Tampere University

Niina Ahola

Loogisen ajattelun oppimateriaali yläkoulun matematiikan opetukseen

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2022

Tiivistelmä

Niina Ahola: Loogisen ajattelun oppimateriaali yläkoulun matematiikan opetukseen
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Marraskuu 2022

Tämä pro gradu -tutkielma on kehittämistutkimus, jonka tavoitteena on kehittää loogisen ajattelun oppimateriaalia peruskoulun matematiikan opetukseen, yläkoulun seitsemännelle vuosiluokalle. Lisäksi tavoitteena on kerryttää pedagogista tietoa materiaalin kehittämisestä ja käyttämisestä osana matematiikan opetusta.

Looginen ajattelu on suuressa roolissa matematiikan oppiaineessa peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden mukaan. Matematiikan oppikirjoissa loogisen ajattelun kehittämiseen liittyviä tehtäviä on kuitenkin melko vähän. Tämän vuoksi materiaalin kehittämiselle on todellinen tarve.

Kehittämistutkimuksen luonteen mukaisesti tutkimus koostuu materiaalin kehittämisen sykleistä. Tutkimuksen alussa tehtiin teoreettinen ongelma-analyysi. Tämän pohjalta kehitettiin ”*Matka logiikkaan*” -materiaalin ensimmäinen versio. Materiaalia kehitettiin sykleittäin kerätyn aineiston pohjalta. Ensimmäisen syklin aineisto kerättiin asiantuntija-arviolla. Korjailtua materiaalia testattiin toisessa syklissä neljän oppitunnin ajan seitsemännellä luokalla. Toisen syklin aineisto kerättiin materiaalin testaamisen aikana havainnoinnilla sekä sähköisillä kyselyillä testaamiseen osallistuneilta oppilailta.

Aineistoa lähestyttiin sisällönanalyysin keinoin. Tulosten perusteella ”*Matka logiikkaan*” -materiaali soveltuu hyvin yläkoulun matematiikan opetukseen. Oppilaat kokivat oppineensa uutta loogisesta ajattelusta jakson aikana ja olivat motivoituneita. Tehtävät olivat vaikeustasoltaan suurimmaksi osaksi sopivia tai helppoja. Lisäksi oppilaiden mielestä materiaali oli selkeä ja materiaalia kuvailtiin useimmiten positiivisesti. Kehitetty oppimateriaali on vapaasti käytettävissä opetukseen ja löytyy liitteestä B.

Avainsanat: logiikka, looginen ajattelu, kehittämistutkimus, oppimateriaali, yläkoulu

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin Originality Check -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Luokanopettajana ja tulevana matematiikan opettajana, olen aina ollut kiinnostunut matematiikan oppimisesta ja opettamisesta. Erityisesti matemaattisen ajattelun taitojen kehittäminen on ollut pitkään mielenkiinnon kohteenani. Kuinka matemaattinen ajattelu kehittyy? Miten matemaattista ajattelua voidaan kehittää? Mitä tarkoittaa opetussuunnitelman perusteissakin mainittu loogisen ajattelun kehittäminen?

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa kuvaillaan matematiikan oppiaineen tehtäväksi ”*oppilaiden loogisen, täsmällisen ja luovan matemaattisen ajattelun kehittäminen*” (Opetushallitus 2014, 234). Ajattelun kehittäminen konstruktivistisesta oppimisnäkökulmasta on selvästi keskiössä opetussuunnitelman perusteiden matematiikan oppiaineessa. Osataidoiksi mainitaan mm. päättelyn ja perustelun kehittäminen. Logiikan syntaksia ei vielä peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa ole, mutta loogista ajattelua tulisi kehittää jo peruskoulussa.

Ajattelun tiedetään kehittyvän ajattelemalla. Hyviä apuvälineitä matemaattisen ajattelun kehittämiseen ovat esimerkiksi ongelmanratkaisu (Schoenfeld 1985) ja kielentäminen (Joutsenlahti 2003). Lisäksi tiedetään, että Suomen peruskouluissa matematiikan opetus pohjaa vahvasti oppimateriaaleihin (Perkkilä et al. 2018). Tämän vuoksi olisi tärkeää kehittää matematiikan tunneille oppimateriaalia, joka mahdollistaa oppilaan loogisen ajattelun taitojen kehittymisen. Looginen ajattelu ajatellaan tässä tutkimuksessa olevan osa matemaattista ajattelua. Tarkemmin tutkimuksen teoreettista viitekehystä esitellään luvuissa 2 ja 3.

Tutkimuksen tavoitteena on kehittää yläkoulun seitsemännelle luokalle soveltuva loogisen ajattelun oppimateriaali ja samalla kerryttää pedagogista tietoa siitä, miten loogista ajattelua kehittävää materiaalia voidaan tuottaa. Lisäksi tutkimuksen tavoitteena on selvittää, miten luotu oppimateriaali soveltuu osaksi yläkoulun matematiikan opetusta. Tutkimus on tehty kehittämistutkimuksena, sillä sen luonteeseen kuuluu teoreettisen tiedon ja konkreettisen tuotoksen yhdistäminen (Pernaa 2013). Tutkimuskysymykset esitellään luvussa 4 ja tutkimuksen menetelmiin ja toteutukseen tutustutaan tarkemmin luvussa 5.

2 Propositiologiikka

Tässä luvussa syvennytään matemaattiseen logiikkaan, erityisesti propositiologiikkaan. Tämän luvun teorioita tai esimerkkejä ei ole kehittämistutkimuksen tuotoksena syntyvässä oppimateriaalissa, vaan luvun tarkoituksena on syventää tutkimuksen matemaattista teoriapohjaa.

Propositiologiikka (tai lauselogiikka) tutkii propositioiden, eli suljettujen lauseiden totuutta. Propositioita voivat olla esimerkiksi väitteet ”$1 + 1 = 5$” sekä ”Julius Ceasar oli ihminen”. Esimerkeistä ensimmäinen propositio on epätosi ja toinen tosi. Konnektiivien avulla propositioista voidaan muodostaa erilaisia kaavoja. Lisäksi voidaan tutkia näiden kaavojen totuusarvoja erilaisissa tilanteissa.

Tässä luvussa esitellään ensin propositiologiikan syntaksia ja semantiikkaa ja käydään läpi tärkeitä käsitteitä sekä todistuksia. Tämän jälkeen käydään läpi propositiologiikan ilmaisuvoimatäydellisyys ja siihen pohjaten esitetään loogisten ongelmien formalisointia propositiologiikan keinoin.

Luku yhdistelee van Dalenin (2008) ja Priestin (2008) näkemyksiä syntaksista ja semantiikasta soveltuvin osin. Luvun lopussa esitetty loogisten ongelmien formalisointi ja ratkaisujen formaali selittäminen on lähteestä Jaakkola et al. (2022).

2.1 Propositiologiikan syntaksi

Propositiologiikan syntaksi koostuu formaaleista lauseista, jotka koostuvat merkeistä. Esitellään ensin lausemuuttujat ja konnektiivit, jotta voidaan täsmällisesti esittää merkistön määritelmä.

Määritelmä 2.1.1. *Lausemuuttuja*, eli propositiosymboli, on muuttuja jonka arvona voidaan ajatella olevan mielivaltainen suljettu lause, eli propositio. Suljetulla lauseella tarkoitetaan tässä kontekstissa lausetta, jolla on aina sama totuusarvo. Lausemuuttujia merkitään usein kirjaimella p sekä alaindeksillä (esimerkiksi $p_0, p_1, p_2, \ldots$) tai pelkillä kirjaimilla (esimerkiksi p, q, r ja s).

Määritelmä 2.1.2. *Konnektiivi* on formaalin kielen merkki, jolle on annettu täsmällinen semanttinen merkitys. Klassisessa propositiologiikassa konnektiiveja ovat esimerkiksi:

nimitys	merkki	luonnollisen kielen vastine
negaatio	$\neg$	ei
konjunktio	$\wedge$	ja
disjunktio	$\vee$	tai
implikaatio	$\to$	jos ..., niin ...
ekvivalenssi	$\leftrightarrow$	jos ja vain jos
Shefferin viiva	$\mid$	ei molemmat

Määritelmä 2.1.3. *Merkistö* $\mathcal{L}(P, K)$ on merkkijoukko, joka sisältää

- epätyhjän joukon P lausemuuttujia: $P \subseteq \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$, eli *aakkoston*,
- joukon K konnektiiveja: $K \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \mid\}$.

Lausemuuttujia voi olla aakkostossa äärellinen tai ääretön määrä ja konnektiiveista voidaan valita vain osa.

Yhdistelemällä merkistön lausemuuttujia konnektiiveilla, voidaan muodostaa uusia, monimutkaisempia väitelauseita. Määritellään seuraavaksi kaavan käsite ja säännöt kaavojen yksikäsitteiselle muodostamiselle.

Määritelmä 2.1.4. *$\mathcal{L}$-kaava* on merkkijono, joka on muodostettu merkistöön $\mathcal{L}$ kuuluvista merkeistä (lausemuuttujista ja konnektiiveista) sekä sulkeista rekursiivisesti seuraavilla kaavanmuodostussäännöillä.

Kaavanmuodostussäännöt
Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P \subseteq \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ ja $K \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \mid\}$.

1. Jos $p_i \in P$, niin p_i on $\mathcal{L}$-kaava. (Joukkoon P kuuluvat lausemuuttujat ovat $\mathcal{L}$-kaavoja.)
2. Jos A on $\mathcal{L}$-kaava, niin $\neg$A on $\mathcal{L}$-kaava. ($\mathcal{L}$-kaavan negaatio on $\mathcal{L}$-kaava.)
3. Jos A ja B ovat $\mathcal{L}$-kaavoja ja $\triangledown \in K \setminus \{\neg\}$, niin $(\mathrm{A} \triangledown \mathrm{B})$ on $\mathcal{L}$-kaava. (Kaksi $\mathcal{L}$-kaavaa voidaan yhdistää merkistöön kuuluvalla konnektiivilla, ja tämä yhdistetty kaava on $\mathcal{L}$-kaava.)
4. Ei ole muita $\mathcal{L}$-kaavoja, eli $\mathcal{L}$-kaavojen joukko on pienin joukko, joka saadaan yllä olevilla säännöillä.

Huomionarvoista on kaavanmuodostuksen rekursiivinen luonne. Kaavoja muodostetaan kaavanmuodostussäännöillä käyttäen yhtä sääntöä kerrallaan. *Pääkonnektiiviksi* kutsutaan konnektiivia, jota on käytetty viimeisimpänä kaavaa muodostettaessa.

Esimerkki 2.1.5. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$ ja olkoon A, B ja C $\mathcal{L}$-kaavoja. Tarkastellaan, miten kaava $((\neg A \wedge B) \vee C)$ on muodostettu kaavanmuodostussäännöillä.

$((\neg A \wedge B) \vee C)$ on muodostettu säännöllä 3 kaavoista $(\neg A \wedge B)$ ja C.

$(\neg A \wedge B)$ on muodostettu säännöllä 3 kaavoista $\neg A$ ja B.

$\neg A$ on muodostettu säännöllä 2 kaavasta A.

Kaava $((\neg A \wedge B) \vee C)$ on muodostettu $\mathcal{L}$-kaavoista rekursiivisesti kaavanmuodostussäännöillä, joten kaava $((\neg A \wedge B) \vee C)$ on $\mathcal{L}$-kaava.

2.2 Propositiologiikan semantiikka

Tarkastellaan seuraavaksi propositiologiikan semantiikkaa, eli merkityksiä. Propositiologikan väitelauseet voidaan esittää myös luonnollisella kielellä. Väitteet, jotka ovat joko totta tai ei-totta, voidaan laittaa lausemuuttujien tilalle propositiologiikan kaavoihin.

Esimerkki 2.2.1. Olkoon kaava $((\neg p \wedge q) \rightarrow r)$. Jos luonnollisella kielellä $p =$ ”sataa”, $q =$ ”aurinko paistaa” ja $r =$ ”menen huvipuistoon”, kaavan merkitys on ”Jos ei sada ja aurinko paistaa, niin menen huvipuistoon”.

Esimerkistä selvästi nähdään, että kaavojen tulkitseminen on mahdollista luonnollisella kielellä. Jotta totuutta voidaan tulkita formaalisti, tarvitaan eksakteja määritelmiä. Tarkastellaan seuraavaksi *totuusjakaumia* sekä *totuusfunktioita*. Lausemuuttujien totuusjakaumalla tarkoitetaan kuvausta lausemuuttujien joukolta joukolle $\{0, 1\}$, jossa 1 tarkoittaa tosi ja 0 epätosi.

Määritelmä 2.2.2. Olkoon $P \subseteq \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ aakkosto. *Totuusjakauma* (valuaatio) on kuvaus $v : P \rightarrow \{1, 0\}$, joka kuvaa jokaisen lausemuuttujan $p_i \in P$ joukolle $\{0, 1\}$, jossa 1 tarkoittaa tosi ja 0 epätosi.

Konnektiivien totuusjakaumat voidaan esittää *totuustauluilla*. Totuustaulu muodostetaan listaamalla totuusjakaumat ja näistä muodostetaan yksikäsitteisesti yhdistetyn kaavan totuusarvo. Totuustaulussa esitetään siis kaikki mahdolliset lausemuuttujien totuusarvojen kombinaatiot. Seuraavaksi esitetään muutamien konnektiivien totuusjakaumat totuustauluina:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Kaavan totuusarvo määräytyy siis yksikäsitteisesti konnektiiveista ja kaavassa esiintyvien lausemuuttujien totuusarvoista. Selvästi erilaisten totuusjakaumien lukumäärä myös riippuu aakkostoon kuuluvien lausemuuttujien lukumäärästä. Esitetään tämä vielä formaalisti.

Lause 2.2.3. *Äärellisellä aakkostolla* $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ *on* 2^{n+1} *erilaista totuusjakaumaa* v_i*.*

Todistus. Jokainen aakkoston lausemuuttuja p_i, $0 \leq i \leq n$, saa totuusjakaumassa arvon 1 tai 0. Vaihtoehtoja yksittäiselle lausemuuttujalle on 2, joten jakaumia on yhteensä 2^{n+1}. □

Olkoon P kiinnitetty äärellinen aakkosto $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ ja v_0 jokin sen totuusjakauma. Otetaan käyttöön merkintä $v_0(p_0, p_1, \dots, p_n) = (1, 0, \dots, 1)$, jossa sulkeissa on $n + 1$ kappaletta joukon $\{0, 1\}$ alkioita pilkuilla erotettuna. Merkinnässä luetellaan lausemuuttujien saamat totuusarvot valuaatiossa v_0 järjestyksessä.

Esimerkki 2.2.4. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P = \{p_0, p_1, p_2\}$. Olkoon v kuvaus, jossa $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 0$ ja $v(p_2) = 1$. Tällöin v on totuusjakauma, joka kuvaa muuttujat p_0 ja p_2 todeksi ja muuttujan p_1 epätodeksi. Kyseinen valuaatio voidaan merkitä lyhennettynä merkinnällä $v(p_0, p_1, p_2) = (1, 0, 1)$.

Esimerkki 2.2.5. Olkoon $P = \{p_0, p_1, p_2\}$ ja sen valuaatio v_0 siten että $v_0(p_0) = 0$, $v_0(p_1) = 1$ ja $v_0(p_2) = 1$. Valuaatio voidaan merkitä lyhennettynä merkinnällä $v_0(p_0, p_1, p_2) = (0, 1, 1)$.

Totuusjakauma on määritelty vain lausemuuttujille. Kuvausta voidaan kuitenkin laajentaa koskemaan myös kaavoja, sillä kaavat muodostetaan rekursiivisesti konnektiiveilla. Konnektiivien totuusarvo määräytyy yksikäsitteisesti lausemuuttujien totuusarvoista seuraavalla tavalla.

Määritelmä 2.2.6. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P \subseteq \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ ja $K \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \mid\}$. Olkoon $v : p_i \rightarrow \{1, 0\}$ totuusfunktio ja φ ja ψ $\mathcal{L}$-kaavoja. *Kaavan totuusarvo* saadaan seuraavasti:

$$v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$$

$$v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$$

$$v(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \iff v(\varphi) = 0 \text{ tai } v(\psi) = 1$$

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \iff v(\varphi) = v(\psi)$$

$$v(\varphi \mid \psi) = 1 \iff v(\varphi) \neq v(\psi) \text{ tai } v(\varphi) = v(\psi) = 0$$

Jos $v(\varphi) = 1$, niin $v(\neg\varphi) = 0$ ja jos $v(\varphi) = 0$, niin $v(\neg\varphi) = 1$

Kaavojen rekursiivisen luonteen vuoksi jokaiselle kaavalle saadaan laskettua totuusarvo lausemuuttujien kautta.

Esimerkki 2.2.7. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P = \{p_0, p_1, p_2\}$ ja $K = \{\wedge, \vee\}$. Tällöin kaava $\varphi = ((p_0 \wedge p_2) \vee p_1)$ on $\mathcal{L}$-kaava. Olkoon v totuusjakauma $v(p_0, p_1, p_2) = (1, 0, 1)$. Tarkastellaan nyt kaavan φ totuusarvoa.

$$v(\varphi) = v(((p_0 \wedge p_2) \vee p_1))$$

$$= \max(v((p_0 \wedge p_2)), v(p_1))$$

$$= \max((\min(v(p_0), v(p_2))), v(p_1))$$

$$= \max((\min(1, 1)), 0)$$

$$= \max(1, 0) = 1$$

Kun konjunktioilla liitetään useampi lausemuuttuja yhteen, voidaan sulkeita jättää merkitsemättä, sillä

$$v(((\varphi_0 \wedge \varphi_1) \wedge v(\varphi_2)))$$

$$= \min(\min(v(\varphi_0), v(\varphi_1)), v(\varphi_2))$$

$$= \min(v(\varphi_0), v(\varphi_1), v(\varphi_2))$$

$$= \min(v(\varphi_0), (\min(v(\varphi_1), v(\varphi_2))))$$

$$= v((\varphi_0 \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2)))$$

Konjunktio on siis liitännäinen, ja $((\varphi_0 \wedge \varphi_1) \wedge \varphi_2)$ voidaan merkitä lyhyemmin $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

2.3 Ominaisuus propositiologiikassa

Äärellisen aakkoston yksittäinen totuusjakauma voidaan ajatella yksikäsitteisenä tilannekuvauksena, jossa annetut väitteet (lausemuuttujat) saavat arvon tosi tai epätosi. Jokainen totuusjakauma määrittelee siis hieman erilaisen tilannekuvauksen. Jotta voidaan tarkastella näiden tilannekuvausten eroja ja samankaltaisuuksia, määritellään ominaisuuden käsite lauselogiikassa.

Määritelmä 2.3.1. Olkoon P äärellinen aakkosto ja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sen totuusjakaumat. *Ominaisuus* on joukko $U \subseteq V$. Jos $v_i \in U$, niin totuusjakaumalla v_i on ominaisuus U. Täsmällisesti voidaan myös puhua *ominaisuudesta U suhteessa aakkostoon P*, tai hieman epämuodollisemmin, aakkoston P ominaisuudesta U.

Esimerkki 2.3.2. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P = \{p, q, r\}$ ja

$$K = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\},$$

jossa $p =$ ”*on pieni*”, $q =$ ”*on punainen*” ja $r =$ ”*on kolmio*”. Määritellään ominaisuus U_1 joukkona $\{v_0, v_1\}$ jossa $v_0(p, q, r) = (0, 1, 1)$ ja $v_1(p, q, r) = (1, 1, 1)$ ja ominaisuus U_2 joukkona $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jossa $v_1(p, q, r) = (1, 1, 1), v_2(p, q, r) = (1, 0, 1), v_3(p, q, r) = (1, 1, 0), v_4(p, q, r) = (1, 0, 0)$. Tällöin ominaisuuden U_1 luonnollisen kielen vastine voisi olla ”*on punainen kolmio*” ja ominaisuuden U_2 luonnollisen kielen vastine voisi olla ”*on pieni*”. Tällöin esimerkiksi totuusjakaumalla $v_1(p, q, r) = (1, 1, 1)$ on ominasuudet U_1 ja U_2, mutta totuusjakaumalla $v_5(p, q, r) = (0, 1, 0)$ ei ole ominaisuutta U_1 eikä U_2.

Määritelmä 2.3.3. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä P on äärellinen, $K = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\,\}$, $v_1, v_2, \dots, v_n$ sen totuusjakaumat ja $U = \{v_i, v_j, \dots, v_k\}$, $0 \leq i, j, k \leq n$ jokin aakkoston ominaisuus. *Määrittelevä kaava ominaisuudelle U* on kaava φ siten, että totuusjakauma v_m, $1 \leq m \leq n$, toteuttaa kaavan φ jos ja vain jos $v_m \in U$. Toisin sanoen,

$$v_m(\varphi) = 1 \iff v_m \in U.$$

Esimerkki 2.3.4. Olkoon $P = \{p, q\}$ ja $U_1 = \{v_1, v_4\}$, missä v_1 ja v_4 ovat kuten alla olevassa taulukossa. Ominaisuuden U_1 määritteleväksi kaavaksi voidaan valita $\varphi = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, sillä kaava φ on totta totuusjakaumalla v_i jos ja vain jos $v_i \in U_1$, kuten taulukosta nähdään:

	p	q	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	φ
v_1	1	1	1	0	1
v_2	1	0	0	0	0
v_3	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	1	1

Esimerkki 2.3.5. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P = \{p, q, r\}$, $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$ ja $U_1 = \{v_1, v_5\}$ aakkoston ominaisuus, jossa $v_1(p, q, r) = (1, 1, 1)$ ja $v_5(p, q, r) = (0, 1, 1)$. Tällöin ominaisuuden U_1 määrittelevä kaava φ voi olla esimerkiksi muotoa

$$\varphi = ((\neg p \wedge q) \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge r),$$

sillä totuustaulun mukaan kaava φ on totta ainoastaan totuusjakaumilla v_1 ja v_5.

	p	q	r	$\neg p$	$(\neg p \wedge q)$	$((\neg p \wedge q) \wedge r)$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \wedge r)$	φ
v_1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
v_2	1	1	0	0	0	0	1	0	0
v_3	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	1	1	1	1	1	0	0	1
v_6	0	1	0	1	1	0	0	0	0
v_7	0	0	1	1	0	0	0	0	0
v_8	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Määritelmä 2.3.6. Olkoon P äärellinen aakkosto ja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sen totuusjakaumat. *Karakteristinen kaava* totuusjakaumalle v_i, $1 \leq i \leq n$, on kaava φ, joka on määrittelevä kaava yhden totuusjakauman sisältävälle joukolle $\{v_i\}$. Kaava φ on karakteristinen kaava totuusjakaumalle v_i jos ja vain jos $v_i(\varphi) = 1$ ja $v_j(\varphi) = 0$, kaikilla j, kun $1 \leq i, j \leq n$ ja $i \neq j$.

