Tampere University

Maiju Oksanen

MATEMAATTISEN MINÄPYSTYVYYDEN MUUTOKSET LUKION ENSIMMÄISEN VUODEN AIKANA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta (ITC)
pro gradu -tutkielma
maaliskuu 2023

Tiivistelmä

Maiju Oksanen: Matemaattisen minäpystyvyyden muutokset lukion ensimmäisen vuoden aikana
pro gradu -tutkielma
Tampereen Yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen maisteriohjelma
maaliskuu 2023

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, tapahtuuko opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä muutoksia peruskoulusta lukioon siirtymisen jälkeen ja onko havaittavissa muutoksissa eroja pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä. Lisäksi tarkasteltiin muutosten ja opiskelijan aiemman matematiikan opintomenestyksen mahdollista yhteyttä. Tarkoituksena oli tuottaa opiskelijan matemaattisen minäpystyvyyden muutoksista sellaista tietoa, jota erityisesti lukioiden matematiikan opetuksessa on mahdollista hyödyntää.

Matemaattisella minäpystyvyydellä tarkoitetaan opiskelijan omaa kokemusta siitä, miten hyvin hän kykenee olemassa olevilla taidoillaan matematiikan opintoihinsa liittyvistä tehtävistä suoritutumaan. Minäpystyvyys vaikuttaa esimerkiksi henkilön motivaatioon haastavia tehtäviä ja tilanteita kohdatessa. Minäpystyvyyskäsitys kehittyy vähitellen ihmisen elinkaaren aikana, ja erityisesti onnistumisen kokemuksilla on merkittävä rooli minäpystyvyyden kehityksessä. Lukio-opintojen alkaessa opiskeltavat sisällöt monimutkaistuvat, mikä lisää riskiä minäpystyvyyteen negatiivisesti vaikuttaviin epäonnistumisen kokemuksiin.

Tutkimus toteutettiin poikittaistutkimuksena, johon vastasi yhteensä 218 yhden lukion ensimmäisen ja toisen vuosikurssin opiskelijaa syyslukukauden 2022 aikana. Aineisto kerättiin Likert-asteikollisella kyselyllä, jossa opiskelijoiden tuli ottaa kantaa matematiikan opintojaan koskeviin väittämiin ja arvioida kykyään ratkaista matemaattisia tehtäviä. Kerättyä aineistoa analysoitiin tilastollisin menetelmin havaittujen muutosten tilastollisen merkitsevyyden tutkimiseksi.

Tulosten perusteella opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä tapahtuu muutoksia lukion ensimmäisen vuoden aikana. Muutosten suuntaa ja suuruutta voidaan arvioida muun muassa opiskelijan opiskeleman matematiikan oppimäärän ja aiemman matematiikan opintomenestyksen perusteella. Erityisesti pitkän matematiikan opiskelijoiden, joiden opintomenestys oli ollut peruskoulussa kiitettävää tai hyvää, minäpystyvyys laski lukion aloittamisen jälkeen huomattavasti.

Avainsanat: minäpystyvyys, matemaattinen minäpystyvyys, lukio, matematiikka

Julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Kevään 2020 korkeakoulujen yhteishausta alkaen valtaosa yliopiston tutkinto-ohjelmiin hyväksyttävistä opiskelijoista on valittu pelkän ylioppilastutkintotodistuksen perusteella. Suurelle osalle yliopistoissa opiskeltavista aloista pitkän matematiikan ylioppilaskokeen arvosanalla on sisäänotossa suuri painoarvo osin myös riippumatta matematiikan yhteydestä alan opintoihin, sillä menestyksekkäiden pitkän matematiikan opintojen vaatimaa työmäärää arvostetaan monella alalla [18]. Tämä luo lukio-opintojaan aloittavalle opiskelijalle paineen valita matematiikan pitkä oppimäärä, jottei etenkään korkea-asteen opintosuunnastaan vielä epävarma opiskelija tulisi tahtomattaan sulkemaan mahdollisten kiinnostavien opiskelupaikkojen ovia valitsemalla lyhyen matematiikan. Näin ollen myös sellaiset opiskelijat, joiden lähtötiedot matematiikan opiskeluun ovat puutteelliset tai motivaatio opiskeluun lähinnä välineellinen aloittavat yhä useammin pitkän matematiikan opinnot [18].

Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksiin osallistuneiden opiskelijoiden suhteellinen osuus ja toisaalta molemmat oppimäärät kirjoittaneiden opiskelijoiden lukumäärä on ollut viime vuosina aiempaa korkeampi, ja aiemmin pitkää matematiikkaa suositumpi lyhyt matematiikka on kirjoittajamäärissä pitkän matematiikan oppimäärän kanssa lähes tasoissa [18]. Tämä viittaa siihen, että opiskelijat tiedostavat matematiikan oppimäärää valitessaan niin matematiikan oppimäärän kuin matematiikan arvosanan ylioppilastodistuksessa vaikutuksen tulevaisuuteensa. Todistusvalinnan käyttöönoton jälkeen jopa 80% yliopistojen koulutusohjelmista on opiskelemaan haluavan valituksi tullakseen käytännössä täytynyt osallistua joko pitkän tai lyhyen matematiikan oppimäärän ylioppilaskirjoituksiin [18], vaikka ylioppilaaksi valmistuminen ei sinänsä sitä vaadikaan. Useilla opiskelualoilla parhaat pitkän matematiikan arvosanat antavat enemmän valintapisteitä kuin minkään muun ylioppilastodistuksen oppiaineen arvosana. Pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta tulee arvosanojen laskentatavan vuoksi myös suhteessa lyhyen matematiikan ylioppilaskoetta enemmän parhaita arvosanoja, mikä edelleen puoltaa pitkän matematiikan valitsemista opiskelijan näkökulmasta [7].

Useimmat lukio-opiskelijat joutuvat lukio-opintoihin siirtyessään omaksumaan uusia opiskelutapoja ja -taitoja, sillä omaksuttavan tiedon määrä suhteessa peruskouluun kasvaa lukio-opinnoissa huomattavasti [18]. Tämän lisäksi matematiikan opinnot muuttuvat vaiheittain haastavammiksi heti lukion alusta alkaen [14]. Erityisesti ne opiskelijat, jotka eivät ole joutuneet ponnistelemaan koulumenestyksensä eteen peruskoulussa, saattavat kohdata myös opintomenestyksen laskua ja aiempaa enemmän epäonnistumisen tunteita opinnoissaan, mikä lisää riskiä minäpystyvyyskokemuksen heikentymiseen [1]. Henkilön minäpystyvyyden on myös todettu olevan erityisen haavoittuva henkilölle entuudestaan tuntemattomissa tilanteissa ja uusissa ympäristöissä, jollainen lukion aloittaminen ainakin jossakin määrin kaikille opiskelijoille on [2]. Mahdollisten epäonnistumisten vaikutus henkilön minäpystyvyyteen kuitenkin vähenee ajan myötä [2], minkä vuoksi matemaattisen minäpystyvyyden muutoksia on perusteltua tutkia erityisesti lukion aloittamisen yhteydessä. Tämä tutkimus pyrkii tarkastelemaan edellä kuvattujen tekijöiden vaikutusta opiskelijoiden matemaattiseen minäpystyvyyteen sekä mahdollisia muita lukio-opintojen aloittamisen aiheuttamia minäpystyvyyden muutoksia erityisesti matematiikan opintojen näkökulmasta.

Vaikka matemaattinen minäpystyvyys keskittyy ensisijaisesti opiskelijan omaan kokemukseen matemaattisesta osaamisestaan, on sosiaalisilla tekijöillä oma osansa minäpystyvyyden muovautumisessa [1]. Lukioikäiset nuoret vertaavat helposti omia taitojaan toisiin, ja niin oppimisympäristön ilmapiirillä kuin opettajan toiminnallakin on osaltaan vaikutusta tulkintoihin, joita opiskelija tekee omista onnistumisistaan opinnoissa[16]. Esimerkiksi epäonnistumisen pelolla tai matematiikan opintoihin liittyvällä ahdistuksella on yleisesti kielteinen vaikutus opiskelijan matemaattiseen minäpystyvyyteen. Näin ollen opettajalla on omalla toiminnallaan mahdollisuus vaikuttaa opiskelijoiden vahvan minäpystyvyyskokemuksen rakentumiseen.

Opiskelijan matemaattisella minäpystyvyydellä on aiemman minäpystyvyystutkimuksen perusteella vaikutusta esimerkiksi opiskelijan motivaatioon ja sinnikkyyteen opinnoissa ja haasteita kohdatessa [20]. Lukion matemaattisten aineiden opettajan on siis opiskelijoiden opiskelumotivaation ja -innon ylläpitämiseksi tärkeää ymmärtää, millaisia muutoksia opiskelijan minäpystyvyydessä lukio-opintojen aloittamisen jälkeen tyypillisesti tapahtuu, ja mitkä tekijät altistavat matematiisen minäpystyvyyden erityisesti negatiiviselle, mutta myös positiiviselle kehitykselle. Ymmärrys matemaattisen minäpystyvyyskokemuksen tukemisesta mahdollistaa myös opiskelijoiden ura- ja opiskeluhaaveiden tukemisen, sillä matemaattinen minäpystyvyys ennustaa osaltaan matemaattisille aloille suuntautuvia ura- ja opiskeluvalintoja [23]. Lisäksi aidon kiinnostuksen matematiikan opintoja kohtaan on todettu jossakin määrin suojaavan opiskelijoita opintojen liialta kuormittavuudelta opiskelijan oman osaamisen lähtötasosta riippumatta [14].

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, miten suomalaisten ensimmäisen vuoden lukio-opiskelijoiden matemaattiset minäpystyvyyskokemukset muuttuvat lukio-opintojen aloittamisen jälkeen ensimmäisen lukuvuoden aikana ja voidaanko mahdollisissa muutoksissa havaita eroja pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä. Tutkimuksessa tarkastellaan myös opiskelijan peruskouluaikaisen matematiikan opintomenestyksen ja minäpystyvyyden mahdollisia yhteyksiä. Tutkimuksen tarkoituksena on tuottaa sellaista tietoa, jonka avulla matemaattisen minäpystyvyyden kehitystä on mahdollista huomioida ja tukea myös käytännön opetustyössä.

Luvussa 2 esitellään tutkimuksen kannalta tärkeimpiä käsitteitä. Luvussa 3 esitellään kyselyyn vastanneiden opiskelijoiden verrattain usein vaikeaksi aihepiiriksi nimeämää analyyttistä geometriaa, minkä jälkeen luku 4 esittelee tutkimuksen lähtökohtia ja kyselytutkimusta tutkimusmetodina sekä tässä tutkimuksessa kerätyn aineiston analysoimisessa käytettyjä työkaluja. Luku 5 keskittyy aineiston analysointiin, ja luvussa 6 syvennytään edeltävän luvun analyysissä saatujen tulosten tulkintaan ja käytännön merkitykseen. Luvussa 7 tiivistetään tutkimuksen tulokset ja esitellään tutkimuksesta nousevia jatkotutkimusaiheita.

2 Teoreettinen viitekehys

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen kannalta keskeisiä käsitteitä. Lisäksi tutustutaan lukion opetussuunnitelmaan matematiikan näkökulmasta sekä luodaan lyhyt katsaus aiempaan minäpystyvyystutkimukseen.

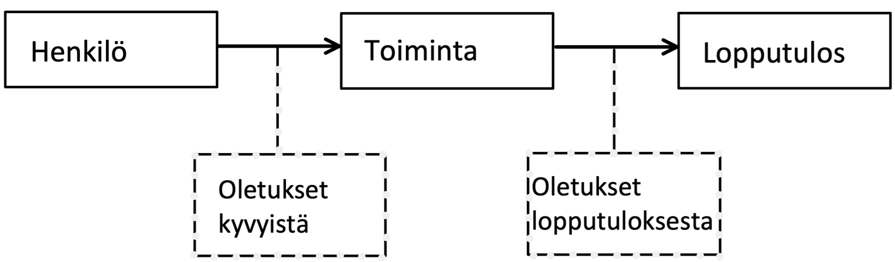
2.1 Minäpystyvyys

Minäpystyvyys voidaan määritellä ihmisen käsityksenä itsestään ja omista kyvyistään, ja ennen kaikkea käsityksenä siitä, mitä hänen on kulloisillakin kyvyillään mahdollista saavuttaa [4]. Vahvakaan minäpystyvyyskäsitys ei kuitenkaan itsessään tuota menestystä, vaan henkilöllä on oltava minäpystyvyydestä riippumatta myös menestymiseen vaadittavat taidot [19]. Minäpystyvyys käsitteenä tulee erottaa toisesta henkilön kuvaan itsestään liittyvästä käsitteestä, minäkäsityksestä, jolla tarkoitetaan henkilön kokonaisvaltaisempaa käsitystä itsestään ja omista taidoistaan [4].

Henkilön minäpystyvyyskäsitykset määrittävät ihmisen tunteita, ajattelua, motivaatioita ja käyttäytymistä [1, 19]. Minäpystyvyys ei kuitenkaan ole ainoa tai määräävä henkilön toimintaa ohjaava tekijä. Vaikka henkilö osaisi ennakoida tietynlaisen toiminnan johtavan haluttuun lopputuloksen, ei hän välttämättä tartu toimeen, jos hän epäilee kykyjensä riittävyyttä. Tämän vuoksi on huomattava, etteivät henkilön pystyvyyskokemukset ja toiminnan oletettu lopputulos ole sama asia. [2] Periaatetta on havainnollistettu kuvassa 2.1.

Mikäli henkilöllä on tilanteessa sekä riittävät taidot että motivaatio toimia, on hän todennäköisesti valmis tarttumaan toimeen ja työskentelemään tavoitteidensa eteen myös pitkäjänteisesti.

Lähtökohtaisesti ihminen keskittyy mieluiten sellaiseen, missä hän kokee olevansa hyvä ja välttää sellaisia tilanteita, jotka uhkaavat hänen minäpystyvyyskokemustaan. Minäpystyvyyskäsitys kehittyy vähitellen elämän aikana, ja se on jatkuvassa



Kuva 2.1 *Pystyvyyskokemus ja toiminnan oletettu lopputulos [2]*

muutoksessa koko ihmisen elinkaaren läpi. [1, 2, 19] Henkilön minäpystyvyyskäsityksen pysyvyyttä on kuitenkin tutkittu verrattain vähän [4].

Minäpystyvyyden tunteen kehitykseen vaikuttavat ihmisen elinkaaren aikana erityisesti neljä keskeistä tekijää: aiemmat onnistumiset, sijaiskokeminen, sanallinen vakuuttaminen ja eri tilanteisiin liittyvät tunnereaktiot [2]. Näistä aiemmilla onnistumisilla on tyypillisesti muita suurempi painoarvo minäpystyvyyden muodostumisessa.

Minäpystyvyyden tunnetta vahvistaa nopeimmin henkilön kokemus omasta osaamisestaan esimerkiksi erilaisten onnistumisten kautta. Toisaalta minäpystyvyys ei pelkkien toinen toistaan seuraavien onnistumisien kautta rakennu vahvaksi, vaan pelkillä onnistumisilla rakennettu minäpystyvyyden tunne saattaa epäonnistumisen kohdatessa romahtaa melko helpostikin. [1] Epäonnistumisten aiheuttamaa negatiivista vaikutusta henkilön minäpystyvyydelle voidaan pitää todennäköisenä etenkin silloin, jos epäonnistumisia koetaan uudessa tai entuudestaan vieraassa tilanteessa. Ajan myötä epäonnistumisten negatiivinen vaikutus kuitenkin loivenee. [2] Onnistumisen ja epäonnistumisen määrittely riippuu kuitenkin usein henkilöstä itsestään, ja kaksi henkilöä saattavat tilanteesta riippuen muodostaa samoista lähtökohdista täysin erilaisen minäpystyvyyskäsityksen [16, 4]. Tämän vuoksi minäpystyvyyden rakentuessa henkilön tulisi kohdata myös riittäviä haasteita, joista hänen on kuitenkin kohtuullisella ponnistelulla mahdollista suoriutua. [1]

Toinen minäpystyvyyden rakentumisen kannalta keskeinen tekijä on sosiaalinen mallintaminen tai sijaiskokeminen [1]. Se kuitenkin tyypillisesti vaikuttaa henkilön minäpystyvyyden tunteeseen edellä kuvattuja onnistumisen kokemuksia vähemmän [16]. Kun henkilö näkee vertaisensa suoriutuvan jostakin annetusta tehtävästä, vahvistaa se hänen käsitystään hänen omista mahdollisuuksistaan vastaavan kaltaisesta tehtävästä suoriutumiseen. Vastaavasti myös mallin mahdollinen epäonnistuminen tehtävässä vaikuttaa henkilön itsensä minäpystyvyyskokemukseen. Sekä vahvistavan että heikentävän vaikutuksen suuruus riippuu huomattavasti siitä, kuinka samanlaisena henkilö itsensä mallin kanssa näkee. [1] Toisaalta myös havainto siitä, että hyvin erilaiset ja erilaisia taitoja omaavat henkilöt selviytyvät samanlaisesta haasteesta nostaa havainnoijan käsitystä omista mahdollisuuksistaan haasteesta selviytymiseen [2].

Sijaiskokemisen pohjalta rakennetut minäpystyvyyskokemukset ovat yleisesti ottaen onnistumisten pohjalta rakentuneita minäpystyvyyskokemuksia alttiimpia muutoksille [2]. Sosiaalinen mallintaminen on kuitenkin erityisesti nuorille tärkeä väylä oman minäpystyvyyskäsityksen rakentamiseen [16]. Se tarjoaa vertailun lisäksi myös uusia keinoja kohdata vastaan tulevia haasteita, mikä vaikuttaa henkilön kokemukseen omasta valmiudestaan kohdata haasteita pääosin positiivisesti. [1]

Kolmas minäpystyvyyteen vaikuttava seikka on omalle käsitykselle itsestä ja omista kyvyistä saatu sanallinen tunnustus ja vahvistus. Henkilö, jolle on kerrottu hänen olevan kyvykäs suoriutumaan annetusta tehtävästä, yrittää todennäköisesti kovemmin ja täten onnistuu todennäköisemmin kuin henkilö, jonka kykyjä ulkopuolelta epäillään. [1, 16] Sijaiskokemisen tavoin myös sanallisen palautteen ja vahvistamisen kautta muodostettu minäkäsitys on tyypillisesti heikompi ja alttiimpi muutokselle kuin omien onnistumisen kokemusten kautta muodostettu [2].

Erityisesti lapset ja nuoret ovat herkkiä sille, mitä aikuiset heistä sanovat, jolloin aikuisen on mahdollista vaikuttaa nuoren minäpystyvyyskäsitykseen myös tarkoittamattaan ja tahtomattaan [16]. Lasten minäpystyvyyskäsitys voi kuitenkin olla epärealistisen korkea, sillä lapsella ei välttämättä ole selkeää käsitystä siitä, mitä kulloisenkin tehtävän suorittamiseen tarvitaan [19]. Epäilys omasta suoritumisesta saa henkilön luovuttamaan helpommin ja näin kokemus omasta osaamattomuudesta vahvistuu. Vahvan minäpystyvyyden kehittyminen ei kuitenkaan edellytä jatkuvia kehuja, vaan vahvan minäpystyvyyden omaava henkilö asettaa itsensä asemaan, jossa jatkuvat epäonnistumiset ovat epätodennäköisiä ja toisaalta onnistumiset voi kokea enemmän henkilökohtaisena kehityksenä kuin toisten päihittämisenä. [1]

Edellä kuvattujen tekijöiden ohella myös henkilön fyysinen ja psyykkinen olotila vaikuttavat hänen kokemukseensa omista mahdollisuuksistaan suoriutua annetusta tehtävästä. Ihminen tulkitsee kehonsa reaktioita ja myös mielialan on todettu vaikuttavan minäpystyvyyden kokemukseen. Esimerkiksi fyysisellä reaktiolla stressaavaan tilanteeseen ei yleensä kuitenkaan sinänsä ole juurikaan vaikusta minäpystyvyyteen [1], vaan se, onko esimerkiksi stressin aiheuttamalla fyysisellä reaktiolla juurikaan merkitystä henkilön minäpystyvyyskokemukselle, riippuu paljolti kulloisestakin tilanteesta [2]. Minäpystyvyyden kehityksen kannalta on sen sijaan olennaista, miten henkilö tulkitsee reaktioita. Tällä neljännellä minäpystyvyyteen vaikuttavalla tekijällä on keskeinen rooli erityisesti fyysistä suorituskykyä vaativista tehtävistä selviytymistä arvioitaessa. [1]

Vaikka minäpystyvyyden muovautumiseen vaikuttavat edellä kuvatun kaltaisesti myös menneisyyden tapahtumat, on tärkeää huomata, että minäpystyvyyskokemus itsessään suuntautuu eteenpäin: minäpystyvyyden tunne on ennen kaikkea luottamusta tulevaan onnistumiseen. [4] Toisaalta tulee myös huomata, ettei mikään ulkoinen tapahtuma tai kommentti sinällään vaikuta suoraan henkilön minäpystyvyyteen, vaan kyse on siitä, miten henkilö itse tilanteen tulkitsee. Onnistumisen suuruudesta riippumatta sen vaikutuksen minäpystyvyydelle suuruus riippuu ensisijaisesti siitä, arvioiko henkilö onnistumisen aiheutuneen hänen omista kyvyistään vai ulkoisista tekijöistä. Sekä negatiivisten että positiivisten muutosten kohdalla perusperiaate on sama: muutos on tyypillisesti suurempi, jos henkilö tulkitsee lopputuloksen johtuvan ensisijaisesti omista kyvyistään, ja pieni, jos henkilö arvioi ulkoisten tekijöiden kuten epätavallisen toimintaympäristön vaikuttaneen lopputulokseen hänen omia kykyjään enemmän. [2]

Koska erilaisten kokemusten vaikutukset henkilön minäpystyvyyteen riippuvat lopulta pitkälti henkilön itsensä tilanteista tekemistä tulkinnoista, voivat kaksi henkilöä muodostaa varsin erilaisenkin minäpystyvyyden täysin samoista lähtökohdista [2]. Edes yksittäisen, selkeänkään onnistumisen tai epäonnistumisen vaikutusta henkilön minäpystyvyyskokemukseen on vaikea arvioida tuntematta hänen elämänsä aiempia minäpystyvyyteen vaikuttaneita tapahtumia.

