millaiset suhteet vastauksilla on toisiinsa laadullisesti. Esimerkiksi on hyvä tarkastella sitä, kuinka paljon vastaajan taitotaso tyypillisen pitkän matematiikan kurssiarvosanan mukaan korreloi kyselyssä menestymisen kanssa. Eräs tämän tutkimuksen hypoteeseista onkin se, korreloiko pitkän matematiikan osaaminen tyypillisen kurssiarvosanan kanssa tässä kyselyssä. Digitaalisen kyselylomakkeen myötä vastaukset on jo valmiiksi litteroitu helpottavaan muotoon Exceliin, jolloin allekirjoittaneen on helppoa analysoida vastauksia tarjolla olevien ohjelmistojen avulla. Tutkimuksen tilastollisina tunnuslukuina käytetään aritmeettista keskiarvoa sekä keskihajontaa, jotka antavat kokonaiskuvan tutkittavien osaamistasosta. Tutkimuksessa otetaan huomioon eettisyys siten, että tutkittavilta kysytään suostumus tutkimukseen osallistumiseen ja vastaukset kerätään nimettömästi. Lisäksi tutkimusaineisto tullaan hävittämään tämän tutkielman hyväksymisen jälkeen.

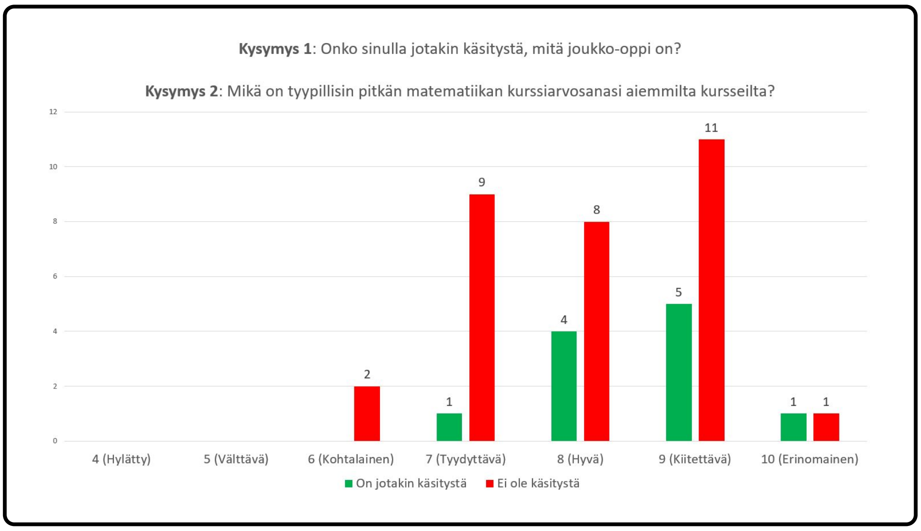
Tutkimusmenetelmien näkökulmasta osana analyysia on syytä tarkastella tutkimuksen luonteen uskottavuutta ja luotettavuutta. Arvioinnin kannalta empiirinen tieto antaa suurimman painoarvon tulosten analysoimisessa ja lopulta johtopäätösten tekemisessä. Koska tutkimus perustuu osin enemmän kvalitatiiviselle tutkimusotteelle, on tärkeää kiinnittää huomiota vastausten oikeellisuuden lisäksi niiden laatuun. Tämän tutkimuksen tarkoituksena ei ole ensisijaisesti mitata opiskelijoiden joukko-opin osaamista itsessään, vaan oleellista on tutkia, ovatko opiskelijat pystyneet omaksumaan ja ymmärtämään kyselylomakkeessa olevat käsitteet ja tehtävät jo aiempien pitkän matematiikan tietojen avulla. Analyysia tehdessä on siis otettava huomioon esimerkiksi se, että tämänhetkiseen lukion pitkän matematiikan oppimäärään ei kuulu itsenäisenä aihealueena joukko-oppi, mikä vaikuttaa osaltaan vastausten laatuun. Tästä syystä tapaustutkimus tutkimusmenetelmänä antaa jokseenkin suppean ja rajoittuneen kuvan, koska se tutkii vähäistä kohdetta. Tapaustutkimus on kuitenkin paras mahdollinen tutkimusmenetelmä tutkimaan tämän tutkimuksen tarpeita, sillä se antaa viitteitä tässä tutkimuksessa oleville tutkimuskysymysten vastauksista.

7 Tulokset

Tutkimukseen osallistui 42 opiskelijaa kolmesta eri ryhmästä. Ensimmäinen ryhmä (n=8) osallistui tutkimukseen 1.12.2022, toinen ryhmä (n=11) osallistui tutkimukseen 2.12.2022 ja kolmas ryhmä (n=23) osallistui tutkimukseen 8.12.2022. Kaikki osallistujat antoivat suostumuksen tutkimukseen osallistumiseen.

(Osa 1) **Taustakysymykset**

Kysymyksessä 1 vastaajat saavat vastata kysymykseen omin sanoin. Kysymyksessä 2 vastaajat vastaavat tyypillisen pitkän matematiikan kurssiarvosanan aiemmilta kursseilta.



Kuva 7.1. Kysymysten 1 ja 2 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan joukko-opin käsityksiä suhteessa tyypilliseen pitkän matematiikan kurssiarvosanaan aiemmilta kursseilta. Vastaajia (n=42).

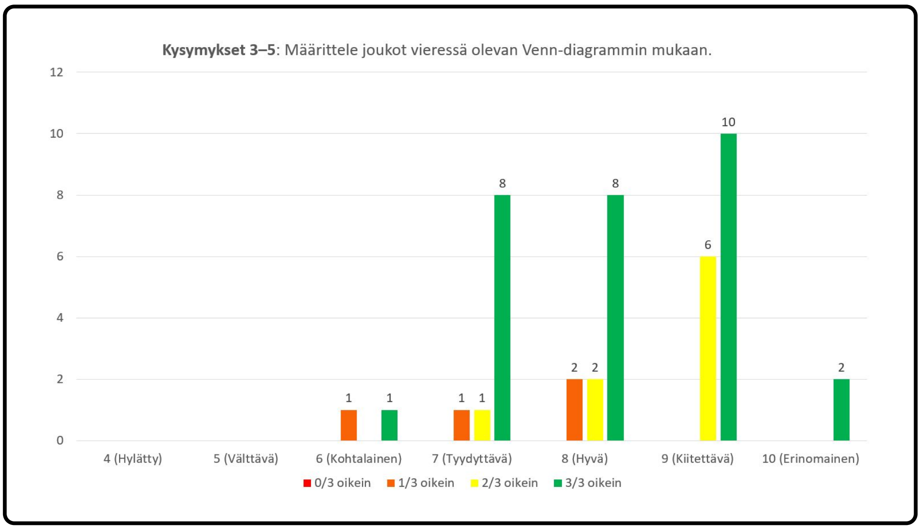
Tulosten mukaan vastaajien tyypillisen pitkän matematiikan kurssiarvosanan keskiarvoksi muodostui 8,14 ja keskihajonta oli 0,99. Tulosten mukaan 26 % opiskelijoista vastasi, että heillä on jotakin käsitystä siitä, mitä joukko-oppi on. Käsityksen olemiseen riitti vastaukseksi yritys selittää, mitä joukko-oppi on. Tyypillisen pitkän matematiikan kurssiarvosanan mukaan vastauksilla ei näytä olevan selvää korrelaatiota sen kanssa, olisiko paremman arvosanan saaneet vastanneet myönteisesti kysymykseen, sillä esimerkiksi yli puolet arvosanan 9 saaneista vastasi, että heillä ei ole käsitystä. Sama trendi on nähtävillä myös arvosanan 8 kohdalla. Sen sijaan arvosanojen 6 ja 7 kohdalla jonkinlainen korrelaatio on olemassa, sillä nämä vastasivat, että heillä ei ole käsitystä. Yksi arvosanan 7 saanut vastasi kuitenkin myönteisesti ja selitti käsityksensä hyvin. Arvosanan 10 kohdalla tulkintaa on vaikea tehdä johtuen pienestä otoksesta, vaikka toisen vastaajan vastaus olikin myönteinen ja laadultaan myös hyvä. Ohessa on kahden eri opiskelijan käsityksiä siitä, mitä joukko-oppi on.

> *"Joukko-oppiin kuuluvat eri lukujoukot. Jokaisessa joukossa on tietynlaisia lukuja, esim. kokonaislukuja tai reaalilukuja."*
> (Opiskelija 1, arvosanan 10 vastannut)

> *"Matemaattisia laskuja voidaan laskea hyödyntämällä joukkoja eli laskemalla kuinka moneen eri joukkoon jotkin termit voidaan jakaa."*
> (Opiskelija 2, arvosanan 7 vastannut)

(Osa 2) **Joukkojen peruskäsitteitä**:

Kysymyksissä 3–5 tehtävänä on määritellä annetut joukot Venn-diagrammien mukaan.