Lause 2.3.7. *Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ ja $K = \{\neg, \wedge\}$. Jokaisella äärellisen aakkoston P totuusjakaumalla v_i, jossa $1 \leq i \leq 2^n$, on karakteristinen kaava, joka on muotoa $\varphi_i = q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n$, s.e. jos $v_i(p_j) = 1$ niin $q_j = p_j$ ja jos $v_i(p_j) = 0$ niin $q_j = \neg p_j$ kaikilla $p_j, 1 \leq j \leq n$.*

Esimerkki 2.3.8. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, missä $P = \{p, q\}$, $K = \{\neg, \wedge\}$ ja $v_1(p, q) = (1, 1)$, $v_2(p, q) = (1, 0)$, $v_3(p, q) = (0, 1)$ ja $v_4(p, q) = (0, 0)$ sen totuusjakaumat. Tällöin kaava $\varphi_1 = (p \wedge q)$ on karakteristinen kaava totuusjakaumalle v_1, kaava $\varphi_2 = (p \wedge \neg q)$ on karakteristinen kaava totuusjakaumalle v_2, kaava $\varphi_3 = (\neg p \wedge q)$ on karakteristinen kaava totuusjakaumalle v_3 ja kaava $\varphi_4 = (\neg p \wedge \neg q)$ on karakteristinen kaava totuusjakaumalle v_4. Taulukkomuodossa seuraavasti:

	p	q	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
v_1	1	1	1	0	0	0
v_2	1	0	0	1	0	0
v_3	0	1	0	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0	1

Selvästi jokainen äärellisen aakkoston ominaisuus voidaan ilmaista määrittelevän kaavan avulla, jos käytössä on riittävästi konnektiiveja. Tarkastellaan seuraavaksi, onko jokaiselle ominaisuudelle löydettävissä määrittelevä kaava, jos konnektiivijoukkoa rajataan.

Määritelmä 2.3.9. Konnektiivijoukon K *ilmaisuvoimatäydellisyydellä* tarkoitetaan, että konnektiivijoukon K avulla voidaan ilmaista minkä tahansa äärellisen aakkoston kaikki ominaisuudet.

Lause 2.3.10. *Joukko* $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$ *on ilmaisuvoimaltaan täydellinen, eli jokaisen äärellisen aakkoston jokaiselle ominaisuudelle* U_i *on olemassa määrittelevä kaava* φ_i.

Todistus. Kiinnitetään mielivaltainen äärellinen aakkosto P. Selvästi voidaan olettaa, että $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Kiinnitetään aakkoston totuusjakaumat

$$v_1, \ldots, v_{2^n}.$$

Käsitellään aluksi erikseen tapaus jossa ominaisuuden koko on 0, eli $U_0 = \emptyset$. Tällöin määrittelevä kaava voi selvästi olla esimerkiksi $p_0 \wedge \neg p_0$, sillä selvästi jokaisella aakkoston totuusjakaumalla v_i pätee $v_i(p_0 \wedge \neg p_0) = 0$.

Merkitään totuusjakauman v_i karakteristista kaavaa ψ_i. Osoitetaan induktiolla ominaisuuden alkioiden lukumäärän suhteen, että jokaiselle aakkoston P epätyhjälle ominaisuudelle U_i on olemassa määrittelevä kaava φ_i.

Perusaskel $n = 1$:

Olkoon ominaisuus $U_1 = \{v_i\}$. Tällöin ominaisuuden U_1 määritteleväksi kaavaksi φ_i voidaan valita totuusjakauman v_i karakteristinen kaava ψ_i.

Induktio-oletus:

Oletetaan, että ominaisuudelle $U_m = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}\}$, jossa $1 \leq m \leq n-1$ ja $\{j_1, \ldots j_m\} \subseteq \{1, \ldots, 2^m\}$, on olemassa sen määrittelevä kaava φ_m.

Induktioaskel:

Osoitetaan, että ominaisuudelle $U_{m+1} = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}, v_{j_{m+1}}\}$ on olemassa sen määrittelevä kaava φ_{m+1}. Ensinnäkin, $U_{m+1} = U_m \cup \{v_{j_{m+1}}\}$. Lisäksi φ_m on joukon U_m määrittelevä kaava ja $\psi_{j_{m+1}}$ on joukon $\{v_{j_{m+1}}\}$ määrittelevä kaava, joten $\varphi_{m+1} = \varphi_m \vee \psi_{j_{m+1}}$. Siispä väite pätee. □

Lauseessa 2.3.10 ilmaisuvoimaltaan täydellinen konnektiivijoukko sisälsi negaation ($\neg$), konjunktion ($\wedge$) sekä disjunktion ($\vee$). Voidaan osoittaa, että ilmaisuvoiman täydellisyys säilyy, vaikka konnektiivijoukko sisältäisi ainoastaan negaation ja konjunktion. Osoitetaan seuraavaksi, miten disjunktio voidaan ilmaista negaation ja konjunktion kautta.

Määritelmä 2.3.11. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, jossa P ja K ovat kiinnitettyjä ja äärellisiä. $\mathcal{L}$-kaavat φ ja ψ ovat *loogisesti ekvivalentteja*, jos niiden totuusarvot ovat samat jokaisella aakkoston P totuusjakaumalla v_i. Jos kaavat φ ja ψ ovat loogisesti ekvivalentit, merkitään $\varphi \equiv \psi$

Esimerkki 2.3.12. Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, jossa $P = \{p, q, r\}$ ja $K = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Olkoon φ ja ψ $\mathcal{L}$-kaavoja s.e. $\varphi = (p \wedge q) \vee r$ ja $\psi = (r \vee p) \wedge (r \vee q)$. Osoitetaan totuustaulujen avulla, että kaavat φ ja ψ ovat loogisesti ekvivalentit.

	p	q	r	$(p \wedge q)$	φ
v_1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	1	1
v_3	1	0	1	0	1
v_4	1	0	0	0	0
v_5	0	1	1	0	1
v_6	0	1	0	0	0
v_7	0	0	1	0	1
v_8	0	0	0	0	0

	p	q	r	$(r \vee p)$	$(r \vee q)$	ψ
v_1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	1	1	1
v_3	1	0	1	1	1	1
v_4	1	0	0	1	0	0
v_5	0	1	1	1	1	1
v_6	0	1	0	0	1	0
v_7	0	0	1	1	1	1
v_8	0	0	0	0	0	0

Jos konnektiivijoukko $\{\neg, \wedge, \vee\}$ on ilmaisuvoimaltaan täydellinen ja disjunktio voidaan ilmaista negaation ja konjunktion avulla, herää kysymys joukon $\{\neg, \wedge\}$ ilmaisuvoimaisuudesta. Osoitetaan seuraavaksi, että konnektiivijoukko $K = \{\neg, \wedge\}$ on ilmaisuvoimaltaan täydellinen.

Lemma 2.3.13. *Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, jossa P on äärellinen, ja $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$. Jokaisella $\mathcal{L}$-kaavalla φ on olemassa loogisesti ekvivalentti kaava ψ samalla aakkostolla P siten että kaava ψ ei sisällä disjunktiota $(\vee)$, eli $K = \{\neg, \wedge\}$. Joukko $K = \{\neg, \wedge\}$ on siis ilmaisuvoimaltaan täydellinen.*

Todistus. Kiinnitetään mielivaltainen äärellinen aakkosto $P = \{p_0, \ldots, p_m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään aakkoston totuusjakaumat

$$v_1, \ldots, v_{2^{m+1}}.$$

Olkoon $\varphi = (\alpha \vee \beta)$ ja $\psi = \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. Olkoon v_i mielivaltainen totuusjakauma aakkostolle P, siten että $1 \leq i \leq 2^{m+1}$. Tarkastellaan kaavojen φ ja ψ totuusarvoja totuusjakaumalla v_i.

Jos $v_i(\alpha) = v_i(\beta) = 1$, niin

$$v_i(\varphi) = v_i(\alpha \vee \beta) = 1 = v_i(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = v_i(\psi).$$

Jos $v_i(\alpha) = 1$ ja $v_i(\beta) = 0$, niin

$$v_i(\varphi) = v_i(\alpha \vee \beta) = 1 = v_i(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = v_i(\psi).$$

Jos $v_i(\alpha) = 0$ ja $v_i(\beta) = 1$, niin

$$v_i(\varphi) = v_i(\alpha \vee \beta) = 1 = v_i(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = v_i(\psi).$$

Jos $v_i(\alpha) = v_i(\beta) = 0$, niin

$$v_i(\varphi) = v_i(\alpha \vee \beta) = 0 = v_i(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = v_i(\psi).$$

Kaavojen φ ja ψ totuusarvot ovat samat mielivaltaisella totuusjakaumalla $v_i, 1 \leq i \leq 2^{m+1}$, joten totuusarvot ovat samat kaikilla aakkoston totuusjakaumilla. Määritelmän 2.3.11 mukaan kaavat φ ja ψ ovat siis loogisesti ekvivalentit, joten $K = \{\neg, \wedge\}$ on ilmaisuvoimaltaan täydellinen joukko. $\square$

Huomataan, että myös joukko $K = \{\neg, \vee\}$ on ilmaisuvoimaltaan täydellinen, sillä konjunktio voidaan ilmaista negaation ja disjunktion avulla. Tarkastellaan äärellisen aakkoston $P = \{p_0 \dots p_n\}$ kaavojen $\varphi = \alpha \wedge \beta$ ja $\psi = \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ totuusarvoja totuustaulujen avulla:

α	β	$\varphi = \alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\psi = \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0

Kaavojen φ ja ψ totuusarvot ovat samat jokaisella totuusjakaumalla, joten ne ovat loogisesti ekvivalentit. Konnektiivijoukko $K = \{\neg, \vee\}$ on siis myös ilmaisuvoimaltaan täydellinen joukko.

Yllä esitettyjen konnektiivijoukkojen lisäksi on muitakin ilmaisuvoimaltaan täydellisiä konnektiivijoukkoja. Yksi mielenkiintoinen konnektiivijoukko on $K = \{ \mid \}$, eli joukko, joka sisältää ainoastaan Shefferin viivan. Osoitetaan seuraavaksi, että myös tämä konnektiivijoukko on ilmaisuvoimaltaan täydellinen.

Lause 2.3.14. *Olkoon $\mathcal{L}(P, K)$, jossa P on äärellinen, ja $K = \{\neg, \wedge\}$. Jokaisella $\mathcal{L}$-kaavalla φ on olemassa loogisesti ekvivalentti kaava ψ samalla aakkostolla P siten että kaavan ψ jokainen konnektiivi on Shefferin viiva $\mid$, eli $K = \{ \mid \}$.*

Todistus. Lemman 2.3.13 mukaan konnektiivijoukko $\{\neg, \wedge\}$ on ilmaisuvoimaltaan täydellinen. Osoitetaan, että sekä negaatio ($\neg$) että konjunktio ($\wedge$) voidaan korvata Shefferin viivalla ($\mid$).

Kiinnitetään äärellinen aakkosto $P = \{p_0, \dots p_n\}$, jossa $n \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään aakkoston totuusjakaumat $v_1, \dots, v_{2^{n+1}}$.

Tarkastellaan ensin negaation tapausta. Olkoon $\varphi_0 = \neg\alpha$ ja $\psi_0 = \alpha \mid \alpha$ kaavoja. Olkoon v_j mielivaltainen aakkoston totuusjakauma, $1 \leq j \leq 2^{n+1}$. Tarkastellaan kaavojen φ_0 ja ψ_0, totuusarvoja mielivaltaisella totuusjakaumalla v_j.
Jos $v_j(\alpha) = 0$, niin

$$v_j(\varphi_0) = v_j(\neg\alpha) = 1 = v_j(\alpha \mid \alpha) = v_j(\psi_0)$$

ja jos $v_j(\alpha) = 1$, niin

$$v_j(\varphi_0) = v_j(\neg\alpha) = 0 = v_j(\alpha \mid \alpha) = v_j(\psi_0).$$

Kaavojen φ_0 ja ψ_0 totuusarvot ovat samat jokaisella totuusjakaumalla, joten ne ovat loogisesti ekvivalentit. Näin ollen negaation voi korvata Shefferin viivalla.

Tarkastellaan sitten konjunktion tapausta. Olkoon $\varphi_1 = (\alpha \wedge \beta)$ ja $\psi_1 = (\alpha \mid \beta)|(\alpha \mid \beta)$ kaavoja. Lisäksi olkoon v_k mielivaltainen aakkoston totuusjakauma, jossa $1 \leq k \leq 2^{n+1}$. Tarkastellaan kaavojen φ_1 ja ψ_1 totuusarvoja totuusjakaumalla v_k.
Jos $v_k(\alpha) = v_k(\beta) = 1$, niin

$$v_k(\varphi_1) = v_k(\alpha \wedge \beta) = 1 = v_k((\alpha \mid \beta)|(\alpha \mid \beta)) = v_k(\psi_1).$$

Jos taas $v_k(\alpha) = 1$ ja $v_k(\beta) = 0$, niin

$$v_k(\varphi_1) = v_k(\alpha \wedge \beta) = 0 = v_k((\alpha \mid \beta)|(\alpha \mid \beta)) = v_k(\psi_1).$$

Ja jos $v_k(\alpha) = 0$ ja $v_k(\beta) = 1$, niin

$$v_k(\varphi_1) = v_k(\alpha \wedge \beta) = 0 = v_k((\alpha \mid \beta)|(\alpha \mid \beta)) = v_k(\psi_1).$$

Ja jos $v_k(\alpha) = v_k(\beta) = 0$, niin

$$v_k(\varphi_1) = v_k(\alpha \wedge \beta) = 0 = v_k((\alpha \mid \beta)|(\alpha \mid \beta)) = v_k(\psi_1).$$

Kaavojen φ_1 ja ψ_1 totuusarvot ovat samat jokaisella totuusjakaumalla, joten ne ovat loogisesti ekvivalentit. Konjunktion voi siis korvata kaavoissa Shefferin viivalla.

Lemman 2.3.13 mukaan konnektiivijoukko $\{\neg, \wedge\}$ on ilmaisuvoimaltaan täydellinen. Lisäksi kaikki kaavojen negaatiot ja konjunktiot voidaan esittää Shefferin viivan avulla, joten joukko $K = \{ \mid \}$ on myös ilmaisuvoimaltaan täydellinen. $\square$

Ilmaisuvoimatäydellisyydestä seuraa, että propositiologiikan kielestä ei ns. puutu mitään. Jokainen tilanne (propositiologiikan kontekstissa ominaisuus) voidaan esittää määrittelevänä kaavana, jonka totuusarvoja tarkastelemalla saadaan tietää, millaisissa tilanteissa kaava pätee. Tämän vuoksi kaikki tavanomaiset luonnollisessa kielessä ilmaistut loogiset ongelmat voidaan esittää propositiologiikan formaalilla kielellä. Esitetään seuraavaksi esimerkkinä n:n kuningattaren ongelman formalisointi.

2.4 N:n kuningattaren ongelma

Kuvaillaan seuraavaksi ensin luonnollisella kielellä n:n kuningattaren ongelma ($n \geq 4$). Kuningattarien ongelmassa on shakkilauta, jossa on $n \times n$ ruutua, sekä n kpl kuningattaria, jotka voivat liikkua pelilaudalla samoin kuin shakissa. Sanotaan, että kuningatar on uhattuna, jos se on ruudussa, johon joku muu kuningattarista voi liikkua yhdellä siirrolla. Tavoitteena on selvittää, onko annettujen kuningattarien asetelma sellainen, ettei yksikään kuningatar ole uhattuna. Osoitetaan tapa, jolla n:n kuningattaren ongelma voidaan formalisoida.

Määritellään kaava φ siten, että jokaiselle asetelman määrittelemälle valuaatiolle v pätee, että $v(\varphi) = 1$ jos ja vain jos yksikään kuningatar ei ole uhattuna. Määritellään kuitenkin ensin konfiguraatiokaava, joka esittää kuningattarien paikat pelilaudalla yksikäsitteisesti.

Oletetaan, että kuningattaret on numeroitu yksikäsitteisesti $1, \ldots, n$. Merkitään kuningattaren paikkaa pelilaudalla $p^i_{(k_i,k'_i)}$, jossa i on kuningattaren numero ja (k_i, k'_i) kuvastaa paikkaa pelilaudalla $(1 \leq i, k_i, k'_i \leq n)$. Tällöin aakkostona on

$$P = \{p^i_{(k_i,k'_i)} \mid (1 \leq i, k_i, k'_i \leq n)\}.$$

Kuningattarien paikat tulee kuvata yksikäsitteisesti, joten tulee kuvata missä kyseinen kuningatar on ja missä ei. Otetaan käyttöön joukko

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq n\},$$

joka sisältää kaikkien pelilaudan ruutujen koordinaatit. Näin ollen yhden kuningattaren eksakti sijainti voidaan kuvata kaavalla

$$\chi^i_{(k_i,k'_i)} \; := \; p^i_{(k_i,k'_i)} \wedge (\bigwedge_{\substack{(l,m)\in\mathcal{A} \\ (l,m)\neq(k_i,k'_i)}} \neg p^i_{(l,m)}).$$

Kaikkien kuningattarien eksaktien sjaintien konjunktiosta saadaan konfiguraatiokaava, joka on muotoa:

$$\bigwedge_{1\leq i\leq n} \chi^i_{(k_i,k'_i)}.$$

Tämä on siis konfiguraatiokaava, jonka perusteella kaavan φ totuusarvoa tutkitaan.

Kaavan φ tulee olla totta (totuusarvo 1) jos ja vain jos kuningattarien paikat annetussa konfiguraatiokaavassa ovat sellaiset, ettei pelilaudalla ole kuningattaria uhattuna. Jos yksikin kuningatar on uhattuna, tulee kaavan φ totuusarvona olla 0.

Kaavassa φ tulee tarkastaa, ettei kaksi kuningatarta ole samassa ruudussa. Tämä vaatimus voidaan esittää kaavalla:

$$\varphi_0 = \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \Big(\bigwedge_{(x,y) \in \mathcal{A}} (\neg(p^i_{(x,y)} \wedge p^j_{(x,y)})) \Big)$$

Lisäksi kaavassa tulee tarkastaa, ettei kaksi kuningatarta ole samalla rivillä (pysty, vaaka tai diagonaali). Kuvataan kolme kaavaa, joilla tarkastetaan erikseen pystyrivit, vaakarivit sekä diagonaalit. Määritellään joukko

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \{(x_0, y_0) \mid x_0 = x\},$$

joka sisältää kaikki ne ruudut, jotka ovat samalla pystyrivillä kuin ruutu (x, y). Pystyrivit tarkastava kaava on tällöin:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \Big(\bigwedge_{(x_0,y_0) \in \mathcal{A}} \Big(\bigwedge_{\substack{(x_1,y_1) \\ \in \mathcal{B}_{(x_0,y_0)}}} (\neg(p^i_{(x_0,y_0)} \wedge p^j_{(x_1,y_1)})) \Big) \Big)$$

Tässä kaavassa sama pystyrivi tarkastetaan ”useaan kertaan”. Kaava sisältää myös muita ”päällekkäisyyksiä”, mutta huomattakoon, että kaavan pituuden optimointi ei tässä ole merkityksellistä. Kaavassa φ_1 (kuten myös alla olevissa kaavoissa φ_2 ja φ_3) estetään myös kuningattarien päällekkäisyydet, joten kaavaa φ_0 ei välttämättä tarvittaisi.

Määritellään samalla vaakarivillä olevien ruutujen joukko seuraavasti:

$$\mathcal{C}_{(x,y)} = \{(x_0, y_0) \mid y_0 = y\},$$

Tällöin vaakarivit tarkastava kaava on:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \Big(\bigwedge_{(x_0,y_0) \in \mathcal{A}} \Big(\bigwedge_{\substack{(x_1,y_1) \\ \in \mathcal{C}_{(x_0,y_0)}}} (\neg(p^i_{(x_0,y_0)} \wedge p^j_{(x_1,y_1)})) \Big) \Big)$$

Diagonaalista tarkastusta varten määritellään joukko $\mathcal{D}_{(x,y)}$:

$$\mathcal{D}_{(x,y)} = \{(x_0, y_0) \mid (x, y) \text{ ja } (x_0, y_0) \text{ ovat samalla diagonaalisella rivillä}\}$$

Diagonaalisen tarkastamisen kaava on muotoa:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{\substack{1\le i,j\le n \\ i\ne j}} (\bigwedge_{(x_0,y_0)\in\mathcal{A}} (\bigwedge_{\substack{(x_1,y_1) \\ \in\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}}} (\neg(p^i_{(x_0,y_0)} \wedge p^j_{(x_1,y_1)}))))$$

Näistä kaavoista saadaan yhdisteltyä lopullinen kaava, joka tarkastaa, onko annettu kuningattarien järjestys pelilaudalla mahdollinen. Tämä kaava on:

$$\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3.$$

Näin ollen olemme saaneet kuningatarongelman formalisoitua. Esitetään seuraavaksi kuningatarongelmaan liittyvä luonnollisen kielen ongelmanratkaisutehtävä. Tämä tehtävä voitaisiin helposti formalisoida myös yllä olevien kaavojen avulla.