2.2 Matemaattinen minäpystyvyys

Akateemisella minäpystyvyydellä tarkoitetaan henkilön akateemiseen osaamiseen kohdistuvaa minäpystyvyyskokemusta. Se kuvaa ennen kaikkea henkilön itsensä kokemusta siitä, miten hyvin hänen on annetusta tehtävästä mahdollista suoriutua. Henkilön akateeminen minäpystyvyyskokemus riippuu paljolti siitä tehtävästä, josta suoriutumistaan hän arvioi, joten minäpystyvyyskokemus voi vaihdella aiheittain ja esimerkiksi oppiaineiden välillä suurestikin. Myös vaihtelu oppiaineen sisällä aihepiireittäin on mahdollista. [4]

Luvussa 2.1 esitellään keskeisimmät henkilön minäpystyvyyteen vaikuttavat tekijät Banduran [1] mukaan. Näistä kouluympäristössä akateemisen minäpystyyyden tunteen vahvistumisen kannalta erityisen tärkeitä ovat aiemmat onnistumiset, mutta jokainen neljästä esitellystä vaikuttavasta tekijästä vaikuttaa matemaattiseen minäpystyvyyden tunteeseen jonkin verran [24]. Esimerkiksi matematiikassa onnistumisen kokemukset vaikuttavat opiskelijan minäpystyvyyskokemukseen vahvimmin aina juuri sen matematiikan osa-alueen kohdalla, jolla onnistuminen on tapahtunut [3]. Minäpystyvyyskäsitys on kuitenkin luonteeltaan tulevaisuuteen suuntautuva, eikä menneiden onnistumisten roolia tule ylikorostaa [4].

Riippumatta siitä, millä opetuksen vuosiluokalla opiskelija on, vaikuttavat opiskelijan minäpystyvyyteen kouluympäristössä edellä kuvatun kaltaisten onnistumisen kokemusten lisäksi myös opettajalta ja opiskelutovereilta saatu palaute, opetustavat ja sosiaalinen vertailu [6]. Positiivinen palaute omasta onnistumisesta niin kouluympäristössä kuin kotonakin saattaa vaikuttaa opiskelijan minäpystyvyyskokemukseen jopa itse onnistumista enemmän. Turvallinen opiskeluilmapiiri ja opettajan osoittama tuki ovat tärkeitä erityisesti heikon minäpystyvyyden opiskelijoille. Toisaalta myös kokemus siitä, että opiskelija pystyy omaksumaan sellaisiakin sisältöjä, joita muut opiskelijat eivät ymmärrä, vaikuttaa minäpystyvyyskokemukseen positiivisesti. [6]

Oppiainekohtainen minäpystyvyyskokemus liittyy erityisesti oppilaan itsevarmuuteen erilaisten oppiaineelle tyypillisten tehtävien ratkaisemisessa [4]. Oppiaineelle tyypillisten tehtävien ratkaisemisessa onnistuminen vahvistaa minäpystyvyyskokemusta sekä vahvan että heikon minäkäsityksen omaavan opiskelijan kohdalla. On kuitenkin hyvä huomata, että minäpystyyvyyskäsityksen vahvistumiseksi ratkaistavan tehtävän vaikeustaso riippuu opiskelijan minäpystyvyyskäsityksen lähtötasosta. [6] Esimerkiksi heikon matemaattisen minäpystyvyyskäsityksen omaavan opiskelijan minäpystyvyyskäsitys saattaa vahvistua huomattavasti yksinkertaisemmassa tehtävässä onnistumalla kuin vahvan matemaattisen minäpystyvyyden omaavan opiskelijan.

Matematiikan opinnoissaan hyvin menestyvät opiskelijat kehittävät tyypillisesti vahvan matemaattisen minäpystyvyyden tunteen, mikä johtaa matematiikan opintojen jatkamiseen ja motivaatioon yrittää ratkaista vaikeimpiakin matemaattisia ongelmia [16, 20]. Vahva matemaattinen minäpystyvyyskokemus ja usko omien kykyjen riittävyyteen vaikeimpienkin tehtävien ratkaisemiseksi vaikuttavat positiivisesti opiskelijan sisäsyntyiseen opiskelumotivaatioon ja sinnikkyytteen vaikeita tehtäviä kohdatessa [4, 20]. Myös pelkällä opiskelijan omalla kiinnostuksella matemaattisia aineita kohtaan on havaittu olevan jonkin verran positiivista vaikutusta hänen kokemaansa matemaattiseen minäpystyvyyteen [9]. Toisaalta niiden opiskelijoiden, joiden matemaattinen minäpystyvyys on heikko, voi olla vaikea motivoitua työskentelemään minäpystyvyytensä parantamiseksi tai edes tunnistaa sellaisia asioita, jotka minäpystyvyyttä voisivat parantaa [6].

Matemaattisen minäpystyvyyden kokemuksen muotoutumiseen vaikuttavat jonkin verran myös henkilön ikä ja sukupuoli [9]. Naisten minäpystyvyyskäsitys on sekä matemaattisten aineiden osalta että yleisesti opintoihin liittyen tyypillisesti miesten minäpystyvyyskäsitystä heikompi [23]. Sekä nuorten miesten että naisten matemaattisen minäpystyvyyden tunne myös laskee iän myötä ja koulutustason noustessa [9]. Tutkittaessa nuorten matemaattiseen minäpystyvyyskokemukseen vaikuttavia tekijöitä todettiin sosiaalisilla kokemuksilla olevan useammin vaikutusta nuorten naisten kuin nuorten miesten minäpystyvyyskokemuksiin [6]. Samankaltainen havainto voitiin tehdä myös sosiaalisen vertailun osalta, ja onkin perusteltua todeta, että nuorten naisten matemaattinen minäpystyvyyskokemus rakentuu miesten vastaavaa suuremmassa määrin nimenomaan sosiaalisille tekijöille. Tutkimuksen [13] mukaan nuorten naisten osaamisestaan saaman positiivisen palautteen määrä kuitenkin laskee heidän ikävuosiensa karttuessa tilanteen ollessa nuorten miesten kohdalla päinvastainen. Tässä valossa juuri nuorten naisten rohkaiseminen matematiikan opinnoissa ja sitä kautta heidän matemaattisen minäpystyvyytensä vahvistaminen olisi tärkeää epätasaisen sukupuolijakauman tasaamiseksi miesvaltaisilla matemaattisten tieteiden aloilla [16].

Vaikka psykologiassa usein ajatellaan älykkyyden olevan keskeisin opintomenestystä ennustava tekijä, on myös minäpystyvyydellä opintomenestyksessä keskeinen selittävä rooli [16, 9]. Oppijat, jotka tietävät osaavansa, ja joilla näin ollen on vahva minäpystyvyyden tunne esimerkiksi matematiikassa, jaksavat keskittyä pidempään ja yrittää kovemmin riippumatta heidän aiemmasta opintomenestyksestään. Toisaalta minäpystyvyyskäsitys on yhdistetty myös oppimis- ja kognitiivisten strategioiden käyttöön opiskelussa sekä hyvään itsesäätelykykyyn. Näin ollen älykkyys ei siis itsessään täysin ennusta oppijan opintomenestystä, vaan kyse on siitä, miten hyvin oppija itse tunnistaa oman potentiaalinsa. [16] Vahva matemaattinen minäpystyvyyskäsitys korreloi erityisesti hyvien kurssikohtaisten ja jatkuvan arvioinnin arvosanojen kanssa [9]. Yleisesti vahva matemaattinen minäpystyvyys nimenomaan matemaattisten tehtävien ratkaisemisen suhteen korreloi opintomenestyksen kanssa yleisempää matemaattista minäpystyvyyttä vahvemmin [3].

Minäpystyvyyden tunteen vahvistuminen tietyllä akateemisella alueella, kuten matematiikassa, voi johtaa minäpystyvyyskäsityksen vahvistumiseen, motivoitumiseen ja parempaan opintomenestykseen myös muilla akateemisilla alueilla [16]. Matemaattinen minäpystyvyys korreloi erityisesti muiden matemaattisten aineiden eli fysiikan ja kemian minäpystyvyyskäsitysten mutta myös yleisen akateemisen minäpystyvyyskäsityksen kanssa [23]. Yleisesti eri oppiaineiden minäpystyvyyskäsitysten välinen korrelaatio voidaan havaita sitä selvemmin, mitä tarkempia ja rajatumpia mittaamiseen käytetyt väittämät ovat. Positiivista korrelaatiota voidaan havaita myös yleisempien ja yksityskohtaisempien matemaattisen minäpystyvyyden kokemusten välillä. [4, 3] Matemaattinen minäpystyvyys on eräs matemaattisiin tieteisiin suuntautuvien opiskelu- ja uravalintoihin vaikuttava ja niitä selittävä tekijä [23, 9]. Erityisesti vahva matematiikan kursseilla menestymiseen liittyvä minäpystyvyyskokemus korreloi positiivisesti matemaattisiin aineisiin suuntautuvien valintojen kanssa [3].

2.3 Matematiikka opetussuunnitelmassa

Suomalaisten lukioiden matematiikan opetus jakautuu opetuusuunnitelman [15] mukaisesti pitkään ja lyhyeen oppimäärään, jotka koostuvat lukuvuoden 2021-2022 alusta alkaen molemmille oppimäärille yhteisestä pakollisesta MAY1-moduulista sekä kummankin oppimäärän osalta omista pakollisista ja valinnaisista opinnoista. Valinnaisista opinnoista osa on opetussuunnitelmassa määritelty valtakunnallisesti. Matematiikan pitkä oppimäärä koostuu oppimäärien yhteisen MAY1-moduulin lisäksi 8 pakollisesta ja 3 valinnaisesta moduulista. Lyhyen oppimäärän suorittaakseen opiskelijan on puolestaan suoritettava 6 pakollista moduulia. Lisäksi valtakunnallisesti on tarjolla 2 valinnaista moduulia. [15]

Valtakunnallisten opetussuunnitelman määrämien pakollisten ja valinnaisten matematiikan opintojen lisäksi oppilaitoksilla on mahdollisuus tarjota koulukohtaisia soveltavia valinnaisia moduuleita. Opiskelija valitsee suoritettavaksi pitkän tai lyhyen oppimäärän viimeistään yhteisen kurssin päättyessä, mutta hänen on halutessaan mahdollista opiskella myös toisen oppimäärän moduleita vaihtamatta koko valitsemaansa oppimäärää.[15] Oppimäärää on mahdollista myös vaihtaa kesken lukio-opintojen.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 matematiikan opetuksen laaja-alaisiksi tavoitteiksi mainitaan esimerkiksi opiskelijan itsetunnon ja kiinnostuksen vahvistaminen sekä opiskelijan kannustaminen sinnikkääseen työskentelyyn [15]. Eräs oppijan sinnikkyyttä haastavia tehtäviä ratkaistaessa kuvaava tekijä on hänen matemaattinen minäpystyvyyskäsityksensä [16]. Myös matematiikan opetuksen yleisissä tavoitteissa ensimmäiseksi tavoitteeksi mainitaan työskentelyn pitkäjänteisyys sekä oppijan luottamus omiin kykyihinsä ja taitoihinsa [15].

Opetussuunnitelmassa käsitellään oppimäärän vaihtoa ennen kaikkea pitkästä oppimäärästä lyhyeen siirtymisen kannalta. Tällöin opiskelijan on mahdollista hyväksilukea pitkän oppimäärän opintoina suorittamansa moduulit suoraan osaksi lyhyttä oppimäärää. Vaihtaessaan lyhyestä oppimäärästä pitkään oppimäärään opiskelijalle saatetaan puolestaan määrätä täydentäviä opintoja paikallisten opetussuunnitelmien mukaisesti. [15] On kuitenkin huomattava, että vaikka hyväksiluvut ovat etenkin pitkän matematiikan opinnoista lyhyen matematiikan opiskeluun vaihdettaessa mahdollisia, ettei pitkän ja lyhyen matematiikan kohdalla kyse ole samojen matemaattisten sisältöjen järeästä ja kevytversiosta, vaan opintojen sisällöt ja painotukset vaihtelevat oppimäärien välillä [7].

2.4 Aiempi tutkimus

Aiemmassa minäpystyvyystutkimuksessa on käytetty sekä kvalitatiivisia että kvantitatiivisia tutkimusmetodeja minäpystyvyyteen vaikuttavien tekijöiden selvittämiseen [6]. Minäpystyvyyttä on tutkittu varsin erilaisilla tarkkuuksilla, ja tutkimuksen haluttu tarkkuus vaikuttaa jonkin verran myös tutkimuksesta saataviin tuloksiin. Yleisellä tasolla minäpystyvyyttä voidaan tutkia jonkin aihealueen suhteen määrittämättä tarkemmin, millaisista tehtävistä tai haasteista henkilön tulee niillä suoriutua. Matemaattisen minäpystyvyyden tutkimuksessa tällä yleisellä tasolla voidaan esimerkiksi pyytää opiskelijaa arvioimaan, pystyykö hän saavuttamaan ylioppilaskirjoituksissa tietyn arvosanan. Tutkimusta voidaan myös kohdentaa tarkemmin määrittelemällä esimerkiksi tiettyjä matemaattisia sisältöjä, moduuleita tai kursseja, joiden suhteen minäpystyvyyttä arvioidaan. Tarkimmin osa-aluekohtaista matemaattista minäpystyvyyttä voidaan tutkia esittämällä opiskelijalle tehtävänantoja, jolloin hänen tulee arvioida minäpystyvyyttään juuri kyseisen tehtävän ja aiheen kohdalla. [3]

Minäpystyvyyskäsitystä ja sen muutoksia on tutkitty verrattain paljon erityisesti kouluympäristöissä Yhdysvalloissa. Kansainvälisesti suosittuja tutkimusaiheita ovat esimerkiksi matemaattisen minäpystyvyyden ja matematiikan opintomenestyksen yhteys sekä matemaattisen minäpystyvyyden ja matematiikan opintoihin liittyvän ahdistuksen yhteys. Esimerkiksi minäpystyvyyskokemusten pysyvyyttä on kuitenkin tutkittu melko vähän [4]. Lisätutkimukselle aiheen ympärillä on tarvetta erityisesti eri maissa ja kulttuureissa [19]. Suomessa matemaattisen minäpystyvyyden tutkimus on keskittynyt suurelta osin peruskoulun oppilaisiin tai yliopisto-opiskelijoihin sekä opettajien matemaattiseen minäpystyvyyteen. Lukio-opiskelijoiden minäpystyvyyttä on tutkittu muita vähemmän.

3 Analyyttinen geometria

Analyyttisellä geometrialla tarkoitetaan geometrian alaa, jossa geometristen ongelmien ratkaisemiseen sovelletaan matemaattisen analyysin ja algebran keinoja [22]. Analyyttisessä geometriassa koordinaatistot ja koordinaatit ovat keskeisessä roolissa, ja se tutkii erityisesti reaaliluvun $x \in \mathbb{R}$ ja suoralla sijaitsevan pisteen, reaalilukuparin $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja tasolla sijaitsevan pisteen, sekä kolmen reaaliluvun $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ja avaruuden pisteen välisiä suhteita [22].

Vuonna 2019 julkaistuissa lukion opetussuunnitelman perusteissa pitkän matematiikan moduuli MAA4 käsittelee sekä analyyttistä geometriaa että vektoreita. Moduulin tärkeimmiksi aiheiksi mainitaan käyrän yhtälö, suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälö, yhtälöryhmä, suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus, itseisarvoyhtälö, pisteen etäisyys suorasta sekä vektoreiden perusominaisuudet ja tason vektoreiden laskutoimitukset. Tämän lisäksi analyyttistä geometriaa käsitellään jonkin verran myös moduulissa MAA10 3D-geometria. Matematiikan lyhyen oppimäärän moduuleissa analyyttisen geometrian sisällöt eivät juuri tule esiin. [15]

Tässä luvussa esitellään analyyttisen geometrian näkökulmasta kartioleikkaukset ja niiden ominaisuuksia sekä invarianssilauseen todistus. Esittely aloitetaan kartioleikkauksista tutuimmasta eli ympyrästä luvussa 3.1 ja siitä edetään muihin kartioleikkauksiin luvussa 3.2. Vektoreiden peruslaskutoimitukset ja yhtälöryhmän ratkaiseminen oletetaan tunnetuiksi.

3.1 Ympyrä kartioleikkauksena

Ympyrällä tarkoitetaan sellaista tason käyrää, jonka jokainen piste on yhtä kaukana keskipisteestä [22, s. 424]. Tätä määritelmää käytetään erityisesti koulumatematiikassa [8, s. 22], ja sen mukaisesti voimme määritellä ympyrän

Määritelmä 3.1.1. Olkoon (α, β) jokin avaruuden $\mathbb{R}^2$ piste. Tällöin sellaisten avaruuden pisteiden (x, y) joukkoa, joka sijaitsee positiivisen etäisyyden r päässä pisteestä (α, β) kutsutaan *ympyräksi*. Pisteet (x, y) toteuttavat yleisen ympyrän yhtälön

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0, \tag{3.1}$$

Määritelmässä piste (α, β) on ympyrän *keskipiste* ja vakiota r kutsutaan ympyrän *säteeksi* [8, s. 22]. Jos yhtälössä (3.1) ympyrän keskipisteenä on origo $(0, 0)$, saadaan yhtälö muotoon

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{3.2}$$

joka esiintyy usein analyyttisessä geometriassa [22, s. 425].

Yhtälön toteuttavan pistejoukon sijaan tarkastellaan nyt yhtälöä 3.1 toisen asteen polynomifunktiona. Määritellään yleinen toisen asteen polynomifunktio seuraavasti.

Määritelmä 3.1.2. Funktiota

$$Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c, \tag{3.3}$$

jolle ainakin yksi ehdoista $a \neq 0$, $b \neq 0$ ja $h \neq 0$ on voimassa, kutsutaan *toisen asteen polynomifunktioksi* [8, s. 22].

Kahta toisten asteen polynomifunktiota, joille pätee $Q' = \lambda Q$ jollakin reaaliluvulla $\lambda \neq 0$, kutsutaan toistensa *skalaarimonikerroiksi.* [8, s. 23]

Jokaiselle määritelmän 3.1.2 mukaiselle polynomifunktiolle Q voidaan määritellä *nollajoukko*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Q(x, y) = 0\},$$

joka on sama kaikille funktion Q skalaarimonikerroille. Näitä toisen asteen polynomin nollajoukkoja kutsutaan kartioleikkauksiksi [5]. Jos piste $P = (x, y)$ kuuluu funktion nollajoukkoon, kulkee funktion $Q(x, y)$ kuvaaja pisteen P kautta. Toisin sanoen piste P sijaitsee funktion $Q(x, y)$ kuvaajalla. [8, s. 23]

Määritellään seuraavaksi kartioleikkaus [5, s. 37] ja ympyrä kartioleikkauksena.

Määritelmä 3.1.3. Mille tahansa kartioleikkaukselle voidaan kirjoittaa yhtälö

$$ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h = 0, \tag{3.4}$$

missä kertoimet a, b, c, f, g ja h ovat reaalilukuja ja ainakin yksi kertoimista a, b, c ei ole nolla. Toisaalta näin ollen mikä tahansa joukko avaruuden $\mathbb{R}^2$ pisteitä, jonka koordinaatit (x, y) toteuttavat yhtälön (3.4), on kartioleikkaus.