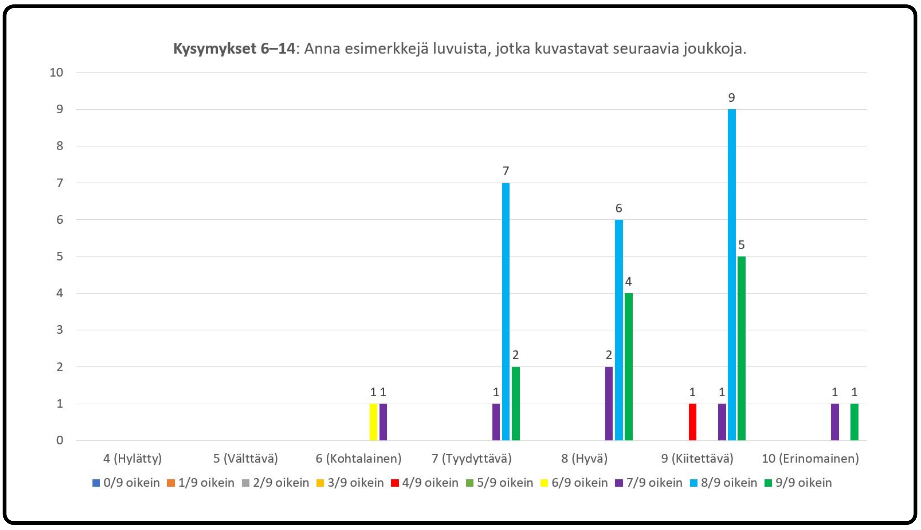


Kuva 7.2. Kysymysten 3–5 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan oikein vastanneiden osuutta joukkojen määrittelyssä. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan 69 % vastaajista vastasi kaikkiin kolmeen kysymykseen oikein. Puolestaan 21 % vastaajista vastasi kahteen kysymykseen oikein ja 10 % vastaajista vastasi yhteen kysymykseen oikein. Kukaan ei vastannut kaikkiin kysymyksiin väärin. Vastausten keskiarvoksi muodostui 2,67 / 3 tehtävää oikein ja keskihajonta oli 0,62. Kysymykseen 3 vastattiin useammin väärin kuin kysymykseen 4 ja 5. Oikeaan vastaukseen ei vaikuttanut poikkeavat kirjoitustavat. Kun vastaukset jaetaan kurssiarvosanan mukaan, voidaan huomata, ettei suurta vaihtelua osaamistasojen välillä ole. Huomionarvoista on tosin se, että arvosanan 7 saaneet suoriutuivat keskimäärin hieman paremmin kuin arvosanan 7 ja 8 saaneet, kun tarkastellaan tulosten keskiarvoa. Kaiken kaikkiaan tulosten perusteella kysymykset olivat suhteellisen helppoja.

(Osa 3) **Lukujoukkoja osa 1**:

Kysymyksissä 6–14 tehtävänä on antaa esimerkkejä luvuista, jotka kuvastavat annettuja joukkoja.

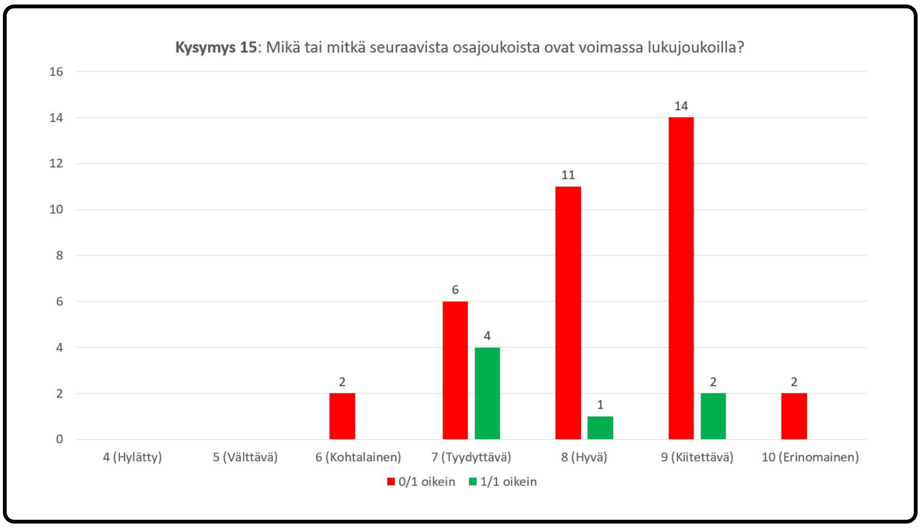


Kuva 7.3. Kysymysten 6–14 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan oikein vastanneiden osuutta esimerkkilukujen antamisessa. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan 29 % vastaajista vastasi kaikkiin yhdeksään kysymykseen oikein. Puolestaan 52 % vastaajista vastasi kahdeksaan kysymykseen oikein, 15 % vastaajista vastasi seitsemään kysymykseen oikein, 2 % vastaajista vastasi kuuteen kysymykseen oikein sekä 2 % vastaajista vastasi neljään kysymykseen oikein. Vastausten keskiarvoksi muodostui 8 / 9 tehtävää oikein ja keskihajonta oli 0,95. Kysymykseen, joka koski irrationaalilukujen joukkoa, vastattiin useammin väärin. Laadullisesti suurin osa vastaajista vastasi moneen kysymykseen oikein, mutta yksinkertaisella tavalla, kuten {1,2,3} kuvaamaan esimerkiksi reaalilukujen joukon alkioita. Oikeaan vastaukseen ei vaikuttanut poikkeavat kirjoitustavat ja oikea vastaus hyväksyttiin, jos pystyi esittämään oikean idean. Kun vastaukset jaetaan kurssiarvosanan mukaan, voidaan huomata, ettei suurta vaihtelua osaamistasojen välillä ole, vaikka paremman arvosanan saaneet suoriutuvat keskimäärin hieman paremmin kuin huonomman arvosanan saaneet, kun tarkastellaan tulosten keskiarvoa. Kuitenkin suhteutettuna arvosanan 7 saaneet suoriutuivat verrattain hyvin. Kaiken kaikkiaan tulosten perusteella kysymykset vaikuttivat olevan edelleen suhteellisen helppoja.

(Osa 4) **Lukujoukkoja osa 2**:

Kysymyksessä 15 tehtävänä on vastata, mitkä osajoukoista ovat voimassa annetuilla lukujoukoilla.

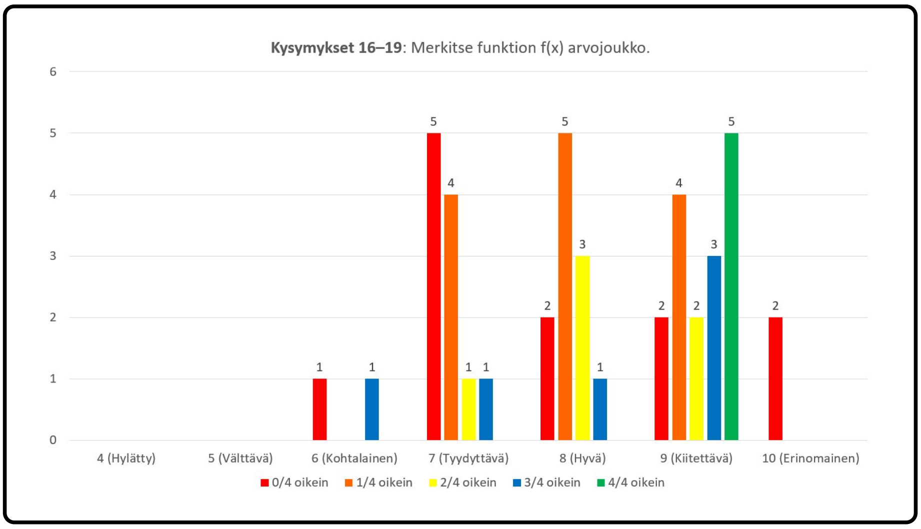


Kuva 7.4. Kysymyksen 15 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan oikein vastanneiden osuutta osajoukkojen voimassaolon valitsemisessa. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan 17 % vastaajista vastasi kysymykseen oikein ja 83 % vastaajista vastasi kysymykseen väärin. Vastausten keskiarvoksi muodostui 0,17 / 1 tehtävää oikein ja keskihajonta oli 0,37. Jotta vastaus laskettiin oikeaksi, vastaajan oli vastattava kysymykseen täysin oikein, sillä kysymys on laadittu monivalintatehtäväksi, jossa on mahdollisuus arvata vastauksensa oikein osittain. Laadullisesti tarkasteltuna moni kuitenkin vastasi osittain oikein kysymykseen, mikä saattaa antaa viitteitä siitä, että tehtävä on ymmärretty jollakin tasolla oikein. Kun vastaukset jaetaan kurssiarvosanan mukaan, voidaan huomata, ettei osaamistaso korreloi tehtävässä menestymisen kanssa. Kuitenkin suhteutettuna arvosanan 7 saaneet suoriutuivat selvästi paremmin kuin muun arvosanan saaneet. Kaiken kaikkiaan tulosten perusteella kysymys vaikutti tässä vaiheessa olevan vaikeampi verrattuna aiempiin kysymyksiin.

(Osa 5) **Funktioita osa 1**:

Kysymyksissä 16–19 tehtävänä on vastata, mitkä ovat annettujen funktioiden arvojoukkoja.