Esimerkki 2.4.1. Tarkastellaan shakkilautaa, jossa on 4×4 ruutua, ja olkoon siinä yksi kuningatar asetettuna ruutuun $(1, 1)$. Kuinka monella kuningattarella pelilautaa voidaan enintään täydentää siten, ettei yksikään kuningatar ole uhattuna?

Esitetään tämä ongelma formaalimmin. Merkitään mahdollisia kuningattaria seuraavasti: $p^1_{(1,1)}$, $p^2_{(x_2,y_2)}$, $p^3_{(x_3,y_3)}$ ja $p^4_{(x_4,y_4)}$. Onko mahdollista, että $v(\varphi) = 1$, kun konfiguraatiokaavaan täydennetään kaikille neljälle kuningattarelle eksakti sijainti, joista yksi on ruudussa $(1, 1)$?

Olkoon joukot $\mathcal{A}, \mathcal{B}_{(x,y)}, \mathcal{C}_{(x,y)}$ ja $\mathcal{D}_{(x,y)}$ kuten edellä. Otetaan lisäksi käyttöön joukko $\mathcal{U}_{(x,y)}$, joka sisältää kaikki ne pelilaudan ruudut (x_0, y_0), jotka ovat uhattuna, kun ruudussa (x, y) on kuningatar:

$$\mathcal{U}_{(x,y)} := \mathcal{B}_{(x,y)} \cup \mathcal{C}_{(x,y)} \cup \mathcal{D}_{(x,y)}$$

(Huomattakoon, että joukko $\mathcal{U}_{(x,y)}$ sisältää myös ruudun (x, y).)

Etsitään ensin toiselle kuningattarelle mahdolliset paikat pelilaudalta. Jotta toinen kuningatar $p^2_{(x_2,y_2)}$ ei ole uhattuna, pitää seuraavien väitteiden olla totta:

$$(x_2, y_2) \in \mathcal{A}$$

$$(x_2, y_2) \notin \mathcal{U}_{(1,1)},$$

sillä jos $(x_2, y_2) \in \mathcal{U}_{(1,1)}$, niin $v(\varphi) = 0$. Toisen kuningattaren mahdolliset paikat voidaan merkitä joukon $\mathcal{U}_{(1,1)}$ komplementtina, jota merkitään:

$$\mathcal{U}^C_{(1,1)} = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Huomataan, että toisen kuningattaren mahdolliset paikat ovat symmetrisiä keskenään. Kaikki vaihtoehdot tulevat käytyä läpi, kun toinen kuningatar asetetaan seuraavasti:

$$p^2_{(x_2,y_2)} \in \{p^2_{(2,3)}, p^2_{(2,4)}, p^2_{(3,4)}\}.$$

Jaetaan läpikäynti kolmeen osaan toisen kuningattaren sijainnin mukaan.

Oletetaan ensin, että toinen kuningatar asetetaan ruutuun $(2,3)$, eli $p^2_{(2,3)}$. Tällöin kolmannelle kuningattarelle $p^3_{(x_3,y_3)}$ saadaan seuraavat ehdot:

$$(x_3, y_3) \in \mathcal{A}$$

$$(x_3, y_3) \notin \mathcal{U}_{(1,1)} \cup \mathcal{U}_{(2,3)}$$

Nyt kolmannen kuningattaren mahdolliset paikat ovat joukossa:

$$(\mathcal{U}_{(1,1)} \cup \mathcal{U}_{(2,3)})^C = \{(4,2)\}.$$

Näin ollen kolmas kuningatar voidaan asettaa pelilaudalle ruutuun $(4,2)$, mutta tämän jälkeen pelilaudalla ei ole vapaita ruutuja, joita ei joku kuningatar uhkaisi. Jos toinen kuningatar asetetaan ruutuun $(2,3)$, saadaan pelilaudalle enintään kolme kuningatarta.

Oletetaan sitten, että toinen kuningatar asetetaan ruutuun $(2,4)$. Tällöin $p^2_{(2,4)}$. Kolmannen kuningattaren $p^3_{(x_3,y_3)}$ ehdot ovat siis:

$$(x_3, y_3) \in \mathcal{A}$$

$$(x_3, y_3) \notin \mathcal{U}_{(1,1)} \cup \mathcal{U}_{(2,4)}$$

Nyt kolmannen kuningattaren mahdolliset paikat ovat joukossa:

$$(\mathcal{U}_{(1,1)} \cup \mathcal{U}_{(2,3)})^C = \{(3,2),(4,3)\}.$$

Huomataan, että $(3,2) \in \mathcal{D}_{(4,3)}$ ja $(4,3) \in \mathcal{D}_{(3,2)}$, joten kun kolmas kuningatar on asetettu jompaan kumpaan ruutuun, ei pelilaudalle saada enää neljättä kuningatarta. Tässäkin tilanteessa pelilaudalle voidaan siis asettaa enintään kolme kuningatarta.

Käydään läpi kolmas mahdollinen tilanne, eli toinen kuningatar asetetaan ruutuun $(3,4)$ eli $p^2_{(3,4)}$. Tällöin kolmannelle kuningattarelle $p^3_{(x_3,y_3)}$ saadaan seuraavat ehdot:

$$(x_3, y_3) \in \mathcal{A}$$

$$(x_3, y_3) \notin \mathcal{U}_{(1,1)} \cup \mathcal{U}_{(3,4)}$$

Nyt kolmannen kuningattaren mahdolliset paikat ovat joukossa:

$$(\mathcal{U}_{(1,1)} \cup \mathcal{U}_{(3,4)})^C = \{(4,2)\}.$$

Kolmas kuningatar voidaan asettaa ruutuun $(4, 2)$, mutta tämän jälkeen pelilaudalla ei ole enää vapaita uhkaamattomia ruutuja. Tässäkin tilanteessa kuningattaria saadaan laudalle enintään kolme.

Jokaisessa mahdollisessa tilanteessa kuningattaria saatiin yhteensä laudalle kolme, joten lautaa voi täydentää alkutilanteesta enintään kahdella kuningattarella siten että $v(\varphi) = 1$.

2.5 Luonnollisen kielen ongelmien formaali selittäminen

Edellä esitetty n:n kuningattaren ongelma oli esimerkki luonnollisella kielellä esitetyn ongelman formaalista muotoilusta. Samankaltaisesti voidaan formaalisti muotoilla käytännöllisesti katsoen lähes kaikki luonnollisella kielellä esitetyt loogiset ongelmat.

Formalisoinnin avulla ongelmia voidaan ratkaista tietokoneellisesti. Formalisoinnin ja ratkaisemisen lisäksi on tärkeää myös *selittää* ongelmien ratkaisuja. Tässä kappaleessa takastellaan luonnollisella kielellä esitettyjen ongelmien selittämistä formaalisti. Lähteenä on käytetty tuoretta tutkimusartikkelia (Jaakkola et al. 2022).

Käydään ensin läpi muutamia hyödyllisiä määritelmiä. Oletetaan tässä luvussa (ellei toisin mainita), että $\mathcal{L}(P, K)$ on merkistö, jossa P on äärellinen ja $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$.

Määritelmä 2.5.1. Olkoot φ ja ψ $\mathcal{L}$-kaavoja. Kaava ψ on kaavan φ *looginen seuraus*, merkitään $\varphi \models \psi$, jos jokaisella totuusjakaumalla v pätee: jos $v(\varphi) = 1$, niin $v(\psi) = 1$. Kaava α on *validi*, jos $v(\alpha) = 1$ kaikilla v. Tällöin voidaan merkitä $\models \alpha$.

Esimerkki 2.5.2. Olkoon $P = \{p, q\}$. Olkoot $\varphi = p \wedge q$ ja $\psi = p$. Osoitetaan, että ψ on kaavan φ looginen seuraus. Nyt

$$v(\varphi) = 1 \iff (v(p) = 1 \text{ ja } v(q) = 1)$$

Riittää tarkastaa kaavan ψ totuusarvo, kun $v(p) = 1$ ja $v(q) = 1$. Koska $v(p) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1$ niin kaava ψ on kaavan φ looginen seuraus, $\varphi \models \psi$.

Esimerkki 2.5.3. Olkoon $P = \{p, q\}$ ja olkoon kaava $\varphi = p \vee \neg p$. Nyt selvästi jokaisella totuusjakaumalla v pätee $v(\varphi) = 1$, joten $\models \varphi$.

Määritelmä 2.5.4. Olkoot φ, ψ ja χ $\mathcal{L}$-kaavoja. Jos $\varphi \models \chi$ ja $\chi \models \psi$, sanotaan, että χ on *interpolantti* kaavojen φ ja ψ välillä. Lisäksi vaaditaan, että kaavan χ propositiosymbolit esiintyvät sekä kaavassa φ että ψ.

Esimerkki 2.5.5. Olkoon $P = \{p, q, r\}$ ja

$$\varphi = p \wedge q \wedge r, \ \psi = p \vee q \vee r \text{ ja } \chi = p \wedge q$$

$\mathcal{L}$-kaavoja. Koska $\varphi \models \chi$ ja $\chi \models \psi$, niin χ on kaavojen φ, ψ interpolantti. Myös esimerkiksi kaava $\chi_1 = p \wedge r$ olisi kaavojen φ, ψ interpolantti.

Määritelmä 2.5.6. Aakkoston P *literaaleja* ovat kaikki lausemuuttujat $p \in P$, sekä niiden negaatiot $\neg p$ jossa $p \in P$. *Positiivisiksi literaaleiksi* sanotaan literaaleja, jotka eivät sisällä negaatiota, ja negaation sisältäviä literaaleja kutsutaan *negatiivisiksi literaaleiksi*.

Esimerkki 2.5.7. Olkoon $P = \{p, q, r\}$. Aakkoston P kaikki literaalit ovat joukossa $\{p, q, r, \neg p, \neg q, \neg r\}$. Aakkoston positiiviset literaalit ovat joukossa $\{p, q, r\}$ ja negatiiviset literaalit joukossa $\{\neg p, \neg q, \neg r\}$.

Määritelmä 2.5.8. *Maksimaalinen konjunktio* äärellisessä aakkostossa P on jokin kaava φ, siten, että φ on konjunktio, joka sisältää tasan yhden literaalin kustakin lausemuuttujasta $p \in P$.

Esimerkki 2.5.9. Olkoon $P = \{p, q, r, s, t\}$. Tällöin esimerkiksi seuraavat kaavat ovat maksimaalisia konjunktioita:

$$p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

$$p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge t$$

$$\neg t \wedge \neg q \wedge s \wedge r \wedge p,$$

mutta nämä eivät ole:

$$q \wedge r \wedge s \wedge t$$

$$p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg t \wedge t,$$

sillä ensimmäisestä puuttuu lausemuuttujan p sisältävä literaali, ja toisessa esiintyy lausemuuttujan t literaali kahdesti.

Mikä tahansa yhden alkion sisältämä ominaisuus $U = \{v_i\}$ voidaan ilmaista maksimaalisena konjunktiona. Olkoon $P = \{p_0, \dots p_n\}$ ja v_i annetun aakkoston totuusjakauma. Totuusjakauman v_i määrittelevä maksimaalinen konjunktio on muotoa $q_0 \wedge \cdots \wedge q_n$, jossa $q_i = p_i$ jos $v(p_i) = 1$ ja $q_i = \neg p_i$ muulloin.

Määritelmä 2.5.10. Kaava ψ on kaavan φ *toistoton alikonjunktio* jos kaava ψ sisältää ainoastaan kaavan φ sisältämiä literaaleja ja on muodostettu konjunktioilla näistä literaaleista. Lisäksi yhtään literaalia ei ole alikonjunktiossa toistettu.

Jatkossa alikonjunktiolla tarkoitetaan aina toistotonta alikonjunktiota.

Esimerkki 2.5.11. Olkoon $P = \{p, q, r, s, t\}$ ja $\varphi = \neg p \wedge s \wedge t$. Kaavan φ alikonjunktio voisi tällöin olla esimerkiksi $s \wedge \neg p$, $s \wedge t$ tai $\neg p \wedge t$. Kaava $s \wedge r$ ei ole kaavan φ alikonjunktio, sillä kaava sisältää lausemuuttujan r, vaikka se ei ole kaavassa φ.

Määritelmä 2.5.12. Kaavan φ *pituus* $l(\varphi)$ on sen sisältämien merkkien esiintymien lukumäärä. Merkeiksi lasketaan konnektiivit $\{\neg, \wedge, \vee\}$ sekä lausemuuttujat $p \in P$. Muita symboleja (kuten sulkeita tai alaindeksejä) ei lasketa merkeiksi.

Esimerkki 2.5.13. Olkoon $P = \{p, q, r\}$ ja

$$\varphi = \neg(p \wedge \neg r),$$

$$\psi = \neg(p \wedge \neg q \wedge r) \text{ ja}$$

$$\chi = (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r).$$

Tällöin $l(\varphi) = 5$, $l(\psi) = 7$ ja $l(\chi) = 9$.

Lähes jokainen looginen ongelma voidaan esittää formaalisti kaavana ψ. Olkoon P aakkosto, joka sisältää täsmälleen kaikki kaavassa ψ esiintyvät propositiosymbolit. Ongelma voidaan esittää muodossa:

1. Syöte: aakkoston P jonkin totuusjakauman v karakteristinen kaava φ
2. Tulos: kyllä, kun $\varphi \models \psi$, muulloin ei

Ongelman ratkaisu (kyllä tai ei) voidaan *selittää* interpolanttien avulla (ks. Jaakkola et al. (2022)). Kun $\varphi \models \psi$, eli ongelman vastauksena on "kyllä", toimii selityksenä minimaalisen pituinen interpolantti χ kaavojen φ ja ψ välillä. Kyseessä on siis minimaalinen interpolantti χ siten että $\varphi \models \chi \models \psi$. Toisin sanoen, tarkoituksena on löytää mahdollisimman lyhyt kaava, josta ratkaisu seuraa.

Todistetaan seuraavaksi, että kun ongelmat formalisoidaan yllä esitetyllä tavalla, on lyhin interpolantti aina itse asiassa yksinkertaisesti kaavan φ alikonjunktio (Jaakkola et al. 2022). Tätä varten tarkastellaan vielä De Morganin muunnoksia.

Määritelmä 2.5.14. Olkoon kaava φ konjunktio aakkoston P literaaleja. Olkoon lisäksi $Pos(\varphi)$ kaavan φ positiivisten literaalien joukko ja $Neg(\varphi)$ kaavan φ negatiivisten literaalien joukko. Selvästi kaikki kaavan literaalit kuuluvat joko joukkooon $Pos(\varphi)$ tai joukkoon $Neg(\varphi)$. Tällöin kaavan φ *De Morganin muunnos*, $DM(\varphi)$, on muotoa:

$$DM(\varphi) := \bigwedge_{p \in Pos(\varphi)} p \wedge \neg\left(\bigvee_{\neg q \in Neg(\varphi)} q \right)$$

Esimerkki 2.5.15. Olkoon $P = \{p, q, r, s\}$ ja $\varphi = p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$. Tällöin literaalien joukot ovat $Pos(\varphi) = \{p, s\}$ ja $Neg(\varphi) = \{\neg q, \neg r\}$ ja kaavan φ De Morganin muunnos on muotoa:

$$DM(\varphi) = p \wedge s \wedge \neg(q \vee r).$$

Lause 2.5.16. *Tarkastellaan propositiologiikan kieltä $\mathcal{L}(P, K)$, jossa P on äärellinen ja $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$. Olkoon ψ $\mathcal{L}$-kaava jonka kaikkien propositiosymbolien joukko on P. Olkoon φ maksimaalinen konjunktio aakkostossa P. Jos $\varphi \models \psi$, niin on olemassa kaavan φ alikonjunktio χ siten, että sen De Morganin transformaatio on lyhin interpolantti kaavojen φ ja ψ välillä.*

Todistus. Oletetaan, että $\varphi \models \psi$. On olemassa ainakin yksi interpolantti kaavojen φ ja ψ välillä, sillä kaava φ itse on interpolantti, sillä selvästi $\varphi \models \varphi$ ja $\varphi \models \psi$. Merkitään lyhintä interpolanttia merkinnällä θ. Nyt siis $\varphi \models \theta \models \psi$. Merkitään, että $P(\theta)$ on joukko, joka sisältää kaikki kaavan θ sisältämät propositiosymbolit. Muunnetaan θ ekvivalenttiin muotoon θ', joka on disjunktiivinen normaalimuoto jossa jokainen disjunkti on maksimaalinen konjunktio aakkostossa $P(\theta)$. Tällainen muoto on aina olemassa, sillä ensin voidaan ottaa disjunktiivinen normaalimuoto kaavasta θ, ja tämän jälkeen täydentää jokainen disjunkti α disjunktioksi $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k$ missä jokainen α_i on maksimaalinen konjunktio aakkostossa $P(\theta)$, eli jokainen disjunkti α on laajennettu kaikilla mahdollisilla tavoilla maksimaaliseksi konjunktioksi.

Koska φ on maksimaalinen konjunktio aakkostossa P, niin täsmälleen yksi disjunkti konjuktiossa θ' on kaavan φ alikonjunktio. Merkitään tätä alikonjunktiota χ. Nyt siis $\varphi \models \chi \models \theta'$, sillä alikonjunktio on aina alkuperäisen konjunktion looginen seuraus, ja disjunktio on aina yhden disjunktinsa looginen seuraus.

Osoitetaan seuraavaksi, että χ on interpolantti kaavojen φ ja ψ välillä. Aiemmin todettiin, että $\varphi \models \chi$ ja $\chi \models \theta'$. Lisäksi, koska kaavat θ ja θ' ovat loogisesti ekvivalentteja ja $\theta \models \psi$, niin $\theta' \models \psi$. Täten siis $\varphi \models \chi \models \psi$.

Nyt jokainen propositio joukossa $P(\theta)$ esiintyy tasan kerran kaavassa χ ja siten esiintyy myös kaavan De Morganin muunnoksessa $DM(\chi)$ täsmälleen kerran. Lisäksi kaksipaikkaisten konnektiivien lukumäärä määräytyy aina propositioiden esiintymien lukumäärästä, joten kaksipaikkaisia konnektiiveja on kaavassa $DM(\chi)$ korkeintaan yhtä monta kuin kaavassa θ.

Kaavassa $DM(\chi)$ on siis sekä propositiosymbolien esiintymiä että kaksipaikkaisia konnektiiveja enintään sama määrä kuin kaavassa θ. Lisäksi kaavassa $DM(\chi)$ on enintään yksi negaatio. Nyt siis todistuksen loppuunsaattamiseksi riittää osoittaa, että jos kaavassa θ ei ole yhtään negaatiota, ei niitä ole myöskään kaavassa $DM(\chi)$. Tämä todistetaan seuraavalla tavalla.

Konjunktio χ on kaavan θ' disjunkti ja kaava θ' on ekvivalentti kaavan θ kanssa, joten $\chi \models \theta$. Täten, koska konjunktio θ ei sisällä negaatioita, on olemassa konjunktio $\chi' \models \theta$ siten että se on muodostettu konjunktiosta χ poistamalla kaikki negaation sisältävät literaalit. Osoitetaan sitten, että kaava χ' on interpolantti kaavojen φ ja ψ välillä. Koska χ' on kaavan χ alikonjunktio, niin $\chi \models \chi'$, ja koska myös $\varphi \models \chi$, niin $\varphi \models \chi'$. Lisäksi $\chi' \models \psi$, koska $\chi' \models \theta$ ja $\theta \models \psi$. Täten siis $\varphi \models \chi' \models \psi$, eli χ' on interpolantti kaavojen φ ja ψ välillä. Kaavan θ minimaalisuuden vuoksi

$\chi' = \chi$, koska jos χ' olisi lyhyempi kuin χ, niin kaavan χ' aakkosto olisi pienempi kuin kaavan θ, ja tällöin θ ei olisi minimaalinen interpolantti. Koska $\chi = \chi'$, niin χ ja $DM(\chi)$ eivät sisällä negaatioita. Näin ollen, $l(DM(\chi)) \leq l(\theta)$, joten $DM(\chi)$ on minimaalinen interpolantti. $\square$

Kaavojen interpolantti on siis annetun ongelman ratkaisun selitys. Näin ollen on esitetty, että lähes jokaiselle luonnollisella kielellä esitetylle loogiselle ongelmalle on olemassa formaali muotoilu sekä formaali selitys.

3 Logiikan opetus peruskoulussa

Tässä luvussa tarkastellaan sitä, millainen rooli logiikalla ja loogisella ajattelulla on perusopetuksen matematiikan oppiaineessa. Aihetta käsitellään opetussuunnitelman perusteiden sekä oppimateriaalien näkökulmasta. Lisäksi tutustutaan loogisen ajattelun kehittämisen menetelmiin ja aiempaan tutkimusnäyttöön aiheesta.

3.1 Logiikka opetussuunnitelman perusteissa

Suomessa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus 2014) määrittävät peruskoulun opetuksen koko maan yhtenevät suuntaviivat. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet pohjaavat konstruktivistiseen oppimisnäkemykseen, jonka mukaan ymmärtäminen ja oppijan aktiivisuus ovat keskiössä (Perkkilä et al. 2018). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa kerrotaan matematiikan oppiaineen tehtävänä olevan ”*oppilaiden loogisen, täsmällisen ja luovan matemaattisen ajattelun kehittäminen*” (Opetushallitus 2014, 234). Näin ollen matematiikan opetuksen tulee keskittyä oppilaan matemaattisen ymmärryksen lisäämiseen, jolloin pelkkä mekaanisten laskutoimitusten toistaminen ei riitä.