Määritelmä 3.1.4. Ympyrä on lausekkeen (3.3) mukaisen toisen asteen polynomin nollajoukko, jolle $a = b$ ja $h = 0$. Tällöin polynomi voidaan kirjoittaa muodossa

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c. \tag{3.5}$$

Ympyrän ominaisuuksien tutkimisen kannalta lauseketta (3.5) mielenkiintoisempi ympyrän esitys on kuitenkin sellainen muoto, johon päästään jakamalla termien x^2 ja y^2 yhteisellä kertoimella a. Tätä ympyrän yhtälön muotoa

$$C(x, y) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{3.6}$$

josta nähdään ympyrän keskipisteeksi (α, β), kutsutaan kanoniseksi muodoksi. Kun yhtälössä (3.6) lausekkeeseen $C(x, y)$ lisätään ja vähennetään termit α^2 ja β^2, saadaan muoto

$$C(x, y) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma = 0.$$

Edelleen sieventämällä saadaan

$$C(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma = 0,$$

missä voidaan merkitä $k = \gamma - \alpha^2 - \beta^2$. Tällöin ympyrän yhtälöksi saadaan

$$C(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + k. \tag{3.7}$$

Ympyrän sanotaan olevan *virtuaalinen*, jos $k > 0$, *pisteympyrä*, jos $k = 0$ ja *reaalinen*, jos $k < 0$. Viimeksi mainitussa tapauksessa $k = -r^2$. [8, s. 23]

Tarkastellaan vielä lausekkeen $C(x, y)$ nollajoukkoja. Jos ympyrä on reaalinen, niin nollajoukko sisältää äärettömän määrän pisteitä. Tämä nähdään parametrisoimalla ympyrän yhtälö seuraavasti

$$x(\theta) = \alpha + r\cos(\theta), \qquad y(\theta) = \beta + r\sin(\theta). \tag{3.8}$$

Reaalisen ympyrän tapauksessa ympyrän keskipiste (α, β) ei kuulu ympyrän nollajoukkoon. Sen sijaan pisteympyrän tapauksessa ympyrän keskipiste on ainoa nollajoukon ehdon täyttävä piste ja näin ollen myös ainoa pisteympyrän piste. Virtuaalisille ympyröille puolestaan huomataan, että jos yhtälössä (3.6) $k > 0$, saadaan $C(x, y) > 0$ kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. [8, s. 24] Virtuaaliset ympyrät eivät siis sisällä yhtään pistettä ja tämän vuoksi niiden voidaan ajatella olevan (nolla)joukkoina yhtäsuuria. Jos virtuaalisia ympyröitä halutaan tarkastella erillisinä olioina, voidaan kartioleikkaukset nollajoukkojen sijaan määritellä [8] tavoin pelkkinä lausekkeina $C(x, y)$. Koulumatematiikassa painotetaan tämän tutkimuksen tavoin kuitenkin geometrisia ominaisuuksia, minkä vuoksi on perusteltua keskittyä nollajoukkoihin.

3.2 Kartioleikkaukset

Kartioleikkauksella tarkoitetaan geometrisesti ajateltuna tason ja ympyräkartion vaipan leikkausta. Ympyräkartiolla tarkoitetaan sellaista kappaletta, joka muodostuu origon kautta kulkevan suoran pyörähtäessä koordinaattiakselin ympäri. [21, s. 673] Kun kartion leikkaava taso ei kulje kartion kärjen kautta, saadaan leikkauspintana kolme kartioleikkauksen päätyyppiä: ellipsi, paraabeli ja hyperbeli. [22] Näistä vain paraabelia ja ellipsin erikoistapausta ympyrää käsitellään lukion matematiikan pitkässä oppimäärässä [15].

Kartioleikkaus on ellipsi, jos taso leikkaa kartion kaikkia emäviivoja. Kartion *emäviivoja* ovat kaikki ne suorat, jotka yhdistävät kartion kärjen sen kannan rajaviivaan [22, s. 185]. Toisin sanoen kartioleikkaus on ellipsi, jos taso leikkaa kartion muodostaen kartion keskiakselin kanssa kulman α, jolle $\alpha \neq 90°$ [21, s. 673]. Tämän ellipsin määritelmän mukaisesti luvussa 3.1 esitelty ympyrä voidaan nähdä ellipsin erikoistapauksena, jossa taso leikkaa kartion samansuuntaisesti sen pohjan kanssa, eli kohtisuorasti kartion keskiakseliin nähden [21, 22]. Paraabeli muodostuu, kun taso leikkaa vain yhden vaippapinnan ja on yhdensuuntainen jonkin kartion emäviivoista kanssa [22, s. 184]. Tällöin kartion leikkaava taso on yhdensuuntainen sen suoran kanssa, jonka pyörähdyskappaleena kartio on muodostunut [21, s. 673]. Jos taso puolestaan leikkaa kahta kartion vaippapintaa, on kyseessä hyperbeli [22, s. 184]. Tällöin kartion leikkaava taso on yhdensuuntainen kartion keskiakselin kanssa [21, s. 673].

Kaikki kartioleikkaukset voidaan esittää yhtälön (3.3) mukaisina toisen asteen polynomifunktioina. Analyyttisessä geometriassa kartioleikkauksia käsitellään kuitenkin usein yksinkertaisemmissa standardimuodoissaan [22, s. 79, 137].

Määritellään seuraavaksi ellipsi [21, s. 678].

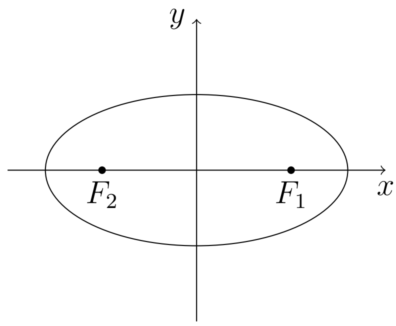
Määritelmä 3.2.1. *Ellipsi* on sellaisten pisteiden joukko, joiden etäisyyksien summa *polttopisteistä* F_1, F_2 on vakio.

Kun ellipsin keskipiste asetetaan origoon ja isoakseli x-akselin suuntaisesti, saadaan ellipsin standardimuotoiseksi yhtälöksi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.9}$$

missä puoliakselien pituuksia kuvaaville vakioille $a, b \in \mathbb{R}$ pätee $0 < b < a$ [22, s. 80][8, s. 34]. Tällöin standardin ellipsin x-akselin suuntaisen isoakselin pituus on $2a$ ja y-akselin suuntaisen pikkuakselin pituus $2b$ [8, s. 34]. Yleisesti ellipsin *isoakselilla* tarkoitetaan pisintä etäisyyttä ellipsin pisteestä pisteeseen ellipsin läpi. Vastaavasti ellipsin *pikkuakselilla* tarkoitetaan lyhintä mahdollista etäisyyttä ellipsin läpi ellipsin keskipisteen kautta. Iso- ja pikkuakseli ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Iso- ja pikkuakselien pituuksien avulla voidaan löytää myös ellipsin polttopisteiden sijainti. Origokeskisen standardin ellipsin tapauksessa sen polttopisteet sijaitsevat pisteissä $(\pm c, 0)$, missä $c^2 = a^2 + b^2$. Ellipsin polttopisteet siis sijaitsevat ellipsin isoakselilla. [21, s. 679] Yhtälön (3.9) ellipsi on esitetty kuvassa 3.1.

Tarkastellaan sitten ellipsiä, jonka keskipiste on jossakin muussa pisteessä kuin origossa. Olkoon nyt piste $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ ellipsin keskipiste. Tällöin ellipsin, jonka isoakseli on yhtälön (3.9) ellipsin tavoin x- ja pikkuakseli y-akselin suuntainen, yhtälö



Kuva 3.1 *Standardimuotoinen ellipsi ja sen polttopisteet* F_1, F_2

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}. \tag{3.10}$$

Tällöin ellipsin polttopisteet sijaitsevat pisteissä $(h \pm c, k)$, missä $c^2 = a^2 + b^2$. Vastaavasti jos isoakseli on y-akselin suuntainen ja pituudeltaan edellisiä vastaava $2a$, voidaan ellipsin yhtälö kirjoittaa muotoon

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \tag{3.11}$$

jolloin polttopisteet sijaitsevat pisteissä $(h, k \pm c)$ [21, s. 680]

Ellipsin yhtälön yleinen muoto on

$$ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ voivat olla joko molemmat positiivisia tai molemmat negatiivisia. Huomataan, että yhtälö vastaa yleistä toisen asteen polynomifunktion lauseketta (3.3), kun $h = 0$. [21, s. 681] Toisaalta huomataan, että ellipsin yhtälö vastaisi ympyrän yhtälon muotoa (3.2), jos asettaisiin $a = b$ ja kerrottaisiin yhtälö puolittain jakajalla. Koska yhtälön (3.9) yhteydessä kuitenkin määriteltiin $0 < b < a$, tyydymme ajattelemaan, että reaalinen ellipsi lähestyy ympyrää, kun $a \to b$. [8, s. 34]

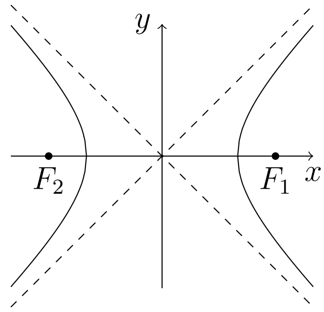
Tutkitaan kartioleikkauksista seuraavaksi hyperbeliä. Hyperbeli voidaan määritellä seuraavasti [21, s. 683]

Määritelmä 3.2.2. *Hyperbeli* on kaikkien niiden pisteiden joukko, joiden etäisyyksien erotus kahdesta polttopisteestä on vakio.

Hyperbelin standardimuoto määritellään ellipsin standardimuodon tavoin asettamalla kartioleikkauksen keskipiste origoon. Tällöin hyperbelin yhtälöksi saadaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.12}$$

missä vakio a on suuruudeltaan puolet hyperbelin ja sen transversiaaliakselin leikkauspisteiden etäisyydestä [8, s. 35]. Hyperbelin *transversiaaliakselilla* tarkoitetaan hyperbelin molempien polttopisteiden kautta kulkevaa ja sen kahdesti kohtisuoraan leikkaavaa suoraa, joka standardimuotoisen hyperbelin tapauksessa on suora $y = 0$ eli x-akseli [22, s. 137]. Standardimuotoinen hyperbeli on esitetty kuvassa 3.2.



Kuva 3.2 *Standardimuotoinen hyperbeli, sen polttopisteet* F_1, F_2 *ja asymptootit*

Hyperbeli jakautuu kahteen haaraan. Suora $x = c$ kohtaa kaavan (3.12) mukaisen hyperbelin kahdesti, jos $x > a$ tai $x < -a$, kerran, jos $x = \pm a$ ja ei kertaakaan, jos $-a < x < a$. Näin ollen sanotaan, että kuvaaja jakautuu positiiviseen ja negatiiviseen haaraan. [8, s. 35] Hyperbelit eivät kuitenkaan välttämättä ole koordinaattiakseleiden suhteen symmetrisiä, eikä niiden keskus välttämättä sijaitse origossa. Olkoon piste (h, k) jokin piste. Jos hyperbelin keskus sijaitsee tässä pisteessä, saa hyperbelin yhtälö muodon

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Jos samassa pisteessä sijaitsee sellaisen hyperbelin keskus, jonka transversiaaliakseli on vaakasuoran sijaan pystysuora, saadaan hyperbelin yhtälöksi

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Ensin mainitussa tapauksessa hyperbelin asymptoottisuorien yhtälöt saadaan lausekkeesta $y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$. Jälkimmäisessä tapauksessa asymptootit ovat vastaavasti $y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$. [21, s. 684] *Asymptootiksi* kutsutaan suoraa, joka ei risteä kartioleikkauksen kuvaajan kanssa ja jota käyrä lähestyy, kun x lähestyy jotakin vakiota tai kasvaa tai pienenee rajatta. [8, s. 75][21, s.115].

Hyperbelin yleinen yhtälö on muotoa

$$ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

missä vakioilla a ja b on vastakkaiset etumerkit [21, s. 685]. Huomataan, että se on ellipsin tavoin yleisen kartioleikkauksen (3.3) muotoinen, kun $h = 0$.

Määritellään seuraavaksi viimeinen tässä luvussa esiteltävistä kartioleikkauksista. [21, s. 675]

Määritelmä 3.2.3. *Paraabeli* on sellaisten pisteiden joukko, jotka sijaitsevat yhtä kaukana paraabelin polttopisteestä ja johtosuorasta.

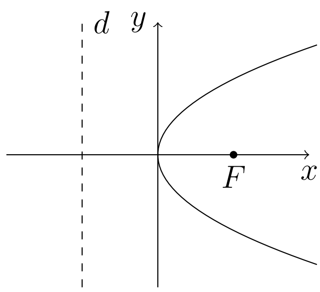
Määritelmässä 3.2.3 paraabelin johtosuoralla tarkoitetaan standardimuotoisen paraabelin tapauksessa suoraa $x = -a$ ja polttopisteellä pistettä $(a, 0)$. Tällöin origossa sijaisevan paraabelin pisteen kohtisuora etäisyys johtosuorasta ja polttopisteestä on a. [5, s. 13] Standardimuotoinen paraabeli sijoitetaan analyyttisessä geometriassa koordinaatistoon yleensä siten, että paraabelin huippu on origossa ja polttopiste positiivisella x-akselilla [22, s. 303]. Tällöin paraabelin standardimuotoiseksi yhtälöksi saadaan

$$y^2 = 4ax, \tag{3.13}$$

missä a on paraabelin polttopisteen ja origon välinen etäisyys [8, s. 33]. Tästä voidaan huomata, että myös toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$, kuvaaja on myös paraabeli, joskin se aukeaa esitellystä standardimuotoisesta paraabelista poiketen ylöspäin [22, s. 303]. Ylöspäin aukeavan paraabelin standardimuotoinen yhtälö voidaan kirjoittaa [21, s. 675]

$$y = \frac{1}{4a}x^2.$$

Standardimuotoinen oikealle aukeava paraabeli on esitetty kuvassa 3.3.



Kuva 3.3 *Standardimuotoinen paraabeli, sen polttopiste F ja johtosuora d*

Paraabelin *huipuksi* sanotaan pistettä paraabelin polttopisteen ja johtosuoran kohtisuoran etäisyyden puolivälissä. Jos paraabelin huippu sijaitsee muualla kuin origossa, saa ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö (3.13) muodon

$$x = \frac{1}{4a}(y - k)^2 + h$$

ja vastaavasti sivulle aukeava paraabeli muodon

$$y = \frac{1}{4a}(x - h)^2 + k.$$

Kaikissa esitellyissä paraabelin yhtälöissä paraabelin johtosuora sijaitsee kohtisuoran etäisyyden $2a$ päässä paraabelin polttopisteestä. [21, s. 676]

Edellä kuvatuilla standardimuotoisilla kartioleikkauksilla on muutama yhteinen ominaisuus, jotka on syytä huomioida. Ellipsillä, hyperbelillä ja paraabelilla on kaikilla ainakin yksi symmetria-akseli, minkä lisäksi niillä kaikilla on äärettömän määrän pisteitä sisältävä nollajoukko [8].

Kartioleikkaukset on mahdollista määritellä myös analyyttisesti eksentrisyyden käsitteen avulla [22, s. 184]. *Eksentrisyys* e on positiivinen vakio, joka määrittää kartioleikkauksella sijaitsevan pisteen P ja kartioleikkauksen polttopisteen F välisen etäisyyden ja pisteen P ja kartioleikkauksen johtosuoran D välisen etäisyyden suhteen yhtälön

$$|PF|^2 = e^2|PD|^2 \tag{3.14}$$

mukaisesti [8, s. 76].

Kartioleikkauksen eksentrisyyden perusteella voidaan määrittää, mikä kartioleikkaus on kyseessä. Ellipsin eksentrisyys $e \in]0, 1[$ ja ympyrälle $e = 0$. Jokaiselle paraabelille pätee $e = 1$ ja hyperbelille $e > 1$. Eksentrisyydestä voidaan päätellä myös ellipsien ja hyperbelien muoto, sillä ellipsi muuttuu eksentrisyyden kasvaessa litteämmäksi ja hyperbeli loivemmaksi. [22, s. 77] Eksentrisyys määrittelee myös kartioleikkausten yhdenmuotoisuuden, sillä kahta kartioleikkausta, joilla on sama eksentrisyys kutsutaan yhdenmuotoisiksi [22, s. 184].

3.3 Kartioleikkausten matriisit ja invariantit

Kappaleessa 3.1 esitelty toisen asteen polynomifunktio (3.3)

$$Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c,$$

voidaan esittää matriisin avulla seuraavasti.

Merkitään ensin

$$A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

missä matriisin A alkiot vastaavat funktion (3.3) kertoimia. Valitaan nyt vaakavektori $z = (x, y, 1)$ ja merkitään sen pystysuuntaista transpoosia $z^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Tällöin huomataan, että

$$
\begin{aligned}
zAz^T &= \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ax + hy + g & hx + by + f & gx + fy + c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ax^2 + hyx + gx + hxy + by^2 + fy + gx + fy + c \end{bmatrix} \\
&= ax^2 + 2hyx + by^2 + 2fy + 2gx + c \\
&= Q(x, y)
\end{aligned}
$$

Tämän peruteella voidaan kirjoittaa

$$Q(x, y) = zAz^T, \tag{3.16}$$

joten yleisen kaartioleikkauksen yhtälö voidaan helposti esittää matriisin A avulla [8, s. 38].

Matriisin A olemassaolo mahdollistaa kolmen kartioleikkausten tutkimisessa keskeisen invariantin käyttöönoton. Yhtälö (3.17) määrittelee invariantit *jälki* τ, *delta* δ ja *diskriminantti* Δ seuraavasti.

$$\tau = a + b, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

Kartioleikkauksia voidaan luokitella invarianttien perusteella. Edellä määritellyistä invarianteista määräävin on diskriminantti Δ. Mikäli kartioleikkaukselle pätee $\Delta \neq 0$, kutsutaan sitä *degeneroitumattomaksi* tai *surkastumattomaksi.* Degeneroitumattomat kartioleikkaukset voidaan edelleen luokitella ellipseihin, paraabeleihin ja hyperbeleihin invariantin δ perusteella. [8, s. 38] Luokitteluperusteet on esitetty taulukossa 3.1.

Taulukko 3.1 *Degeneroitumattomat kartioleikkaukset*

nimi	δ	Δ
ellipsi	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$
paraabeli	$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$
hyperbeli	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$

3.4 Kartioleikkausten kongruenssi

Lähdetään liikkelle tasokuvauksesta ϕ. Tarkastellaan kuvauksen lähtöjoukkoa (X, Y)-tasona ja maalijoukkoa (x, y)-tasona. Tällöin kuvaus ϕ on muotoa

$$\phi(X, Y) = (x, y), \tag{3.18}$$

missä x ja y tarkoittavat funktioita $x = x(X, Y)$ ja $y = y(X, Y)$. Nämä funktiot ovat kuvauksen ϕ *komponentit.* [8, s. 138]

Tarkastellaan sitten tasokuvauksen kääntyvyyttä. Kuvaus ϕ on *kääntyvä*, jos jokaiselle sen maalijoukon pisteelle (x, y) voidaan löytää yhtälön (3.18) toteuttava yksittäinen lähtöjoukon piste (X, Y). Tällöin kuvaukselle ϕ voidaan määrittää *käänteiskuvaus* ϕ^{-1}. Käänteiskuvaus voidaan selvittää ratkaisemalla X ja Y muuttujien x ja y suhteen. Tällöin käänteiskuvaus saa muodon

$$\phi^{-1}(x, y) = (X, Y), \tag{3.19}$$

missä $X = X(x, y)$ ja $Y = Y(x, y)$ ovat kuvauksen komponentit. [8, s. 138]

Tutkitaan seuraavaksi kääntyvää 2×2 -neliömatriisia

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

jota kutsutaan *rotaatiomatriisiksi*, jos sillä kertominen aiheuttaa kulman θ suuruisen kierron. Huomataan, että kulman θ arvolla 0 saadaan matriisi

$$R(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \tag{3.20}$$

joka tunnetaan *identiteettimatriisina.* Identiteettimatriisilla kertominen säilyttää kerrottavan matriisin alkuperäiset arvot. [8, s. 138–139]

Osoitetaan seuraavaksi, että rotaatiomatriiseille pätee

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1). \tag{3.21}$$

Olkoot nyt R_1 ja R_2 kaksi rotaatiomatriisia siten, että $\theta_1 \neq \theta_2$ ja

$$R_1 = R(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad R_2 = R(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$R_1R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{bmatrix},$$

mikä edelleen trigonometristen yhteenlaskukaavojen (esim. [22, s. 396]) avulla saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = R(\theta_1+\theta_2).$$

Reaalilukujen summan vaihdannaisuuden perusteella voidaan kirjoittaa

$$R(\theta_1+\theta_2) = R(\theta_2+\theta_1),$$

mistä edellä lasketun perusteella seuraa

$$R(\theta_1+\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1).$$

Sijoitetaan seuraavaksi kaavaan (3.21) sellaiset kulmat θ_1 ja θ_2, että $\theta_1 = \theta$ ja $\theta_2 = -\theta$, jolloin kulmien summaksi saadaan $\theta - \theta = 0$. Tällöin

$$R(\theta)R(-\theta) = I = R(-\theta)R(\theta), \tag{3.22}$$

mistä seuraa, että kulman θ suuruisen kierron aiheuttavan rotaatiomatriisin käänteismatriisi on kulman $-\theta$ kierron aiheuttava rotaatiomatriisi. [8, s. 139]

Edellä kuvattuja rotaatiomatriisin ominaisuuksia tarvitaan seuraavan kartioleikkausten kongruenssiksi kutsutun tasokuvauksen ymmärtämiseen. *Kongruenssi* voidaan määritellä tasokuvauksena ϕ seuraavan kaavan mukaisesti:

$$\phi(Z) = ZR + T. \tag{3.23}$$

Tässä R on rotaatiomatriisi ja T on jokin vakioarvoinen vektori. Matriisia R kutsutaan kongruenssin *kierto-* ja vektoria T kongruenssin *siirto-osaksi.* Kongruenssi on kääntyvä, sillä kuvaus $z = \phi(Z)$ voidaan ratkaista muuttujan Z suhteen seuraavasti

$$\begin{aligned} z &= ZR + T \\ z - T &= ZR \\ (z-T)R^{-1} &= ZRR^{-1} \\ Z &= zR^{-1} - TR^{-1} \end{aligned}$$

Näin ollen kongruenssin (3.23) käänteiskuvaukseksi ϕ^{-1} saadaan [8, s. 139]

$$\phi^{-1}(z) = zR^{-1} - TR^{-1}. \tag{3.24}$$

Kongruenssi ϕ on mahdollista ilmaista yhtälön (3.18) mukaisessa koordinaattimuodossa kiinnittämällä $T = (u, v)$, jolloin

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta + u \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta + v. \end{cases} \tag{3.25}$$

Myös kongruenssin käänteiskuvaus voidaan esittää vastaavasti koordinaattimuodossa

$$\begin{cases} X = (x-u)\cos\theta + (y-v)\sin\theta \\ Y = -(x-u)\sin\theta + (y-x)\cos\theta. \end{cases} \tag{3.26}$$

Tämä esitys saadaan, kun havaitaan, rotaation käänteiskuvauksen matriisin olevan rotaatiomatriisin käänteismatriisi

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavissa esimerkeissä kahta yksinkertaista kongruenssin erikoistapausta [8, s. 139–140].