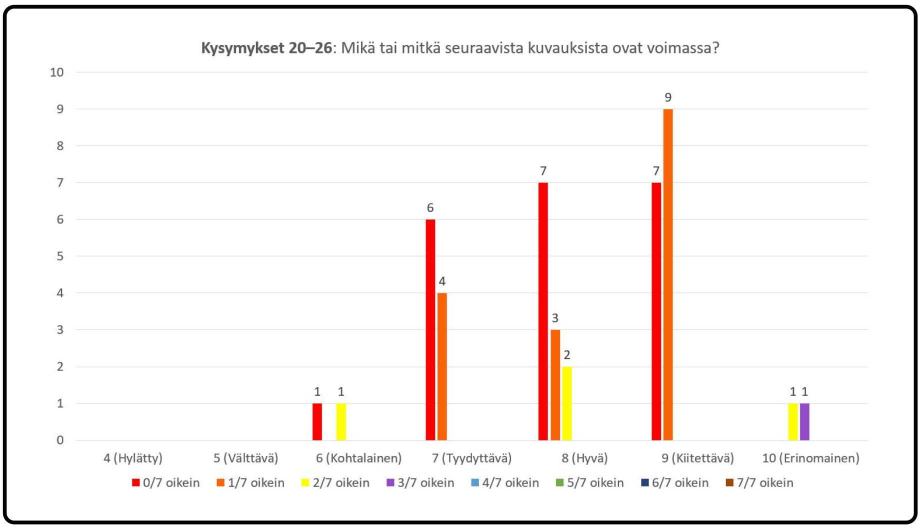


Kuva 7.5. Kysymysten 16–19 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan oikein vastanneiden osuutta funktion $f(x)$ arvojoukon merkitsemisessä. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan 12 % vastaajista vastasi kaikkiin neljään kysymyksiin oikein. Puolestaan 14 % vastaajista vastasi kolmeen kysymykseen oikein, 14 % vastaajista vastasi kahteen kysymykseen oikein, 31 % vastaajista vastasi yhteen kysymykseen oikein sekä 29 % vastaajista ei vastannut yhteenkään kysymykseen oikein. Vastausten keskiarvoksi muodostui 1,5 / 4 tehtävää oikein ja keskihajonta oli 0,87. Jotta vastaus laskettiin oikeaksi, vastaajan oli vastattava kysymykseen siten, että hän kirjoitti vastauksen viiden ensimmäisen alkion mukaan. Tämän kohdalla monilla tuli virheitä joidenkin kysymysten kohdalla, kuten ensimmäisen alkion 0 puuttumisesta, vaikka idean ymmärtäminen muuten välittyi laadullisesti vastauksista. Moni vastaaja osasi vastata kuitenkin oikein erityisesti kysymykseen 18, jossa vastauksen ensimmäinen alkio on 1. Näin ollen vaikuttaa siltä, että alkiota 0 ei pidetty alkiona ja tämän takia se puuttui monesta vastauksesta. Muuten oikeaan vastaukseen ei vaikuttanut poikkeavat kirjoitustavat ja oikea vastaus hyväksyttiin, jos pystyi esittämään oikean idean. Kun vastaukset jaetaan kurssiarvosanan mukaan, voidaan huomata, että pientä korrelaatiota on havaittavissa osaamistason ja tehtävissä menestymisen kanssa, kun tarkastellaan arvosanan 8 ja 9 saaneiden vastauksia. Kuitenkin arvosanan 10 saaneet suoriutuivat selvästi heikommin kuin muun arvosanan saaneet. Kaiken kaikkiaan tulosten perusteella kysymykset vaikuttivat tässä vaiheessa olevan tutumpia, kun tehtävä sisälsi funktioita ja tehtävätyyppi oli analyyttisempi.

(Osa 6) **Funktioita osa 2**:

Kysymyksissä 20–26 tehtävänä on vastata, mitkä kuvauksista ovat voimassa annetuilla funktioilla.

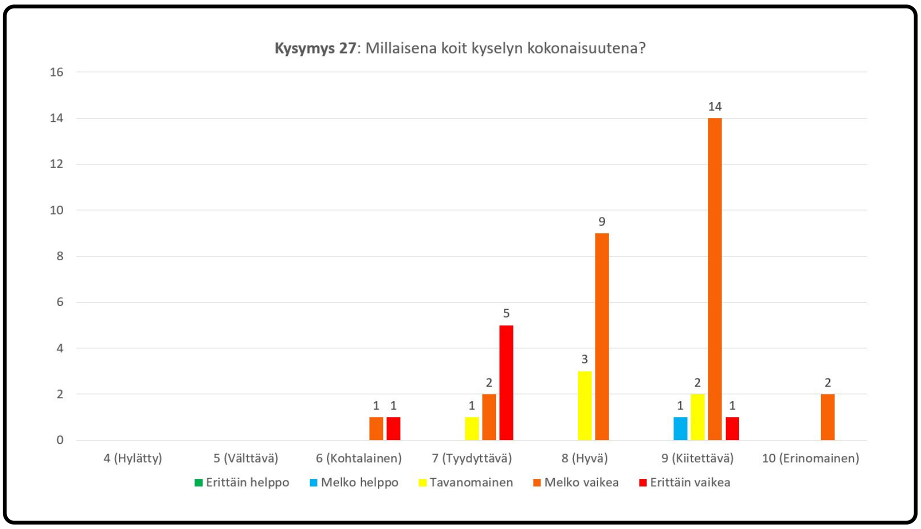


Kuva 7.6. Kysymysten 20–26 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan oikein vastanneiden osuutta kuvauksien voimassaolon valitsemisessa. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan kukaan ei vastannut kaikkiin seitsemään kysymykseen oikein. Myöskään kuuteen, viiteen tai neljään kysymykseen kukaan ei vastannut oikein. Vasta kolmeen kysymykseen oikein vastanneita oli vain 2 % vastaajista, kahteen kysymykseen vastanneita oli 10 % vastaajista, yhteen kysymykseen oikein vastanneita oli 38 % sekä ei yhtään oikein kysymykseen vastanneita oli 50 % vastaajista. Vastausten keskiarvoksi muodostui 0,64 / 7 tehtävää oikein ja keskihajonta oli 0,75. Jotta vastaus laskettiin oikeaksi, vastaajan oli vastattava kysymykseen täysin oikein, sillä kysymys on laadittu monivalintatehtäväksi, jossa on mahdollisuus arvata vastauksensa oikein osittain. Laadullisesti tarkasteltuna moni kuitenkin vastasi enemmän väärin kuin osittain oikein, mikä antaa viitteitä siitä, että tehtävää ei olla ymmärretty oikein ja se on ollut vaikea. Kun vastaukset jaetaan kurssiarvosanan mukaan, voidaan huomata, ettei osaamistaso korreloi tehtävässä menestymisen kanssa. Kaiken kaikkiaan tulosten perusteella kysymykset olivat kaikista vaikeimpia verrattuna aiempiin kysymyksiin.

(Osa 7) **Palaute tutkimuskyselystä**:

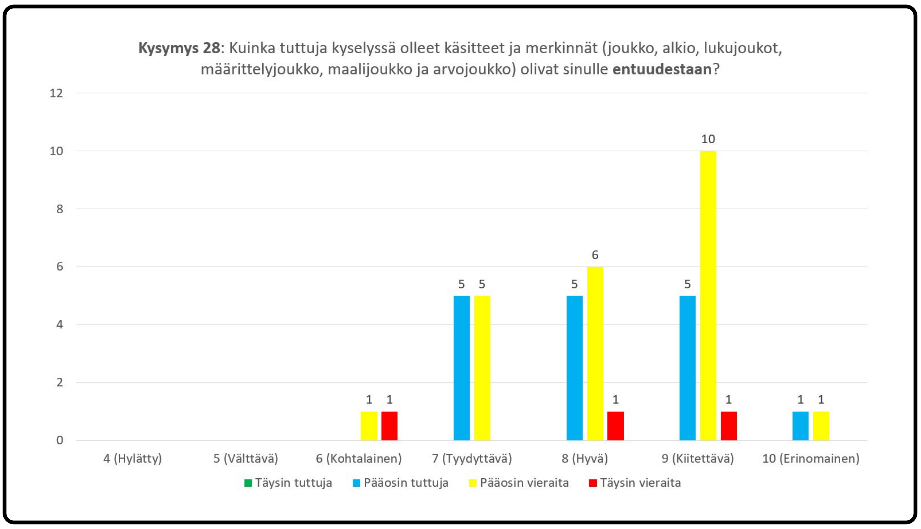
Kysymyksessä 27 kysytään vastaajien mielipidettä kyselyn vaikeustasosta.



Kuva 7.7. Kysymyksen 27 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan mielipidettä kyselyn vaikeustasosta. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan kukaan ei kokenut kyselyä erittäin helppona. Puolestaan vain 2 % vastaajista koki kyselyn melko helppona, 14 % vastaajista koki kyselyn tavanomaisena, 67 % vastaajista koki kyselyn melko vaikeana sekä 17 % vastaajista koki kyselyn erittäin vaikeana. Keskimäärin kysely koettiin siis melko vaikeaksi ja tämä on hyvin linjassa kyselyn aiempien tulosten kanssa. Mitään selkeää eroa tai korrelaatiota eri kurssiarvosanojen välillä ei ole nähtävillä tämän kysymyksen suhteen, vaan kysely koettiin kaikissa kurssiarvosanaluokissa vaikeaksi.

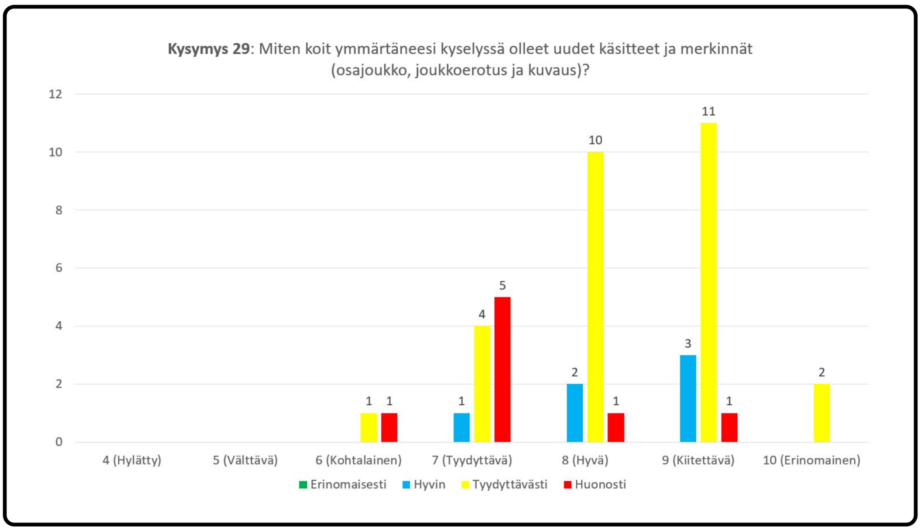
Kysymyksessä 28 kysytään vastaajilta, kuinka tuttuja kyselyssä olleet käsitteet ja merkinnät olivat heille entuudestaan.