Matemaattisen logiikan syntaksia ei sisälly vielä peruskoulun puolella opetussuunnitelman perusteisiin. Syntaksiin tutustutaan ensimmäistä kertaa konnektiivien ja totuusarvojen kautta vasta lukion pitkän matematiikan kurssilla 11 (Opetushallitus 2019, 229). Matematiikan oppiaineen tavoitteissa nousee kuitenkin esiin useita matemaattiseen ja loogiseen ajatteluun liittyviä käsitteitä jo peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden puolella. Vuosiluokkien 3–6 ja 7–9 kohdalla matematiikan oppiaineen tehtävä määritellään melko samalla tavalla. Molemmilla vuosiluokilla matematiikan oppiaineen tehtävänä on mm.: ”*...kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia.*” (Opetushallitus 2014, 234, 374).

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa vuosiluokilla 7–9 on yhteensä kuusi sisältöaluetta, joista yksi on ajattelun taidot ja menetelmät. Ajattelun taitoihin ja menetelmiin sisältyvät esimerkiksi loogista ajattelua vaativat toiminnot, kuten sääntöjen ja riippuvuuksien etsiminen ja esittäminen. Sisältöalue pitää sisällään myös oppilaiden päättelykyvyn, sekä perustelutaidon vahvistamisen ja vastausvaihtoehtojen lukumäärien pohtimisen ja määrittämisen. Lisäksi sisältöalueeseen kuuluu väitelauseiden totuusarvon päättely sekä todistamisen perusteet. (Opetushallitus 2014, 375)

Omien ratkaisujen esittäminen sekä matemaattisen ajattelun kehittäminen ovat siis selvästi tärkeä osa matematiikan opetusta perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan. Looginen ajattelu ja sen esittäminen ovat siis tärkeässä roolissa, vaikka logiikan syntaksia ei opeteta vielä peruskoulussa.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa korostetaan matemaattisen ajattelun taitojen kehittämistä, sekä ongelmanratkaisutaitoja (Opetushallitus 2014, 234). Matemaattiselle ajattelulle ei kuitenkaan ole kirjallisuudessa yksikäsitteistä määritelmää (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 415). Matemaattinen ajattelu voidaan ajatella koostuvan loogisesta ja luovasta ajattelusta. Näitä molempia ajattelun taitoja tarvitaan myös ongelmanratkaisussa. (Pehkonen & Rossi 2018, 59)

Tässä tutkimuksessa matemaattinen ajattelu kuvataan luovan ja loogisen ajattelun yhdistelmäksi. Ongelmanratkaisuajattelu on osa matemaattista ajattelua ja hyödyntää sekä luovaa että loogista ajattelua. Loogisella ajattelulla tarkoitetaan matemaattiseen päättelyyn tarvittavaa ajattelua, jossa hyödynnetään propositiologiikan alkeita. Loogisessa ajattelussa hyödynnetään päättelytaitoja ja pyritään perustelemaan ratkaisut. Luovaksi ajatteluksi voidaan kutsua kaikkea sitä ajattelua, jossa ennalta opittua asiaa käytetään (itselle) uudella tavalla tai uudessa kontekstissa.

Matemaattisen ajattelun voi ajatella muodostuvan erilaisista ajattelustrategioista. Pehkonen ja Rossi (2018, 60) tiivistävät eri ajattelustrategiat listaksi, johon kuuluvat ainakin luokittelu, lukujonotaidot, analogian muodostaminen, deduktiivinen päättely ja ongelmanratkaisutaidot. Näihin jokaiseen liittyy sekä luova että looginen ajattelu.

3.2 Loogisen ajattelun kehittäminen

Matemaattinen osaaminen (*mathematical proficiency*) voidaan jakaa viiteen, osittain limittäiseen, osa-alueeseen. Näitä ovat konseptuaalinen ymmärrys, proseduraalinen sujuvuus, stateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja produktiivinen taipumus. Nämä kaikki viisi osa-aluetta ovat tärkeitä matemaattisen osaamisen kehittämisen kannalta. Ongelmanratkaisutehtävät ja niiden ratkaisujen selostaminen lukeutuvat strategisen kompetenssin ja mukautuvan päättelyn alle. (Kilpatrick et al. 2001)

Strateginen kompetenssi on kykyä muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. (Kilpatrick et al. 2001, 124) Ei-rutiinitehtävien ratkaisemista helpottaa lähestymistavan joustavuus. Kun tehtävää lähestytään useista tulokulmista, löydetään todennäköisesti tilanteeseen sopiva ratkaisutapa. (Kilpatrick et al. 2001, 127)

Mukautuvalla päättelyllä tarkoitetaan kykyä ajatella loogisesti konseptien ja tilanteiden välisistä suhteista. Mukautuva päättely on vaihtoehtojen harkitsemisen tulosta ja sisältää myös ratkaisun perustelemisen. (Kilpatrick et al. 2001, 129)

Tutkimusten mukaan oppilaat osaavat esittää päättelykykyään, kun kolme edellytystä täyttyy: heillä on tarvittava ennakkotieto tehtävän ratkaisemiseen, tehtävä on ymmärrettävä ja motivoiva ja asiayhteys on tuttu ja turvallinen. (Kilpatrick et al. 2001, 130) Opettajan tulisi siis tietää oppilaiden lähtötaso ja tarjota heille selkeitä, motivoivia ja turvalliselta tuntuvia tehtäviä. Turvallisuuden tunteeseen vaikuttaa tehtävien lisäksi suuresti luokan ilmapiiri, joten myös siihen tulee kiinnittää huomiota.

Jotta ajattelua voi kehittää, pitää ajatella. Näin ollen oppilaan aktiivinen rooli ajattelijana on tärkeää, kun halutaan kehittää matemaattista ajattelua. Erityisesti ”Miksi?” -kysymykset ovat tärkeitä matemaattista ajattelua kehittäessä. Kysymysten kysymisen tiedetään vaikuttavan positiivisesti myös motivaatioon, tarkkaavaisuuden suuntaamiseen sekä ajattelun aktivointiin. (Leinonen 2018, 77–78). Luokkahuoneen vuorovaikutukseen sekä tehtävien muotoiluun kannattaa kiinnittää huomiota. Matemaattista ajattelua voi kehittää erityisesti ongelmanratkaisutehtävien sekä matematiikan kielentämisen kautta (Pehkonen & Rossi 2018, 63) Käydään seuraavaksi näitä käsitteitä läpi tarkemmin.

3.2.1 Ongelmanratkaisu

Tässä tutkielmassa käytämme Leppäahon (2018) määritelmää ongelmanratkaisulle. Matemaattinen ongelmanratkaisu on ajatteluprosessi, jossa oppilas pyrkii ymmärtämään tilannetta matemaattisen tiedon avulla ja yrittää hankkia uutta tietoa, kunnes löytää ratkaisun. Kuten aiemmin todettu, ajattelun taidot karttuvat ajattelemalla. Ongelmanratkaisun tiedetäänkin kehittävän matemaattista ajattelua (Schoenfeld 1985).

Se, voidaanko tehtävä luokitella ongelmanratkaisutehtäväksi, on melko subjektiivista, sillä se riippuu tehtävän ratkaisijan ennakkotiedoista, -taidoista ja kokemuksista. Sama tehtävä voi siis hyvinkin yhdelle olla ongelmanratkaisutehtävä ja toiselle rutiinitehtävä. Leppäahon mukaan (2018) ongelmanratkaisutehtävän voidaan ajatella olevan hyvä, mikäli se on motivoiva ja sen ratkaiseminen vaatii ponnisteluja. Hyvä tehtävä itsessään ei vielä kehitä matemaattista ajattelua, jos oppilas ei kiinnostu tehtävästä. Myöskään liian helppo tai liian vaikea tehtävä ei kehitä ajattelua.

Ongelmanratkaisutehtävät jaotellaan usein avoimiin ja suljettuihin tehtäviin. Leppäaho (2018) Suljettu ongelmanratkaisutehtävä on sellainen, jossa on yksikäsitteisesti määritelty alku- ja lopputilanne, eli ratkaisujakin on usein vain yksi. Avoimessa ongelmanratkaisutehtävässä vähintään toinen tilanne on jätetty avoimeksi, jolloin tehtävän ratkaisijan tulee itse tehdä oletuksia ratkaistessaan tehtävää. Tällöin tehtävässä on useita oikeita ratkaisuja, riippuen siitä, millaisia oletuksia ratkaisemisen aikana on tehty.

3.2.2 Kielentäminen

Kielentäminen on oman ajattelun selostamista monipuolisesti eri tavoin, ikään kuin saman asian ”kääntämistä eri kielille”. Usein kielentäminen nähdään tapahtuvan matematiikassa neljän ”kielen” välillä, joita ovat luonnollinen kieli, kuviokieli, taktiilinen toiminnan kieli sekä matematiikan symbolikieli. Luonnollinen kieli pitää sisällään puhutun ja kirjoitetun kielen. Matematiikan tehtävän ratkaisun perustelu suullisesti on esimerkki luonnollisen kielen kielentämisestä. Kuviokielestä puhutaan, kun tehtävästä tai sen ratkaisusta piirretään kuva tai muutoin esitetään se graafisesti. Matematiikan symbolikieleksi kutsutaan ”perinteistä” matematiikan kieltä, eli esimerkiksi laskulausekkeita tai niiden jonoja. Taktiilinen toiminnan kieli on kaikkea kehollista, esimerkiksi välineillä havainnointia. (Joutsenlahti & Rättyä 2015)

Kun oppilas kielentää, saa hän mahdollisuuden jäsentää omaa matemaattista ajatteluaan puheella ja kirjoitetulla kielellä (luonnollinen kieli), kuvin ja piirroksin (kuviokieli), matematiikan symbolikielellä tai taktiilisella toiminnan kielellä. (Perkkilä & Joutsenlahti 2022) Matemaattinen kielentäminen siis kehittää matemaattista ajattelua (Joutsenlahti 2003, Clarkson 2003, Pehkonen & Rossi 2018). Suullisen kielentämisen tiedetään kehittävän myös täsmällistä argumentointia. Lisäksi suullinen kielentäminen on kognitiivisesti hieman kevyempää kuin kirjallinen kielentäminen, jossa jokainen sana ja virke pohditaan hieman tarkemmin. Kirjallisellakin kielentämisellä on oma paikkansa, sillä se haastaa oppilasta pohtimaan omaa ajatteluaan hieman tarkemmin sekä pohtimaan sanojaan. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 419)

Sen lisäksi, että ratkaisujen ja päätelmien omin sanoin selittäminen selkeyttää oppilaan mielikuvia, se mahdollistaa myös muille oppilaille ratkaisujen vertailun. Suullinen kielentäminen luo mahdollisuuden harjoitella omien ratkaisujen kommunikoimista muille sekä mahdollisuuden oppia muiden ratkaisuista kuuntelemalla heidän perustelujaan. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 415–418)

Yksi matematiikan opetuksen suurista haasteista on, miten matemaattinen ajattelu saadaan näkyväksi. Jopa matematiikan päättöarvioinnin kriteereissä opettajan pitää arvioida oppilaan matemaattisen ajattelun kulkua (Opetushallitus 2014, 378). Kuten muutakaan ajattelua, ei matemaattistakaan ajattelua voi nähdä päällepäin. Toisen ihmisen ajattelua voi havainnoida ainoastaan kommunikaation kautta. (Joutsenlahti 2005, 50) Kielentämisen avulla opettaja voi seurata ja kehittää oppilaan ajatteluprosessia. Kun oppilas kielentää matematiikkaa, pääsee opettaja paremmin selville siitä, mitä ja miten oppilas ajattelee. Opettaja saa kielentämisen avulla ymmärryksen siitä, miten oppilas on ymmärtänyt tehtävän ja sen reunaehdot. Tämä on erittäin tärkeää opetuksen sekä arvioinnin kannalta. Kirjallisen kielentämisen tiedetään ilmentävän oppilaan ajattelua (Laine et al. 2014), joten opettajan on syytä kiinnittää erityistä huomiota oppilaiden kirjallisiin vastauksiin.

3.3 Loogista ajattelua kehittävä oppimateriaali yläkoulussa

Matematiikan oppimateriaalin rooli peruskoulussa Suomessa on melko suuri (Perkkilä et al. 2018, 344). Suomessa monet opettajat uskovat täyttävänsä opetussuunnitelman tavoitteet käymällä matematiikan oppikirjaa läpi (Perkkilä et al. 2018, 345). Tämän vuoksi on tärkeää kehittää oppimateriaaleja vastaamaan nykyistä oppimiskäsitystä.

Perinteisissä alakoulun oppimateriaaleissa ongelmalähtöiseen oppimiseen pohjautuvia tehtäviä on hyvin vähän (Perkkilä et al. 2018, 354). Lisäksi näistä ongelmanratkaisutehtävistä vain noin 10 prosenttia oli avoimia ongelmatehtäviä (Perkkilä et al. 2018, 358). Myös Joutsenlahti ja Vainionpää matematiikan oppimateriaaleja tutkittuaan toivoivat materiaaleihin enemmän avoimia tehtäviä, jotka kehittävät oppilaan matemaattista ajattelua (Joutsenlahti & Vainionpää 2007, 190–191). Avoimia ongelmanratkaisutehtäviä sisältävälle oppimateriaalille on siis tarvetta.

Vaikka mikään oppimateriaali ei korvaa laadukasta opetusta ja opettajan ammattitaitoa, on tärkeää kiinnittää huomiota siihen, miten oppimateriaali mahdollistaa ja tukee oppimista. Perehdytään seuraavaksi hyvän, ajattelua kehittävän, oppimateriaalin ominaisuuksiin.

Suomalaisnuorten matematiikka-asenteet ovat heikentyneet viime vuosina ja suomalaiset nuoret pitävät matematiikasta verrattaen vähän (Kupari & Hiltunen 2018, 49). Motivaatio on kuitenkin yhteydessä matemaattisten taitojen, kuten esimerkiksi loogisen ajattelun, taitojen kehitykseen (Aunola & Nurmi 2018, 61). Hyvä oppimateriaali ei siis ainakaan latista oppilaiden motivaatiota, vaan pyrkii motivoimaan oppilaita eteenpäin. (Aunola & Nurmi 2018, 65) Motivaatiota tulee tukea oppitunneilla kaikin mahdollisin keinoin (Kupari & Hiltunen 2018, 49). Tämä on kuitenkin haastava tehtävä, sillä oppilaiden mielenkiinnonkohteet voivat olla hyvinkin erilaiset. Hyvä, ajattelua kehittävä materiaali on kuitenkin sellainen, että se on mahdollisimman monen oppilaan mielestä kiinnostava tai mielenkiintoinen.

Oppimisen kannalta ei kuitenkaan riitä, että oppilas haluaa oppia. Motivaation lisäksi oppimateriaalin tulee olla yhteensopiva oppijan aiemmin oppimien tietojen kanssa. Jotta oppiminen sujuu jouhevasti, tulee oppimateriaalin olla ristiriidaton oppilaan aiempien tietojen kanssa. (Leinonen 2018, 42) Tämä on yläkoulussa kuitenkin haasteellista, sillä oppilaiden taitotasoissa on suuria eroja. Lisäksi tasoerot ovat viime vuosina vain kasvaneet matematiikan oppiaineessa (Metsämuuronen & Nousiainen 2021). Hyvän oppimateriaalin pitäisi pyrkiä haastamaan jokaista oppilasta sopivasti, ei liikaa tai liian vähän.

Laine, Huhtala ja Kaasila (2018, 84) listaavat tärkeitä näkökulmia matematiikan (erityisesti jakolaskun) opettamiselle. Ymmärryksen kannalta tärkeäksi nousi konkreettisten välineiden hyödyntäminen opetuksessa. Välineiden käyttäminen keventää oppilaan kognitiivista kuormaa ja voi edistää asioiden ymmärtämistä. Hyvä oppimateriaali mahdollistaa konkreettisten välineiden käyttämisen.

Edellä esitettyjen tarkastelujen perusteella *Matka logiikkaan* -materiaalille asetettiin tavoitteeksi olla selkeä ja helppokäyttöinen materiaali, jota opettaja voi hyödyntää useilla tavoilla opetuksessaan. Tehtävät pyrittiin rakentamaan mielenkiintoisiksi ja osittain konkreettista materiaalia hyödyntäviksi ongelmanratkaisutehtäviksi, jotka ohjaisivat oppilaita sekä suulliseen että kirjalliseen kielentämiseen. Pari- tai ryhmätyöskentelyyn ohjaaminen korostaa erityisesti ratkaisun suulliseen kielentämiseen, sillä omia ratkaisuehdotuksia pitää esitellä parille. Tehtävissä pyrittiin ohjaamaan oppilasta myös perustelemaan oma ratkaisunsa ja etsimään useita sopivia vastausvaihtoehtoja tehtävään. Perustelua pyydettiin useissa tehtävissä erikseen vastauksen antamisen jälkeen. Jotta oppilaiden mahdolliset kielelliset haasteet eivät estäisi tehtävien tekemistä, tehtiin osa tehtävistä sanallisiksi ja osa kuvallisiksi. Lisäksi pyrittiin tarjoamaan kuvallista tukea myös sanallisiin tehtäviin, mikäli mahdollista.

Lopulta *Matka logiikkaan* -materiaaliin valikoitui monenlaisia tehtävätyyppejä. Materiaali sisältää mm. jonojen täydentämistä, virheiden etsimistä, useiden vastausvaihtoehtojen etsimistä. Lisäksi sanalliset tehtävät sisältävät useita erilaisia tehtäviä, joissa pitää pohtia, mitkä tilanteet ovat tehtävänannossa annettujen faktojen kanssa mahdollisia ja mitkä mahdottomia. Kokonaisuudessaan valmis oppimateriaali on liitteessä B.

4 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tavoitteena on kerryttää pedagogista tietoa siitä, miten loogista ajattelua kehittävää materiaalia voidaan tuottaa ja käyttää. Tutkimuksella halutaan selvittää, millainen on pedagogisesti perusteltu oppimateriaali loogisen ajattelun kehittämisen tukemiseksi yläkoulussa. Lisäksi tavoitteena on selvittää, miten loogisen ajattelun kehittämisen tehtävät soveltuvat yläkoulun matematiikan oppitunneille.
Tutkimuskysymykset:

1. Millaisia pedagogisia perusteluja on loogisen ajattelun kehittämiseen tarkoitetulla yläkoulun materiaalilla?
    1.1. Millaisia tehtävätyyppejä loogisen ajattelun kehittämiseen tarkoitettu materiaali sisältää?
    1.2. Millaisia haasteita materiaalin kehittämiseen liittyy?
2. Miten laadittu materiaali soveltuu osaksi yläkoulun matematiikan opetusta?
    2.1. Millaisena opiskelijoiden motivaatio näyttäytyy tunneilla?
    2.2. Miten sopivia tehtävät ovat vaikeustasoltaan seitsemäsluokkalaisille?
    2.3. Millaisia kokemuksia oppilailla on uuden oppimisesta materiaalia käyttäessään?
    2.4. Millaisia mielipiteitä opiskelijoilla on materiaalista?

5 Tutkimusmenetelmät ja tutkimuksen toteutus

Tämän tutkielman tavoitteena on pyrkiä ymmärtämään oppilaiden näkökulmaa loogisen ajattelun kehittämisen ilmiöön sekä kehittää yläkoululaisille soveltuvaa oppimateriaalia looogisen ajattelun kehittämiseen. Koska tutkielman tavoitteena on ymmärtää ilmiötä ja sen pohjalta kehittää uutta, on laadullinen tutkimusote luonnollinen valinta. Laadullista tutkimusta usein kutsutaankin ymmärtäväksi tutkimukseksi (Tuomi & Sarajärvi 2018, 33).

Tässä luvussa kuvaillaan tarkemmin tutkimusmenetelmät sekä niiden valinnan taustalla olevat syyt. Tämän jälkeen kuvaillaan tutkimuksen toteutus yksityiskohtaisesti.

5.1 Kehittämistutkimus

Tutkimus on luonteeltaan kehittämistutkimus (*design research* tai *design-based research*). Kehittämistutkimusta voidaan kutsua myös *design-tutkimukseksi*. Kehittämistutkimus on melko nuori tutkimusmenetelmä, joka on noussut tiedeyhteisön laajempaan tietoisuuteen vasta 2000-luvulla (Pernaa 2013, 10). Kehittämistutkimukselle ei ole tarkkaa yksikäsitteistä määritelmää (Pernaa 2013, 12), ja sen vuoksi on tarpeen käydä läpi, mitä kehittämistutkimuksella tarkoitetaan tässä tutkimuksessa.

Vaikka kehittämistutkimukselle ei ole yhtä tarkkaa ja yksikäsitteistä määritelmää, on erilaisissa määritelmissä havaittavissa samankaltaisuuksia. Yhteisiä piirteitä eri määritelmien välillä ovat mm. prosessin syklisyys, sekä teoreettisten ja kokeellisten vaiheiden vaihtelu. Kehitystutkimuksessa hyödynnetään tutkimuksen osallistujia ilmiön kehittämisprosessissa. (Pernaa 2013, 17) Kehittämistutkimus aloitetaan aina ongelma-analyysillä, joka on usein teoreettinen. Tätä vaihetta kutsutaan toisinaan myös tarveanalyysiksi, sillä sen tavoitteena on kartoittaa todelliset tarpeet kehittämisen taustalle. Tämän jälkeen alkaa ensimmäinen sykli, jossa ensin kehitetään materiaalin ensimmäinen versio, jota sen jälkeen arvioidaan ja kehitetään eteenpäin saatujen tietojen, eli empiirisen ongelma-analyysin avulla. (Pernaa 2013, 17–19) Toisessa syklissä tehdään uusi empiirinen ongelma-analyysi esimerkiksi aineistoa testaamalla ja tämän pohjalta materiaalia kehitetään edelleen. Syklien lukumäärä riippuu tutkimuksen laajuudesta sekä käytettävissä olevista resursseista, mutta pro gradu -tutkielmissa on useimmiten kaksi sykliä. Syklien jälkeen koko projekti päätetään yksityiskohtaiseen raporttiin josta käy ilmi miten tutkimus on tehty (Pernaa 2013, 17–19, 23).