Esimerkki 3.4.1. Tasokuvausta $\phi(Z) = Z + T$ kutsutaan siirroksi, sillä se siirtää koko tasoa vakiovektorin T suuntaan sen pituuden verran. Se on kongruenssin erikoistapaus, jossa rotaatiomatriisin R paikalla on identiteettimatriisi I.

Esimerkki 3.4.2. Tasokuvausta $\phi(Z) = ZR$ kutsutaan kierroksi, sillä se kiertää tasoa origon suhteen rotaatiomatriisissa R esiintyvän kulman verran. Se on kongruenssin erikoistapaus, jossa vektori $T = 0$.

Seuraava lause todistuksineen [8, s. 141] osoittaa, että kongruenssit muodostavat algebrallisen ryhmän.

Lause 3.4.3. *Kongruenssit muodostavat ryhmän seuraavasti: identiteettikuvaus on kongruenssi, kahden kongruenssin yhdiste on kongruenssi ja kongruenssin käänteiskuvaus on kongruenssi.*

Todistus. Kongruenssi $\phi(Z) = ZR + T$ on identiteettikuvaus, kun kiertomatriisi R on identiteettimatriisi ja siirtovektori T on nollavektori. Yhtälö (3.20) osoittaa, että R on identiteettimatriisi, kun $\theta = 0$. Näin ollen kongruenssien joukossa on neutraalialkio.

Tarkastellaan sitten kahden kongruenssin yhdistettä. Olkoon $\phi_1(Z) = ZR_1 + T_1$ ja $\phi_2(Z) = ZR_2 + T_2$. Tällöin näiden yhdiste on

$$\begin{aligned}(\phi_1 \circ \phi_2)(Z) &= (ZR_2 + T_2)R_1 + T_1 \\ &= ZR_2R_1 + T_2R_1 + T_1 \\ &= ZR + T = \phi(Z),\end{aligned}$$

missä $R = R_2R_1$ ja $T = T_2R_1 + T_1$. Näin ollen kahden kongruenssin yhdiste on todellakin kongruenssi.

Kongruenssin käänteiskuvaus on todettu kongruenssiksi jo aiemmin tässä luvussa. □

Kongruenssien algebrallisten ominaisuuksien ohella on syytä tarkastella myös niiden metrisiä ominaisuuksia. Aloitetaan tarkastelemalla kiertoa ρ origon ympäri. Olkoot $Z = (x, y)$ ja $W = (u, v)$ mitä tahansa vektoreita. Jos määrittelemme $\rho(Z) = ZR$, missä R on rotaatiomatriisi, saamme kaksi vektoria

$$\rho(Z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta), \quad \rho(W) = (u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta).$$

Jos nyt tutkitaan näiden pistetuloa, huomataan, että

$$\begin{aligned}&\rho(Z)\cdot\rho(W) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\cdot(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta)(u\cos\theta - v\sin\theta) + (x\sin\theta + y\cos\theta)(u\sin\theta + v\cos\theta) \\ &= xu\cos^2\theta + xu\sin^2\theta + yv\cos^2\theta + yv\sin^2\theta \\ &= xu(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + yv(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= xu + yv = Z\cdot W.\end{aligned}$$

Kierto siis säilyttää vektoreiden pistetulon muuttumattomana. Tästä seuraa myös suoraan, ettei kierto vaikuta vektorin pituuteen, sillä [8, s. 142]

$$|\rho(Z)|^2 = \rho(Z)\cdot\rho(Z) = Z\cdot Z = |Z|^2,$$

mistä edelleen seuraa, että

$$|\rho(Z)| = |Z|.$$

Nämä kierron ominaisuudet yleistyvät kaikille kongruensseille seuraavasti:

Määritelmä 3.4.4. Kääntyvä tasokuvaus ϕ on *isometria*, jos se säilyttää etäisyyden. Toisin sanoen millä tahansa kahdella tason pisteellä Z, Z' pätee

$$|\phi(Z) - \phi(Z')| = |Z - Z'| \tag{3.27}$$

Seuraava lause todistuksineen osoittaa, että kaikki kongruenssit ovat isometrioita. [8, s. 142]

Lause 3.4.5. *Kaikki kongruenssit ovat isometrioita.*

Todistus. Olkoon $\phi(Z) = \rho(Z) + T$ kongruenssi, missä ρ on kierto ja T jokin vakiovektori. Tällöin yhtälöä (3.27) käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
&|\phi(Z) - \phi(Z')| \\
&= |\rho(Z) + T - (\rho(Z') + T)| \\
&= |\rho(Z) - \rho(Z')| \\
&= |Z - Z'|.
\end{aligned}$$

□

Kongruenssi voidaan määritellä kartioleikkauksille seuraavasti:

Määritelmä 3.4.6. Toisen asteen polynomifunktioiden Q ja R määrittelemät kartioleikkaukset ovat *kongruentteja*, jos on olemassa sellainen yhtälön (3.23) mukainen kongruenssi ϕ ja sellainen vakio $\mu \neq 0$, joille $R = \mu(Q \circ \phi)$ eli

$$R(X, Y) = \mu Q(x, y) = \mu Q(\phi(X, Y)). \tag{3.28}$$

Funktioiden Q ja R voidaan sanoa olevan siirron suhteen kongruentteja, jos ϕ on siirto ja kierron suhteen kongruentteja, jos ϕ on kierto. [8, s. 144]

Lause 3.4.7. *Toisen asteen polynomifunktioiden kongruenssi on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Relaatio on ekvivalenssi, jos se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Tarkastellaan kutakin relaation ominaisuutta kongruenssin kohdalla erikseen. *Refleksiivisyys* Olkoon ϕ_{id} identiteettikuvaus ja Q polynomifunktio. Aiemmin todetun mukaisesti ϕ_{id} on kongruenssi. Tällöin

$$\phi_{id}(X, Y) = (X, Y)$$

ja edelleen

$$Q(X, Y) = 1 \cdot Q(\phi_{id}(X, Y))$$

eli polynomifunktio Q on kongruentti itsensä kanssa. Näin ollen kartioleikkausten kongruenssi on refleksiivinen relaatio.
Symmetrisyys Aiemmin todettiin kongruenssin ϕ käänteiskuvaus ϕ^{-1} kongruenssiksi. Olkoot polynomifunktiot Q ja R kongruentteja eli

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \mu_0 Q(\phi(X,Y)) \\ &= \mu_0 Q(x,y). \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{1}{\mu_0} R(X,Y) \\ &= \frac{1}{\mu_0} R(\phi^{-1}(x,y)) \end{aligned}$$

eli R ja Q ovat kongruentteja. Näin ollen kartioleikkausten kongruenssi on symmetrinen relaatio.
Transitiivisuus Olkoot R ja Q kongruentteja toisen asteen polynomifunktioita eli

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \mu_1 Q(\phi_1(X,Y)) \\ &= \mu_1 Q(x,y). \end{aligned}$$

Olkoot lisäksi R ja S kongruentteja toisen asteen polynomfunktioita ja $(X',Y') \in \mathbb{R}^2$ eli

$$\begin{aligned} S(X',Y') &= \mu_2 R(\phi_2(X',Y')) \\ &= \mu_2 R(X,Y). \end{aligned}$$

Tällöin

$$S(X',Y') = \mu_2 \mu_1 Q(x,y),$$

missä

$$\begin{aligned} (x,y) &= \phi_1(X,Y) \\ &= \phi_1(\phi_2(X',Y')) \\ &= (\phi_1 \circ \phi_2)(X',Y'). \end{aligned}$$

Toisin sanoen

$$\begin{aligned} S(X', Y') &= \mu_2\mu_1 Q(x, y) \\ &= \mu_2\mu_1 Q((\phi_1 \circ \phi_2)(X', Y')). \end{aligned}$$

Koska kahden kongruenssin yhdiste on lauseen 3.4.3 todistuksessa todettu kongruenssiksi ja tulo $\mu_2\mu_1 \neq 0$, ovat myös Q ja S kongruentteja. Näin ollen kongruenssi on transitiivinen relaatio.

Koska nyt toisen asteen polynomifunktioiden kongruenssi on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, se on ekvivalenssirelaatio. □

Esimerkki 3.4.8. Kongruenssit säilyttävät toisen asteen polynomien nollajoukot seuraavasti. Olkoot Q ja R kongruentteja toisen asteen polynomeja. Tällöin on olemassa sellaiset kongruenssi ϕ ja vakio $\mu \neq 0$, joille yhtälö (3.28) on voimassa eli

$$R(X, Y) = \mu Q(\phi(X, Y)).$$

Tällöin piste (x, y) kuuluu polynomin R nollajoukkoon jos ja vain jos piste $\phi(x, y)$ kuuluu polynomin Q nollajoukkoon. Toisin sanoen kongruenssi on polynomin R nollajoukon bijektiivinen kuvaus polynomin Q nollajoukkoon. Näin ollen kongruenssit säilyttävät kartioleikkaukset. [8, s. 145]

Määritellään vielä lopuksi niin sanottu aito kongruenssi sinä määritelmän (3.4.6) erikoistapauksena, jossa $\mu = 1$. [8, s. 145] Seuraavaa aidon kongruenssin määritelmää tarvitsemme luvussa 3.5.

Määritelmä 3.4.9. Toisen asteen polynomifunktioiden Q ja R määrittelemät kartioleikkaukset ovat aidosti kongruentteja, jos on olemassa kongruenssi ϕ, jolle $R = Q \circ \phi$. Toisin sanoen jos $\phi(X, Y) = (x, y)$, niin

$$R(X, Y) = Q(x, y) = Q(\phi(X, Y)). \tag{3.29}$$

Kaikki aidosti kongruentit kartioleikkaukset ovat kongruentteja. Käänteinen tulos, jonka mukaan kaksi kongruenttia kartioleikkausta olisivat aina myös aidosti kongruentteja, ei ole voimassa. [8, s. 147]

3.5 Invarianssilause

Todistetaan seuraavaksi eräs keskeisistä kartioleikkauksia koskevista tuloksista, invarianssilause.

Lause 3.5.1. *Olkoot Q ja Q' aidosti kongruentteja toisen asteen polynomeja, joilla on invariantit τ, δ, Δ ja τ', δ', Δ'. Tällöin $\tau = \tau', \delta = \delta'$ ja $\Delta = \Delta'$. [8, s. 169]*

Yksinkertaisuuden vuoksi käytetään invarianssilauseen todistuksessa matriisimuotoja sekä toisen asteen polynomifunktioista että kongruenssista. Aloitetaan kirjoittamalla toisen asteen polynomifunktio kaavan (3.15) muotoon

$$A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}.$$

Luvussa 3.3 osoitettiin, että kaavan (3.3) mukainen toisen asteen polynomifunktio Q voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q(x, y) = zAz^T,$$

missä $z = (x, y, 1)$ on vaakavektori ja z^T sen pystysuuntainen transpoosi. Myös kongruenssille voidaan määrittää matriisimuoto [8, s. 169–170]

$$z^T = PZ^T, \tag{3.30}$$

missä $Z = (X, Y, 1)$ ja P on kerroinmatriisi

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & u \\ -\sin\theta & \cos\theta & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Matriisin P seuraavan todistuksen kannalta tärkeä ominaisuus on, että sen determinantti on $\det P = 1$. Invarienttien matemaattiset määritelmät on esitetty kaavassa (3.17).

Todistus. Aloitetaan todistus tarkastelemalla diskriminanttia Δ. Olkoon Q toisen asteen polynomifunktio matriisimuodossaan. Tällöin soveltamalla matriisimuotoista kongruenssia (3.30) saadaan polynomifunktio

$$Q'(X, Y) = zAz^T = Z(P^T AP)Z^T, \tag{3.32}$$

jossa siis $A' = P^T AP$ on funktiota Q' vastaava matriisi. Tunnetusti matriisien tulon determinantti on matriisien determinanttien tulo ja toisaalta $\det P = \det P^T = 1$, jolloin

$$\Delta' = \det A' = \det(P^T AP) = \det P^T \det A \det P = \det A = \Delta.$$

Näin ollen aidosti kongruenttien toisen asteen polynomifuntioiden diskriminantit ovat yhtäsuuret.

Tarkastellaan seuraavaksi deltainvarianttia δ. Merkitään niitä matriisien A ja A'

2×2 -alimatriiseja, jotka saadaan jättämällä matriiseista A ja A' pois alin rivi ja oikeanpuolimmaisin sarake, nimillä B ja B'. Merkitään lisäksi kerroinmatriisin P johtomatriisia

$$S = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Tällöin vastaavasti kuin diskriminantin kohdalla saadaan $B' = S^T BS$. Tiedetään myös, että $\det S = \det S^T = 1$, mistä seuraa

$$\delta' = \det B' = \det(S^T BS) = \det S^T \det B \det S = \det B = \delta.$$

Näin ollen myös aidosti kongruenttien toisen asteen polynomifunktioiden deltainvariantit ovat yhtäsuuret.

Lopuksi tarkastellaan vielä jälkiä τ ja τ'. 2×2 -matriisin U jälki $\tau(U)$ on sen diagonaalialkioiden summa. Huomataan, että jos U ja V ovat 2×2 -matriiseja, niille pätee

$$\begin{aligned}
\tau(UV) &= \tau\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \right) \\
&= \tau\left(\begin{bmatrix} u_{11}v_{11} + u_{12}v_{21} & u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22} \\ u_{21}v_{11} + u_{22}v_{21} & u_{21}v_{12} + u_{22}v_{22} \end{bmatrix} \right) \\
&= u_{11}v_{11} + u_{12}v_{21} + u_{21}v_{12} + u_{22}v_{22} \\
&= v_{11}u_{11} + v_{12}u_{21} + v_{21}u_{12} + v_{22}u_{22} \\
&= \tau(VU).
\end{aligned}$$

Tämän huomion pohjalta voidaan jäljelle kirjoittaa

$$\tau' = \tau(B') = \tau(S^T BS) = \tau(SS^T B) = \tau(IB) = \tau(B) = \tau,$$

mikä viimeistelee invarianssilauseen todistuksen. $\square$

4 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen tavoitteet ja tutkimuskysymykset. Lisäksi kuvaillaan ja esitellään tutkimuksen toteutustapaa, tutkimusasetelmaa ja kerättyä aineistoa.

4.1 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia muutoksia lukio-opintonsa aloittavien opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyyskäsityksessä tapahtuu lukion ensimmäisen vuoden aikana, ja onko opiskelijan valitsemalla matematiikan oppimäärällä vaikutusta mahdollisten muutoksien suuntaan tai suuruuteen.

Tutkimuskysymykset muotoutuivat seuraaviksi:

1. Tapahtuuko opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä muutosta lukion ensimmäisen vuoden jälkeen?

2. Onko mahdollisissa muutoksissa havaittavissa eroja lyhyen ja pitkän matematiikan opiskelijoiden välillä?

3. Voidaanko matemaattisen minäpystyvyyden muutosten ja opiskelijan aiemman matematiikan opintomenestyksen välillä havaita yhteyttä?

4.2 Kyselytutkimus

Tutkimusmetodiksi valikoitui kyselytutkimus, sillä se on aiemmassakin minäpystyvyystutkimuksessa paljon käytetty metodi, ja kyselylomakkeen laatimisen tueksi oli tarjolla kohtuullisen paljon aiemmassa tutkimuksessa käytettyjä sekä standardisoituja kyselylomakkeita. Tämän lisäksi vastaajien tunnistamattomuus aineiston analysointivaiheessa oli yksinkertaisinta turvata internet-pohjaista kyselyä käyttämällä.

Tutkimusta varten koostettu kyselylomake pyrittiin pitämään mahdollisimman tiiviinä, jotta kyselyyn vastaavien opiskelijoiden motivaatio ja näin ollen vastausten luotettavuus säilyisi läpi kyselyn korkeana [25]. Lisäksi liian samankaltaisten kysymysten sijoittamista peräkkäin kyselylomakkeella vältettiin, jotta vastaajien vastaustarkkuus ja täten tulosten luotettavuus säilyisi [26]. Tutkimuksessa käytetty lomake koostui esitietokysymyksistä sekä kahdesta tehtäväsarjasta, joista ensimmäisessä opiskelijat arvioivat suhtautumistaan väittämiin ja toisessa sitä, kuinka todennäköisesti he kykenisivät ratkaisemaan annetun matemaattisen tehtävän. Tämän lisäksi kyselylomakkeeseen sisältyi yksi avoin kysymys, jossa opiskelijoita pyydettiin nimeämään heidän haastaviksi kokemiaan matematiikan osa-alueita. Kyselylomakkeella ei kysytty sellaisia tietoja, joista opiskelija olisi aineiston analyysin yhteydessä jälkikäteen mahdollista tunnistaa. Tutkimuksessa käytetty kyselylomake löytyy tutkimuksen liitteenä A.

Edellä kuvattujen keskenään erilaisten väite- ja tehtäväsarjojen käyttäminen minäpystyvyyden mittaamiseen tarkoitetussa kyselyssä on perusteltua minäpystyvyyskokemuksen kontekstisidonnaisen luonteen vuoksi [3], sillä tutkimuksen tavoitteiden kannalta olennaista on saada kokonaiskäsitys opiskelijoiden minäpystyvyydestä. Kysymyssarjoista ensimmäisen väitteiden tarkoituksena oli mitata minäpystyvyyttä yleisemmällä, lukion oppimäärän tai käynnissä olevan matematiikan kurssin tasolla. Vastaavasti kyselyn toisen osan tehtävänannot oli tarkoitettu mittaamaan opiskelijoiden minäpystyvyyttä tarkemmin tehtävien aihepiirin kontekstissa.

Minäpystyvyyden mittaamiseen käytetään yleisimmin tehtävänannoista koostuvaa kyselyä, jossa opiskelijoiden tulee arvioida, kuinka todennäköisesti he suoriutuisivat annetusta tehtävästä [4, 3]. Tämän kaltaista metodia käytettiin tutkimuksen aineistonkeruukyselyn jälkimmäisessä osassa. Tehtävänantojen mallina käytettiin MSES-R -testiä [17], joka ei kuitenkaan sellaisenaan soveltunut käytettäväksi tässä tutkimuksessa. Osa käytetyn aineistonkeruukyselyn väittämistä on kuitenkin käännetty kyseisestä testistä. Loput väittämät on koostettu siten, että ne on mahdollista ratkaista peruskoulun oppimäärän tai lukion oppimäärän ensimmäisen MAY1-moduulin tietojen perusteella. Kaikilla kyselyyn vastanneilla opiskelijoilla oli siis kyselyyn vastatessaan teoriassa samat lähtökohdat arvioida omia taitojaan ja mahdollisuuksiaan tehtävien ratkaisemisessa.

Toinen tapa tutkia opiskelijoiden minäpystyvyyttä on esittää hyvin rajattuja oppiaineen opiskelua tai sen sisältöjä koskevia väittämiä, joihin opiskelijoiden tulee reagoida [4]. Tällaisia ovat esimerkiksi väittämät, joissa opiskelijoita pyydetään arvioimaan, pystyvätkö he saavuttamaan oppiaineessa tai kokeessa tietyn arvosanan [3]. Tätä metodia hyödynnettiin aineistonkeruukyselyn ensimmäisessä osassa, jossa opiskelijoiden tuli reagoida väittämiin, kuten *Uskon saavani matematiikan ylioppilaskirjoituksista vähintään arvosanan M* tai *Osaan tehdä kurssin vaikeatkin tehtävät.* Kyselylomakkeen väittämät käännettiin suurelta osin aiemmissa tutkimuksissa käytetyistä väittämistä siten, että väittämän sävy ja sanamuoto säilytettiin mahdollisimman tarkasti. Tähän pyrittiin, sillä minäpystyvyyttä tutkittaessa kyselyssä saatavat vastaukset saattavat vaihdella kysymyksen sävystä tai muotoilusta riippuen [3]. Joidenkin väittämien kohdalla oli kuitenkin tarkoituksenmukaista sovittaa väite suomalaisen lukiokoulutuksen kontekstiin sopivaksi. Väittämien sanamuodot pyrittiin myös pitämään ymmärrettävinä lukio-opiskelijat kohderyhmänä huomioon ottaen.