Kuva 7.8. Kysymyksen 28 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan kyselyssä olleiden käsitteiden ja merkintöjen tuttuutta entuudestaan. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan kenellekään vastaajista kyselyssä olleet käsitteet ja merkinnät eivät olleet entuudestaan täysin tuttuja. Puolestaan 38 % vastaajista vastasi kyselyssä olleiden käsitteiden ja merkintöjen olleen entuudestaan pääosin tuttuja, 55 % vastaajista vastasi kyselyssä olleiden käsitteiden ja merkintöjen olleen entuudestaan pääosin vieraita sekä 7 % vastaajista vastasi kyselyssä olleiden käsitteiden ja merkintöjen olleen entuudestaan täysin vieraita. Keskimäärin kyselyssä olleet käsitteet ja merkinnät koettiin keskimäärin enemmän pääosin vieraiksi. Mitään selkeää eroa tai korrelaatiota eri kurssiarvosanojen välillä ei ole nähtävillä tämän kysymykseen suhteen, vaikka arvosanojen 7 ja 8 kohdalla kyselyssä olleet käsitteet ja merkinnät koettiin hieman tutuimmiksi kuin esimerkiksi arvonsanan 9 kohdalla.

Kysymyksessä 29 kysytään vastaajilta, miten he kokivat ymmärtäneen kyselyssä olleet uudet käsitteet ja merkinnät.



Kuva 7.9. Kysymyksen 29 muodostama pylväsdiagrammi, jossa kuvataan kyselyssä olleiden uusien käsitteiden ja merkintöjen ymmärrystä. Vastaajia (n=42).

Tulosten mukaan kukaan vastaajista ei kokenut ymmärtäneen kyselyssä olleita uusia käsitteitä ja merkintöjä erinomaisesti. Puolestaan 14 % vastaajista koki ymmärtäneen kyselyssä olleet uudet käsitteet ja merkinnät hyvin, 67 % vastaajista koki ymmärtäneen kyselyssä olleet uudet käsitteet ja merkinnät tyydyttävästi sekä 19 % vastaajista koki ymmärtäneen kyselyssä olleet uudet käsitteet ja merkinnät huonosti. Keskimäärin kyselyssä olleet uudet käsitteet ja merkinnät ymmärrettiin tyydyttävästi. Mitään selkeää eroa tai korrelaatiota eri kurssiarvosanojen välillä ei ole nähtävillä tämän kysymyksen suhteen, vaan kyselyssä olleet uudet käsitteet ja merkinnät ymmärrettiin kaikissa arvosanaluokissa tyydyttävästi.

Tämän tutkimuskyselyn tulosten mukaan vastaajat osasivat joukko-oppia yleisesti ottaen tyydyttävällä tasolla. Tulosten mukaan voidaan todeta kyselylomakkeen varsinaisten tehtävien osalta osissa 2–6, että tehtävät osissa 2 ja 3 olivat helpoimpia vastaajille. Sen sijaan tehtävät osissa 4 ja 6 olivat vaikeimpia vastaajille. Muodostetaan vielä tuloksista yhteenvetona taulukko, joka esittää vastaajien osaamistasoa kyselylomakkeen varsinaisten tehtävien osalta osissa 2–6. Taulukossa käytetyt tilastolliset tunnusluvut ovat aritmeettinen keskiarvo ja keskihajonta.

Kyselylomakkeen osa	**Keskiarvo $\overline{x}$**	**Keskihajonta σ**
(Osa 2) Joukkojen peruskäsitteitä	2,67 / 3	0,62
(Osa 3) Lukujoukkoja osa 1	8 / 9	0,95
(Osa 4) Lukujoukkoja osa 2	0,17 / 1	0,37
(Osa 5) Funktioita osa 1	1,5 / 4	0,87
(Osa 6) Funktioita osa 2	0,64 / 7	0,75

Taulukko 7.1. Kyselytutkimuksen tulokset eriteltynä kyselylomakkeen varsinaisten tehtävien 2–6 mukaan. Tilastollisina tunnuslukuina käytetään aritmeettista keskiarvoa ja keskihajontaa.

Taulukosta 7.1 voidaan nähdä, että kyselylomakkeen eri osioiden tuloksissa on paljon vaihtelua. Tähän vaikutti osaltaan tehtävien vaikeustaso, sillä helpoimmat tehtävät sijoittuivat kyselylomakkeen alkuun ja vaikeimmat tehtävät kyselylomakkeen loppuun. Kaiken kaikkiaan tuloksissa ei ilmennyt mitään yllättävää, kun otetaan huomioon edellä selitetyt tehtäviin liittyvät arvostelukriteerit.

Tämän tutkimuskyselyn vastausten perusteella myös kielentämisellä oli kokonaisuutena merkittävä rooli ja vaikutus tutkimuskyselyyn vastaamisessa. Koska suurin osa tutkimuskyselyssä olleista tehtävistä ei kuulu itsessään pitkän matematiikan oppimäärään, niissä olleet kuvat ja johdattelevat esimerkit auttoivat todennäköisesti monia ymmärtämään joukko-oppiin liittyviä rakenteita keskimäärin tyydyttävällä tasolla. Tämän vuoksi kyselylomakkeen rooli oli toimia vastaajille myös osin opetusmateriaalina, jossa se toimi kielentämisen välineenä kuvan 4.1 mukaisesti. Näin ollen matemaattisen ajattelun kannalta didaktinen suhde tämän tutkimuskyselyn ja vastaajien välillä edesauttoi asioiden soveltamista ja eri kielentämisen prosesseja, joissa olivat mukana formaali kieli, luonnollinen kieli ja kuviokieli.

8 Johtopäätökset

Tutkimuskyselyn perusteella voidaan ensinnäkin selkeästi todeta hypoteesiin liittyen se, että taitotaso tyypillisen pitkän matematiikan kurssiarvosanan mukaan ei näytä juurikaan korreloivan kyselyssä menestymisen kanssa. Kaikissa arvosanaluokissa tulosten vaihtelu on suhteellisen tasaista tai jopa epätasaista siten, että huonomman kurssiarvosanan ilmoittaneet pärjäävät joissakin kysymyksissä paremmin kuin paremman kurssiarvosanan ilmoittaneet. Tämän tutkimuksen ja taulukon 7.1 mukaan tähän tutkimukseen osallistuneet opiskelijat osaavat joukko-oppia alkeellisella tasolla hyvin ja he ymmärtävät muun muassa joukon ja alkion käsitteet sekä lukujoukkojen merkitykset. Kuitenkin joukkojen väliset suhteet ovat opiskelijoille vaikeampia, joten joukko-opin soveltaminen kyselyn perusteella vaikuttaa haastavammalta, vaikka tehtävänannoissa oli mukana johdattelua ja esimerkkejä kuhunkin tehtävätyyppiin. Erityisesti osajoukkoa ja kuvauksia käsittelevissä tehtävissä monilla opiskelijoilla on haasteita hahmottaa lukujoukkojen välisiä rakenteita suhteessa muihin lukujoukkoihin. Kun otetaan kuitenkin huomioon tutkimuskyselyssä ollut 30 minuutin aikaraja, opiskelijat olisivat saattaneet menestyä paremmin tehtävissä, jos heillä olisi ollut enemmän aikaa käytettävissä.

Kun arvioidaan sitä, millä tavalla opiskelijat ymmärtävät joukko-oppia, LOPSilla ja lukion pitkän matematiikan oppikirjoilla on suuri merkitys. Kuten alaluvussa 5.1 käsiteltiin, nykyinen LOPS 2021 ei sisällä joukko-oppia itsenäisenä aihealueena, minkä seurauksena myös joukko-opin ymmärtäminen jää vähäiseksi, kun sitä ei myöskään oppikirjoissa juurikaan esitetä. Tämän myötä joukko-opin kielentäminen voi jäädä puutteelliseksi, kun tarkoitus on perustella esimerkiksi funktioiden määrittelyehtoja, mikä on aiheen ymmärtämisen ja matemaattisen ajattelun kannalta kriittistä. Myös taulukosta 5.1 voidaan nähdä, miten viimeisten LOPS-kausien pitkän matematiikan oppikirjat eivät esitä juurikaan joukko-oppia verrattuna esimerkiksi LOPS 2003 -kauden Pyramidi-kirjasarjaan, jonka käyttäjät ovat olleet etulyöntiasemassa muihin pitkän matematiikan oppikirjasarjojen käyttäjiin nähden. Kuten tutkimuskyselyn tuloksista voidaan huomata, opiskelijat kokivat kyselyn keskimäärin melko vaikeana, vaikka kyselyssä olevat aihealueet ovat pääosin tuttuja analyysin puolelta, kuten lukujoukot sekä funktioiden määrittelyjoukko, maalijoukko ja arvojoukko. Jos siis opiskelijoilta edellytettäisiin paremmin joukko-opin osaamista LOPSissa, he todennäköisesti ymmärtäisivät paremmin funktioiden välisiä suhteita ja ehtoja osana analyysia. Tämä helpottaisi myös pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa menestymistä, kun monissa analyysia käsittelevissä tehtävissä olisi käsitys siitä, miten funktiot noudattavat itse asiassa joukko-opin lainalaisuuksia. Tämä ymmärrys voi korostua etenkin ylioppilaskokeen myöhemmissä tehtävissä, joissa pitää osata perustella paremmin vastauksiaan. Vaikka tämän tutkimuksen tutkimuskysely sellaisenaan ei aivan vastaisi LOPSin ja lukion pitkän matematiikan oppikirjojen muutostarvetta, se osoittaa kuitenkin selkeästi tarpeen vahvistaa joukko-opin ymmärtämistä ja kielentämistä osana pitkän matematiikan opiskelua yleisesti.