Kehittämistutkimus on useimmiten monimenetelmällistä (Pernaa 2013, 21). Tämä tarkoittaa sitä, että tutkimuksen aineistonkeruussa ja aineiston analysoinnissa käytetään useaa eri menetelmää. Usein ongelma-analyysin tekemisessä käytetään useampia menetelmiä, kuten esimerkiksi kyselyitä, haastatteluja, havainnointia tai asiantuntija-arviota.

Tässä tutkimuksessa käytetään Juutin ja Lavosen määritelmää kehittämistutkimuksesta. Juuti ja Lavonen (2006, 65) listaavat opetus- ja kasvatusalan kehittämistutkimukselle kolme ominaispiirrettä:

1. kehittäminen on iteratiivista ja syntyy aidosta muutoksen tarpeesta
2. kehittäminen johtaa käytettävään tuotokseen
3. kehittäminen tuottaa tietoa, joka edistää opetusta.

Listauksessa nostetaan esiin kehittämistutkimuksen hyöty sekä tiedon että valmiin materiaalin tuottamisessa. Keskeistä kehittämistutkimuksessa on iteratiivinen luonne sekä aito tarve muutokselle. Aksela ja Pernaa (2013, 181) korostavat, että kehittämistutkimuksen tulokset ovat luonteeltaan erilaisia:

1. konkreettinen tuotos (esimerkiksi oppimateriaali)
2. tietoa tuotoksen mahdollisuuksista ja haasteista
3. tietoa kehittämisprosessista.

Kaikki edellämainitut tutkimustulokset mahdollistavat omalla tavallaan koulutuksen kehittymisen eteenpäin käytännön työssä.

Opetus- ja kasvatusalaan kohdistuvassa kehittämistutkimuksessa tutkijan ja opettajan välistä kommunikaatiota ei tule unohtaa. Opettaja ei ole ainoastaan tuotteen käyttöönottaja vaan kehittäjä yhdessä tutkijan kanssa. Testauksen jälkeen on tärkeää reflektoida yhdessä, mitä tilanteessa tapahtui ja mihin suuntaan kehitystä tulisi jatkaa. (Aksela & Pernaa 2013, 195).

Kehittämistutkimus on luonnollinen valinta tämän tutkimuksen lähestymistavaksi, sillä tavoitteena on kehittää teoriatietoa sekä konkreettista materiaalia ilmiöön liittyen. Monimenetelmällisyys aineistonkeruussa on myös sopiva valinta, jotta materiaalia voidaan tutkia eri näkökulmista.

Lisäksi kehittämistutkimus on opiskelijalle mielekäs ja motivoiva tapa toteuttaa pro gradu -tutkielma, jolla on myös käytännön hyötyä tulevassa ammatissa (Aksela & Pernaa 2013, 181, 193). Pro graduksi kehittämistutkimus soveltuu erinomaisesti myös siksi, että prosessista oppii tutkijan lisäksi sekä oppilaat että opettaja (Aksela & Pernaa 2013, 195). Viime vuosina onkin kehitetty matematiikan oppiaineen oppimateriaalia kehittämistutkimuksen keinoin useissa opinnäytteissä. Esimerkiksi Lähteenmäki (2019) kehitti pro gradu -tutkielmaansa matematiikan hiihtolomakurssin yhdeksäsluokkalaisille ja Rosenberg (2019) kehitti kirjalliseen kielentämiseen liittyviä murtolukutehtäviä alakoululaisille. Nuutinen (2022) taas kehitti pakopelipedagogiikkaa pro gradussaan kehittämistutkimuksen keinoin.

5.2 Aineiston hankintamenetelmät

Laadullisessa tutkimuksessa on yleistä kerätä aineistoa haastatteluilla, kyselyillä tai havainnoimalla. (Puusa & Juuti 2020, Tuomi & Sarajärvi 2018) Tässä tutkimuksessa aineistoa kerättiin kyselyillä sekä havainnoimalla. Lisäksi oppilaiden monisteet ratkaisuineen skannattiin heti tuntien jälkeen. Havainnointiaineiston tueksi videoitiin yhden oppilasparin työskentelyä oppituntien aikana.

Kyselylomakkeella pyrittiin selvittämään oppilaiden mielipiteitä oppitunnista ja sen tehtävistä. Lomakkeella oli likert-asteikollisia mielipidekysymyksiä, sekä avoimia ja suljettuja kysymyksiä. Jokaisen oppitunnin jälkeinen kysely keskittyi kyseiseen oppituntiin. Oppituntien jälkeisissä kyselylomakkeissa oli keskenään täysin samat kysymykset oppituntien tehtävien nimiä ja numerointeja lukuunottamatta. Oppituntikohtaisten kyselylomakkeiden kysymykset ovat liitteessä A (Liite A, kysymykset 1–7). Alkukyselyllä kartoitettiin oppilaiden ajatuksia loogisesta ajattelusta ja sen tarpeellisuudesta. Loppukyselyn tarkoituksena oli selvittää, ovatko oppilaiden ajatukset loogisesta ajattelusta tai sen tarpeellisuudesta muuttuneet ja miten oppilaat ovat kokeneet *Matka logiikkaan* -tunnit. Loppukyselyn kysymykset ovat liitteessä A (Liite A, kysymykset 8–19).

Oman tekemisen arviointi voi olla haastavaa yläkoululaisille, ja sen vuoksi myös havainnointiaineiston kerääminen on tärkeää (Kananen 2012, 95). Tuomen ja Sarajärven mukaan (2018) vuorovaikutuskäyttäytymistä tutkittaessa havainnointi on toimiva menetelmä. Tämänkin vuoksi havainnointi valikoitui yhdeksi aineistonkeruumenetelmäksi. Tutkija oli itse oppituntien opettajana sekä havainnoijana, jolloin havainnointi oli luonteeltaan osallistavaa (Tuomi & Sarajärvi 2018, 94–95). Havainnoitaessa ei ollut mitään tarkkaa listausta havainnoitavista asioista, joten havainnointi oli strukturoimatonta. Havainnoijan tehtävänä oli kirjata ylös mahdollisimman paljon tilanteeseen liittyviä asioita. Havainnoinnin tueksi kerättiin videomateriaalia oppitunneilta, jotta tilanteisiin voitiin palata oppitunnin jälkeenkin. (Kananen 2012, 96–97)

Oppilaiden ratkaisut materiaalin tehtäviin skannattiin, jotta tehtävien vaikeustasoa voitiin arvioida myös ratkaisujen perusteella. Lisäksi ratkaisuista etsittiin tyypillisiä virheitä, jotka voivat paljastaa esimerkiksi puutteellisia tehtävänantoja.

Aineistonkeruu ja -analysointi tehtiin hyviä tieteellisiä käytäntöjä noudattaen (Tuomi & Sarajärvi 2018, 150–157). Tutkimukseen osallistuminen perustui täysin vapaaehtoisuuteen, joten tutkimuslupa kysyttiin osallistujilta ennakkoon ja heidän oli mahdollista perua suostumuksensa missä tahansa vaiheessa tutkimusta. Lisäksi, koska tutkimuksen osallistujat olivat alaikäisiä, lupa kysyttiin myös heidän huoltajiltaan. Ennen tutkimukseen suostumista huoltajia kehoitettiin lukemaan tutkimuksen tiedote sekä tietosuojaseloste ja huoltajia kehoitettiin myös keskustelemaan näistä oppilaan kanssa. Lupa tehdä tutkimusta peruskoulussa osana perusopetusta kysyttiin koulun rehtorilta ennakkoon. Tutkimuslupaa kysyttäessä toimitettiin tutkimuksen tietosuojaseloste myös rehtorille. Osallistujien vastaukset anonymisoitiin, eikä yksittäistä vastaajaa voitu tunnistaa hänen vastauksistaan. Kaikki tutkimuksen aineisto tuhottiin välittömästi, kun sitä ei enää pro gradu -tutkielman kannalta tarvittu.

5.3 Aineiston analysointimenetelmät

Tutkimuksen aikana kerättiin aineistoa useassa eri muodossa, joten myös analyysivaiheessa oli käytössä useita menetelmiä. Analyysi oli kuitenkin aineistolähtöistä, mikä voidaan jaotella kolmivaiheiseksi prosessiksi, jossa ensin aineisto pelkistetään, tämän jälkeen ryhmitellään ja viimeisenä luodaan teoreettisia käsitteitä. (Tuomi & Sarajärvi 2018, 103–146) Seuraavaksi käydään läpi, miten kerättyä aineistoa analysoitiin tuloksia varten.

Kyselylomakkeen Likert-asteikollisissa monivalintatehtävissä laskettiin oppilaiden saman- tai erimielisyyttä annettujen väitteiden kanssa. Samanmielisyyden sisälle luettiin vastausvaihtoehdot ”samaa mieltä” sekä ”osittain samaa mieltä” ja erimielisyyttä edustivat vastausvaihtoehdot ”eri mieltä” ja ”osittain eri mieltä”. Näiden lisäksi yhtenä vastausvaihtoehtona oli ”en osaa sanoa”, ja nämä vastaukset jätettiin omaksi ryhmäkseen. Väittämät jaoteltiin niiden teemojen mukaan ja niiden perusteella tehtiin päätelmiä oppilaiden oppimisen kokemuksista, mielipiteistä sekä motivaatiosta *Matka logiikkaan* -jakson aikana.

Kyselylomakkeen avoimien kysymysten kohdalla tehtiin sisällönanalyysiä. Yleisesti sisällönanalyysin tavoitteena on tuottaa aineistosta tiivis ja selkeä kokonaisuus siten, ettei informaatiota katoa. Sisällönanalyysi on terminä kuitenkin niin laaja, ettei sen tekemiselle löydy selkeitä ohjeita. (Tuomi & Sarajärvi 2018) Tässä tutkimuksessa kyselylomakkeiden avointen tehtävien vastaukset ensin pelkistettiin ja sen jälkeen luokiteltiin. Eri aihealueisiin liittyvien mainintojen lukumäärät laskettiin. Sisällönanalyysin tarkoituksena oli erityisesti kiinnittää huomiota oppilaiden mielipiteisiin sekä oppimisen kokemukseen sekä motivaatioon. Lisäksi avoimista vastauksista etsittiin mainintoja siitä, miten oppilaiden mielestä materiaalia voisi kehittää paremmaksi.

Kyselylomakkeella olevasta arvosanatehtävästä (ks. liite A, tehtävä 6) laskettiin oppituntien saamien arvosanojen keskiarvot sekä -hajonnat oppitunneittain ja näitä verrattiin loppukyselyn järjestämistehtävään, jossa oppilaiden tuli asettaa oppitunnit mielenkiintoisimmasta tylsimpään.

Havainnointiaineistoa käsiteltiin myös sisällönanalyysin keinoin. Havainnointiaineistosta etsittiin ensin materiaaliin kohdistuvat maininnat, ja materiaalia korjailtiin näiden perusteella. Lisäksi havainnointiaineistoa teemoiteltiin oppilaiden mielipiteiden ja motivaatiota kuvaavien mainintojen osalta. Havainnointiaineistosta etsittiin myös vahvistusta kyselylomakkeella esiin nousseista teemoista.

Skannatuista tehtäväpapereista analysoitiin tehtävien yrittämistä, oikeellisuutta sekä yleisimpiä virhetyyppejä tehtävissä. Analyysissä tehtävä laskettiin tehdyksi, mikäli edes yksi oppilas oli kirjoittanut tehtävään vastauksen. Oikeaksi vastaukseksi ratkaisu luokiteltiin, mikäli vastaus oli oikein. Vastauksen oikeellisuutta analysoitaessa perustelun oikeellisuus jätettiin huomiotta. Perustelun puuttumista ei katsottu virheelliseksi vastaukseksi. Tehtävissä, joissa oli useampi vastausvaihtoehto ja vastaukseen pyydettiin kaikki mahdolliset ratkaisut, luokiteltiin tehtävä virheelliseksi jos vastausvaihtoehtoja puuttui.

5.4 Tutkimuksen toteutuksen kuvaus

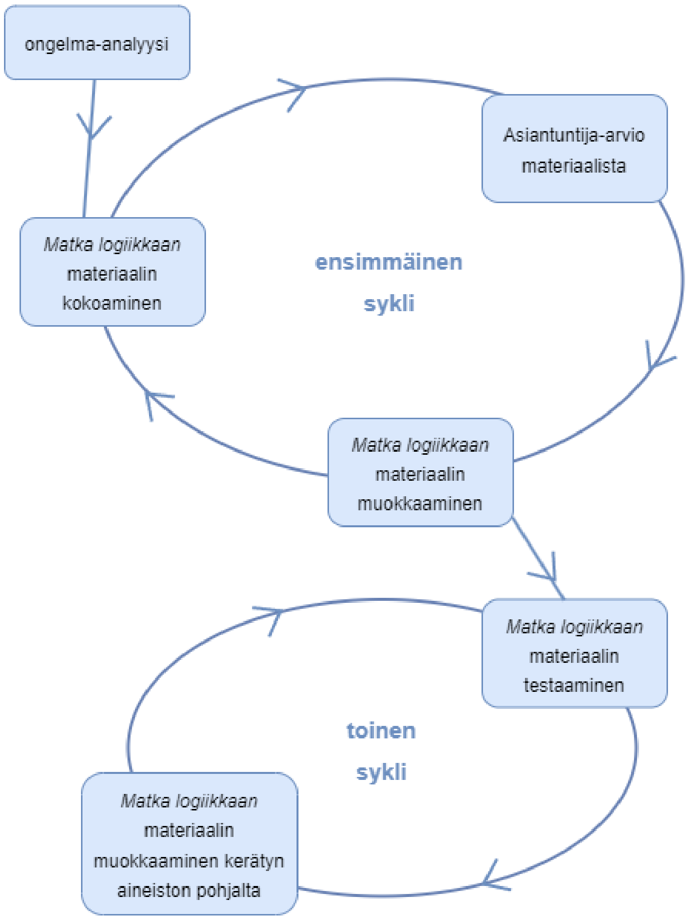
Tässä luvussa kuvaillaan tutkimuksen toteutus siten, että lukija saa hyvän kokonaiskuvan tutkimuksen kulusta. Pro gradu -tutkielma koostuu useimmiten kahdesta syklistä, ja niin tässäkin tapauksessa.

Koko tutkimuksen kulku voidaan jaotella kuuteen osaan: tarpeen kartoitukseen eli ongelma-analyysiin, materiaalipaketin toteutukseen, asiantuntija-arvioon ja sen jälkeisiin muokkauksiin, materiaalipaketin testaamiseen, eli aineiston keräämiseen sekä materiaalipaketin kehittämiseen testauksen aikana saadun aineiston pohjalta.

Nämä osat jakautuvat kehittämistutkimuksen hengessä sykleihin, jotka on kuvattu kuvassa 5.1. Ongelma-analyysi tehtiin ennen ensimmäistä sykliä. Ensimmäinen sykli koostui materiaalipaketin toteutuksesta sekä asiantuntija-arviosta ja sen jälkeisestä materiaalipaketin muokkauksesta. Toinen sykli sisälsi *Matka logiikkaan* -materiaalin testaamisen eli aineistonkeruun sekä materiaalin kehittämisen saadun aineiston analyysin pohjalta. Kuvaillaan seuraavaksi syklejä hieman tarkemmin.

5.4.1 Ongelma-analyysi

Ongelma-analyysi pohjaa tutkijan omiin kokemuksiin, sekä kirjallisuuskatsaukseen, jonka tuloksia on esitelty aiemmin luvussa 3. Peruskoulun matematiikan opetus pohjaa mekaanisen laskutaidon harjoittamiseen (Perkkilä 2002). Erityisesti matematiikan oppimateriaalit korostavat mekaanisten taitojen opettamista ja samalla jättävät ongelmanratkaisutehtävät joko huomiotta tai mekaanisten tehtävien jälkeen tehtäviksi pulmapaloiksi (Ahola 2014). Päättelemisen ja vastauksen perustelemisen taidot näkyvät kuitenkin vahvasti opetussuunnitelman perusteissa (ks. luku 3.1), joten loogista ajattelua kehittävälle materiaalille on perusteet opetussuunnitelmassa.



Kuva 5.1 *Tutkimuksen vaiheet sykleittäin.*

Ymmärrettävästi opettajat etsivät opetukseensa helposti käyttöönotettavaa ja selkeää materiaalia. Näin ollen tavoitteena on luoda materiaali, jota voi helposti käyttää osana opetusta. Suomessa opettajilla on vapaus itse valita opetusmetodinsa, ja tehtäväpaketista haluttiin luoda tätä ajatusta kunnioittava siten, että materiaalin tehtäviä voi halutessaan teettää yksittäin. Materiaalille annettiin kuitenkin ohjeellinen pituus ns. jaksona toteutettaessa, jotta myös tämän kaltainen käyttö olisi mahdollista. Tarvetta on siis erityisesti päättelyyn ja oman päättelyketjun perustelemiseen ohjaavalla, helppokäyttöisellä ja selkeällä materiaalilla.

5.4.2 Ensimmäinen sykli

Ensimmäisen sykli alkoi *Matka logiikkaan* -materiaalipaketin kokoamisella. Materiaalin ensimmäinen versio tehtiin kesä- ja heinäkuun aikana vuonna 2022.

Tehtäviä etsittiin mm. oppikirjoista, sekä erilaisista avoimista sähköisistä oppimateriaaleista. Lopulta kaikki materiaalipakettiin valikoituneet tehtävät pohjautuvat kahteen lähteeseen (Smullyan 2008, Järvinen 2003) sekä tutkijan kokemukseen siitä, millaiset tehtävätyypit ovat toimineet matemaattisen ajattelun herättelijöinä muilla oppilasryhmillä luokanopettajana työskennellessä. Tehtäviä valitessa oli tärkeää, että tehtävä on muokattavissa ikätasoon sopivaksi ja on tarpeeksi selkeä. Lisäksi oli tärkeää, että tehtävä ei ole täysin samanlainen, mitä oppikirjoissa usein käytetyt pulmatehtävät, jotta ongelmanratkaisutehtävät olisivat jokaiselle oppilaalle entuudestaan tuntemattomia. Tehtävien vaikeustasoa sovitettiin yläkoululaisille sopivaksi. Tämä tarkoittaa sitä, että osaa tehtävistä vaikeutettiin, esimerkiksi jättämällä avoimeksi osa tehtävänannosta, ja osaa tehtävistä helpotettiin esimerkiksi antamalla lisää vihjeitä tehtävänannossa.

Ensin tutkija keräsi eri lähteistä useita mahdollisia ongelmanratkaisutehtäviä yhteen. Tämän jälkeen tehtävät luokiteltiin loogisiksi kokonaisuuksiksi teemojen mukaan. Lopulta tehtävät jakautuivat kahteen teemaan; loogiset palat ja sanallinen ongelmanratkaisu. Opinnäytteen rajallisen laajuuden vuoksi *Matka logiikkaan* -oppimateriaali rajattiin neljän oppitunnin mittaiseksi (4 $\times$ 45 min) kokonaisuudeksi. Kahdelle ensimmäiselle tunnille valikoitui aiheeksi loogisten palojen tehtävät, sillä tutkija ajatteli niiden olevan helpommin lähestyttäviä kuin sanalliset tehtävät pitkine tehtävänantoineen. Kolmannella ja neljännellä tunnille jäivät sanalliset ongelmanratkaisutehtävät.

Oppitunneittain tehtävät järjestettiin tutkijan arvion mukaan vaikeusjärjestykseen siten, että tunnin tehtävät alkavat helpoimmasta ja vaikeutuvat vähitellen. Tehtävien vaikeustaso ei kuitenkaan ole objektiivista ongelmanratkaisutehtävissä, joten tehtävien järjestys voisi olla toinenkin. Vaikka alkuperäisissä tehtävissä olisi pyydetty pelkkä vastaus, lisättiin materiaalissa lähes kaikkiin tehtäviin kohta, johon oppilaan tulee perustella oma ratkaisunsa. Perustelun kirjoittaminen ohjaa oppilasta kielentämään omaa ratkaisuaan ja samalla jäsentämään omaa ajatteluaan. Materiaalin tehtävät tehtiin paperille, jotta piirtäminen ja huolettomien muistiinpanojen tekeminen tehtäviä ratkaistaessa olisi oppilaille vaivatonta.

Kun materiaalin ensimmäinen versio oli valmis, se käytiin yhdessä läpi pro gradun ohjaajan kanssa ja testikoulun matematiikan opettaja katsoi materiaalin läpi. Asiantuntijoiden kommenttien perusteella materiaaliin lisättiin esimerkkejä muutamiin tehtäviin sekä selvennettiin tehtävänantoja ja yhtenäistettiin vastauskäytänteitä.

5.4.3 Toinen sykli

Materiaalia testattiin yhdessä Pirkanmaalla sijaitsevassa koulussa yhdellä 7.-luokalla (n=18) syksyllä 2022. Tutkimusluvat kysyttiin asianmukaisesti ennakkoon koulun rehtorilta, sekä oppilaiden vanhemmilta. Ennen ensimmäistä tuntia oppilaat vastasivat edellisellä tunnilla sähköiseen alkukyselyyn, jonka tarkoituksena oli kartoittaa oppilaiden ennakkoajatuksia loogisesta ajattelusta ja sen hyödyllisyydestä avoimien kysymysten avulla.