Tehtäväsarjoihin opiskelijat vastasivat Likertin viisiportaisella asteikolla, joka on eräs kyselytutkimuksen käytetyimpiä asteikkoja [25]. Likertin asteikossa vaihtoehtojen lukumäärä (5-9) on yleisesti pariton, mikä antaa vastaajalle mahdollisuuden halutessaan olla ottamatta kantaa annettuun väitteeseen. Se, miten eri vastausvaihtoehdot kyselyssä nimetään tai onko niiden nimeäminen yleensäkään tarpeellista, riippuu lomakkeen kysymyksenasettelusta. [25] Tässä tutkimuksessa käytetyssä kyselyssä vastausvaihtoehdot oli nimetty vastausvaihtoehtojen ymmärtämisen helpottamiseksi. Ensimmäisessä tehtäväsarjassa opiskelijoiden tuli valita asteikolla *täysin eri mieltä – täysin samaa mieltä* ja toisessa tehtäväsarjassa asteikolla *erittäin todennäköisesti – erittäin epätodennäköisesti*. Osa ensimmäisen tehtäväsarjan väitteiden vastauksista pisteytettiin käänteisesti.

4.3 Tutkimusasetelma

Tutkimus toteutettiin poikittaistutkimuksena, jossa samaan kyselyyn vastasivat samanaikaisesti kaksi eri ryhmää. Poikittaistutkimuksen valitseminen toteutustavaksi oli perusteltua sekä ajankäytöllisesti että tutkimuskysymysten ja tutkimuksen tavoitteiden näkökulmasta, sillä poikittaistutkimus soveltuu erityisesti korrelaatioiden tutkimiseen.[27] Kyselylomakkeeseen vastasivat erään eteläsuomalaisen lukion ensimmäisen ja toisen vuosikurssin opiskelijat lukuvuoden 2022-2023 ensimmäisen opintojakson aikana. Lukio valittiin mukaan tutkimukseen satunnaisesti useiden kiinnostuneiden joukosta. Perusteena valinnalle olivat muun muassa opiskelijoiden kohtuullisen tasainen jakautuminen matematiikan pitkään ja lyhyeen oppimäärään sekä opettajien innokas suhtautuminen tutkimukseen osallistumiseen.

Kyselyn toteuttamistavaksi valittiin verkkokysely, sillä kaikilla opiskelijoilla oli ennakkotietojen mukaan käytössään joko älylaite tai kannettava tietokone. Verkkokyselyn pohjaksi valittiin Microsoft Forms. Kyselylomake laadittiin siten, että opiskelijoilla oli vastatessaan mahdollisuus tarkastella edellisiin kysymyksiin antamiaan vastauksia, mikä tyypillisesti lisää vastausten johdonmukaisuutta [26]. Verkkopohjaisen kyselyn valitseminen oli perusteltua myös kustannusten näkökulmasta. Käytetty verkkolomake myös mahdollisti monivalintatehtävissä vastausten rajaamisen vain yhteen viidestä vaihtoehdosta, mikä vähentää vastauksien tulkinnanvaraisuutta [26].

Ennen kyselyyn vastaamista jokaisen opiskelijan huoltajalta kysyttiin lupa tutkimukseen osallistumiseen, sillä suurimman osan kyselyyn osallistuvista opiskelijoista voitiin olettaa kyselyyn vastaamishetkellä olevan alaikäisiä. Huoltajille lähetetty lupakirje löytyy tämän tutkimuksen liitteenä B. Tutkimustilannetta ohjaavalle opettajalle lähetettiin etukäteen tiivis vastausohje, joka luettiin kullekin opiskelijaryhmälle ennen vastaamisen aloittamista. Käytetty ohje löytyy tämän tutkimuksen liitteenä C. Opiskelijoilla oli myös kyselyyn vastaamisen yhteydessä mahdollisuus kieltää vastauksiensa käyttö tutkimustarkoitukseen.

4.4 Kyselyn tuottama aineisto

Tutkimukseen osallistui kaikkiaan 119 ensimmäisen ja 99 toisen vuoden lukio-opiskelijaa. Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden jakautuminen matematiikan pitkän tai lyhyen oppimäärän valitseviin oli suhteellisen tasainen. Pitkän matematiikan ilmoitti valitsevansa 58 ja lyhyen matematiikan 55 opiskelijaa. Opiskelijoista vain kolme ilmoitti, ettei vielä ole päättänyt, kumpaa oppimäärää aikoo lukiossa opiskella. Tämä selittynee aineistonkeruun ajoittumisella oppimäärille yhteisen lukio-opintojen ensimmäisen MAY1-moduulin loppuun. Toisen vuosikurssin opiskelijoissa vastaajien jakautuminen oppimäärien välillä oli epätasaisempi, sillä kyselyyn vastasi 16 pitkän ja 59 lyhyen matematiikan opiskelijaa. Tämän lisäksi toisen vuosikurssin opiskelijoista 23 ilmoitti vaihtaneensa oppimäärää pitkästä oppimäärästä lyhyeen.

Kaikista kyselyyn vastanneista 18 ilmoitti yhdeksännen luokan päättöarvosanakseen arvosanan 10. Arvosanan 9 saaneita oli kyselyn mukaan 69 ja arvosanan 8 saaneita 89 opiskelijaa. Arvosanan 7 oli yhdeksännen luokan päätteeksi matematiikassa saavuttanut 47 opiskelijaa ja arvosanan 6 16 opiskelijaa. Arvosanaa 5 ei kyselyn tulosten perusteella ollut yhdeksännen luokan päättöarvioinnissa saanut yksikään kyselyyn osallistunut opiskelija. Tieto yhdeksännen luokan päättöarvosanasta voitiin aineistossa yhdistää vuosikurssiin ja oppimäärään, mikä mahdollistaa opiskelijoiden ryhmittelemisen myös arvosanan perusteella. Vaikka kyselyssä kysyttiin myös viimeisintä vastaajan saamaa matematiikan arvosanaa, oli suurin osa vastaajista jättänyt vastaamatta kysymykseen. Tämän vuoksi aineiston tarkastelu rajoitettiin nimenomaan yhdeksännen luokan päättöarvosanaan.

Ilmoitetusta kyselyyn vastanneiden opiskelijoiden määrästä on poistettu sellaisten opiskelijoiden vastaukset, jotka kielsivät itse kyselyssä vastaustensa käytön tutkimustarkoitukseen. Tämän lisäksi vastanneiden joukossa oli muutamia kolmannen vuoden lukio-opiskelijoita, joiden vastaukset rajattiin tutkimuksessa käytetyn aineiston ulkopuolelle.

4.5 Analyysimenetelmät

Tutkimuskyselyssä kerätyn aineiston normaalijakautuneisuus varmistettiin hyödyntäen Kolmogorov-Smirnovin testiä. Kolmogorov-Smirnovin testiä käytetään yleisesti selvittämään, vastaako otos riittävän tarkasti jotakin tunnettua jakaumaa, kuten normaalijakaumaa [11]. Yleisesti otoksen voidaan olettaa olevan normaalijakautunut, jos $n > 30$. Tämän tutkimuksen tapauksessa osa aineiston otoksista oli kuitenkin tätä pienempiä, jolloin normaalijakautuneisuus oli syytä varmistaa [10].

Kolmogorov-Smirnovin testissä nollahypoteesina on, että otos vastaa keskihajontaa. Vaihtoehtoisena hypoteesina on, että jokin tai jotkin otoksen arvoista poikkeavat normaalijakaumasta. Testissä siis tarkastellaan etäisyyttä

$$D_n(\mathbf{x}) = \sup |F_n(z) - F_0(z)|,$$

mikä ilmaisee otoksen arvojen ja normaalijakauman tunnettujen arvojen välisen etäisyyden. Jotta nollahypoteesissa voidaan pitätytyä, on oltava voimassa

$$D_n(\mathbf{x}) < c_\alpha,$$

missä c_α on niin kutsuttu kriittinen arvo. Kriittinen arvo riippuu valitusta luottamusasteesta. Tässä tutkimuksessa käytetylle $\alpha = 0{,}05$ voidaan kriittinen arvo laskea kaavalla

$$c_\alpha = \frac{1{,}36}{\sqrt{n}},$$

missä n on otoksen alkioiden lukumäärä. [11] Se, kuinka paljon kukin otoksen arvo saa poiketa tunnetusta jakaumafunktiosta ilman, että nollahypoteesi päädytään hylkäämään riippuu siis kääntäen otoksen koosta.

Kyselyn tuottamasta aineistosta laskettujen keskiarvojen erojen tilastollisen merkitsevyyden tutkimiseen käytettiin Welchin t-testiä, jossa vertailtavien aineiston osien variansseja ei oleteta yhtäsuuriksi [12, s. 328]. Kyseinen t-testi on niin sanottu parametrinen testi, jota voidaan käyttää riittävän suurille otoskoille, kun ilmiön tiedetään noudattavan tunnettua jakaumaa riittävän tarkasti [12, s. 320]. Tämän lisäksi muuttujan tulee olla välimatka- tai Likert-asteikollinen, jotta t-testin käyttäminen on järkevää [12, s. 469]. Tämän tutkimuksen tuottaman aineiston tiedetään edellä kuvatun Kolmogorov-Smirnovin testin perusteella noudattavan normaalijakaumaa.

T-testit suoritetaan tyypillisesti 95% luottamusvälillä, vaikka periaatteessa mikään ei estä luottamusvälin vapaata valitsemista [10, 12]. Näin ollen myös tämän tutkimuksen kaikki t-testit on suoritettu 95% luottamusvälillä. Kussakin aineistolle suoritetussa t-testissä nollahypoteesina H_0 on, etteivät testissä toisiinsa verrattavien otosten keskiarvot poikkea toisistaan. Vaihtoehtoisena hypoteesina H_1 keskiarvot eroavat toisistaan. Nollahypoteesi voidaan päätyä hylkäämään, jos testissä lasketut p-arvot sitä tukevat, eli jos $p \leq 0{,}05$ [12].

Testit suoritettiin Microsoft Excel-ohjelmistolla, joka laskee p-arvon eli hylkäämisvirheen todennäköisyyden sekä yhden- että kahdensuuntaiselle poikkeamalle automaattisesti. Tutkimuksessa näistä hyödynnettiin jälkimmäistä kaksisuuntaista p-arvoa. Mikäli $p \leq 0{,}001$, voidaan keskiarvojen eroa pitää tilastollisesti erittäin merkitsevänä. Vastaavasti tulos on tilastollisesti merkitsevä, jos $0{,}001 < p \leq 0{,}01$. Kun $0{,}01 < p \leq 0{,}05$, on tulos tilastollisesti melkein merkitsevä, mutta tulokseen saatetaan silti kirjoitettuna viitata tilastollisesti merkitsevänä. Näiden merkitsevyyksien ohella voidaan tuloksen sanoa olevan tilastollisesti suuntaa antava tai oireellinen, jos $0{,}05 < p \leq 0{,}1$. [10] Testissä laskettu p-arvo antaa siis kolmenlaista tietoa: se kertoo itseisarvoltaan suuremman poikkeaman todennäköisyyden jakaumassa, nollahypoteesin merkitsevyystason sekä nollahypoteesin hylkäämisvirheen riskin [12, s. 354].

5 Aineiston analyysi

Aineiston analysoinnin alkuvaiheessa analysointi toteutettiin vuosiluokittain. Analysoinnin aluksi kerätty aineisto jaettiin ensimmäisen kysymyksen perusteella ensimmäisen ja toisen vuosikurssin opiskelijoiden vastauksiin. Tämän jälkeen kullekin vastanneelle opiskelijalle laskettiin keskiarvo koko kyselyn vastauksista ja edelleen opiskelijoiden kyselyn keskiarvosta laskettiin kyselyn tulosten vuosiluokittainen keskiarvo. Kaikki ensimmäisen vuosikurssin opiskelijat eivät osanneet tai halunneet kertoa, kumman oppimäärän tulevat valitsemaan. Näiden opiskelijoiden vastauksia ei ole huomioitu oppimääräkohtaisissa keskiarvoissa. Sen sijaan koko vuosiluokan tuloksista lasketuissa keskiarvoissa heidän tuloksensa ovat mukana. Toisen vuoden opiskelijoiden osalta tuloksia tarkastellaan kolmessa ryhmässä: pitkän ja lyhyen matematiikan oppimäärän lukijoiden lisäksi tarkastellaan erillisenä ryhmänä myös oppimääräänsä pitkästä matematiikasta lyhyeen vaihtaneita. Oppimääräänsä lyhyeen kesken opintojen vaihtaneita ei siis ole laskettu mukaan toisen vuosikurssin pitkän tai lyhyen matematiikan opiskelijoiden ryhmien keskiarvoihin. Opiskelijoita, jotka ilmoittivat vaihtaneensa lyhyestä matematiikasta pitkään matematiikkaan ei ole laskettu mukaan mihinkään oppimääräkohtaisista keskiarvoista, mutta heidän tuloksensa on mukana koko vuosiluokan keskiarvossa.

Ensimmäisen vuosikurssin koko minäpystyvyyskyselyn keskiarvoksi (n=117) laskettiin $\bar{x}_{1K} = 3{,}315$. Tämän lisäksi määritettiin erikseen oppilaskohtainen keskiarvo kyselyn osille 1 ja 2. Tässä osalla 1 tarkoitetaan kyselyn osaa, jossa opiskelijan tuli ottaa kantaa matematiikan opintojaan koskeviin väittämiin, ja osalla 2 kyselyn osaa, jossa opiskelijan tuli arvioida, kuinka todennäköisesti hän pystyisi vastamaan annettun tehtävänantoon. Osan 1 kaikkien ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoiden keskiarvoksi saatiin $\bar{x}_{1K1} = 3{,}368$. Osan 2 keskiarvoksi puolestaan laskettiin $\bar{x}_{1K2} = 3{,}263$.

Analysoitaessa ensimmäisen vuoden opiskelijoiden tuloksia oppimäärittäin saatiin pitkän oppimäärän valitsevien opiskelijoiden vastausten (n=58) keskiarvoksi $\bar{x}_{1P} = 3{,}714$. Lyhyen matematiikan valitsevien kyselytulosten (n=55) keskiarvoksi puolestaan saatiin $\bar{x}_{1L} = 2{,}891$, joten lyhyen matematiikan opinnot aloittavien opiskelijoiden tulosten keskiarvo jäi pitkän matematiikan aloittavien keskiarvoa alhaisemmaksi. Edelleen pitkän matematiikan opiskelijoiden osiokohtaisten tulosten keskiarvoiksi laskettiin osalle 1 $\bar{x}_{1P1} = 3{,}889$ ja osalle 2 $\bar{x}_{1P2} = 3{,}628$. Lyhyen matematiikan opinnot aloittavien opiskelijoiden tulosten keskiarvoksi osalle 1 laskettiin $\bar{x}_{1L1} = 2{,}869$ ja osan 2 keskiarvoksi saatiin $\bar{x}_{1L2} = 2{,}913$.

Pitkän oppimäärän aloittavien opiskelijoiden kyselyn tulosten keskiarvo on siis tässä vertailussa lyhyen matematiikan opinnot aloittavien opiskelijoiden keskiarvoa korkeampi niin molempien testin osien kuin koko testin tuloksenkin osalta. Keskiarvojen välinen ero on kuitenkin pienempi kyselyn osan 1 väitteiden kuin osan 2 tehtävänantojen kohdalla. Huomionarvoista on myös se, että noin 74% ensimmäisen vuosikurssin kaikkien opiskelijoiden tulosten keskiarvon alle jäävistä opiskelijoista ilmoitti valitsevansa lyhyen matematiikan. Ensimmäisen vuosikurssin vastausten osio- ja oppimääräkohtaiset keskiarvot ja keskihajonnat on esitetty taulukossa 5.1.

Taulukko 5.1 *Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kyselyn tulosten keskiarvot ja keskihajonnat*

		Osa 1	Osa 2	Koko kysely
Kaikki opiskelijat	$\bar{x}$	3,368	3,263	3,315
(n=117)	s	0,902	0,866	0,788
Lyhyt oppimäärä	$\bar{x}$	2,869	2,913	2,891
(n=55)	s	0,760	0,713	0,601
Pitkä oppimäärä	$\bar{x}$	3,889	3,628	3,714
(n=58)	s	0,714	0,836	0,758

Toisen vuoden opiskelijoiden (n=99) vastausten keskiarvoksi koko testille saatiin $\bar{x}_{2K} = 3{,}178$. Verrattaessa tätä ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kyselyn keskiarvoon huomataan siis keskiarvon hieman laskeneen. Kyselyn ensimmäisen osan keskiarvoksi saatiin koko vuosiluokalle $\bar{x}_{2K1} = 2{,}916$. Kyselyn toisen osan keskiarvoksi saatiin $\bar{x}_{2K2} = 3{,}440$. Verrattuna ensimmäisen vuoden opiskelijoiden vastaaviin tuloksiin huomataan osan 1 keskiarvon laskeneen ja osan 2 keskiarvon tätä vastoin nousseen.

Oppimäärittäin tarkasteltaessa saadaan toisen vuosikurssin pitkän matematiikan opiskelijoiden (n=16) tulosten keskiarvoksi $\bar{x}_{2P} = 3{,}595$. Kyselyn ensimmäisen osan keskiarvo oli tällöin $\bar{x}_{2P1} = 3{,}307$. Kyselyn osan 2 keskiarvo pitkän matematiikan opiskelijoille oli $\bar{x}_{2P2} = 3{,}884$. Matematiikan pitkän oppimäärän opiskelijoiden tulokset kyselyssä olivat siis keskiarvoa korkeammat sekä koko testin keskiarvolla mitattuna että osakohtaisesti tarkasteltuna.

Tätä vastoin toisen vuosikurssin lyhyen matematiikan opiskelijoiden (n=59) koko testin keskiarvoksi saatiin vain $\bar{x}_{2L} = 2{,}957$, mikä jää hieman koko vuosiluokan keskiarvon alapuolelle. Myös osakohtaisesti tarkasteltuna lyhyen matematiikan opiskelijat jäävät vuosiluokan keskiarvon alle niin osan 1 keskiarvon $\bar{x}_{2L1} = 2{,}639$ kuin osan 2 keskiarvon $\bar{x}_{2L2} = 3{,}274$ osalta.

Toisen vuosikurssin opiskelijoista huomattava osa (n=23) ilmoitti vaihtaneensa matematiikan oppimäärää lukion aikana pitkästä matematiikasta lyhyeen matematiikkaan. Tämän ryhmän koko kyselyn vastausten keskiarvoksi saatiin $\bar{x}_{2V} = 3{,}493$. Oppimäärää vaihtaneiden opiskelijoiden vastausten keskiarvo on siis vuosiluokan keskiarvon yläpuolella. Tarkasteltaessa tämän ryhmän tuloksia osakohtaisesti huomataan saman pätevän myös molempien kyselyn osien keskiarvoille. Oppimäärää vaihtaneiden opiskelijoiden vastausten keskiarvoksi osalle 1 saatiin $\bar{x}_{2V1} = 3{,}372$. Osalle 2 laskettiin puolestaan keskiarvoksi $\bar{x}_{2V2} = 3{,}615$. Kaikki toisen vuoden opiskelijoiden tulosten keskiarvot ja keskihajonnat on esitetty taulukossa 5.2.

Taulukko 5.2 *Toisen vuoden opiskelijoiden kyselyn tulosten keskiarvot ja keskihajonnat*

		Osa 1	Osa 2	Koko kysely
Kaikki opiskelijat	$\bar{x}$	2,916	3,440	3,178
(n=99)	s	0,740	0,800	0,672
Lyhyt oppimäärä	$\bar{x}$	2,639	3,274	2,957
(n=59)	s	0,647	0,782	0,582
Pitkä oppimäärä	$\bar{x}$	3,307	3,884	3,595
(n=16)	s	0,596	0,685	0,576
Oppimäärää vaihtaneet	$\bar{x}$	3,372	3,615	3,493
(n=23)	s	0,742	0,771	0,706

Analyysin alkuvaiheessa pystyttiin edellä kuvatuilla tavoilla havaitsemaan eroja kyselyn tulosten keskiarvoissa niin vuosiluokkien kuin oppimäärienkin välillä. Näiden erojen tilastollisen merkittävyyden tutkimiseksi tilastollisin menetelmin tuli ensin kuitenkin varmistaa aineiston ja siitä poimittujen otosten normaalijakautuneisuus. Tähän hyödynnettiin Kolmogorov-Smirnovin testiä. Testaus suoritettiin erikseen sekä vuosiluokittain että oppimäärittäin. Aineisto osoittautui testin perusteella normaalijakautuneeksi niin ensimmäisen kuin toisenkin vuosiluokan osalta. Myös oppimääriin jakamisen jälkeen aineisto osoittautui normaalijakautuneeksi niin pitkän ja lyhyen oppimäärän opiskelijoiden kuin oppimääräänsä vaihtaneiden osalta. Testissä lasketut kriittiset arvot ja maksimipoikkeamat on esitetty taulukossa 5.3 ensimmäisen ja taulukossa 5.4 toisen vuosikurssin osalta. Luvussa 4.5 esitellyn mukaisesti aineiston todetaan olevan normaalijakautunut, mikäli maksimipoikkeama D_n on kriittisen alueen alarajaa c_α pienempi.