Joukko-opin opiskelussa on sekä mahdollisuuksia että haasteita. Tämän tutkimuksen perusteella joukko-opilla voisi olla ensinnäkin kysyntää sen suhteen, että sen avulla ymmärrettäisiin matematiikkaa syvemmin ja kokonaisvaltaisemmin, sillä joukko-opin peruskäsitteet on helppo ymmärtää. Pitkän matematiikan kannalta tämä on mahdollisuus, sillä kuten aiemmin todettu, analyysi perustuu pitkälti joukko-opin lainalaisuuksiin ja aihealueena se kattaa suurimman osan lukion pitkän matematiikan oppimäärästä. Joukko-opista olisi hyötyä myös todennäköisyyslaskennan näkökulmasta. Teoreettisen viitekehyksen kautta joukko-opin mahdollisuutena olisi edelleen loogisen päättelykyvyn vahvistuminen, mikä parantaisi matemaattisen ajattelun kehittymistä abstraktilla tasolla. Tarkasteltaessa taulukkoa 4.1 tämä koskisi ennen kaikkea matemaattisen ajattelun informaation prosessointia sekä tiedematematiikkaa, joissa vaikuttavat muun muassa matemaattiset ongelmanratkaisuun tarvittavat mentaaliset prosessit, analoginen päättely, tiedon struktuurinen ymmärtäminen sekä visuaalinen päättely. Tämän tutkimuksen perusteella joukko-opin keskeinen haaste olisi kuitenkin se, missä laajuudessa sitä tulisi opettaa lukion pitkässä matematiikassa. Vaikka joukko-oppi olisi hyvä tuki auttaa ymmärtämään pitkässä matematiikassa ilmeneviä aihealueita, kuten analyysia, sen tarkoitus ei kuitenkaan ole käyttää itseään ensisijaisena menetelmänä opettaa matematiikkaa. Kuten tutkimuskyselyn tuloksista voidaan osittain nähdä, on riski, että joukko-opista voi muodostua myös pelkistetty kuva, josta ei välttämättä pystytä erottamaan oleellista tietoa. Esimerkiksi tutkimuskyselyn Funktioita osa 2 -osassa on tärkeää pitää mukana tehtävän perustekijät, kuten tehtävänannossa annettu funktio ja siihen liittyvä kuvaaja, joista ilmenee tehtävän tavanomainen formaali ja kuviokieli, vaikka tehtävä sisältäisikin muuten joukko-opillisia käsitteitä ja merkintöjä. Näin ollen myös didaktisesti näitä haasteita on syytä tarkastella, sillä joukko-opin kielentäminen vaatii niin formaalia, luonnollista kuin kuviokieltä oppimisen onnistumiseksi niin kuin alaluvussa 4.2 on kuvattu teoreettisena lähtökohtana.

9 Pohdinta

Joukko-opin asema pitkässä matematiikassa on kahtiajakoinen. Uuden matematiikan myötä opimme sen, että joukko-oppi on liian kaukana tavanomaisesta matemaattisesta kokemusmaailmasta, mutta tämä kritiikki koski lähinnä vain peruskoulua. Lukion kannalta tilanne on kuitenkin lähtökohtaisesti suotuisampi, sillä pitkässä matematiikassa tämä matemaattinen kokemusmaailma on kehittynyt jo sen verran, että joukko-opin luomat abstraktit rakenteet on helpompi ymmärtää. Myös didaktisesti joukko-oppia olisi perusteltua opettaa lukiossa, sillä sitä voisi esittää monipuolisilla tavoilla hyödyntäen formaalin kieltä, luonnollisen kieltä ja kuviokieltä.

Myös lukion pitkän matematiikan asema tulevaisuudessa on mielenkiintoinen. Sanotaan, että pitkä matematiikka on pääsylippu yliopistoon ja tulevaisuuden ammatteihin, ja sen opiskelua arvostetaan laajasti yhteiskunnallisella tasolla. Toisaalta pitkä matematiikka on saanut osakseen kritiikkiä siitä, että sillä ei ole oikeastaan enää kosketuspintaa lukion jälkeisissä opinnoissa ja sen opiskelu tuottaa liikaa suorituspaineita opiskelijoille. Jatko-opiskeluiden kannalta pitkän matematiikan asema todennäköisesti kuitenkin säilyy vahvana, sillä tulevaisuuden yhteiskunta kehittyy yhä digitalisempaan ja teknologisempaan suuntaan, johon tullaan tarvitsemaan vastaisuudessakin matematiikkaa. Näin sanoo myös professori Lehtinen (Collin, 2018) todetessaan, että teknologian kehitys lisää matematiikan merkitystä. On siis syytä pohtia sitä, miten toisen asteen ja korkea-asteen koulutuksen nivelvaiheessa pystytään turvaamaan se, että suomalaisten matematiikan osaamisen taso pysyy hyvänä. Etenkin niille, jotka suuntaavat jatko-opiskeluissa matemaattis-teknis-luonnontieteelliselle alalle korkea-asteella, on tärkeää turvata hyvät matemaattiset tiedot ja taidot, joilla pärjää siirtymän yliopistomatematiikkaan. Joukko-opin rooli on tässä vahva, sillä yliopistomatematiikassa tarvitaan ymmärrystä muun muassa joukko-opin lainalaisuuksista, kun käsitellään esimerkiksi määritelmiä, lauseita ja todistuksia. Tämän perusteella olisi perusteltua jo lukion pitkässä matematiikassa painottaa enemmän joukko-oppia, koska se helpottaa ja tukee pitkän matematiikan oppimäärän hallitsemista etenkin analyysissa, jota lukion pitkä matematiikka pitkälti on. Tämä vaatisi todennäköisesti kuitenkin lukion opetussuunnitelmaan selkeitä muutoksia, jotta opetuksen laatu säilyisi hyvänä ja yhdenvertaisena. Joka tapauksessa kokonaisuutta ajatellen joukko-opilla olisi mahdollisuuksia menestyä, mikäli sen opetus toteutetaan kielentämisen kannalta tarkoituksenmukaisella tavalla.

Lähteet

[1] Cantor, G. (1874). *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik (in German), 1874(77): 258–262.

[2] Cusack, C. A. & Santos, D. A. (2018). *An Active Introduction to Discrete Mathematics and Algorithms*. Version 2.6.3. Free Software Foundation. Saatavilla: https://cusack.hope.edu/Notes/Notes/Books/Active%20Introduction%20to%20Discrete%20Mathematics%20and%20Algorithms/ActiveIntroToDiscreteMathAndAlgorithms.2.6.3.pdf

[3] Collin, P. (2018). *Suomalaiset osaavat matematiikkaa yhä huonommin, vaikka sitä tarvittaisiin koko ajan enemmän – Professori: Teknologinen kehitys lisää matematiikan merkitystä.* Yle Uutiset 18.6.2018. Viitattu. 1.4.2023. Saatavilla: https://yle.fi/a/3-10353905

[4] Dauben, J. W. (1979). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Harvard University Press.

[5] Dingman, S. W. (2019). *The Language of Mathematics Education: An Expanded Glossary of Key Terms and Concepts in Mathematics Teaching and Learning*. Leiden Boston: Brill.

[6] Enderton, H. B. (1977). *Elements Of Set Theory*. Academic Press.

[7] Fremont, H. (1967). *New mathematics and old dilemmas*. The Mathematics Teacher 60(7), 715–718.

[8] Iskak, K. B., Kusmayati, T. A. & Fitriana, L. (2020). *Students' Mathematics Representation Ability from Picture Form to Equation*. Journal of physics. Conference series 1469.1: 12164–.

[9] Jech, T. J. (1978). *Set Theory*. Academic Press.

[10] Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.), *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta: ainedidaktinen symposium 7.2.2003*. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 188–196. (Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72).

[11] Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti.

[12] Junnila, O. (1995). *MAOL: Kuusi vuosikymmentä matemaattisten aineiden asialla*. MFKA-kustannus.

[13] Jyväskylän yliopisto. (2014). *Tutkimusstrategiat*. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla: https://koppa.jyu.fi/avoimet/hum/menetelmapolkuja/menetelmapolku/tutkimusstrategiat/

[14] Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. St. Martin's Press.

[15] Koppinen, M.-L., Lyytinen, P. & Rasku-Puttonen, H. (1989). *Lapsen kieli ja vuorovaikutustaidot*. Kirjayhtymä.

[16] Leontjev, A. A. (1979). *Kieli ja ajattelu*. Kansankulttuuri.

[17] Lyyra, M. (2006). *Joukko-opin tie*. Yle 26.8.2006. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla: https://areena.yle.fi/1-1802790

[18] Hassinen, S. (2006). *Idealähtöistä koulualgebraa: IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla*. Väitöskirja. Helsingin yliopisto.

[19] Malaty, G. (2006). *PISA Results and School Mathematics in Finland: strengths, weaknesses and future*. Math. Ed., 2009, no. 1(49), 34–39.

[20] Markkanen, K. (2008). *Muistatko, kun kouluissa opetettiin joukko-oppia?* Yle 31.1.2008. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla: http://vintti.yle.fi/yle.fi/priima/node/329.html

[21] Merikoski, J., Virtanen, A. & Koivisto, P. (2004). *Johdatus diskreettiin matematiikkaan*. Saatavilla: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/jdm-2017-12-19.pdf

[22] O'Halloran, K. L. (2015). *The Language of Learning Mathematics: A Multimodal Perspective*. The Journal of Mathematical Behavior 40: 63–74.

[23] Opetushallitus. (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Vammalan Kirjapaino Oy. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla:
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

[24] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Next Print Oy. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla:
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

[25] Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. PunaMusta Oy. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla:
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

[26] Perkkilä, P. & Joutsenlahti, J. (2020). *Academic Literacy Supporting Sustainability for Mathematics Education: A Case: Collaborative Working as a Meaning Making for "2/3"?*. Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI).

[27] Perälä, R. (2018). *Peruskoulu mullisti Suomen koululaitoksen*. Yle 19.1.2016. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla:
https://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/01/19/peruskoulu-mullisti-suomen-koululaitoksen

[28] Pesonen, M. E. (2004). *Diskreetti matematiikka*. Itä-Suomen yliopisto. Saatavilla:
http://cs.uef.fi/matematiikka/kurssit/Diskreetti/Kurssimateriaali/DMText/DISKREETTIPAApdfscr.pdf

[29] Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7th Edition. McGraw-Hill Education. Saatavilla:
https://faculty.ksu.edu.sa/sites/default/files/rosen_discrete_mathematics_and_its_applications_7th_edition.pdf

[30] Sternberg, R. J. & Talia, B.-Z. (1996). *The Nature of Mathematical Thinking*. Erlbaum.