Varsinaisilla *Matka logiikkaan* -tunneilla luokan matematiikan opettaja oli mukana auttamassa oppilaita, mutta tuntien vetovastuu oli tutkijalla. Jokaiselta tunnilta kuvattiin yksi video yhdestä oppilasparista heidän työskentelynsä aikana. Tunnit aloitettiin lyhyillä opettajajohtoisilla tuokioilla. Ensimmäisellä tunnilla käytiin läpi ennakkokyselyn vastauksia ja esiteltiin mistä *Matka logiikkaan* -kokonaisuus koostuu. Muiden tuntien alussa käytiin läpi edellisen tunnin tehtäviä, joiden vastauksissa oli eniten vaihtelua tai muita epäselvyyksiä. Opettajajohtoisen tuokion jälkeen oppilaille jaettiin tunnin tehtävät, joita he tekivät yhdessä opettajan ennalta määräämän parin kanssa. Kahdella ensimmäisellä tunnilla tunnin tehtävät annettiin yhtenä tehtäväpakettina oppilaille. Kahden ensimmäisen tunnin aikana kuitenkin huomattiin materiaalin sisältävän liian paljon tehtäviä, joten kahdella jälkimmäisellä tunnilla (tunnit 3 ja 4) oppilaille jaettiin tunnin alussa vain osa tehtävistä. Jos oppilaspari sai ensimmäisen osan tehtävät valmiiksi, saivat he loput tehtävät ratkottaviksi.

Jokainen *Matka logiikkaan* -oppitunti päätettiin sähköiseen mielipidekyselyyn. Kysely toteutettiin Forms-lomakkeella anonyymisti matematiikan opettajan oppilaille jakamien oppilastunnusten avulla. Oppilaita kannustettiin vastaamaan kyselyyn rehellisesti ja heille korostettiin, ettei kyselyn vastaukset vaikuta heidän arvosanoihinsa.

Tunnin jälkeen oppilaiden vastauspaperit, joissa oli tunnisteena myös kyselyssä käytetyt oppilastunnukset, skannattiin myöhempää analysointia varten. Oppitunnin havainnot kirjattiin ylös päiväkirjamuotoisesti heti oppituntien jälkeen.

Viimeisen oppitunnin lopussa oppilaat vastasivat mielipidekyselyyn, joka sisälsi kysymyksiä koko *Matka logiikkaan* -jaksosta. Kyselyssä oli sekä avoimia että suljettuja kysymyksiä sekä likert-asteikollinen mielipiteitä mittaava tehtävä. Havainnointiaineistoon kirjattiin huomioita erityisesti siitä, mitkä tehtävänannot vaativat tunneilla tarkentamista ja mitkä tehtävät aiheuttivat hämmennystä. Lisäksi havainnoitiin oppilaiden motivaatiota oppitunnin aikana. Saatu aineisto analysoitiin ja sen pohjalta materiaalia muokattiin eteenpäin. Tehtäviä ei kuitenkaan lisätty, poistettu tai siirretty tunnilta toiselle, vaan tehtävänantoja ainoastaan muokattiin yläkoululaisille soveltuvammaksi.

6 Tutkimustulokset

Tässä luvussa käydään läpi tutkimustulokset. Aineisto on kerätty ja analysoitu luvussa 5 kuvatulla tavalla, ja tässä luvussa tiivistetään tutkimuskysymysten kannalta tärkeimmät tutkimustulokset alalukujen alle. Tulokset on jaoteltu alalukuihin teemoittain.

6.1 Tehtävien määrä ja niiden vaikeustaso

Jokaisella oppitunnilla oli liikaa tehtäviä, sillä kukaan oppilaista ei saanut tehtyä kaikkia tehtäviä. Tehtävä merkattiin tehdyksi, mikäli yksikin oppilas oli ehtinyt tunnin aikana vastata tehtävään, riippumatta vastauksen oikeellisuudesta. Jokaisella oppitunnilla jäi 1–4 tehtävää täysin ilman vastauksia (ks. taulukot 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.4). Ensimmäisellä oppitunnilla tehtävät 3b ja 4 ja toisella tunnilla tehtävät 2, 3, 4 ja 5 jäivät ilman vastauksia. Kolmannella oppitunnilla ilman vastauksia jäi tehtävä 5 ja neljännellä tunnilla tehtävät 4, 5 ja 6.

Ensimmäisellä tunnilla tehtävät koettiin enimmäkseen helpoiksi tai sopiviksi (ks. taulukko 6.1). Suurin osa oppilaista koki ensimmäisen tehtävän helpoksi (10 vastausta) ja tehtävän 2a sopivaksi (10 vastausta). Tehtävä 2b jakoi eniten mielipiteitä ensimmäisellä tunnilla, sillä 6 oppilasta koki tehtävän helpoksi, 10 oppilasta koki tehtävän sopivaksi ja kahden mielestä tehtävä oli vaikea. Tehtävää 3b arvioitiin helpoksi (4 vastausta) sekä sopivaksi (4 vastausta) ja tehtävää 4 arvioitiin helpoksi (2 vastausta) sekä sopivaksi (3 vastausta), vaikka kumpaankaan tehtävään ei oltu vastattu kertaakaan.

Taulukko 6.1 *Ensimmäisen oppitunnin tehdyt tehtävät ja niiden vaikeustaso oppilaiden mielestä (n=16).*

tehtävä	tehtävää yritetty	helppo	sopiva	vaikea
1	16	10	6	0
2a	16	6	10	0
2b	16	6	8	2
3a	8	6	6	0
3b	0	4	4	0
4	0	2	4	0
kaikki	56	34	38	2

Toisella tunnilla tehtävät koettiin myös enimmäkseen sopiviksi (ks. taulukko 6.2). Tehtävän 1a arvioitiin olevan enimmäkseen sopiva (8 vastausta), mutta myös helppo (5 vastausta) ja yhden oppilaan mielestä tehtävä oli vaikea. Tehtävään 1b oli vastannut 7 oppilasta, muttta sen vaikeustasoa oli arvioitu 12 kertaa. 6 oppilasta koki kyseisen tehtävän sopivaksi, 5 arvioi tehtävän helpoksi ja yhden oppilaan mielestä tehtävä oli vaikea. Tehtävään 1c oli vastannut yhteensä 2 oppilasta, mutta sen vaikeustasoa oli arvioinut 10 oppilasta. Tämän tehtävän ajateltiin olevan tasoltaan sopiva (6 vastausta), helppo (3 vastausta) tai vaikea (1 vastaus). Loput oppitunnin tehtävät jäivät ilman vastauksia, mutta niiden vaikeustasoa oli silti arvioitu keskimäärin sopivaksi.

Taulukko 6.2 *Toisen oppitunnin tehdyt tehtävät ja niiden vaikeustaso oppilaiden mielestä (n=14).*

tehtävä	tehtävää yritetty	helppo	sopiva	vaikea
1a	14	5	8	1
1b	7	5	6	1
1c	2	3	6	1
2	0	1	5	0
3	0	0	4	1
4	0	0	6	0
5	0	0	5	0
kaikki	23	14	40	4

Kolmannen tunnin tehtäviä ehdittiin lähes kaikkia yrittää tunnin aikana (ks. taulukko 6.3). Tehtävän 1 koki sopivaksi 9 oppilasta, helpoksi 6 oppilasta ja vaikeaksi 1 oppilas. Toinen tehtävä koettiin hieman helpommaksi. Sen arvioi helpoksi 9 oppilasta, sopivaksi 7 oppilasta ja vaikeaksi 1 oppilas. Kolmas tehtävä oli suuren osan mielestä sopiva (11 oppilasta), mutta se koettiin myös helpoksi (3 oppilasta) sekä vaikeaksi (1 oppilas). Tehtävä 4 ei ollut yhdenkään oppilaan mielestä helppo. Sopivaksi neljännen tehtävän koki 7 oppilasta ja vaikeaksi sen arvioi 4 oppilasta. Tehtävään 5 ei vastannut yksikään oppilas, mutta se arvioitiin sopivaksi (5 oppilasta) tai vaikeaksi (1 oppilas).

Taulukko 6.3 *Kolmannen oppitunnin tehdyt tehtävät ja niiden vaikeustaso oppilaiden mielestä (n=16).*

tehtävä	tehtävää yritetty	helppo	sopiva	vaikea
1	16	6	9	1
2	16	9	7	0
3	16	3	11	1
4	8	0	7	4
5	0	0	5	1
kaikki	56	18	39	7

Neljännellä tunnilla puolet tehtävistä, tehtävät 4, 5 ja 6, jäivät ilman vastauksia (ks. taulukko 6.4). Ensimmäiseen tehtävään ehti tunnin aikana jokainen (16) oppilas vastata. Tehtävän vaikeustaso jakoi kuitenkin mielipiteitä, sillä 8 oppilasta koki tehtävän sopivaksi, 5 vaikeaksi ja 3 helpoksi. Toiseen tehtävään vastasi 12 oppilasta, joista 5 koki tehtävän sopivaksi, 5 helpoksi ja 1 vaikeaksi. Tehtäåvään 3 vastasi yhteensä 7 oppilasta. Tehtävän vaikeustasoa arvioi 8 oppilasta, joista 4 koki tehtävän helpoksi, 3 sopivaksi ja yksi vaikeaksi. Loput tehtävät jäivät ilman vastauksia, mutta jokaisen vaikeustasoa oli arvioitu 2 oppilaan toimesta. Yhden oppilaan mielestä tehtävät oli helppoja ja yhden mielestä vaikeita.

Taulukko 6.4 *Neljännen oppitunnin tehdyt tehtävät ja niiden vaikeustaso oppilaiden mielestä (n=16).*

tehtävä	tehtävää yritetty	helppo	sopiva	vaikea
1	16	3	8	5
2	12	5	5	1
3	7	4	3	1
4	0	1	1	0
5	0	1	1	0
6	0	1	1	0
kaikki	35	15	19	7

Kaikilla neljällä tunnilla suurin osa tehtävistä oli oppilaiden mielestä vaikeustasoltaan joko helppoja tai sopivia.

6.2 Virhetyypit tehtävissä

Tunneilla tehtyjen tehtävien oikeellisuus tarkastettiin jokaisen tehtävän jokaisesta alakohdasta. Jos tehtävässä oli jokin merkintä, katsottiin oppilaan yrittäneen sitä. Epäselvät vastaukset luokiteltiin vääriksi vastauksiksi. Tehtävissä, joihin on useita oikeita vastauksia, mikä tahansa näistä kelpasi oikeaksi vastaukseksi. Perustelun puuttumista tai niukkuutta ei luokiteltu virheeksi, mikäli vastaus samassa tehtävässä oli oikein.

Yhteensä vastauksia kaikkien tehtävien alakohtiin oli 697 kpl. Virheellisiä näistä oli 165 kpl (24 %). Oppituntikohtaiset virheiden lukumäärät virhetyyppeihin luokiteltuna on koottu taulukkoon 6.5. Ensimmäisellä tunnilla oli yhteensä 88 virhettä ja eniten virheitä oli termien sekoittamisen kanssa (41 kpl). Kaikki ensimmäisen tunnin termivirheet liittyivät sanojen *ja* sekä *tai* merkityksiin tehtävissä 2a ja 2b. Ensimmäisen oppitunnin vastausvaihtoehtojen puuttumisen virheet olivat pääosin (15 virhettä kuudestatoista) tehtävässä 2b. Myös tehtävänannon väärinymmärtäminen oli yleisintä (18 virhettä yhdeksästätoista) tehtävässä 2b.

Toisella oppitunnilla oli selvästi vähemmän virheitä (16 kpl) ensimmäiseen tuntiin verrattuna. Suurin osa virheistä (13 kpl kuudestatoista) oli tehtävässä 1b. Lähes kaikki puutteelliset vastaukset (9 kpl kymmenestä) ja ylimääräiset vastaukset (4 kpl viidestä) olivat tehtävässä 1b.

Kolmannella ja neljännellä tunnilla virheitä oli lähes yhtä paljon, tunnilla 3 oli yhteensä 31 virhettä ja tunnilla 4 oli yhteensä 30 virhettä. Kolmannella tunnilla kaikki 6 kpl termien sekoittamisen virhettä liittyivät tehtävään 2. Erityisesti sanat *vanhempi* ja *nuorempi* aiheuttivat kyseisessä tehtävässä haasteita oppilaille. Kolmannella tunnilla epäselviä vastauksia oli enemmän kuin aiemmilla tunneilla (yhteensä 5 kpl) ja loogisia ristiriitoja tehtävänannon kanssa löytyi tehtävistä 2, 3 ja 4 yhteensä 8 kpl. Väärinymmärrettyjen tehtävien joukkoon luokiteltuja virheitä kolmannella tunnilla oli 2 kpl.

Neljännellä tunnilla eniten tehtävänannon ymmärtämisen virheitä tuli eniten tehtävässä 2 (6 kpl yhdeksästä). Neljännen tunnin loogisia ristiriitavirheitä oli eniten tehtävässä 1 (6 kpl seitsemästä). Väärinymmäretyn tehtävän virheet (9 kpl) esiintyivät kaikki tehtävässä 2 ja puuttuvia vastausvaihtoehtoja (yhteensä 10 kpl) oli tehtävissä 1 ja 2.

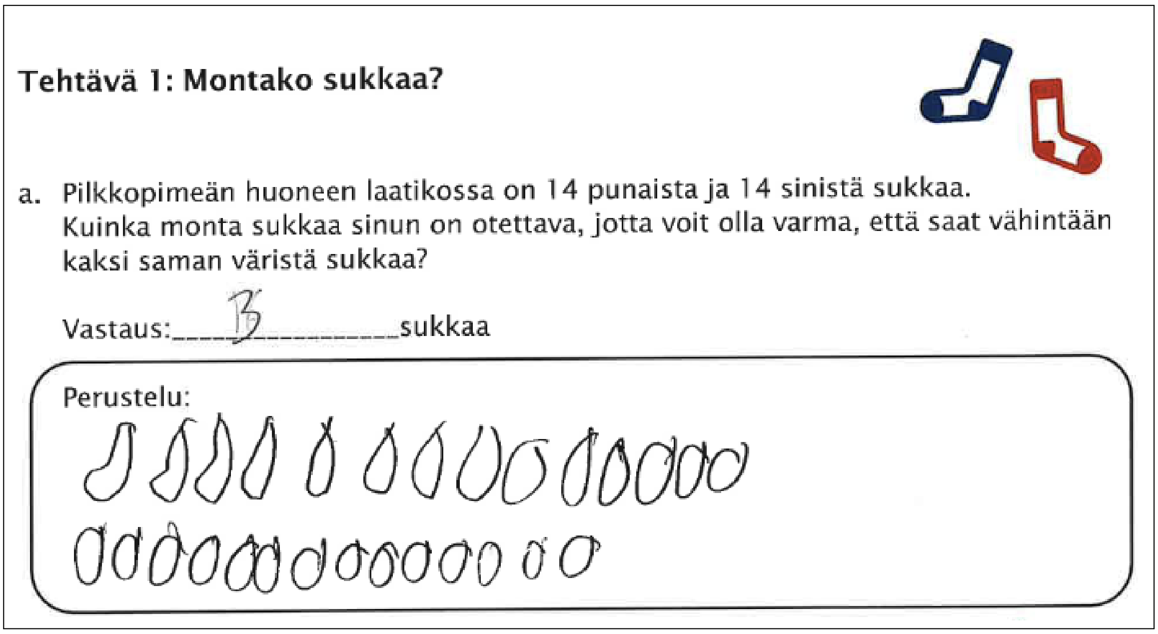
Taulukko 6.5 *Tehtyjen tehtävien virhetyyppien määrät oppitunneittain*

	oppitunti 1	oppitunti 2	oppitunti 3	oppitunti 4
termien sekoittaminen	41	0	6	0
puuttuu vastausvaihtoehtoja	16	10	1	10
liikaa vastausvaihtoehtoja	12	5	9	0
looginen ristiriita	0	0	8	7
tehtävä ymmärretty väärin	19	1	2	9
epäselvä vastaus	0	1	5	4
yhteensä virheitä	88 (27 %)	16 (14 %)	31 (19 %)	30 (31 %)
yhteensä yritettyjä tehtäviä	328	111	161	97

Prosentuaalisesti eniten virheitä oli neljännellä oppitunnilla (31 %). Seuraavaksi suurin virheprosentti oli ensimmäisellä oppitunnilla (27 %). Toiseksi pienin virheprosentti oli kolmannella oppitunnilla (19 %) ja prosentuaalisesti vähiten virheitä oli toisella oppitunnilla (14 %).

6.3 Perusteleminen

Oppitunneilla oppilaat perustelivat vastauksiaan suullisesti hyvin sekä parilleen, että opettajalle. Vastauspapereissa tämä ei kuitenkaan näkynyt, sillä suuri osa kirjallisista perusteluista oli joko puutteellisia tai puuttuivat täysin, vaikka tehtävänannossa pyydettiin erikseen perustelemaan vastaus. Esimerkiksi kolmannen oppitunnin ensimmäiseen tehtävään puutteellisia perusteluja tuli useita, ja kuvassa 6.1 on yksi esimerkki puutteelliseksi luokitellusta perustelusta.



Tehtävä 1: Montako sukkaa?

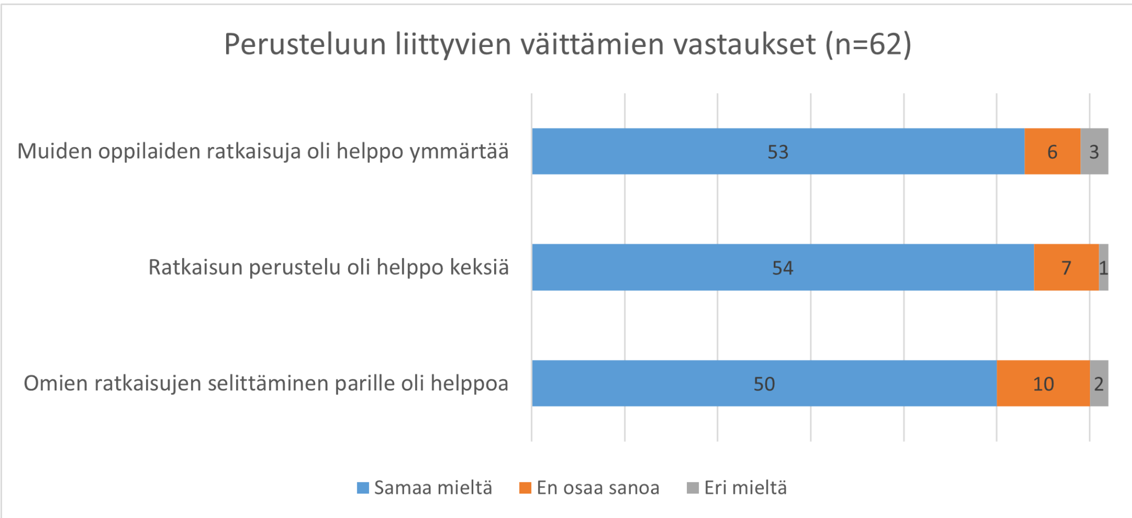
a. Pilkkopimeän huoneen laatikossa on 14 punaista ja 14 sinistä sukkaa. Kuinka monta sukkaa sinun on otettava, jotta voit olla varma, että saat vähintään kaksi saman väristä sukkaa?

Vastaus:____13__________sukkaa

Perustelu:

Kuva 6.1 *Esimerkki vastauksesta, jossa perustelu on puutteellinen.*

Kuvaan 6.2 on koottu kaikkien oppituntien jälkeisten kyselyiden vastaukset yhteen perustelemista koskevien väitteiden osalta. Suurin osa oppilaista oli sitä mieltä, että ratkaisun perustelu oli helppo keksiä. Suurin osa oppilaista ajatteli myös, että omien ratkaisujen selostaminen omalle parille oli helppoa (ks. kuva 6.2), ja vain kahdesti oppilas oli eri mieltä väittämän ”*Omien ratkaisujen selittäminen parille oli helppoa*” kanssa. Muiden oppilaiden ratkaisuja oli oppilaiden mielestä helppo ymmärtää.



Kuva 6.2 *Kaikkien neljän oppitunnin vastaukset perusteluun liittyviin väittämiin (n=62).*

Ratkaisujen perusteleminen kehittyi jakson aikana myös havainnointiaineiston mukaan. Ensimmäisellä tunnilla oli paljon ”en osaa selittää” -tyylisiä vastauksia, kun oppilaalta kysyttiin perustelua ratkaisulleen. Jo toisella tunnilla oppilaat yrittivät enemmän perustella ratkaisujaan sekä tutkijalle että opettajalle kysyttäessä. Kolmannella ja neljännellä tunnilla oppilaat perustelivat ratkaisujaan jopa omalle parilleen omasta aloitteestaan.

6.4 Mielipiteitä materiaalista

Kaikki oppitunnit saivat hyvän arvosanan oppilailta, kun heitä pyydettiin antamaan oppitunnille arvosana asteikolla 1–5 (5 on paras ja 1 on huonoin). Taulukossa 6.6 esitetään oppilaiden antamien arvosanojen keskiarvot sekä -hajonnat. Kolmannella tunnilla arvosanojen keskiarvo oli 4,6 ja keskihajonta 0,47. Neljännen tunnin arvosanojen keskiarvo oli toiseksi korkein, 4,2 ja keskihajonta oli 0,61. Ensimmäisen ja toisen tunnin keskiarvot olivat lähes yhtä korkeat kuin neljännen tunnin keskiarvo, ensimmäisen tunnin arvosanojen keskiarvo oli 4,1 ja keskihajonta 0,55 ja toisen tunnin arvosanojen keskiarvo oli 3,9 ja keskihajonta 0,76.