Taulukko 5.3 *Kolmogorov-Smirnovin testin tulokset 1. vuosikurssille* ($\alpha = .05$)

Ensimmäinen vuosikurssi	n	$\bar{x}$	s	D_n	c_α
Kaikki opiskelijat	118	3,315	0,785	0,037	0,125
Lyhyt oppimäärä	54	2,891	0,601	0,060	0,185
Pitkä oppimäärä	58	3,758	0,685	0,098	0,179

Taulukko 5.4 *Kolmogorov-Smirnovin testin tulokset 2. vuosikurssille* ($\alpha = .05$)

Toinen vuosikurssi	n	$\bar{x}$	s	D_n	c_α
Kaikki opiskelijat	99	3,163	0,658	0,105	0,136
Lyhyt oppimäärä	59	2,957	0,581	0,121	0,176
Pitkä oppimäärä	16	3,595	0,576	0,119	0,318
Oppimäärää vaihtaneet	23	3,493	0,706	0,142	0,275

Aineiston normaalijakautuneisuuden varmistamisen jälkeen aineistosta lasketuissa keskiarvoissa havaittujen erojen tilastollista merkitsevyyttä tutkittiin Welchin t-testin avulla, sillä kyseisen testin käyttäminen oli mahdollista myös ilman oletuksia aineiston osien varianssien yhtäsuuruudesta. Testin tulokset osoittivat, että pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden vastausten keskiarvoissa on tilastollisesti erittäin merkitsevä ero sekä ensimmäisen ($p < 0{,}001$) että toisen vuosikurssin ($p = 0{,}001$) osalta. Tämän lisäksi tilastollisesti merkitsevä ero ($p = 0{,}003$) voitiin toisen vuosikurssin opiskelijoiden tuloksissa havaita oppimäärää vaihtaneiden opiskelijoiden ja lyhyen oppimäärän opiskelijoiden välillä. Ensimmäisen vuosikurssin pitkän matematiikan opiskelijoiden kyselyssä antamien vastausten keskiarvo erosi tilastollisesti erittäin merkitsevästi koko vuosiluokan keskiarvosta positiiviseen suuntaan ($p < 0{,}001$). Vastaavasti myös ensimmäisen vuosikurssin lyhyen matematiikan opiskelijoiden keskiarvon ero koko ryhmän keskiarvosta negatiiviseen suuntaan osoittautui tilastollisesti erittäin merkitseväksi ($p < 0{,}001$). Vastaavan kaltaisia eroja voitiin havaita myös toisen vuosikurssin opiskelijoiden tuloksissa, ja myös ne osoittautuivat tilastollisesti merkitseviksi niin pitkän ($p = 0{,}016$) kuin lyhyenkin matematiikan opiskelijoiden ($p = 0{,}031$) keskiarvojen osalta. Näitä Welchin t-testistä saatuja p-arvoja on esitelty taulukossa 5.5.

Tarkasteltaessa kyselyn tuloksia osakohtaisesti voitiin havaita kyselyn ensimmäisen osan eli matematiikan opintoja koskevien väitteiden vastausten keskiarvon laskeneen niin koko vuosikurssien keskinäisessä vertailussa kuin oppimääräkohtaisestikin. Erityisesti tämä keskiarvon lasku todettiin tilastollisesti erittäin merkitseväksi koko vuosikurssien vertailussa ($p < 0{,}001$) ja tilastollisesti merkitseväksi ensimmäisen ja toisen vuosikurssin pitkän matematiikan opiskelijoiden vertailuissa ($p = 0{,}003$). Sen sijaan lyhyen matematiikan opiskelijoiden kohdalla vastausten keskiarvon lasku ei ollut yhtä selkeä, eikä se osoittautunut tilastollisesti merkitseväksi, vain ainoastaan suuntaa-antavaksi ($p = 0{,}084$) [10]. Matematiikan oppimäärää lukion ensimmäisen vuoden jälkeen vaihtaneiden kyselyn ensimmäisen osan tulosten keskiarvo osoittautui myös tilastollisesti merkitsevästi ensimmäisen vuoden pitkän matematiikan opiskelijoiden keskiarvoa matalammaksi ($p = 0{,}007$). Koko testin vertailujen

Taulukko 5.5 *Welchin t-testistä saatuja p-arvoja koko testin keskiarvoille*

	1.vk kaikki	1.vk pitkä	1.vk lyhyt	2.vk kaikki	2.vk pitkä	2.vk lyhyt
1.vk pitkä	0,000***	-				
1.vk lyhyt	0,000***	0,000***	-			
2.vk kaikki	0,167			-		
2.vk pitkä		0,345		0,016*	-	
2.vk lyhyt			0,556	0,031*	0,001***	-
2.vk vaihtaneet		0,132		0,061	0,623	0,003**

Tilastollisesti melkein merkitsevä tulos (*) Tilastollisesti merkitsevä tulos (**)
Tilastollisesti erittäin merkitsevä tulos (***)

tavoin ensimmäisen vuosikurssin sekä pitkän että lyhyen matematiikan opiskelijoiden kyselyn ensimmäisen osan tulosten keskiarvo poikkesivat niin koko ryhmän keskiarvosta kuin toisistaan tilastollisesti erittäin merkitsevästi ($p < 0{,}001$). Samankaltaisia tuloksia voitiin havaita myös toisen vuosikurssin opiskelijoiden tuloksissa. Toisen vuoden pitkän matematiikan opiskelijoiden ja matematiikan oppimäärän kesken opintojensa lyhyeen vaihtaneiden opiskelijoiden tulosten välillä ei voitu tässäkään tarkastelussa havaita tilastollisesti merkitsevää eroa. Kyselyn ensimmäisen osan vastausten keskiarvoille laskettuja p-arvoja on esitelty taulukossa 5.6.

Taulukko 5.6 *Welchin t-testistä saatuja p-arvoja kyselyn ensimmäisen osan keskiarvoille*

	1.vk kaikki	1.vk pitkä	1.vk lyhyt	2.vk kaikki	2.vk pitkä	2.vk lyhyt
1.vk pitkä	0,000***	-				
1.vk lyhyt	0,000***	0,000***	-			
2.vk kaikki	0,000***			-		
2.vk pitkä		0,003**		0,028*	-	
2.vk lyhyt			0,084	0,010**	0,000***	-
2.vk vaihtaneet		0,007**		0,012*	0,765	0,000***

Tilastollisesti melkein merkitsevä tulos (*) Tilastollisesti merkitsevä tulos (**)
Tilastollisesti erittäin merkitsevä tulos (***)

Kyselyn jälkimmäisen, tehtävänannoista koostuneen, osan tulokset olivat osittain ristiriitaisia kyselyn ensimmäisen osan tulosten kanssa. Koko vuosikurssien keskiarvoja verrattaessa huomataan keskiarvon hieman nouseen lähes kaikkien ryhmien osalta ensimmäiseltä toiselle vuosikurssille siirryttäessä. Niin koko vuosikurssin kuin pitkän matematiikan opiskelijoidenkaan vastausten keskiarvon nousu ei kuitenkaan osoittautunut tilastollisesti merkitseväksi. Toisen osan tuloksissa tilastollisesti erittäin merkitsevä ero havaittiin vain ensimmäisen vuosikurssin pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä ($p < 0{,}001$). Myös toisen vuosikurssin pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden vastauksissa oli tilastollisesti merkitsevä ero ($p = 0{,}005$). Lisäksi lyhyen matematiikan opiskelijoiden vastausten keskiarvo nousi tilastollisesti melkein merkitsevästi siirryttäessä ensimmäiseltä vuosikurssilta toiselle vuosikurssille ($p = 0{,}012$). Kyselyn toisen osan vastauksille suoritetun t-testin tuloksia on esitetty taulukossa 5.7.

Taulukko 5.7 *Welchin t-testistä saatuja p-arvoja kyselyn toisen osan keskiarvoille*

	1.vk kaikki	1.vk pitkä	1.vk lyhyt	2.vk kaikki	2.vk pitkä	2.vk lyhyt
1.vk pitkä	0,008**	-				
1.vk lyhyt	0,006**	0,000***	-			
2.vk kaikki	0,119			-		
2.vk pitkä		0,218		0,028*	-	
2.vk lyhyt			0,012*	0,202	0,005**	-
2.vk vaihtaneet		0,946		0,338	0,260	0,080

Tilastollisesti melkein merkitsevä tulos (*) Tilastollisesti merkitsevä tulos (**)
Tilastollisesti erittäin merkitsevä tulos (***)

Analyysin seuraavassa vaiheessa aineisto jaoteltiin opiskelijoiden peruskoulun yhdeksännen luokan päättöarvioinnissa saavuttaman arvosanan mukaan. Sekä ensimmäisen että toisen vuosikurssin osalta kyselyssä korkeimman keskiarvon $\bar{x}_{1(10)} = 3{,}896$ saivat korkeimman arvosanan 10 päättöarvioinnissa saaneet ja vastaavasti matalimman kyselyn keskiarvon $\bar{x}_{1(6)} = 2{,}340$ saavuttivat matalimman arvosanan 6 opinnoistaan saaneet. Arvosanat 9, 8 ja 7 saavuttaneiden ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoiden ryhmien tulosten keskiarvot sijoittuivat näiden väliin seuraavasti: $\bar{x}_{1(9)} = 3{,}707$; $\bar{x}_{1(8)} = 3{,}266$ ja $\bar{x}_{1(7)} = 2{,}764$. Siirryttäessä ensimmäiseltä vuosikurssilta toiselle vuosikurssille tapahtui keskiarvoissa kuitenkin muutosta siten, että niiden opiskelijoiden, joiden arvosana yhdeksännen luokan päättötodistuksessa oli ollut 10, 9 tai 8 tulosten keskiarvo laski, mutta niiden, joiden peruskoulun matematiikan päättöarvosanaksi oli ilmoitettu 6 tai 7, kyselyn keskiarvo nousi. Ensin mainittujen toisen vuosikurssin opiskelijoiden ryhmien testin keskiarvot olivat $\bar{x}_{2(10)} = 3{,}706$; $\bar{x}_{2(9)} = 3{,}412$ ja $\bar{x}_{2(8)} = 3{,}104$. Jälkimmäisten keskiarvoiksi laskettiin $\bar{x}_{2(7)} = 3{,}124$ ja $\bar{x}_{2(6)} = 3{,}116$. Mainitut keskiarvot ja keskihajonnat sekä tulosten keskiarvossa ensimmäiseltä vuosikurssilta toiselle siirryttäessä tapahtuneen muutoksen suunta on esitetty taulukossa 5.8.

Taulukko 5.8 *Kyselyn tulosten keskiarvot ja keskihajonnat arvosanoittain*

Arvosana		1. vuosikurssi	2. vuosikurssi	$\Delta\bar{x}$
10	$\bar{x}$	3,896	3,706	-0,190
	s	0,638	0,453	
9	$\bar{x}$	3,707	3,412	-0,295
	s	0,675	0,505	
8	$\bar{x}$	3,266	3,104	-0,162
	s	0,643	0,509	
7	$\bar{x}$	2,764	3,124	+0,360
	s	0,620	0,631	
6	$\bar{x}$	2,340	3,116	+0,776
	s	0,384	0,305	

Kunkin arvosanaryhmän kyselyn tuloksista laskettiin keskiarvo esikseen myös kyselyn kahdelle osalle. Kyselyn ensimmäisen osan keskiarvoiksi laskettiin ensimmäisen vuosikurssin osalta arvosanan 10 saavuttaneille opiskelijoille $\bar{x}_{1(10)1} = 3{,}902$, arvosanan 9 saavuttaneille opiskelijoille $\bar{x}_{1(9)1} = 3{,}874$ ja arvosanan 8 saavuttaneille opiskelijoille $\bar{x}_{1(8)1} = 3{,}300$. Ensimmäisen osan tulosten keskiarvot laskivat edelleen heikompiin arvosanoihin siirryttäessä, kun arvosanan 7 päättötodistuksessa saavuttaneille laskettiin keskiarvo $\bar{x}_{1(7)1} = 2{,}734$ ja arvosanan 6 saavuttaneille $\bar{x}_{1(6)1} = 2{,}216$. Vastaavasti testin ensimmäisen osan keskiarvoiksi toisen vuosikurssin arvosanat 10, 9 ja 8 saavuttaneille ryhmille laskettiin $\bar{x}_{2(10)1} = 3{,}927$, $\bar{x}_{2(9)1} = 3{,}244$ ja $\bar{x}_{2(8)1} = 2{,}791$. Arvosanat 7 ja 6 saavuttaneiden toisen vuosikurssin ryhmille laskettiin keskiarvoiksi $\bar{x}_{2(7)1} = 2{,}667$ ja $\bar{x}_{2(6)1} = 2{,}136$. Verrattaessa näitä arvoja ensimmäisen vuosikurssin vastaaviin arvoihin huomataan, että tulosten keskiarvo on laskenut kaikissa muissa paitsi korkeimman arvosanan 10 saavuttaneiden ryhmässä. Huomattavin kyselyn ensimmäisen osan keskiarvon lasku tapahtui niissä ryhmissä, joihin kuuluvien opiskelijoiden matematiikan päättöarvosana oli 9 tai 8. Kyselyn ensimmäisen osan arvosanaryhmille lasketut keskiarvot ja keskihajonnat on esitetty taulukossa 5.9.

Myös arvosanaryhmittäin tarkasteltuna kyselyn toisen osan tulokset olivat osittain ristiriidassa kyselyn ensimmäisen osan tulosten kanssa. Itse asiassa vertailtaes-

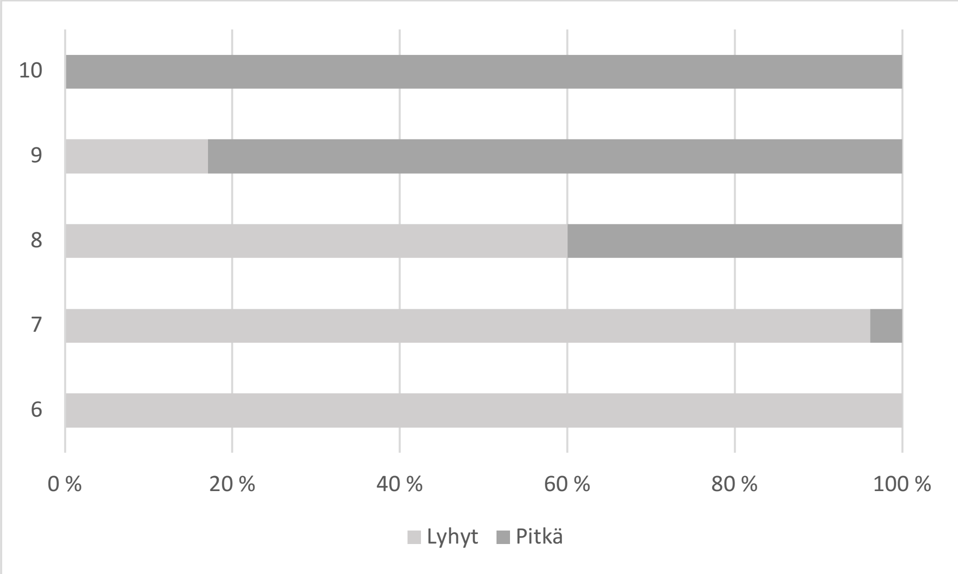
Taulukko 5.9 *Kyselyn osakohtaisten tulosten keskiarvot ja keskihajonnat arvosanoittain*

Arvosana		1. vuosikurssi		2. vuosikurssi	
		Osa 1	Osa 2	Osa 1	Osa 2
10	$\bar{x}$	3,902	3,890	3,927	3,486
	s	0,800	0,915	0,483	0,982
9	$\bar{x}$	3,874	3,541	3,244	3,580
	s	0,659	0,789	0,651	0,883
8	$\bar{x}$	3,300	3,233	2,791	3,416
	s	0,718	0,762	0,566	0,766
7	$\bar{x}$	2,734	2,794	2,667	3,581
	s	0,800	0,748	0,954	0,662
6	$\bar{x}$	2,216	2,464	2,136	4,095
	s	0,618	0,570	0,249	0,532

sa ensimmäisen ja toisen vuoden opiskelijoiden arvosanaryhmäkohtaisia keskiarvoja huomataan, että korkeimman arvosanan 10 peruskoulun päättötodistukseen saavuttaneita opiskelijoita lukuunottamatta kyselyn toisen osan keskiarvo nousee toiselle vuosikurssille siirryttäessä. Tähän havaintoon ja sen syihin palataan tarkemmin luvussa 6. Ensimmäisen ja toisen vuosikurssin kyselyn toisen osan keskiarvoksi laskettiin arvosanan 10 saavuttaneille $\bar{x}_{1(10)2} = 3{,}890$ ja $\bar{x}_{2(10)2} = 3{,}486$. Sekä arvosanan 9 että arvosanan 8 saavuttaneiden ryhmien tulosten keskiarvot nousivat ensimmäisen vuosikurssin keskiarvojen ollessa $\bar{x}_{1(9)2} = 3{,}541$ ja $\bar{x}_{1(8)2} = 3{,}233$. Vastaavien toisen vuosikurssin ryhmien kyselyn toisen osan keskiarvoiksi saatiin $\bar{x}_{2(9)2} = 3{,}580$ ja $\bar{x}_{2(8)2} = 3{,}416$. Heikoimpien arvosanojen 7 ja 6 ryhmien ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoille osan keskiarvoiksi laskettiin $\bar{x}_{1(7)2} = 2{,}794$ ja $\bar{x}_{1(6)2} = 2{,}464$. Toisen vuosikurssin opiskelijoiden vastaavien ryhmien tulosten keskiarvot olivat $\bar{x}_{2(7)2} = 3{,}581$ ja $\bar{x}_{2(6)2} = 4{,}095$. Myös nämä keskiarvot ja niihin liittyvät keskihajonnat on esitetty taulukossa 5.9.

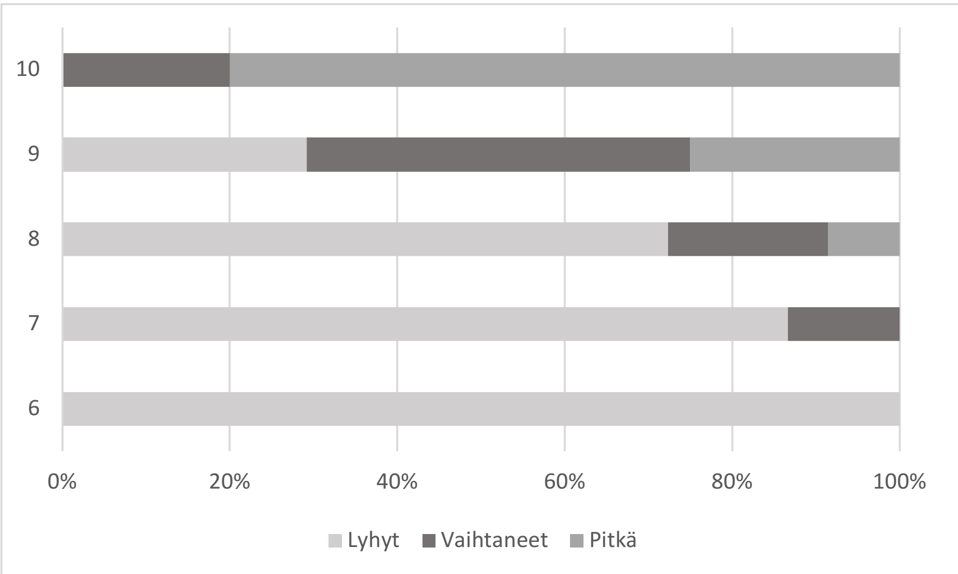
Paitsi kyselyn keskiarvoa, ennusti opiskelijan 9. luokan päättöarvosana melko hyvin myös hänen valitsemaansa matematiikan oppimäärää. Arvosanan 10 peruskoulun päättöarvioinnissa saavuttaneista kaikki päätyivät aloittamaan pitkän matematiikan opinnot. Toisaalta matalimman ilmoitetun arvosanan 6 saaneista kaikki ja arvosanan 7 saaneista yli 90% ilmoitti aloittavansa lyhyen matematiikan opinnot. Kuvassa 5.1 on esitetty kunkin matematiikan peruskoulun päättöarvosanan saaneiden ensimmäisen vuoden lukio-opiskelijoiden jakautuminen pitkän ja lyhyen matematiikan opintoihin.