[31] Tossavainen, T. & Leppäaho, H. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaksi opiskelevien matemaattisesta osaamisesta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti.

[32] Tynjälä, P. (1999). *Oppiminen tiedon rakentamisena: konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita*. Kirjayhtymä.

[33] Vygotsky, L. (1982). *Ajattelu ja kieli*. Weilin+Göös.

[34] Ylioppilastutkintolautakunta. (2011). *Matematiikan koe, pitkä oppimäärä*. 28.9.2011. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla: https://yle.fi/progressive/fynd/oppiminen/oppiminen.yle.fi/yo-kokeet/matematiikka_pitka_s11.pdf

[35] Ylioppilastutkintolautakunta. (2013). *Matematiikan koe, pitkä oppimäärä*. 25.9.2013. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla: https://yle.fi/progressive/fynd/oppiminen/oppiminen.yle.fi/yo-kokeet/matematiikka_pitka_su.pdf

[36] Ylioppilastutkintolautakunta. (2014). *Matematiikan koe, pitkä oppimäärä*. 24.9.2014. Viitattu 1.4.2023. Saatavilla: https://yle.fi/progressive/fynd/oppiminen/oppiminen.yle.fi/yo-kokeet/matematiikka_pitka_0.pdf

Liitteet

Liite 1

Ohessa lähdeaineisto alaluvussa 5.2 käsitellyistä oppikirjoista.

(1) **Pyramidi**

Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A. & Savolainen, S. (2005). *Pyramidi: lukion pitkä matematiikka 1: Funktiot ja yhtälöt*. Tammi.

Kontkanen, P., Lehtonen, J. & Luosto, K. (2012). *Pyramidi: lukion pitkä matematiikka 6: Todennäköisyys ja tilastot*. Sanoma Pro.

Kontkanen, P., Lehtonen, J., Liira, R., Luosto, K. & Ronkainen, A. (2009). *Pyramidi: lukion pitkä matematiikka 7: Derivaatta*. Tammi.

Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K. & Savolainen, S. (2011). *Pyramidi: lukion pitkä matematiikka 8: Juuri- ja logaritmifunktiot*. Tammi.

Härkönen, R., Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K., Ronkainen, A. & Savolainen, S. (2011). *Pyramidi: lukion pitkä matematiikka 9: Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. Tammi.

Ernvall-Hytönen, A-M., Luosto, K. & Pokela, T. (2006). *Pyramidi: Lukion pitkä matematiikka 11: Lukuteoria ja logiikka*. Tammi.

(2) **Juuri**

Hähkiöniemi, M. et al. (2018). *Juuri 10: Todennäköisyys ja tilastot.* Otava.

Juhala, S. et al. (2022). *Juuri 8: Tilastot ja todennäköisyys.* Otava.

(3) **Moodi**

Harsunkorpi, J. et al. (2022). *Moodi 8: Tilastot ja todennäköisyys.* Sanoma Pro.

(4) **Sigma**

Alatupa, S. et al. (2012). *Pitkä Sigma: lukion pitkä matematiikka 1: Funktiot ja yhtälöt* Sanoma Pro.

Alatupa, S. et al. (2010). *Pitkä Sigma: lukion pitkä matematiikka 6: Todennäköisyys ja tilastot.* Tammi.

(5) **Tekijä**

Heiskanen, P. et al. (2018) *Tekijä: pitkä matematiikka 10: Todennäköisyys ja tilastot.* Sanoma Pro.

(6) **Pitkä matematiikka**

Kangasaho, J. et al. (2008). *Pitkä matematiikka 1: Funktiot ja yhtälöt.* WSOY.

(7) **Matematiikan yhteinen opintokokonaisuus (MAY1)**

Halinen, H. et al. (2016). *Otavan matematiikka. MAY1: Luvut ja lukujonot.* Otava. (Yhdessä Juuri-kirjasarjan kanssa)

Juhala, S. et al. (2020). *MAY1: Luvut ja lukujonot.* Otava. (Yhdessä Juuri-kirjasarjan kanssa)

Harsunkorpi, J. et al. (2020). *Unioni MAY1: Luvut ja yhtälöt.* Sanoma Pro. (Yhdessä Moodi- ja Tekijä-kirjasarjan kanssa)

Liite 2

Ohessa kyselylomake alaluvusta 6.3.

Tutkimuskysely: Joukko-opin ymmärtäminen lukion pitkässä matematiikassa

Tutkimuskysely Tampereen yliopiston normaalikoulun lukion abeille.

* Pakollinen

Taustakysymykset

1

Onko sinulla jotakin käsitystä, mitä joukko-oppi on? Kuvaile halutessasi vapain sanoin. *

2

Mikä on tyypillisin pitkän matematiikan kurssiarvosanasi aiemmilta kursseilta? *

- ◯ 4
- ◯ 5
- ◯ 6
- ◯ 7
- ◯ 8
- ◯ 9
- ◯ 10

Joukkojen peruskäsitteitä

Joukko-opin perustana ovat kaksi oleellista käsitettä, jotka ovat **joukko** ja **alkio**.

Joukkoa merkitään tavallisesti jollakin isolla kirjaimella (esim. A). Alkio on tämän joukon jokin yksikäsitteinen asia, joka on yleensä luku. Yleisin tapa määrittää kaikki joukon alkiot on tehdä luettelo joukon alkioista aaltosulkeiden välissä, kuten {1,2,3,4}.

Nyt siis voidaan merkitä esimerkiksi, että **A = {1,2,3,4}** kuvaamaan, että joukkoon A kuuluu alkiot 1,2,3 ja 4.

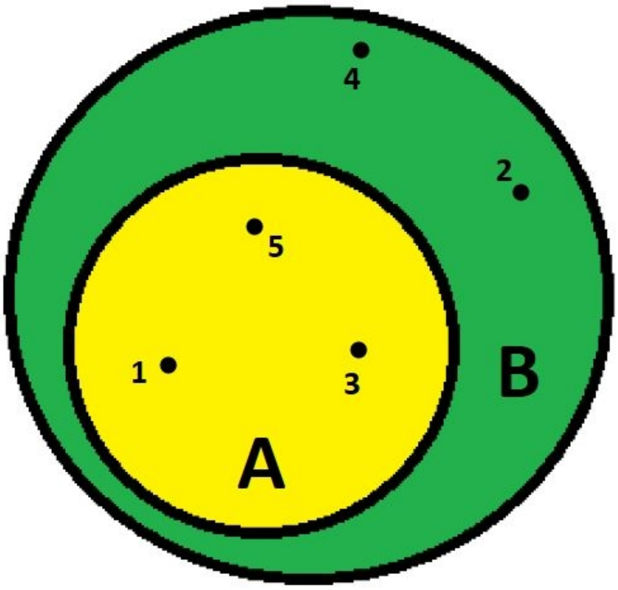
Joukkoja voidaan kuvata myös graafisesti **Venn-diagrammien** avulla. Yleensä joukko piirretään ympyränä ja sen alkiot pisteinä, jotka ovat tämän ympyrän sisällä.

3

Olkoot A ja B joukkoja. **Määrittele joukot A ja B vieressä olevan Venn-diagrammin mukaan.**

Anna vastaus muodossa **A = {a,b,c} ja B = {a,b,c}** huomioiden joukkojen alkioiden lukumäärät.

(Aaltosulkeet saa kirjoitettua Alt + 7 ja Alt + 0.) *

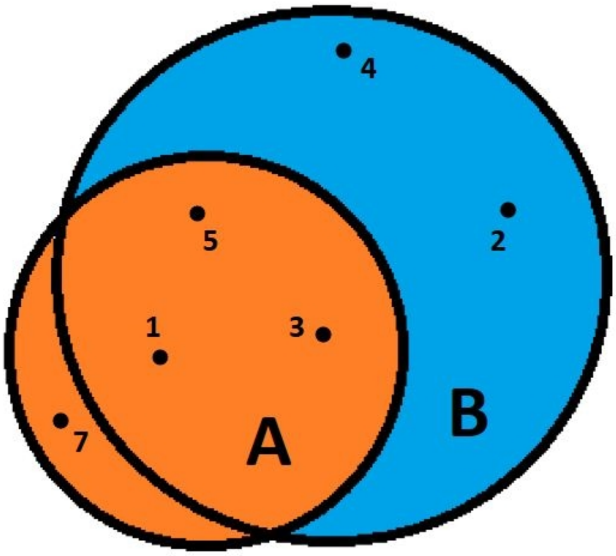


4

Olkoot A ja B joukkoja. **Määrittele joukot A ja B vieressä olevan Venn-diagrammin mukaan.**

Anna vastaus muodossa **A = {a,b,c} ja B = {a,b,c}** huomioiden joukkojen alkioiden lukumäärät.

(Aaltosulkeet saa kirjoitettua Alt + 7 ja Alt + 0.) *

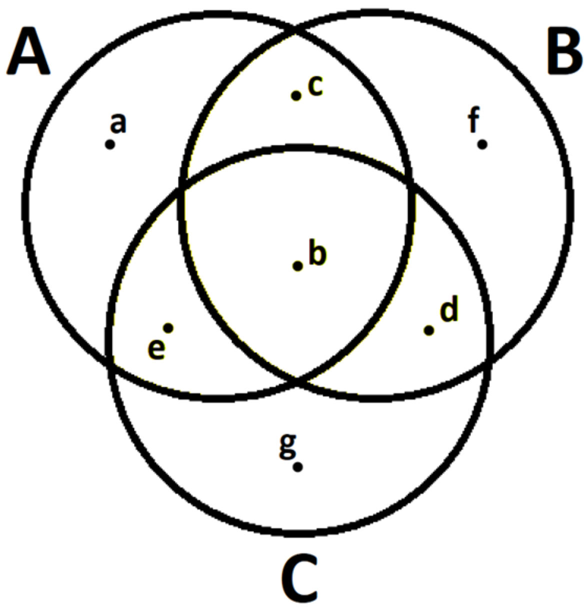


5

Olkoot A, B ja C joukkoja. **Määrittele joukot A, B ja C vieressä olevan Venn-diagrammin mukaan.**

Anna vastaus muodossa **A = {a,b,c}, B = {a,b,c} ja C = {a,b,c}** huomioiden joukkojen alkioiden lukumäärät.