Havainnointiaineiston tulokset ovat samansuuntaisia oppituntien arvosanojen kanssa, sillä suurin osa oppilaista vaikutti tunneilla siltä, että he tekivät tehtäviä mielellään ja olivat kiinnostuneita tehtävistä. Lisäksi osa oppilaista tuli tunnin jälkeen sanomaan, kuinka tietty tehtävä oli heidän mielestään mielenkiintoinen tai halusi kiittää mielenkiintoisesta tunnista ja tehtävistä.

Myös loppukyselyssä kartoitettiin oppilaiden mielipiteitä materiaalista. Oppituntien saamat arvosanat oppituntikohtaisissa kyselyissä olivat myös linjassa sen kanssa, miten oppilaat järjestivät oppitunnit loppukyselyssä mielenkiintoisimmasta tylsimpään. Oppitunnit 3 ja 4 koettiin loppukyselyssä mielenkiintoisimmiksi (moodi 1) ja oppitunti 2 koettiin kolmanneksi mielenkiintoisimmaksi (moodi 3) ja ensimmäinen tunti koettiin tylsimmäksi (moodi 4). Lisäksi loppukyselyssä oppilaat kokivat tehtävien tekemisen mieluisaksi (13 oppilasta kuudestatoista) ja yhdessä tekeminen koettiin myös kivaksi (14 oppilasta kuudestatoista.)

Oppilaiden palaute tunneista avointen kysymysten kohdalla oli myös pääosin positiivista sekä tuntikohtaisissa kyselyissä että loppukyselyssä. Kyselyihin vastattiin yhteensä 62 kertaa. Näistä 24 oli tyhjiä avoimen palautekysymyksen kohdalta.

Taulukko 6.6 *Oppituntien arvosanojen (asteikko 1–5) keskiarvot ja -hajonnat oppitunneittain.*

oppitunti	arvosanojen keskiarvo	arvosanojen keskihajonta
1	4,1	0,55
2	3,9	0,76
3	4,6	0,47
4	4,2	0,61

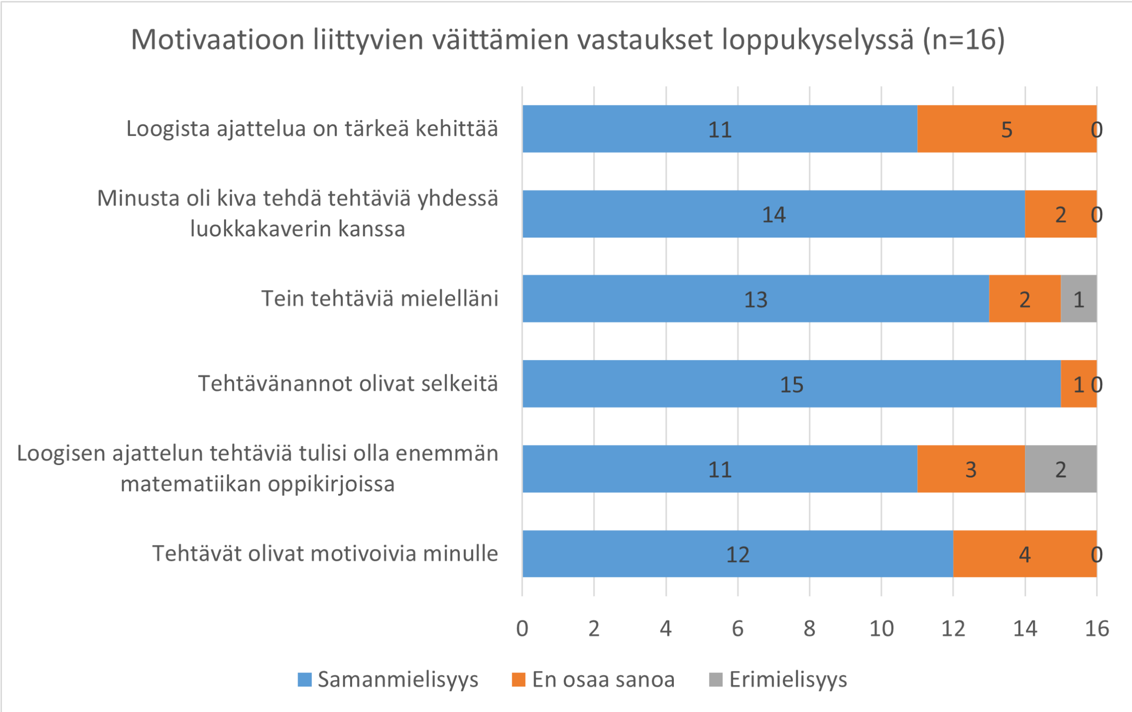
Lisäksi avoin palaute keräsi 16 irrelevanttia vastausta, johon laskettiin mm. vastaukset "*Moikka*" ja "*hyvää joulua*". Kun tyhjät ja irrelevantit vastaukset oli poistettu, aineistoon jäi jäljelle 22 kpl. Palautteissa oli sekä positiivisia, että negatiivisia palautteita. Positiivisia mainintoja oli 19 kpl ja negatiivisia 6 kpl. Osa negatiivisista palautteista sisälsi myös positiivisen osan, esimerkiksi: "*No kaikki oli hauskoja ja aika helppoja mutta silti olisin halunnut vhän enemmän tekemistä.*". Sama palaute saatettiin siis analysoida sekä positiiviseksi että negatiiviseksi. Positiivisissa palautteissa mainittiin läksyttömyys (4 mainintaa), hyvä, hauska, kiva tai rento tunti (11 mainintaa), helpot tehtävät (2 mainintaa), hyvä opettaja (1 maininta) sekä mielenkiintoiset tehtävät (1 maininta). Negatiivisissa palautteissa mainittiin tylsyys (2 mainintaa), tehtävien liiallinen vaikeus (3 mainintaa) sekä tehtävänannon epäselvyys (1 maininta).

6.5 Motivaatio

Havainnointiaineiston perusteella oppilaiden motivaatio yleisesti tunneilla oli hyvä. Suurin osa oppilaista vaikutti tehtäväorientoituneilta, mutta jokaisella tunnilla oli myös keskustelua tehtävien ulkopuolelta. Sanallisten tehtävien tunneilla (oppitunnit 3 ja 4) keskustelua tehtävistä oli hieman enemmän kuin loogisten palojen tunneilla (oppitunnit 1 ja 2). Erityisesti sanallisten tehtävien tunneilla kuului, kuinka oppilaat selittivät omaa ratkaisuehdotusta parilleen.

Havainnoinnissa huomattiin myös, että yksi oppilaan mielestä ratkaistu tehtävä motivoi yrittämään seuraaviakin tehtäviä. Oppilaiden motivaatio tehtävää kohtaan laski heti, kun vastaus oli paperilla. Tarkemman vastauksen tai useampien vastauksien etsiminen ei näyttänyt motivoivan oppilaita. Esimerkiksi kun kolmannen tunnin ensimmäisessä tehtävässä eräs oppilas keksi, että kaikkien sukkien nostaminen on tae sille, että saat vähintään yhden parin, ei häntä kiinnostanut enää etsiä pienintä mahdollista nostettujen sukkien määrää. Tehtävänannon selkeys vaikutti havainnointiaineiston perusteella olevan tärkeää motivaation säilymisen kannalta. Muutamalla oppilaalla kynnys kysyä apua oli suuri tai motivaatio tehtävien tekemiseen meni jo ennen avun pyytämistä, mikäli tehtävänanto ei ollut selkeä.

Loppukyselyssä kerättiin oppilaiden mielipiteitä väittämien avulla. Osa väittämistä liittyy motivaatioon, ja näiden väittämien vastaukset näkyvät kuvassa 6.3. Yhteensä 12 oppilasta koki, että tehtävät olivat heille motivoivia ja loput neljä eivät osanneet sanoa. Yksikään oppilas ei ollut eri mieltä väittämän "tehtävät olivat motivoivia minulle" kanssa. 13 oppilasta teki tehtäviä mielellään, ja yksi koki tehtävien tekemisen epämieluisaksi. Yhteensä 15 oppilasta oli samaa mieltä siitä, että tehtävänannot olivat selkeitä ja yksi oppilas ei osannut sanoa. 14 oppilasta koki parityöskentelyn olevan kivaa ja kaksi ei osannut sanoa. Loogisen ajattelun kehittäminen



Kuva 6.3 *Oppilaiden vastaukset loppukyselyn motivaatioon liittyviin väittämiin (n=16).*

koettiin tärkeäksi (11 oppilasta oli samaa mieltä) ja 12 oppilasta toivoisi, että oppikirjat sisältäisivät enemmän loogisen ajattelun tehtäviä. Kaksi oppilasta oli sitä mieltä, ettei loogisen ajattelun tehtäviä tarvita enempää matematiikan oppikirjoihin.

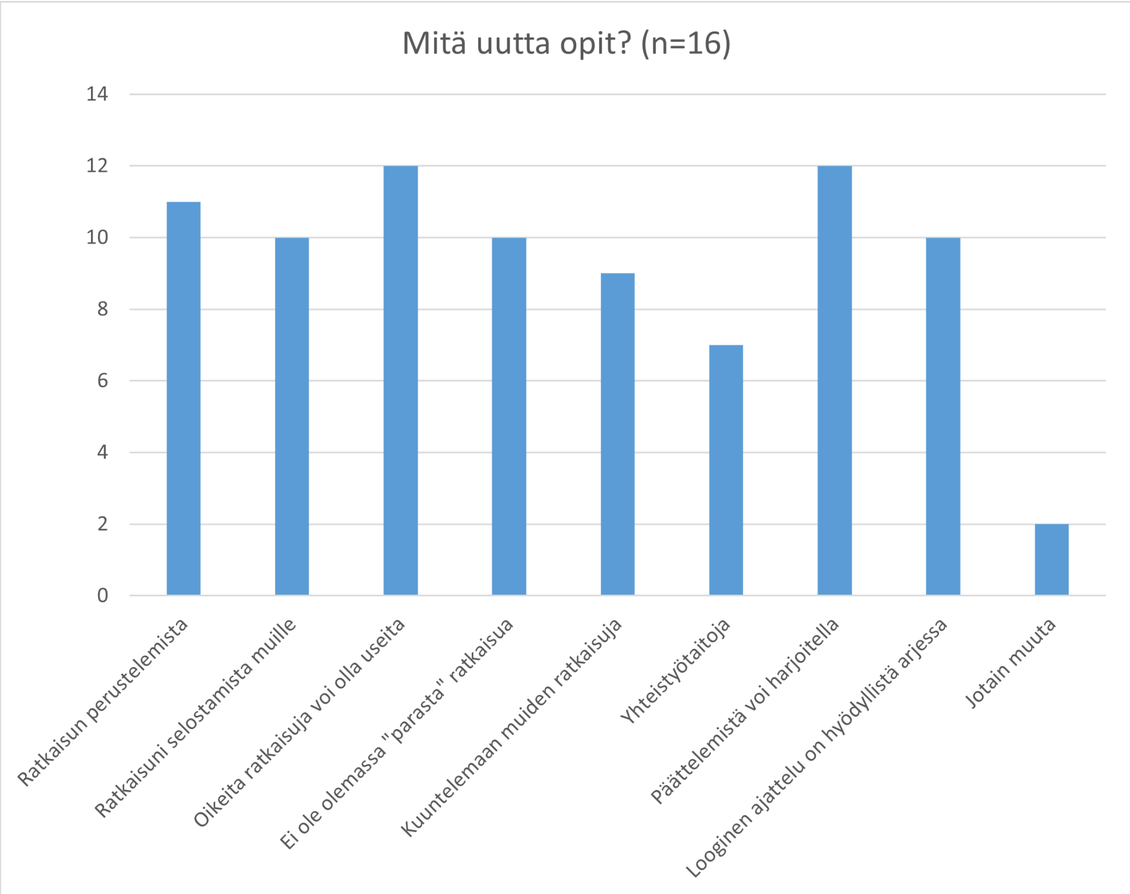
6.6 Oppiminen

Suurin osa oppilaista oli oppituntikohtaisissa kyselyissä samaa mieltä väittämän "*Opin uutta loogisesta ajattelusta*" kanssa (ks. taulukko 6.7). Ensimmäisellä tunnilla samaa mieltä oli 10 oppilasta, eri mieltä 4 oppilasta ja 2 ei osannut sanoa. Toisella tunnilla väitteen kanssa samaa mieltä oli 10 oppilasta ja eri mieltä vain 1 ja 3 ei osannut sanoa. Kolmannella tunnilla 11 ja neljännellä 12 oppilasta oli samaa mieltä uuden oppimisen väitteen kanssa. Eri mieltä olevia oppilaita ei kolmannella tunnilla ollut lainkaan ja neljännellä tunnilla vain yksi.

Taulukko 6.7 *Opin uutta loogisesta ajattelusta -väittämän vastaukset oppitunneittain.*

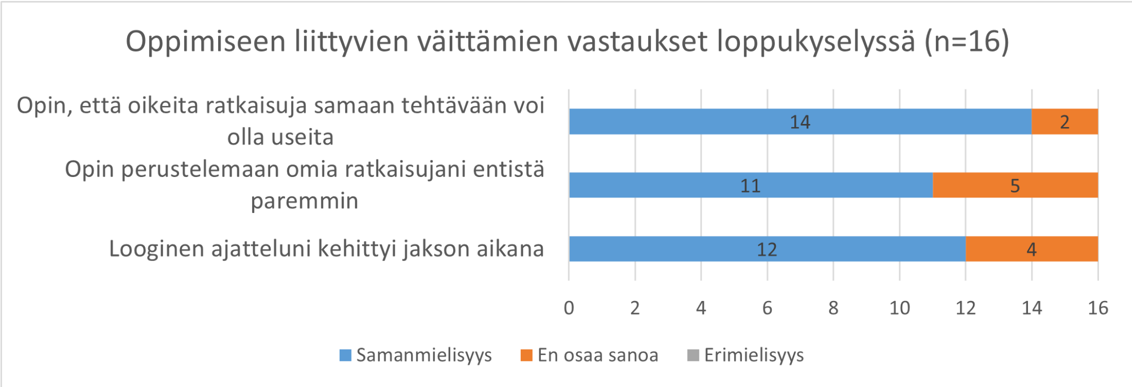
oppitunti	samaa mieltä	en osaa sanoa	eri mieltä	n
1	10	2	4	16
2	10	3	1	14
3	11	5	0	16
4	12	3	1	16
yhteensä	43	13	6	62

Loppukyselyssä 15 oppilasta kuudestatoista kertoi, että on omasta mielestään oppinut jotain uutta loogisesta ajattelusta *Matka logiikkaan* -tunneilla. Vain yksi oppilas koki, ettei ole oppinut mitään uutta. Oppilaat saivat myös tarkentaa, mitä kaikkea uutta ovat oppineet jakson aikana. Oppilaat saivat valita annetuista väitteistä kaikki ne, jotka olivat heidän kohdallaan totta. Vastaukset näihin väitteisiin on koottu kuvaan 6.4. Lähes kaikki vastaajat (12 vastaajaa kuudestatoista) kokivat oppineensa, että oikeita ratkaisuja voi olla useita ja että päättelemistä voi harjoitella. 11 oppilasta kuudestatoista koki oppineensa ratkaisun perustelemista. Omien ratkaisujen selostamista muille koki oppineensa 10 oppilasta. Yhtä monta oppilasta koki oppineensa myös, ettei tehtävissä aina ole olemassa ”parasta” ratkaisua ja että loogisesta ajattelusta on hyötyä arjessa. Oppilaat kokivat oppineensa myös muiden ratkaisujen kuuntelemista (9 oppilasta) ja yhteistyötaitoja (7 oppilasta).



Kuva 6.4 *Oppimiseen liittyvien väittämien vastaukset loppukyselyssä (n=16).*

Loppukyselyssä oli myös mielipideväittämiä, joiden teemana oli oppiminen. Nämä väitteet vastauksineen on koottu kuvaan 6.5 12 oppilasta kuudestatoista koki loogisen ajattelunsa kehittyneen jakson aikana, ja loput neljä eivät osanneet sanoa. Yksikään ei ollut sitä mieltä, että looginen ajattelu ei olisi kehittynyt jakson aikana. Lisäksi suurin osa oppilaista (14 oppilasta kuudestatoista) koki oppineensa, että samaan tehtävään voi olla useita oikeita ratkaisuja. Kukaan ei ollut eri mieltä tämänkään väittämän kanssa. Lisäksi 11 oppilasta kuudestatoista vastasi, että oppi jakson aikana perustelemaan omia ratkaisujaan entistä paremmin. Loput viisi eivät osanneet sanoa.



Kuva 6.5 *Oppilaiden vastaukset loppukyselyn oppimiseen liittyviin väittämiin.*

Yksikään oppilas ei ollut eri mieltä väittämien "*opin, että oikeita ratkaisuja samaan tehtävään voi olla useita*", "*opin perustelemaan omia ratkaisujani entistä paremmin*" ja "*looginen ajatteluni kehittyi jakson aikana*" kanssa loppukyselyssä.

7 Pohdinta

Tässä luvussa käydään läpi tutkimuksen tuloksia teoreettiseen viitekehykseen ja aiempiin tutkimuksiin verraten. Tarkastellaan, miten tutkimus onnistui vastaamaan tutkimuskysymyksiin sekä millaisia mahdollisuuksia ja haasteita tutkimukseen liittyy. Luvun lopulla käydään läpi tutkimuksen luotettavuutta sekä jatkotutkimusaiheita.

7.1 Materiaalin kehittämisen pedagogiset perustelut

Tässä luvussa tarkastellaan, millaisia valintoja tehtiin oppimateriaalia kehitettäessä ja millaisia pedagogisia perusteluja näiden takaa löytyy. Materiaalilla tarkoitetaan liitteestä B löytyvää *Matka logiikkaan* -materiaalia. Ensimmäisessä alaluvussa tarkastellaan materiaalin tehtäviä ja yleisellä tasolla materiaalin koostamisen aikana nousseita havaintoja ja ajatuksia. Toisessa alaluvussa keskitytään materiaalin kehittämisen haasteisiin.

7.1.1 Materiaalin tehtävät

Kuten luvussa 3.2.1 esiteltiin, ovat ongelmanratkaisutehtävät hyvä tapa kehittää loogista ajattelua. Materiaali sisältää sekä suljettuja että avoimia ongelmanratkaisutehtäviä. Suljetut ongelmanratkaisutehtävät ovat helpompia niille oppilaille, joiden on hankala hahmottaa tilannetta tai ottaa itse vapauksia tehtävän ratkaisemisessa. Avoimet ongelmanratkaisutehtävät taas mahdollistavat monet erilaiset ratkaisut, riippuen ratkaisun aikana tehdyistä lisäoletuksista.

Koko materiaali on jaettu kahteen osaan, loogisten palojen osuuteen (tunnit 1 ja 2) sekä sanallisten tehtävien osuuteen (tunnit 3 ja 4). Molemmissa osissa on sekä avoimia että suljettuja ongelmanratkaisutehtäviä. Ensimmäinen, loogisten palojen osa, sisältää mm. säännön etsimistä, virheen etsimistä ja korjaamista, jonon jatkamista, oman jonon sekä säännön keksimistä sekä tehtäviä, joissa pitää etsiä kaikki mahdolliset ratkaisut. Toinen, sanallisten tehtävien osuus, koostuu sanallisista tehtävistä, joihin annetaan sanallinen vastaus sekä sanallisista tehtävistä, joihin annetaan kuvallinen vastaus. Lisäksi monet sanalliset tehtävät sisältävät tehtävänantoa havainnollistavan kuvan.

Kielentämisen tiedetään jäsentävän ja kehittävän ajattelua (ks. luku 3.2.2). Kielentäminen näkyy tehtävissä kahdella tavalla. Parityöskentely ohjaa oppilaita suulliseen kielentämiseen ja perustelun pyytäminen osana vastausta ohjaa kirjalliseen kielentämiseen. Miksi -kysymyksiä esitettiin tutkijan toimesta tunneilla, mikäli oppilaan oli hankala kirjoittaa vastaukselleen perustelua. Kysymyksen kysyminen auttoi oppilasta jäsentämään omaa ajatteluaan ja monesti perustelu löytyi, kun sitä kysyi.

Matka logiikkaan -materiaaliin haluttiin kielentämisen lisäksi mukaan konkretiaa, joka luvun 3.3 mukaan helpottaa kognitiivista kuormaa ongelmanratkaisutehtäviä ratkoessa. Kahdella ensimmäisellä tunnilla oppilailla oli käytettävissään konkreettiset välineet, loogiset palat. Kolmannella ja neljännellä tunnilla konkreettisia välineitä ei ollut, mutta useissa tehtävissä oli tehtävänantoa havainnollistava kuva ja oppilaita kannustettiin myös itse piirtämään kuvia tilanteen hahmottamiseksi tai jopa osana ratkaisun perustelua.

Tehtäväpaketti päädyttiin koostamaan fyysiseksi, paperille tulostettavaksi paketiksi monesta eri syystä. Ensinäkin, fyysinen moniste mahdollistaa helpot, tutkijalle näkyvät apumerkinnät, joita oppilaat tekevät tehtävän ratkaisemisen aikana. Toiseksi fyysinen paperi on vielä tällä hetkellä oppilaille tutumpaa kuin tietokonetyöskentely, ja esimerkiksi apukuvien tai ratkaisun piirtäminen tietokoneella voi olla oppilaille liian hankalaa. Materiaalin tarkoituksena on keskittyä tehtävien ratkaisemiseen, eikä tietoteknisten haasteiden selättämiseen. Tehtävät voisivat silti toimia paremmin sähköisenä, mikäli oppilaat olisivat tottuneet käyttämään tietotekniikkaa matematiikan tunneilla ja käytettävä alusta mahdollistaisi kuvien piirtämisen helposti sekä eri muodoissa ratkaisun antamisen.