Toisen vuoden opiskelijoiden arvosanoittainen jakautuminen pitkän ja lyhyen



Kuva 5.1 *Tietyn arvosanan saavuttaneiden 1. vuosikurssin opiskelijoiden jakautuminen pitkään ja lyhyeen matematiikan oppimäärään*

matematiikan opiskelijoihin sekä oppimääräänsä kesken lukio-opintojen vaihtaneisiin on esitetty kuvassa 5.2. Oppimääräänsä vaihtaneisiin opiskelijoihin on laskettu sellaiset opiskelijat, jotka ilmoittivat vaihtaneensa pitkän matematiikan lyhyeen matematiikkaan.



Kuva 5.2 *Tietyn arvosanan saavuttaneiden 2. vuosikurssin opiskelijoiden jakautuminen pitkään ja lyhyeen matematiikan oppimäärään sekä oppimääräänsä vaihtaneisiin*

Pitkää matematiikan oppimäärää vielä lukion toisen vuoden syksyllä opiskelevista suurin osa saavutti peruskoulun päättöarvioinnissa arvosanan 9 tai 10. Ensimmäisen vuosikurssin tavoin myös kaikki toisen vuosikurssin matematiikan arvosanalla

6 lukio-opintoihin siirtyneet olivat valinneet lyhyen matematiikan. Oppimääränsä pitkästä matematiikan oppimäärästä lyhyeen kesken opintojen vaihtaneita löytyi päättöarvosanaryhmien 7-10 opiskelijoista, eli kaikista niistä ryhmistä, joista pitkän matematiikan aloittaneita opiskelijoitakin. Oppimääräänsä vaihtaneisiin kuuluivat kaikki lukion alussa pitkän matematiikan opinnot arvosanalla 7 aloittaneet opiskelijat ja noin kaksi kolmesta arvosanalla 8 pitkän matematiikan aloittaneesta opiskelijasta. Oppimääräänsä kesken opintojen vaihtaneista vain noin 17% ilmoitti matematiikan arvosanansa laskeneen lukio-opintojen aikana.

6 Pohdinta

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, tapahtuuko lukio-opintonsa aloittavien opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä muutoksia ensimmäisen opiskeluvuoden aikana ja eroavatko mahdolliset muutokset lyhyen ja pitkän matematiikan opiskelijoiden kohdalla toisistaan. Lisäksi tarkasteltiin mahdollista yhteyttä lukioaikaisten matemaattisen minäpystyvyyden muutosten ja opiskelijoiden aiemman opintomenestyksen välillä. Aineiston analyysin perusteella lukio-opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä tapahtuu ensimmäisen lukiovuoden aikana muutoksia, joiden suuruus, suunta ja merkitsevyys vaihtelevat hieman mittarista ja tarkastelutavasta riippuen.

Tutkimuksessa kerättyä aineistoa analysoitaessa kävi nopeasti ilmi, että opiskelijan matemaattinen minäpystyvyyskokemus ja sen muutokset ovat yhteydessä sekä peruskoulun matematiikan päättöarvosanaan että opiskelijan valitsemaan matematiikan oppimäärään. Pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattinen minäpystyvyys oli kyselyn tulosten perusteella huomattavasti lyhyen matematiikan valinneita vahvempi. Sama ero oli havaittavissa sekä ensimmäisen että toisen vuosikurssin tuloksista. Erääksi tutkimuksen tuloksissa esiintyviä matemaattisen minäpystyvyyden eroja selittäväksi tekijäksi osoittautui pitkän ja lyhyen matematiikan valinneiden opiskelijoiden erilainen peruskoulun päättöarvosanajakauma. Pitkän matematiikan valinneista suurin osa oli saanut peruskoulun päättöarvosanan 9 tai 10, mikä kertoo aiemmasta menestyksestä matematiikan opinnoissa pitemmällä aikavälillä, sillä peruskoulun päättöarvosana muodostuu pääasiassa peruskoulun vuosiluokkien 7–9 arvosanojen keskiarvona. Aiempi menestys matematiikan opinnoissa puolestaan tukee aiemman minäpystyvyystutkimuksen mukaan vahvan matemaattisen minäpystyvyyskäsityksen muodostumista [20, 16]. Toisaalta lyhyen matematiikan ilmoittivat valitsevansa pääasiassa sellaiset opiskelijat, joiden aiempi menestys matematiikan opinnoissa oli heikompaa, mikä puolestaan selittää lyhyen matematiikan valitsevien alhaisempaa minäpystyvyystestin tulosta myös aiemman tutkimuksen valossa. Näin ollen havainto pitkän ja lyhyen matematiikan valinneiden opiskelijoiden lähtökohtaisesta erosta matemaattisessa minäpystyvyydessä tukee aiempaa minäpystyvyystutkimusta.

Pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välistä eroa matemaattisessa minäpystyvyydessä voi selittää myös yleinen kiinnostus matematiikan opintoja kohtaan. Vaikka lukion aloittavalla opiskelijalla saattaakin olla paine valita pitkä matematiikka lähtötasostaan huolimatta, tehdään valinta pitkän ja lyhyen oppimäärän välillä lähtökohtaisesti opiskelijan omien kiinnostuksen kohteiden perusteella. Aiemman tutkimuksen perusteella matematiikan opiskelua kohtaan koettu mielenkiinto on jonkin verran yhteydessä myös matemaattiseen minäpystyvyyteen [9]. Eron pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä voidaan katsoa tukevan tätä aiempaa tulosta.

Edellä esitettyjen selitysten lisäksi on mahdollista, että pitkän matematiikan arvostus suhteessa lyhyeen matematiikkaan vaikuttaa välillisesti lyhyen matematiikan opiskelijoiden kokemukseen ja tulkintaan omasta matemaattisesta osaamisestaan riippumatta siitä, millainen opiskelijan matemaattinen minäpystyvyyskokemus on. Juuri opiskelijan omalla tulkinnalla hänen onnistumisistaan ja omasta osaamisestaan on huomattava vaikutus minäpystyvyyden muotoutumiseen [2]. Toisaalta pitkän matematiikan korkea arvostus erityisesti korkea-asteen oppilaitosten todistusvalinnassa aiheuttaa myös lukio-opintojaan aloittavalle opiskelijalle paineen valita pitkä matematiikka hänen matemaattisen osaamisensa lähtötasosta tai mielenkiinnonkohteistaan huolimatta, mikä saattaa myöhemmin johtaa oppimäärän vaihtamiseen. Aidon kiinnostuksen matematiikan opiskeluun puute vaikuttaa myös opiskelijan kokemukseen opintojen kuormittavuudesta [14]. Tämä näkyy tutkimuksen tulosten analyysissä erityisesti tarkasteltaessa pitkän ja lyhyen matematiikan valinneiden opiskelijoiden osuuksia arvosanoittain, sillä peruskoulun päättöarvosanalla 7 pitkän matematiikan opinnot aloittaneista toisen vuoden opiskelijoista kaikki ja arvosanalla 8 aloittaneista noin kaksi kolmasosaa ilmoittivat vaihtaneensa pitkän matematiikan oppimäärän lyhyeen toisen vuosikurssin syyslukukauden lopussa toteutettuun kyselyyn vastaamiseen mennessä.

Opiskelemaansa matematiikan oppimäärää vaihtaneiden osuus kyselyyn vastanneista oli kaiken kaikkiaan merkittävä: tutkimusta varten kerätyssä aineistossa toisen vuosikurssin opiskelijoista noin 23% ilmoitti vaihtaneensa opintojensa aikana pitkästä lyhyeen matematiikkaan. Tämän opiskelijaryhmän minäpystyvyys oli kyselyn perusteella kuitenkin varsin lähellä pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattista minäpystyvyyttä eli huomattavasti lyhyen matematiikan opiskelijoiden minäpystyvyyttä korkeampi. Oppimääräänsä vaihtaneilta ei aineiston keräämiseen käytetyssä kyselyssä kysytty, milloin tai miksi he ovat oppimääräänsä vaihtaneet, mikä osaltaan vaikeutti tutkimuksen tulosten tulkintaa. Tämän tutkimuksen tulosten perusteella oppimäärän vaihto ei kuitenkaan selittyisi huomattavalla minäpystyvyyserolla pitkän matematiikan opiskelijoiden ja oppimäärää vaihtaneiden välillä, sillä tilastollisesti merkittävää eroa pitkän matematiikan opintoja jatkaneiden ja pitkästä matematiikasta lyhyeen vaihtaneiden opiskelijoiden välillä ei havaittu. Tuloksena tämä on aiemman tutkimuksen valossa yllättävä, sillä matemaattisen minäpystyvyyden voidaan katsotaan vaikuttavan opiskelumotivaatioon ja opiskelijan lannistumattomuuteen hänen kohdatessaan alati haastavammaksi muuttuvia matemaattisia sisältöjä opinnoissaan. On kuitenkin mahdollista, että nimenomaan oppimäärän vaihto itsessään on ehtinyt vaikuttaa positiivisesti minäpystyvyyteen viiteryhmän ja matematiikan opintojen sisältöjen vaihtuessa. Toisaalta on myös mahdollista, että oppimääräänsä vaihtaneet opiskelijat tulkitsevat oppimäärän vaihtamispäätökseen johtaneet syyt ja tilanteen siten, ettei se ensisijaisesti johdu heistä itsestään tai heidän taitojensa puutteellisuudesta vaan ulkoisista tekijöistä. Myös tässä tapauksessa oppimäärän vaihtamisen vaikutukset matemaattiseen minäpystyvyyteen voisivat aiemman tutkimuksen mukaisesti jäädä vähäisiksi [2].

Matematiikan oppimääräänsä lukio-opintojen aikana vaihtaneiden osalta tulee huomioida myös se, että vaikka pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten erinomaisesta arvosanasta saakin lähes alasta riippumatta huomattavan määrän pisteitä korkeakoulujen todistusvalinnassa, eivät magna cum laude ja sitä alemmat pitkän matematiikan arvosanat enää yleensä anna esimerkiksi lyhyen matematiikan eximia cum laudea korkeampia pisteitä [7]. Tämä toki riippuu hakukohteena olevan alan määrittelemästä painotuksesta. On siis mahdollista, että opintojen matemaattisten sisältöjen vaikeutuessa ja omaksuttavan tiedon määrän kasvaessa osa pitkän matematiikan alun perin valinneista opiskelijoista toteaa mahdollisuutensa pitkän matematiikan laudaturiin tai eximia cum laudeen niin vähäisiksi, ettei panostaminen pitkän matematiikan opintoihin kannata. Tämä voi osaltaan selittää oppimääräänsä vaihtaneiden suurta määrää. Toisaalta esimerkiksi Bong ja Skaalvik [4] toteavat minäpystyvyyden suuntautuvan ennen kaikkea tulevaisuuteen, jolloin pitkän matematiikan opintojen päättämisen omien menestysmahdollisuuksien epäilemisen vuoksi pitäisi näkyä myös minäpystyvyyserona pitkän matematiikan opintojaan jatkaneiden ja oppimäärää vaihtaneiden välillä.

Tutkimuksen tulosten perusteella matemaattisen minäpystyvyyden merkittävää heikentymistä lukio-opintojen aloittamisen jälkeen ennustavat erityisesti korkea peruskoulun matematiikan päättöarvosana ja pitkän matematiikan oppimäärän opiskelun valitseminen. Tutkimuksessa käytetyn kyselyn ensimmäisen osan perusteella poikkeuksen tähän muodostivat sellaiset opiskelijat, joiden peruskoulun päättötodistuksen matematiikan arvosana oli 10. Heidän matemaattinen minäpystyvyytensä säilyi lähes muuttumattomana. Koko testin tulosten perusteella myös heidän matemaattinen minäpystyvyytensä laski. Erinomaisesti aiemmin matematiikassa menestyneiden osalta tulosta voi selittää esimerkiksi Banduran [1] teoria minäpystyvyyden vahvistumisen edellyttämistä riittävistä haasteista, joista opiskelijan on kuitenkin kohtuullisella ponnistelulla mahdollista suoriutua. Tämä tarkoittaisi, että matematiikan päättöarvosanalla 8 tai 9 lukion matematiikan opinnot aloittaneet opiskelijat kokevat opinnoissaan sellaisia haasteita, jotka vaikuttavat kielteisesti matemaattiseen minäpystyvyyteen. Toisaalta niiden opiskelijaryhmien, joiden matemaattinen minäpystyvyyskokemus oli lukio-opintojen alussa heikompi, minäpystyvyys pysyi tarkastelutavasta riippuen tilastollisen analyysin valossa lähes muuttumattomana tai jopa nousi. Näihin opiskelijaryhmiin kuuluivat peruskoulun päättöarvosanan 6 ja 7 saaneet opiskelijat sekä lyhyen matematiikan oppimäärän lukiossa valinneet. Erot opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyyskokemuksessa pitkään ja lyhyeen matematiikkaan suuntautuvien opiskelijoiden välillä siis tulosten perusteella tasoittuvat lähtötilanteeseen verrattuna hieman ensimmäisen lukiovuoden aikana. Tämän voidaan katsoa tukevan aiempaa minäpystyvyyden kehitykseen liittyvää teoriaa, jossa tehtävien ja omaksuttavien asioiden sopivalla vaikeusasteella on huomattava merkitys minäpystyvyyskokemuksen positiivista kehitystä tukevien onnistumisen kokemuksien syntymiseen, sekä Banduran [1] teoriaa minäpystyvyyden kehityksestä, jonka mukaan minäpystyvyyden vahvistumiseen vaadittavien onnistumisten laatu riippuu henkilön aiemmasta minäpystyvyydestä.

Erityisesti matematiikan opiskelua käsittelevien väitteiden osalta minäpystyvyydessä pystyttiin havaitsemaan myös sellaisia tilastollisesti merkittäviä muutoksia, joita ei koko testin keskiarvojen vertailussa havaittu. Väitteistä koostuneen testin ensimmäisen osan tulosten perusteella kaikkien opiskelijaryhmien keskimääräinen matemaattinen minäpystyvyyskokemus heikkeni lukion ensimmäisen vuoden aikana huomattavasti. Aiemman minäpystyvyystutkimuksen valossa havainto ei ole yllättävä, sillä henkilön minäpystyvyyden on todettu laskevan iän myötä ja koulutustason noustessa [9], ja vielä kehittyvän nuoren minäpystyvyyskokemus voi vielä lukioon siirryttäessä olla epärealistisen korkea. Havaittu matemaattisen minäpystyvyyden lasku oli suurempaa pitkän kuin lyhyen matematiikan opiskelijoiden kohdalla, joten myös matematiikan opiskelua koskevien väitteiden perusteella voidaan todeta pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välisten minäpystyvyyserojen hieman kaventuneen. Pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden tulosten välinen ero kuitenkin säilyi huomattavana myös vertailtaessa toisen vuosikurssin tuloksia oppimäärittäin.

Tutkimuksessa käytetty kysely antoi osittain myös varsin ristiriitaisia tuloksia. Tätä selittää todennäköisesti ainakin osittain se, ettei testin ensimmäisen osan keskiarvon laskua vastaavia muutoksia voitu havaita tehtävänannoista koostuneen osan 2 vastausten keskiarvojen kohdalla. Näin ollen varsinaisten minäpystyvyyden muutosten havaitseminen ei tämän aineiston perusteella ole välttämättä mahdollista vain tehtävänantojen perusteella. Toisaalta kyselyn tehtävänannoista koostuva osa oli pyritty laatimaan niin, että opiskelijoiden olisi mahdollista osata ratkaista tehtävät vain peruskoulun matematiikan opintojensa ja lukion ensimmäisen oppimäärien yhteisen moduulin opintojen pohjalta. Tällä pyrittiin minimoimaan tutkimustulosten mahdollinen vääristyminen siksi, että toisen vuoden matematiikan opiskelijoille on jo lukion aikana opetettu sellaisia tehtävien ratkaisemiseen tarvittavia taitoja, joita ensimmäisen vuoden opiskelijoilla ei vielä ole. Ongelmaksi kuitenkin muodostui tehtävien helppous suhteessa vastaajien yleiseen taitotasoon, mikä aiheutti lähes kaikkien kyselyyn vastanneiden ryhmien kohdalla huomattavasti kyselyn ensimmäisen osan keskiarvoa korkeamman vastausten keskiarvon.

Matemaattisen minäpystyvyyden vahvuuden kartoittaminen oppiaineelle tyypillisistä tehtävistä koostuvalla kyselyllä on sinänsä perusteltua, sillä matemaattinen minäpystyvyys liittyy ensisijaisesti varmuuteen oppinaineelle tyypillisten tehtävien ratkaisemisessa [4]. Kyselyn toisen osan kaltainen tehtävänantoihin perustuva minäpystyvyyskartoitus soveltuisi kuitenkin todennäköisesti matematiikan opintojen aloittamisen yleisiä vaikutuksia tutkivan poikittaistutkimuksen sijaan paremmin pitkittäistutkimukseen, jossa saman opiskelijan minäpystyvyyden muutoksia kartoitettaisiin esimerkiksi vain tiettyyn matematiikan aihepiiriin liittyen. Koska opiskelijan matemaattinen minäpystvyys voi vaihdella eri matematiikan osa-alueiden välillä [4], ei matemaattisen minäpystyvyyden mittaaminen yleisellä tasolla ole tehtävänannoista koostuvalla kyselyllä luotettavaa, jollei kysely ole riittävän laaja. Tässä tutkimuksessa käytetyssä kyselyssä tehtävänannot liittyivät ainakin jossakin määrin geometriaan, jonka tutkimukseen osallistuneet opiskelijat mainitsivat usein itselleen haastavaksi matematiikan osa-alueeksi. Näin ollen kyselyn tehtävänannoista koostuvan osan tulokset mittaavat ensisijaisesti opiskelijoiden matemaattisen minäpystyvyyden muutoksia geometrian osa-alueella. Sekä pitkän että lyhyen matematiikan oppimäärän ensimmäiselle opintovuodelle sijoittuva geometrian moduuli saattaa näin ollen selittää kyselyn toisen osan tuloksissa toiselle vuosikurssille siirryttäessä näkyvää nousua.

Tutkimuksessa kerätty aineisto oli kokonaisuudessaan varsin laaja ($n = 226$), mikä lisää tutkimuksen tulosten luotettavuutta, vaikka aineisto kerättiinkin vain yhden oppilaitoksen opiskelijoista. Aineiston laajuudesta huolimatta erityisesti kyselyyn vastanneita toisen vuoden pitkän matematiikan opiskelijoita oli lopulta kuitenkin harmillisen vähän. Pieni otos saattaa jonkin verran vaikuttaa tulosten luotettavuuteen etenkin t-testillä suoritetun analyysin osalta [12, s. 469]. Toisen vuoden pitkän matematiikan opiskelijoiden vastausten vähäisen määrän olisi mahdollisesti voinut välttää laajentamalla aineistoa ottamalla mukaan kyselyyn toisenkin lukion, mutta toisaalta se olisi huomattavasti laajentanut jo ennestään melko laajaa aineistoa ja lisännyt mahdollisia tekijöitä havaittujen matemaattisen minäpyystyvyyden muutosten taustalle esimerkiksi oppilaitosten erilaisten toimintamallien ja erilaisia opetustapoja käyttävien opettajien lukumäärän kasvamisen muodossa. Oppimääränsä vaihtaneiden toisen vuosikurssin opiskelijoiden suurta määrää ei myöskään ollut mahdollista ennustaa aiemman tutkimuksen perusteella. Lukioissa matematiikan oppimääräänsä pitkästä matematiikasta lyhyeen matematiikkaan vaihtaneiden lukumäärää ei yleisesti tilastoida, joten vaihtaneiden suuri osuus tuli tutkimuksen toteutusvaiheessa yllätyksenä. Oppimääräänsä pitkästä matematiikasta lyhyeen matematiikkaan vaihtaneiden opiskelijoiden testitulokset eivät kuitenkaan keskiarvoiltaan tilastollisesti merkitsevästi poikenneet toisen vuosikurssin pitkän matematiikan opiskelijoiden tuloksista. Näin ollen on syytä olettaa, ettei oppimääräänsä vaihtaneiden opiskelijoiden suuri määrä välttämättä vaikuttanut merkittävästi tutkimustuloksiin, vaikka tilastollisesti merkittävän poikkeavuuden puuttuminen pitkän matematiikan opiskelijoiden ja matematiikan oppimääräänsä vaihtaneiden tulosten keskiarvoissa olikin aiemman tutkimuksen valossa yllättävää.

Analysoitaessa aineistoa opiskelijoiden aiempaan matematiikan opintomenestykseen perustuvissa ryhmissä osoittautui tutkimustulosten luotettavuuden näkökulmasta haasteeksi erityisesti matalimman arvosanan 6 peruskoulun päättötodistuksessa saaneiden vähäinen määrä. Toisaalta tätä selittää lukiokoulutuksen akateeminen luonne ja usein lukiossa käytössä oleva sisäänpääsyvaatimus vähintään arvosanan 7 keskiarvosta peruskoulun päättötodistuksessa. Näin ollen aineiston voidaan katsoa edustavan normaalia suomalaista lukiota, eikä arvosanan 6 matematiikasta perusopetuksessa saaneiden vähäinen määrä aineistossa merkittävästi vaikuta tulosten yleistettävyyteen. Tutkimuksen tuloksia tarkasteltaessa on kuitenkin syytä huomioida, että pienessä otoksessa yksittäisen opiskelijan tulosten vaikutus koko arvosanaryhmän keskiarvoon korostuu.