(Aaltosulkeet saa kirjoitettua Alt + 7 ja Alt + 0.) *



Lukujoukkoja osa 1

Anna esimerkkejä luvuista, jotka kuvastavat seuraavia joukkoja.

Kirjoita esimerkit muodossa **{a,b,c}** (jotkin 3 lukua) tai vaihtoehtoisesti yleisessä muodossa, kuten **{a,b,c,...}**.

6

Luonnollisten lukujen joukko *

$\mathbb{N}$

7

Kokonaislukujen joukko *

$\mathbb{Z}$

8

Positiivisten kokonaislukujen joukko *

$\mathbb{Z}_+$

9

Negatiivisten kokonaislukujen joukko *

$\mathbb{Z}_-$

10

Rationaalilukujen joukko *

$\mathbb{Q}$

11

Reaalilukujen joukko *

$\mathbb{R}$

12

Positiivisten reaalilukujen joukko *

$\mathbb{R}_+$

13

Negatiivisten reaalilukujen joukko *

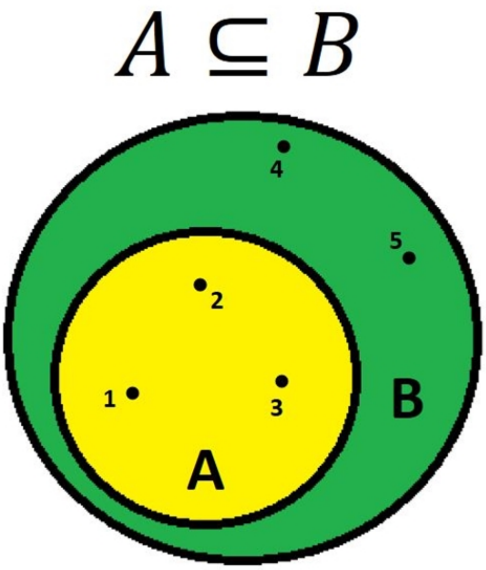
$\mathbb{R}_-$

14

Irrationaalilukujen joukko *

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Lukujoukkoja osa 2



Joukkojen välisiä suhteita voidaan kuvata muun muassa **osajoukon** käsitteen avulla:

Joukko A on joukon B *osajoukko*, jos jokainen joukon A alkio kuuluu myös joukkoon B (merkintä ks. kuva).

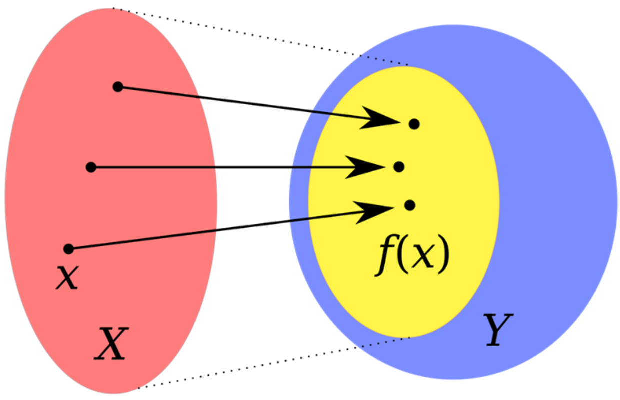
Esimerkiksi joukko A = {1,2,3} on joukon B = {1,2,3,4,5} osajoukko, koska kaikki joukon A alkiot kuuluvat myös joukkoon B (ks. kuva).

15

Mikä tai mitkä seuraavista osajoukoista ovat voimassa lukujoukoilla, kun *

- ☐ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$
- ☐ $\mathbb{Z}_{+} \subseteq \mathbb{N}$
- ☐ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_{-}$
- ☐ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$
- ☐ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$

Funktioita osa 1



$f : X \to Y$

Myös funktioita voidaan tarkastella joukko-opin avulla. Tarkastellaan seuraavaksi funktioiden eri joukkoja:

Määrittelyjoukko (X): Niiden alkioiden joukko, joilla funktio on määritelty (f: **X** –> Y)
Maalijoukko (Y): Jokin joukko, johon funktion arvot kuvautuvat (f: X –> **Y**)
Arvojoukko (f(x)): Funktion saamien arvojen joukko

Esimerkiksi funktion f(x) = 2x arvojoukko on {0,2,4,6,8,...}, kun f: N –> N.

Merkintä A \ B **(joukkoerotus)** tarkoittaa, että joukon B alkiot poistetaan joukosta A.

Kuvan lähde: https://en.wikipedia.org/wiki/Codomain

16

Merkitse funktion f(x) **arvojoukko**, kun f: Z –> Z.

Anna vastaus yleisessä muodossa **{a,b,c,d,e,...}** (ensimmäiset 5 alkiota). *

$f(x) = x^2$

17

Merkitse funktion f(x) **arvojoukko**, kun f: Z –> Z.

Anna vastaus yleisessä muodossa **{a,b,c,d,e,...}** (ensimmäiset 5 alkiota). *

$f\ (x)\ =\ x^2 + x$

18

Merkitse funktion f(x) **arvojoukko**, kun f: Z \ {0} –> Q.

Anna vastaus yleisessä muodossa **{a,b,c,d,e,...}** (ensimmäiset 5 alkiota). *

$f\ (x)\ =\ \frac{1}{x^2}$

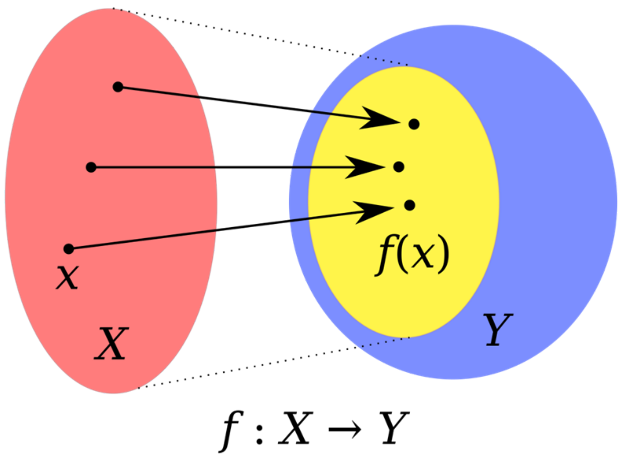
19

Merkitse funktion f(x) **arvojoukko**, kun f: Z \ {-1,1} –> Q.

Anna vastaus yleisessä muodossa **{a,b,c,d,e,...}** (ensimmäiset 5 alkiota). *

$f\ (x)\ =\ \frac{1}{x^2 - 1}$

Funktiota osa 2



Jatketaan funktioiden tarkastelua. Määritellään tarkemmin, mitä funktio tarkoittaa joukko-opillisesti:

Funktio eli **kuvaus** f joukosta X joukkoon Y liittää jokaiseen joukon X alkioon yhden joukon Y alkion. Funktion f alkioon x liittämää arvoa merkitään **f(x)**.

Esimerkiksi funktion f(x) = 2x eräs kuvaus voi olla f: N –> R, koska kaikki määrittelyjoukon N (*Luonnollisten lukujen joukko*) alkiot kuvautuvat jollekin maalijoukon R (*Reaalilukujen joukko*) alkiolle, sillä joukko R sisältää luonnolliset luvut.

Puolestaan funktion f(x) = 2x kuvaus ei voi olla f: Z –> N, koska kaikki määrittelyjoukon Z (*Kokonaislukujen joukko*) alkiot eivät kuvaudu millekään maalijoukon N (*Luonnollisten lukujen joukko*) alkiolle, sillä joukko N ei sisällä kaikkia kokonaislukuja.

Pidetään mielessä vielä seuraavat asiat:

Määrittelyjoukko (X): Niiden alkioiden joukko, joilla funktio on määritelty (f: **X** –> Y)
Maalijoukko (Y): Jokin joukko, johon funktion arvot kuvautuvat (f: X –> **Y**)
Arvojoukko (f(x)): Funktion saamien arvojen joukko

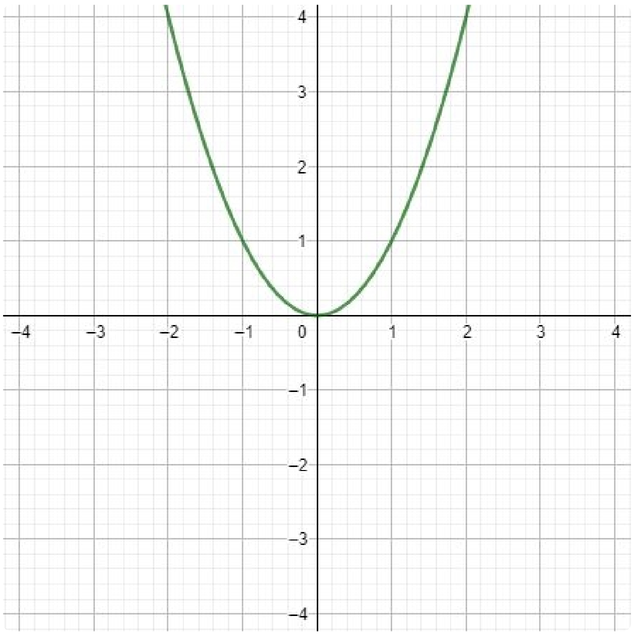
Merkintä A \ B **(joukkoerotus)** tarkoittaa, että joukon B alkiot poistetaan joukosta A.