Aineston kerääminen kesti huomattavasti alun perin suunniteltua pidempään, millä saattaa olla vaikutusta tutkimuksen tuloksiin. Ensimmäisen vuosikurssin opiskelijat olivat ehtineet opiskella lukiossa noin puolentoista kuukauden ajan vastatessaan kyselyyn, joten heillä oli vastatessaan jo jonkinlainen käsitys matematiikan lukio-opintojen vaatimustasosta. Matematiikan opintojen ensimmäinen moduuli on kuitenkin oppimäärille yhteinen, joten pitkän ja lyhyen matematiikan opetuksen sisältöjen erot eivät ehtineet vaikuttaa opiskelijoiden vastauksiin. Toisaalta aineiston analysoinnin kannalta oli hyvä, että suurin osa opiskelijoista oli jo ennen kyselyyn vastaamista valinnut matematiikan oppimääräänsä. Tieto kunkin opiskelijan valitsemasta tai opiskelemasta oppimäärästä mahdollisti suoran oppimäärittäisten ryhmien välisen vertailun ensimmäisen ja toisen vuosikurssin opiskelijoiden välillä.

7 Johtopäätökset ja jatkotutkimus

Tässä tutkimuksessa pyrittiin selvittämään matematiikan lukio-opintojen aloittamisen vaikutuksia opiskelijoiden matemaattiseen minäpystyvyyteen. Lisäksi tarkasteltiin matemaattisessa minäpystyvyydessä mahdollisesti havaittavien muutosten eroja pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä ja sitä, voidaanko minäpystyvyyden muutosten ja opiskelijan aiemman matematiikan opintomenestyksen välillä havaita yhteyttä.

Tarkastellaan ensin vastausta ensimmäiseen tutkimuskysymyksistä. Tutkimuksen tulokset osoittavat, että lukio-opintojen aloittamisen jälkeen opiskelijoiden matemaattinen minäpystyvyys yleisesti ottaen heikkenee. Tulos voidaan selkeästi havaita erityisesti silloin, kun minäpystyvyyttä mitataan matematiikan opintoja koskevien väittämien avulla. Tähän voivat vaikuttaa esimerkiksi opintojen vaatimustason kasvaminen muun muassa opiskeltavien sisältöjen suuren määrän ja opintojen peruskoulun oppimäärään verrattuna nopean etenemistahdin kautta.

Toinen tutkimuskysymys keskittyi pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä tapahtuvien muutosten mahdollisiin eroihin. Pääpiirteissään opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä havaitut muutokset olivat samansuuntaisia sekä lyhyen että pitkän matematiikan opiskelijoille. Erityisesti pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä havaittiin merkittävää laskua. Lyhyen matematiikan opiskelijoiden kohdalla lasku ei ollut yhtä merkittävää, ja matemaattisen minäpystyvyyden erojen, jotka vielä lukion alussa olivat huomattavia eri oppimäärien opiskelijoiden välillä, voidaankin katsoa lukion ensimmäisen opiskeluvuoden aikana hieman tasoittuneen.

Eroja opiskelijoiden matemaattisen minäpystyvyyden muutoksissa voitiin kuitenkin selittää myös muilla tekijöillä kuin opiskelijan opiskelemalla matematiikan oppimäärällä. Kolmannen tutkimuskysymyksen kohdalla tarkasteltiin opiskelijoiden matemaattisen minäpystyvyyden muutoksia aiemman opintomenestyksen mukaan ryhmiteltynä. Lukio-opintojen aloittamisen jälkeen minäpystyvyydessä tapahtuvien muutosten ja aiemman matematiikan opintomenestyksen välillä voitiin tutkimuksessa havaita yhteys. Tulosten perusteella minäpystyvyyden lasku on keskimäärin suurinta niillä opiskelijoilla, joiden peruskoulun matematiikan päättöarvosana on 8 tai 9. Sen sijaan yhtä huomattavaa minäpystyvyyden laskua ei voitu havaita päättöarvosanan 6 tai 7 saavuttaneilla opiskelijoilla, vaan heidän matemaattinen minäpystyvyytensä tarkastelutavasta riippuen pysyi lähes muuttumattomana tai hieman vahvistui. Toisin sanoen tutkimuksen tulosten perustella matemaattisen minäpystyvyyden laskua lukio-opintojen aloittamisen jälkeen tapahtuu erityisesti niillä opiskelijoilla, joiden aiempi opintomenestys matematiikassa on peruskoulussa ollut hyvää tai kiitettävää, ja jotka valitsevat pitkän matematiikan opinnot. Poikkeuksen tähän tulosten analysointitavasta riippuen muodostavat kuitenkin opiskelijat, joiden opintomenestys on jo peruskoulun matematiikassa ollut erinomaista. Näin ollen opettajan on opiskelijoiden matemaattisen minäpystyvyyden tukemisessa syytä keskittyä erityisesti niihin pitkän matematiikan opiskelijoihin, jotka kokevat matematiikan opinnoissaan haasteita.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena ei ollut selvittää yksittäisen opiskelijan minäpystyvyydessä tapahtuvia muutoksia tai niiden syitä, vaan selvittää opiskelijoiden matemaattisen minäpystyvyyden lukion aloittamisen jälkeisten muutosten suuntaa ja suuruusluokkaa yleisellä tasolla. Minäpystyvyyden muutoksien ja niihin johtavien syiden tarkempi tutkiminen olisi mahdollista pitkittäistutkimuksena, jossa samojen opiskelijoiden kokemuksia matemaattisesta minäpystyvyydestään kartoitettaisiin esimerkiksi lukuvuosittain, lukukausittain tai moduuleittain koko lukio-opintojen ajan. Tämä mahdollistaisi myös mahdollisesti havaittavien matemaattisen minäpystyvyyden muutosten tarkempien aiheuttajien kartoittamisen. Koska matemaattisella minäpystyvyydellä on aiemmissa minäpystyvyystutkimuksissa todettu olevan yhteyttä muiden matemaattisten aineiden minäpystyvyyskokemuksiin, olisi myös sen muutosten yhteyttä muiden matemaattisten aineiden opiskeluun tai muiden matemaattisten aineiden minäpystyvyyskokemusten muutoksiin perusteltua tutkia. Tällainen laajempi matemaattisten oppiaineiden minäpystyvyystutkimus mahdollistaisi myös kokonaisvaltaisemman akateemisen minäpystyvyyden tukemisen huomioimisen lukio-opetuksessa.

Lähteet

[1] A. Bandura. ”Self-efficacy”. Teoksessa: *Ensyclopedia of human behaviour*. New York: Academic Press, 1994, s. 71–81.

[2] A. Bandura. ”Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change”. *Psychological Review* 84.2 (1977), s. 191–215.

[3] M. Bong ja D. Hocevar. ”Measuring Self-efficacy: Multitrait-Multimethod Comparison of Scaling Procedures”. *Applied Measurement in Education* (2002), s. 143–171.

[4] M. Bong ja E. M. Skaalvik. ”Academic Self-Concept and Self-efficacy: How different are they really?” *Educational Psychology review* 15.1 (maaliskuu 2003).

[5] D. A. Brannan, M. F. Esplen ja J. J. Gray. *Geometry*. second edition. New York: Cambridge University Press, 2012.

[6] A. R. Butz ja E. L. Usher. ”Salient sources of early adolescents’ self-efficacy in two domains”. *Contemporary Educational Psychology* (2015), s. 49–61.

[7] A-M. Ernvall-Hytönen. *Korkeakouluvalinnat ja matematiikan ylioppilaskokeen antamat pisteet*. 2022. URL: `https://dimensiolehti.fi/korkeakouluvalinnat-ja-matematiikan-ylioppilaskokeen-antamat-pisteet/`.

[8] C. G. Gibson. *Elementary Euclidean Geometry: An Introduction*. Cambridge University Press, 2004.

[9] S. Grigg, H. N. Perera, P. McIlveen ja Z. Svetleff. ”Relations among math self-efficacy, interest, intentions and achievement: A social cognitive perspective”. *Contemporary educational psychology* 53 (tammikuu 2018), s. 73–86.

[10] T. Heikkilä. *Tilastollinen tutkimus*. 9. uud. p. Edita, 2014.

[11] E. Lloyd. ”Volume VI: Statistics”. Teoksessa: *Handbook of applicable mathematics*. John Wiley & Sons, 1985, s. 606–608.

[12] J. Metsämuuronen. *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä*. 2. uud. p. Jyväskylä: Gummerus kirjapaino Oy, 2003.

[13] N. A. Mozahem, F. M. Boulad ja C. M. Ghanem. ”Secondary school students and self-efficacy in mathematics: Gender and age differences”. *International journal of school and educational psychology* (2021), s. 142–152.

[14] M. Niemivirta, A.-T. Pulkka, A. M. Rawlings, A. Tapola ja H. Tuominen. ”Kiinnostus ja kuormitus lukion matematiikan opinnoissa”. *Psykologia* 56.6 (2021), s. 600–616.

[15] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Helsinki, 2019.

[16] F. Pajares. ”Self-Efficacy during childhood and Adolescence: Implications for teachers and parents”. Teoksessa: *Self-Efficacy Beliefs of Adolescents*. Information Age Publishing, 2005, s. 339–367.

[17] F. Pajares ja J. Kranzler. ”Self-efficacy, self-concept, and general mental ability in mathematical problem solving”. *Florida Educational Research Council Research Bulletin* 24 (1994), s. 8–32.

[18] J. Pursiainen, S. Kaleva, J. Kunnari ja H. Muukkonen. ”Lukio, valintoihin liittyvä stressi ja matematiikka”. *Psykologia* 56.6 (2021), s. 635–641.

[19] D. H. Schrunk ja M. K. DiBenedetto. ”Self-efficacy theory in education”. Teoksessa: *Handbook of motivation at school*. Toim. K. R. Wenzel ja D. B. Miele. 2. New York, NY: Routledge, 2016, s. 34–54.

[20] E. M. Skaalvik, R. A. Federici ja R. M. Klassen. ”Mathematics achievement and self-efficacy: Relations with motivation for mathematics”. *International Journal of Educational Research* 72 (2015), s. 129–136.

[21] G. Strang. *Calculus*. Texas: OpenStax, Rice University, 2016.

[22] J. Thompson ja T. Martinsson. *Matematiikan käsikirja*. Käänt. V. Kauko. Helsinki: Tammi, 1994.

[23] A. Uitto. ”Interest, attitudes and self-efficacy beliefs explaining upper-secondary school students’ orientation towards biology-related careers”. *International Journal of Science and Mathematics Education* 12.6 (2014), s. 1425–1444.

[24] E. L. Usher ja F. Pajares. ”Sources of self-efficacy in mathematics: A validation study”. *Contemporary Educational Pshycology* 34 (2009), s. 89–101.

[25] R. Valli. ”Aineistonkeruu kyselylomakkeella”. Teoksessa: *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1 - Metodin valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*. Toim. R. Valli. PS-kustannus, 2018.

[26] R. Valli ja P. Perkkilä. ”Sähköinen kyselylomake ja sosiaalinen media aineistonkeruussa”. Teoksessa: *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1 - Metodin valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*. Toim. R. Valli. PS-kustannus, 2018.

[27] J. Vastamäki ja R. Valli. ”Tutkimusasetelman ja mittareiden valinta kyselylomaketutkimuksessa”. Teoksessa: *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1 - Metodin valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*. Toim. R. Valli. PS-kustannus, 2018.

Liitteet

A Kyselylomake

Tampere University

Aineistonkeruukysely pro gradu -tutkielmaan syksyllä 2022

Vastaamalla kyselyyn osallistut tutkimukseen, jonka tarkoituksena on selvittää lukion ensimmäisen vuoden aikana tapahtuvia muutoksia opiskelijoiden matemaattisessa minäpystyvyydessä. Lue tarkasti, mitä kussakin kohdassa kysytään, ja **valitse omaa kokemustasi parhaiten kuvaava vastausvaihtoehto**. Kysely ei aseta vastaajia järjestykseen, sitä ei arvostella, eikä se ole koe. Sinua ei voida tunnistaa antamistasi vastauksista. Tutkimuksen tulokset julkaistaan Tampereen Yliopistossa pro gradu -tutkielmana lukuvuoden 2022-2023 aikana.

Kiitos jo etukäteen osallistumisestasi tutkimukseen!

* Pakollinen

1. Opiskelen lukiossa *

- 1. vuotta
- 2. vuotta
- Muu

2. Opiskelen tai aion opiskella *

- pitkää matematiikkaa
- lyhyttä matematiikkaa
- en ole vielä päättänyt
- lyhyttä matematiikkaa, mutta olen vaihtanut siihen pitkästä matematiikasta
- pitkää matematiikkaa, mutta olen vaihtanut siihen lyhyestä matematiikasta

3. Mikä oli matematiikan arvosanasi **9. luokan päättötodistuksessa**? *

Kirjoita vastaus

4. Mikä oli matematiikan arvosanasi **viimeksi saamassasi todistuksessa**? (Jos viimeksi saamasi todistus on 9. luokan päättötodistus, voit jättää vastaamatta.)

Kirjoita vastaus

5. Valitse vaihtoehto, joka parhaiten kuvaa kokemuksiasi **matematiikan opinnoissasi ja käynnissä olevalla matematiikan kurssilla.** Matematiikan kurssilla tarkoitetaan tässä jaksossa käynnissä olevaa matematiikan opetusta tai vaihtoehtoisesti seuraavassa jaksossa alkavaa matematiikan opetusta. *

	Täysin eri mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Ei samaa eikä eri mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Opiskelutovereihini verrattuna hallitsen kurssin sisällöt erinomaisesti.	○	○	○	○	○
Nähtyäni opettajan ratkaisevan kurssin tehtävän, osaan soveltaa samaa ratkaisutapaa työskennellessäni itsenäisesti.	○	○	○	○	○
Tiedän pystyväni oppimaan kurssin keskeiset asiat.	○	○	○	○	○
Arvelen menestyväni kurssilla luokan keskiarvoa huonommin.	○	○	○	○	○
Opiskelutoverini ovat sanoneet minun olevan hyvä matematiikassa.	○	○	○	○	○
Vaikka opiskelen ahkerasti, en silti osaa ratkaista kurssin tehtäviä.	○	○	○	○	○
Jos menestyn luokan keskiarvoa huonommin matematiikan kokeessa, saa se minut yrittämään entistä kovemmin.	○	○	○	○	○
Pelkään, etteivät taitoni riitä kurssikokeen hyväksyttyyn suorittamiseen.	○	○	○	○	○
Uskon saavani matematiikan ylioppilaskirjoituksista vähintään arvosanan M.	○	○	○	○	○
Osaan tehdä kurssin vaikeatkin tehtävät.	○	○	○	○	○
Matematiikanopettajani mielestä olen taitava matematiikassa.	○	○	○	○	○

6. Arvioi, kuinka varmasti pystyisit ratkaisemaan annetun tehtävän. Tehtävän ratkaisemisella tarkoitetaan tässä sellaiseen ratkaisuun pääsemistä, jonka uskot itse olevan oikein. **Tehtävää ei kuitenkaan tarvitse ratkaista.** *

	Erittäin epätodennäköisesti	Melko epätodennäköisesti	mahdollisesti	Melko varmasti	Varmasti
Täydennä: Kellon viisarit muodostavat tylpän kulman, kun kello on ______.	○	○	○	○	○
Kuinka moninkertainen luku 30 668 000 on suunnilleen lukuun 614 360 verrattuna?	○	○	○	○	○
Erään kartan mittakaavan mukaan 2,5cm kartalla vastaa 4km todellisuudessa. Jos kahden kaupungin etäisyys kartalla on 6cm, kuinka pitkä on kaupunkien välimatka todellisuudessa?	○	○	○	○	○
Mahtuuko 2,9m pitkää lankkua kuljettamaan sellaisessa pakettiauton tavaratilassa, jonka mitat ovat 2m x 1,5m?	○	○	○	○	○
Määritä sellaisen suoran, joka kulkee pisteiden (-4/5, 2) ja (3,3) kautta, yhtälö.	○	○	○	○	○
Maailmanpyörän ympyränmuotoisen kehän ympärysmitta on 40m. Jos kahden korin välinen etäisyys ympyrän kehällä on 5m, mikä on koreihin johtavien säteiden välinen kulma ympyrän keskipisteessä?	○	○	○	○	○
Kaksi ympyrää asetetaan sisäkkäin siten, että niillä on sama keskipiste. Ulomman ympyrän halkaisija on 26cm ja sisemmän ympyrän kehän pisteet sijaitsevat 4cm etäisyydellä ulomman ympyrän kehän pisteistä. Kuinka pitkä on sisemmän ympyrän säde?	○	○	○	○	○

7. Onko jokin tähänastisten matematiikanopintojesi aihe tuntunut sinusta erityisen vaikealta? Voit mainita yhden tai useampia aihealueita (esim. geometria, yhtälöryhmät) tai haastavan moduulin nimen.

Tämän kohdan voit jättää myös tyhjäksi

Kirjoita vastaus

8. Annan tutkimuksen tekijälle luvan käyttää antamiani vastauksia tutkimuksensa aineistossa. Sinua ei voida tunnistaa antamistasi vastauksista. *

- ○ Kyllä
- ○ Ei

Lähetä

B Tutkimuslupakirje

Tervehdys opiskelijan huoltaja!
Nimeni on Maiju Oksanen ja opiskelen matemaattisten aineiden opettajaksi Tampereen yliopistossa. Toteutan syksyn 2022 aikana pro gradu -tutkielmaa liittyen opiskelijoiden matemaattiseen minäpystyvyyteen. Aineisto tutkimukseeni kerätään [redacted] lukiossa syyslukukauden alussa lyhyellä kyselyllä, johon vastaavat lukion 1. ja 2. vuosikurssin opiskelijat. Aineisto kerätään ja sitä käsitellään siten, ettei yksittäistä henkilöä voi tunnistaa vastauksista. Aineisto hävitetään tutkimustulosten julkaisemisen jälkeen 2kk kuluessa.

Lisätietoa tutkimuksestani löytyy osoitteesta https://bit.ly/3dbZ5Ma
Tarvittaessa minuun voi myös olla yhteydessä sähköpostitse osoitteeseen maiju.oksanen@tuni.fi.

Yhteistyöterveisin, Maiju Oksanen

____
opiskelijan nimi

☐ SAA ☐ EI SAA osallistua tutkimukseen huoltajan luvalla.

____
päiväys ja huoltajan allekirjoitus

C Vastausohje

Ohjeet aineistonkeruukyselyn teettäjälle

Kiitos avustasi pro gradu -tutkielmani aineistonkeruun mahdollistamisessa. Seuraavat ohjeet on luotu, jotta jokainen opiskelija pääsisi täyttämään kyselyä samoista lähtökohdista ja samalla ohjeistuksella. Lue ohjeet kerran itse läpi ennen opiskelijoiden ohjaamisen aloittamista, jotta tiedät itse, mitä ohjeisiin sisältyy.

Tampereella 14.9.2022,

Maiju Oksanen

---

1. Varmista, että jokaisella kyselyn täyttämiseen osallistuvalla opiskelijalla on jokin laite, jolla hänellä on pääsy internetiin. Kyselyn voi täyttää joko mobiililaitteella tai tietokoneella.
2. Lue seuraava ohje opiskelijoille:

   Tervetuloa osallistumaan tutkimukseen lukio-opiskelijoiden matemaattisen minäpystyvyyden muutoksista. Tulet seuraavaksi vastaamaan lyhyeen kyselyyn, joka koostuu monivalintatehtävistä ja avoimista kysymyksistä. Vastaaminen kyselyyn kestää noin 10 minuuttia. Kyselyn vastauksia käytetään pro gradu -tutkielman aineistona Tampereen yliopistossa. Tutkielma julkaistaan lukuvuoden 2022-2023 aikana, minkä jälkeen aineisto hävitetään. Kyselyyn vastanneita ei voida jälkikäteen tunnistaa heidän antamiensa vastauksien perusteella.

   Vastaa kyselyyn rauhassa ja rehellisesti omien kokemuksiesi mukaisesti. Lue jokainen tehtävänanto huolellisesti loppuun asti. Punaisella tähdellä merkityt kysymykset ovat kaikille pakollisia. Jokainen vastaa kyselyyn yksin, eikä kysymyksiin ole oikeita tai vääriä vastauksia. Huomaa, että kyselyssä esiintyviä matemaattisia tehtäviä ei tarvitse yrittää ratkaista, vaan riittää arvioida, kuinka todennäköisesti pääsisit mielestäsi oikeaan ratkaisuun. Kyselyyn vastaaminen ei ole koe, sitä ei pisteytetä tai arvostella, eikä sillä ole vaikutusta arvosanoihin. Muista lähettää vastauksesi päästyäsi kyselyn loppuun. Vastauksesi on tallennettu, kun näet ruudullasi kiitosviestin.

   Avaa seuraavaksi internetselaimessa uusi ikkuna ***selaimen yksityisessä (incognito) tilassa****. Näin varmistetaan, että lomakkeelle ei jää tietoa sähköpostiosoitteestasi, vaikka olisitkin kirjautuneena Teamsiin tietokoneellasi.*

3. Kirjoita tai heijasta taululle kyselylomakkeen osoite ja/tai QR-koodi

   https://forms.office.com/r/J9bJRzuEFg