Kuvan lähde: https://en.wikipedia.org/wiki/Codomain

20

Mikä tai mitkä seuraavista kuvauksista ovat voimassa, kun *

$f\ (x)\ = x^2$

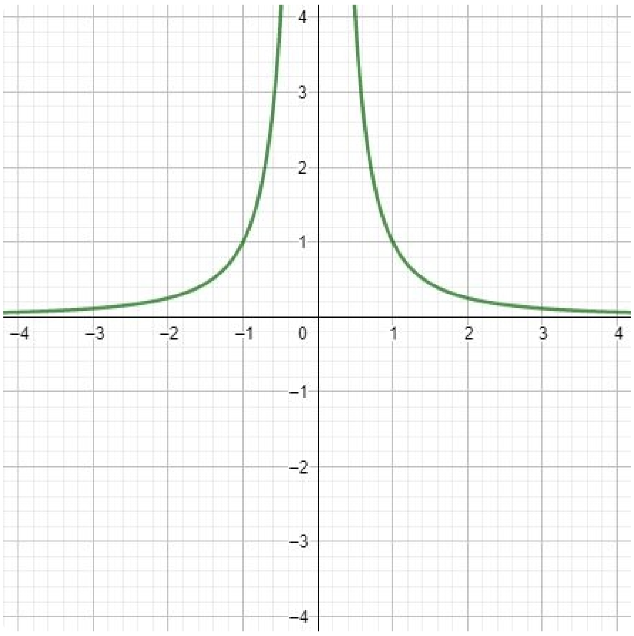


- [ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$
- [ ] $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- [ ] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
- [ ] Ei mikään

21

Mikä tai mitkä seuraavista kuvauksista ovat voimassa, kun *

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

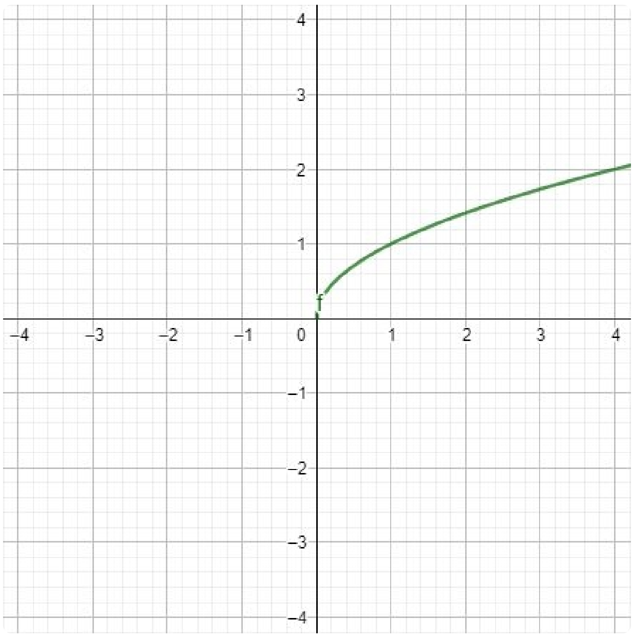


- [ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$
- [ ] $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- [ ] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
- [ ] Ei mikään

22

Mikä tai mitkä seuraavista kuvauksista ovat voimassa, kun *

$f(x) = \sqrt{x}$

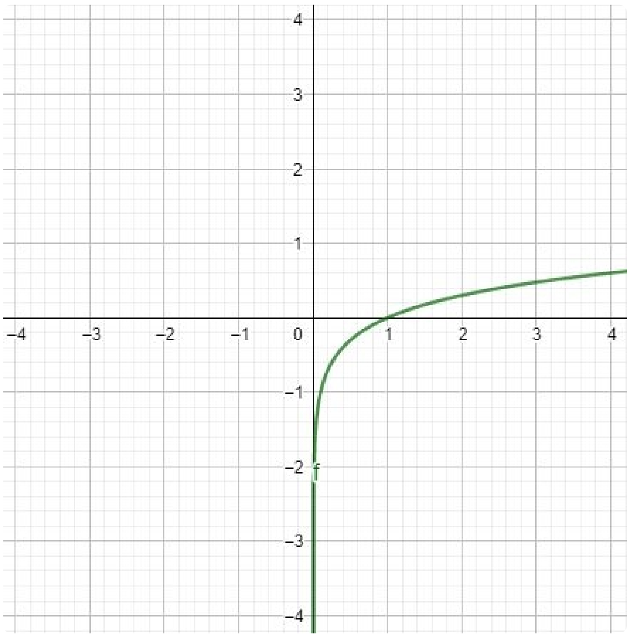


- [ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$
- [ ] $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- [ ] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
- [ ] Ei mikään

23

Mikä tai mitkä seuraavista kuvauksista ovat voimassa, kun *

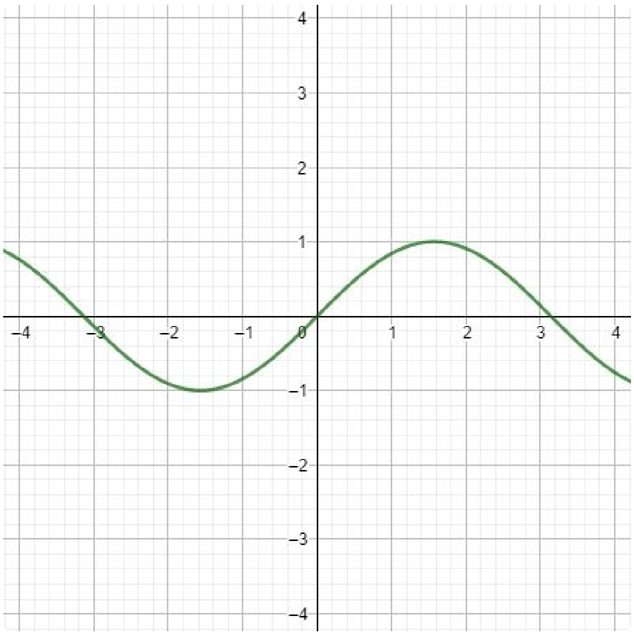
$f(x) = \log(x)$



- [ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$
- [ ] $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- [ ] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
- [ ] Ei mikään

Mikä tai mitkä seuraavista kuvauksista ovat voimassa, kun *

$f\,(x) = \sin(x)$

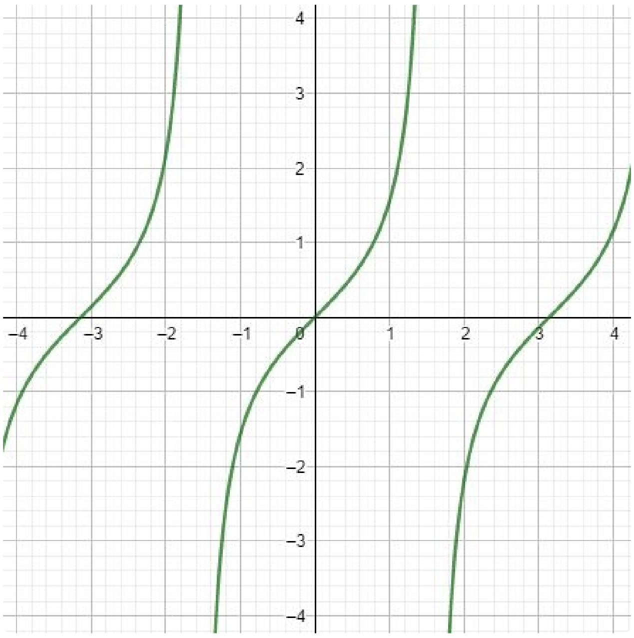


- [ ] $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$
- [ ] $f : \mathbb{Z}_{+} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- [ ] $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
- [ ] Ei mikään

25

Mikä tai mitkä seuraavista kuvauksista ovat voimassa, kun *

$f\ (x)\ = \tan(x)$

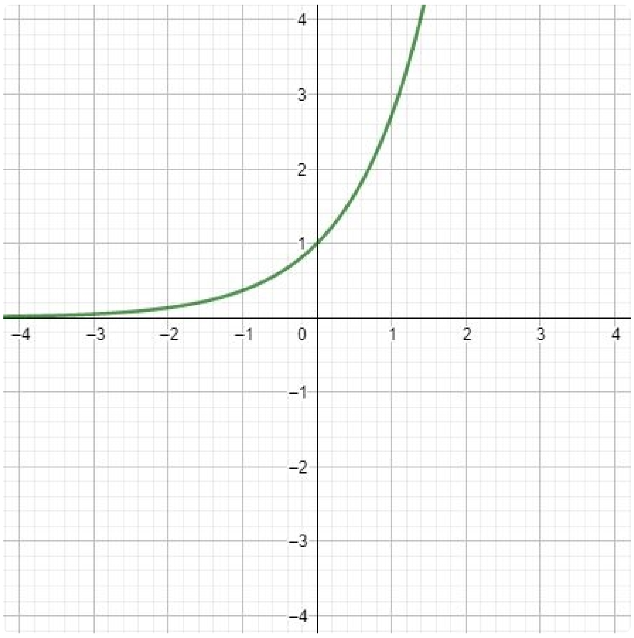


- [ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$
- [ ] $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- [ ] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
- [ ] Ei mikään

26

Mikä tai mitkä seuraavista kuvauksista ovat voimassa, kun *

$f(x) = e^x$



- [ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$
- [ ] $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- [ ] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- [ ] $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
- [ ] Ei mikään

Palaute tutkimuskyselystä

27

Millaisena koit kyselyn kokonaisuutena? *

- Erittäin helppo
- Melko helppo
- Tavanomainen
- Melko vaikea
- Erittäin vaikea

28

Kuinka tuttuja kyselyssä olleet käsitteet ja merkinnät (joukko, alkio, lukujoukot, määrittelyjoukko, maalijoukko ja arvojoukko) olivat sinulle **entuudestaan**? *

- Täysin tuttuja
- Pääosin tuttuja
- Pääosin vieraita
- Täysin vieraita

29

Miten koit ymmärtäneesi kyselyssä olleet **uudet** käsitteet ja merkinnät (osajoukko, joukkoerotus ja kuvaus)? *

- Erinomaisesti
- Hyvin
- Tyydyttävästi
- Huonosti

Suostumus tutkimukseen osallistumiseen

30

Saako vastauksiasi käyttää tutkimukseen?

Vastaukset tullaan hävittämään tutkimuksen valmistuttua. *

- Kyllä
- Ei