Tehtävätyypit muotoutuivat luvussa 3.1 esiteltyjen, opetussuunnitelmassa mainittujen tavoitteiden mukaisiksi. Tehtävätyypit sisältävät päättelyä ja perustelua, sääntöjen ja riippuvuuksien etsimistä ja esittämistä, vastausvaihtoehtojen lukumäärän pohtimista, väitelauseiden totuusarvojen päättelyä sekä todistamisen perusteita vapaamuotoisen perustelun keinoin. Tehtävätyypit vaikuttivat herättävän hyvää pohdintaa ja keskustelua tunneilla sekä parin kanssa, että tutkijalle tai opettajalle omaa ratkaisuehdotusta perusteltaessa.

7.1.2 Haasteet materiaalin kehittämisessä

Kuten missä tahansa päätöksenteossa, ei materiaalin kehittämisessäkään vältytty haasteilta. Ensimmäisenä haasteena oli tehtävien vaikeustason sovittaminen yläkoululaisille sopivaksi. Ongelmanratkaisutehtävien tiedetään olevan subjektiivisia (ks. luku 3.2.1), eikä tutkija voinut olla varma, mitkä tehtävät olisivat ongelmanratkaisutehtäviä oppilaille. Tutkija päätyi sisällyttämään jokaiselle oppitunnille monen tasoisia ja keskenään erilaisia tehtäviä. Näin on todennäköistä, että jokaiselle oppilaalle löytyy materiaalista oman tasoisia ja itselle uusia ongelmanratkaisutehtäviä.

Tehtävien vaikeustason arviointiin liittyy vahvasti tehtävänanto. Tehtävänannon kirjoittaminen yksinkertaiseksi, mutta selkeäksi ja lyhyeksi oli toinen haaste materiaalia kootessa. Tutkijan kokemuksen mukaan pitkät tehtävänannot voivat vaikuttaa negatiivisesti oppilaan motivaatioon, joten tehtävänanto yritettiin pitää lyhyenä. Tehtävänannon pituuden minimointia ei kuitenkaan tehty selkeyden kustannuksella, vaan tehtävänannosta pyrittiin muodostamaan sekä selkeä että lyhyt kokonaisuus. Tehtävänannot pääosin onnistuttiin muodostamaan oppilaiden näkökulmasta selkeiksi, mutta muutamia tehtävänantoja muokattiin vielä aineistonkeruun jälkeen.

Kolmantena haasteena materiaalia kehitettäessä oli se, ettei tutkija tuntenut oppilaita, eikä näin ollen tiennyt heidän mahdollisista erityistarpeistaan. Kielelliset vaikeudet näkyvät varsinkin sanallisten tehtävien ymmärtämättömyytenä ja hahmottamisen vaikeudet voivat myös hankaloittaa tehtävien tekemistä. Materiaalista päätettiin tehdä mahdollisimman selkeä siten, että opettaja voisi käyttää materiaalia omassa opetuksessaan oman harkinnan ja muokkausten jälkeen.

Neljäntenä haasteena oli muotoilla kysymykset siten, että kirjalliset perustelut saadaan mukaan ratkaisuun. Ongelmanratkaisutehtäviin on usein keskenään erilaisia ratkaisun perusteluja samaan tehtävään. Materiaalista haluttiin luoda sellainen, että se mahdollistaa kaikenlaiset perustelut. Oppilaalle pitää olla siis mahdollista perustella ratkaisunsa esimerkiksi tekstinä tai kuvana. Tutkijan kokemuksen mukaan kuitenkin perustelut jäävät usein uupumaan, mikäli perustelua pyydetään ainoastaan heti ongelman jälkeen ilman erillistä vastaustilaa. Tämän vuoksi päädyttiin siihen, että perusteluille on oma erillinen tilansa vastauspaperissa. Tämä ei lopulta kuitenkaan ratkaissut perustelemisen puuttumisen ongelmaa, sillä kirjallisia perusteluja puuttui tehtäväpapereista paljon.

7.2 Materiaalin soveltuminen yläkouluun

Tässä luvussa pohditaan *Matka logiikkaan* -materiaalin soveltumista yläkoulun matematiikan oppitunneille tutkimustulosten perusteella. Soveltumista matematiikan opetukseen lähestytään oppilaiden motivaation, tehtävien vaikeustason, uuden oppimisen sekä oppilaiden mielipiteiden näkökulmista.

Matka logiikkaan -oppimateriaali soveltuu yläkoulun matematiikan oppitunneille pääosin hyvin. Materiaalissa on kuitenkin kehitettävääkin. Materiaalia testatessa huomattiin, että jokaisella oppitunnilla oli liikaa tehtäviä. Tämän vuoksi jokaisen oppitunnin tehtäviin kannattaisi varata kaksi 45 minuutin oppituntia. Yhteensä *Matka logiikkaan* -jaksoon kannattaa käyttää siis kahdeksan 45 minuutin mittaista oppituntia.

Havainnointiaineiston pohjalta materiaalin tehtävänantoja muokattiin yksikäsitteisempään ja yksinkertaisempaan suuntaan. Esimerkiksi sukkatehtävässä etsittiin pienintä sukkien nostamisen määrää. Motivaation kannalta tehtävänannon ymmärtäminen oli tärkeää, sillä osa oppilaista kadotti motivaationsa, kun joutui kysymään apua epäselvään tehtävänantoon. Tehtävänantojen selkeyttämisen tarpeet näkyivät myös virhetyypeissä. Osa tehtävänannoista oli ymmärretty väärin useasti ja tällaisia tehtävänantoja muokattiin selkeämmiksi testaamisen jälkeen.

Oppilaiden motivaatio vaikutti sekä havainnointiaineiston että kyselyiden perusteella hyvältä, materiaali sai hyviä arvosanoja ja oppilaat kokivat myös oppineensa uutta loogisesta ajattelusta. Kuten mikään materiaali, ei *Matka logiikkaan* -materiaalikaan ole täydellinen. Osa oppilaista oli motivoituneempia kuin toiset, ja osalla vastausten kirjalliset perustelut jäivät vaillinaisiksi tai puuttuivat jopa kokonaan. *Matka logiikkaan* -tunneilla oli kuitenkin paljon ratkaisujen suullista kielentämistä, joten on erittäin mahdollista, että oppilaiden looginen ajattelu kehittyi jakson aikana.

Havainnoinnissa huomattiin, että yksi oppilaan mielestä ratkaistu tehtävä motivoi yrittämään seuraaviakin tehtäviä. Tämän vuoksi on tärkeää, että ensimmäiset tehtävät olisivat tarpeeksi selkeitä ja että oppilailla olisi mahdollisuus saada ratkaistua ainakin pari ensimmäistä tehtävää.

Tutkimuksessa huomattiin, että oppilailta puuttui vastauksen perusteluja vastauspapereista, vaikka suullisia perusteluja kuului tunneilla melko paljon. Tämä ei silti ole yllättävää, sillä kuten luvussa 3 mainittiin, on kirjallinen kielentäminen hieman suullista kielentämistä haastavampaa.

7.2.1 Motivaatio

Kuten luvussa 3.3 esiteltiin, on motivaatio ja kiinnostus suuressa roolissa ajattelun kehittymisessä. On siis tärkeää tietää, millaisena oppilaiden motivaatio näyttäytyi oppituntien aikana. Keskimäärin oppilaat olivat tuntien aikana motivoituneita. Oppilaat arvioivat myös itse olleensa motivoituneita tuntien aikana. Tunnit saivat myös hyvät arvosanat, jotka heijastavat oppilaiden tyytyväisyyttä ja sitä myötä myös motivaatiota.

Opeteltavan asian tärkeys vaikuttaa positiivisesti motivaatioon. Alku- ja loppukyselyn välillä esimerkit siitä, mihin loogista ajattelua tarvitaan arjessa, olivat melko samoja. Jakson aikana oppilaiden ajatus siitä, mihin loogista ajattelua tarvitaan arjessa, ei selkeytynyt. Oppilaat kuitenkin kokivat loogisen ajattelun kehittämisen tärkeäksi, vaikka eivät välttämättä osanneet alku- tai loppukyselyssä sanoa, mihin loogista ajattelua tarvitaan arjessa.

Motivaatioon vaikuttaa myös tehtävien selkeys (ks. 3.2). Jos tehtävänanto on epäselvä, ei oppilas tiedä mitä häneltä odotetaan ja se vaikuttaa negatiivisesti motivaatioon. Tehtävänannot koettiin riittävän selkeiksi ja parin kanssa työskenteleminen mielekkääksi. Parityöskentelyn mielekkyyteen voi vaikuttaa myös se, että usein matematiikan tunnit kouluissa sisältävät paljon itsenäistä tekemistä. Parin kanssa tehtävistä keskusteleminen ruokkii oppilaan sosiaalisuutta ja tehtävien tekeminen yhdessä ei välttämättä tunnu yhtä raskaalta.

7.2.2 Tehtävien vaikeustaso

Oman päättelykyvyn esittäminen vaatii, että oppilailla on tarvittava ennakkotieto tehtävän ratkaisemiseen ja asiayhteys on jokseenkin tuttu ja turvallinen (ks. luku 3.2). Tehtävien tulee olla siis vaikeusasteeltaan sopivia, eli sellaisia, että oppilas joutuu ajattelemaan, mutta saa kuitenkin tehtävään jonkinlaisen ratkaisun. Tehtävät olivat suurimmaksi osaksi oppilaiden mielestä sopivia tai helppoja. Ensimmäisen tunnin tehtävät olivat oppilaiden mielestä helpoimpia, ja kolmannen tunnin tehtävät sopivimpia. Virheellisten vastausten lukumäärän perusteella voidaan myös arvioida tehtävien olleen sopivan haastavia oppilaille. Materiaaliin jäi myös useita tehtäviä, joiden vaikeustasoa ei testattu, sillä kukaan oppilas ei ehtinyt tehdä niitä.

Tehtävien vaikeustasoon vaikuttaa useat tekijät, esimerkiksi oppilaiden tausta. Oppilasryhmänsä hyvin tunteva opettaja voisi eriyttää oppilaita antamalla heille eri tasoisia tehtäviä. Tähän ei ollut kuitenkaan mahdollisuutta tämän tutkimuksen aikana, sillä oppilasryhmä ei ollut entuudestaan tuttu tutkijalle.

Oppilaiden mielestä omia ratkaisuja oli helppo selittää parille ja parin selittämiä ratkaisuja oli helppo ymmärtää. Tämä kertoo myös siitä, että tehtävien vaikeustaso ei ollut liian haastava. Jos tehtävät olisivat olleet aivan liian haastavia, ei ratkaisun selittäminen olisi tuntunut helpolta.

Ratkaisujen kirjalliset perustelut jäivät monella kuitenkin uupumaan, vaikka suullinen perustelu koettiin helpoksi. Tämä ei kuitenkaan ole yllättävää, sillä kirjallisen kielentämisen tiedetään olevan hieman haastavampaa kuin suullinen kielentäminen. Lisäksi useat oppilaat kokivat, että monisteeseen pitäisi perustelu kirjoittaa ”tietyssä muodossa”, eivätkä ehkä kokeneet suullisen selityksen olevan riittävän ”oikeellinen” perustelu. Oppilaiden kanssa olisi hyvä käydä läpi monenlaisia tapoja ratkaisun perusteluun. Perustelun tärkeyttä matematiikassa pitäisi myös vahvistaa, sillä oppilailla oli selvästi ajatus siitä, että perustelu ei ole yhtä tärkeä kuin vastaus, sillä vastauksen kirjoittamisen jälkeen perusteluosuus jätettiin huomiotta. Voi myös olla, että perustelu koetaan ”vapaaehtoiseksi lisätehtäväksi”, jos perustelemista ei olla ajateltu tärkeänä osana ratkaisua.

Tehtävien vaikeustason voidaan ajatella olleen sopiva myös virheellisten vastausten lukumäärien perusteella. Virheellisten vastausten prosentuaalinen osuus vastauksista vaihteli tunneilla 14 prosentista 31 prosenttiin. Prosentuaalisesti eniten virheitä tuli neljännellä oppitunnilla. Prosenttiosuuden korkeaan lukemaan vaikuttaa se, että neljännen tunnin tehtävät olivat tutkijan arvion mukaan kognitiivisesti haastavampia kuin aiempien tuntien tehtävät. Lisäksi neljännen tunnin tehtävissä oli vähemmän alakohtia kuin muilla oppitunneilla, joten yksittäinen väärä vastaus vaikutti prosenttiosuuteen suhteellisesti enemmän kuin muilla oppitunneilla. Saman syyn vuoksi neljännellä tunnilla oli vähiten yritettyjä tehtäviä. Virheellisten vastausten kohtuullinen määrä kertoo siitä, että tehtävät olivat sopivan tasoisia oppilasryhmälle. Liian helppojen tehtävien kohdalla virheitä ei olisi tullut ja liian vaikeiden tehtävien kohdalla virheprosentti olisi merkittävän korkea.

7.2.3 Uuden oppiminen

Oppimateriaalin tarkoituksena on luoda tilanteita, joissa oppiminen on mahdollista (ks. luku 3.3). Tutkimustulosten perusteella voidaan päätellä, että *Matka logiikkaan* -materiaali mahdollistaa uuden oppimisen.

Lähes kaikki oppilaat kokivat oppineensa uutta loogisesta ajattelusta. Uuden oppiminen näkyi myös oppilaiden suullisissa perusteluissa, sillä ne kehittyivät tutkijan mielestä melko paljon jakson aikana. Jakson aikana oppilaat kokivat oppineensa, että päättelemistä voi harjoitella. Tämä on positiivinen tutkimustulos, sillä usko omaan suoriutumiseen on tärkeää yrittämisen ja motivaation kannalta.

Moni oppilaista uskoi oppineensa myös ratkaisun perustelemista. Tämä näkyi selvästi myös tutkijan keräämässä havainnointiaineistossa, sillä suulliset perustelut kehittyivät jakson aikana. Vaikka kirjalliset perustelut uupuivat monelta oppilaalta vielä viimeiselläkin oppitunnilla, on havainnoinnin pohjalta perusteltua uskoa, että ratkaisun perustelemisen taito kehittyi monella oppilaalla. Parityöskentelyn taidot, omien ratkaisujen selostaminen muille sekä muiden ratkaisujen kuunteleminen kehittyivät myös suuren osan mielestä. Opetussuunnitelmassa perustelemisen ja kommunikaation taidot ovat tärkeitä, ja edellä mainintut opitut asiat lukeutuvat kommunikaatioon.

Loogisen ajattelun oppimateriaalin tarkoituksena oli kehittää loogiseen ajatteluun kuuluvia osataitoja, kuten päättelemistä, perustelemista ja kommunikaatiota, sillä logiikan sisältöjä ei yläkoulussa vielä opeteta. Tutkimustuloksiin nojaten on perusteltua olettaa, että materiaali saavutti tämän tavoitteen ainakin osittain.

7.2.4 Oppilaiden mielipiteet

Sekä havainnointiaineiston että kyselyiden vastausten perusteella oppilaat kokivat materiaalin hyväksi. Materiaalin arvosanat olivat keskimäärin kiitettäviä, ja oppilaat vaikuttivat tunneilla motivoituneilta tehtävien ratkaisemiseen. Oppilaiden mielestä mielenkiintoisin tunti oli kolmas tunti. Vahvistusta tälle päätelmälle antaa myös kyseisellä tunnilla yritettyjen tehtävien lukumäärä, joka on toisiksi korkein kaikista tunneista.

Suurin osa oppilaista koki materiaalin tehtävien tekemisen mieluisaksi ja myös yhdessä tekeminen koettiin miellyttävänä. Myös tuntien läksyttömyys oli muutamien oppilaiden mielestä kivaa. Negatiivisia kommentteja materiaalista tai oppitunneista tuli vähän. On kuitenkin hyvä muistaa, että kriittisen palautteen antaminen voi tuntua vaikealta, kun oppilaan tulisi vieraalle, häntä vanhemmalle tutkijalle antaa palautetta. Muutamia kehitysehdotuksia kuitenkin tuli, vaikka osa niistäkin oli verhottu oman osaamisen tai omien mielipiteiden taakse.

Yleisesti materiaalia sekä tunteja kuvailtiin kuitenkin todella positiivisesti ”kivaksi”, ”hyväksi”, ”hauskaksi” ja ”rennoksi”. Oppilaat tiesivät tutkijan koonneen materiaalin itse, ja tämäkin voi vaikuttaa oppilaiden kohteliaaseen palautteenantoon. Tällaisten kommenttien perusteella voidaan silti perustellusti päätellä, että oppilaiden mielestä materiaali oli keskimäärin hyvä.

7.3 Tutkimustulosten luotettavuus, tutkimuksen rajoitteet ja jatkotutkimusaiheet

Laadullisen tutkimuksen luotettavuutta voidaan tarkastella validiuden sekä reliaabeliuden kautta. Validius tarkoittaa sitä, että tutkimuksen kohteena oleva ilmiö on määritelty eheästi siten, että tutkimuksen menetelmät tukevat määritelmää. Reliaabelius tarkoittaa sitä, että eri mittaukset tuottavat samansuuntaisia tuloksia. Lisäksi tutkimusetiikka vaikuttaa tutkimuksen luotettavuuteen. (Puusa & Juuti 2020)

Tämän tutkimuksen luotettavuutta tarkasteltaessa validiuden arviointi liittyy tutkittavan ilmiön, loogisen ajattelun kehittämisen yläkoulun oppimateriaalin, määrittelyyn. Loogisen ajattelun kehittäminen on määritelty luvussa 3. Samassa luvussa on esitelty, miten loogisen ajattelun kehittäminen esiintyy yläkoulun opetussuunnitelmissa sekä yläkoulun oppikirjoissa. Tutkimuksen kohteena oleva ilmiö on siis kuvailtu selkeästi jo teoreettisessa viitekehyksessä.

Reliaabeliuden tarkastelu on haasteellista kehittämistutkimuksellisen tutkimusotteen vuoksi. Vaikka kehittämistutkimuksella pyritään myös tieteellisen tiedon luomiseen, on itse kehitettävä materiaali suuressa roolissa. Kehittämistutkimuksia oppimateriaaleihin on saatavilla useita (ks. luku 5), mutta spesifisti yläkoulun loogisen ajattelun kehittämisen oppimateriaaliin kehittämistutkimusta ei olla tehty. Täysin vertailukelpoisia tutkimustuloksia ei siis ole saatavilla. Kehittämistutkimuksen tutkimustulokset ovat kuitenkin samansuuntaisia teoreettisessa viitekehyksessä (ks. luku 3) esitettyjen ajattelun kehittämisen ja oppimateriaalin tutkimusten tutkimustulosten kanssa.

Tutkimusetiikka otettiin huomioon koko tutkimuksen tekemisen aikana. Tutkimusluvat kysyttiin asianmukaisesti kunnalta sekä oppilailta ja heidän vanhemmiltaan. Tutkimuksen osallistujat anonymisoitiin, eikä tutkimustuloksista voida yksilöidä osallistujia. Osallistujilla oli myös mahdollisuus kieltäytyä tutkimukseen osallistumisesta missä tahansa vaiheessa tutkimusta. Tutkimusaineistoa käsiteltiin GDPR-asetuksen mukaisesti ja se poistettiin heti, kun sitä ei tutkimukseen enää tarvittu.

Kuten kaikkiin tutkimuksiin, liittyy tähänkin rajoitteita. Havainnointiaineistoa keräsi vain yksi henkilö (tutkija itse) ja havainnointi tapahtui tunnin pitämisen ohella. Havainnoinnista pyrittiin silti saamaan mahdollisimman objektiivista. Oppilaiden mielipidekyselyt toteutettiin oppituntien lopulla. Tämä saatta vaikuttaa oppilaiden vastauksiin, sillä usein oppilailla on kiire pois tunnilta. Tätä pyrittiin estämään kuitenkin siten, ettei luokasta saanut poistua heti kyselyyn vastattuaan. Kyselyjen vastauksissa on myös hyvä huomioida vastaajien ikä. Osa kyselyjen vastauksista olivat sellaisia, jotka eivät liittyneet kysymykseen mitenkään, esimerkiksi vastaukset "Hyvää joulua" tai "Moikka". Tällaisia irrelevantteja vastauksia oli kuitenkin verrattaen pieni määrä vastauksista.

Tutkimuksen teon aikana nousi useita jatkotutkimusaiheita. Ensinnäkin, materiaaliin jäi tehtäviä, joita ei ehditty tunneilla testata. Materiaalia olisi hyvä kehittää eteenpäin kokeilemalla sitä useamman luokan kanssa siten, että koko jaksoon käytetään kahdeksan 45 minuutin oppituntia. Materiaalin vaikuttavuutta olisi myös mielenkiintoista tutkia. Tässä tutkimuksessa keskityttiin oppilaiden mielipiteisiin sekä heidän kokemuksiinsa esimerkiksi uuden oppimisesta. Loogisen ajattelun tasoa voisi mitata ennen ja jälkeen jakson, jotta saataisiin objektiivista näyttöä uuden oppimisesta jakson aikana. Lisäksi materiaalia voisi kehittää soveltuvammaksi erilaisille oppilaille siten, että materiaali huomioisi mm. kielelliset, hahmottamisen sekä toiminnanohjauksen haasteet.

Lähteet

Ahola, N. (2014), Ongelmanratkaisutehtävät peruskoulun viidennen luokan oppikirjoissa, Kandidaatintutkielma, Turun yliopisto.

Aksela, M. & Pernaa, J. (2013), Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä, *in* ‘Kehittämistutkimus opetusalalla’, PS-kustannus, pp. 181–200.

Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2018), Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä, *in* ‘Matematiikan opetus ja oppiminen’, Niilo Mäki Instituutti, pp. 54–69.

Clarkson, P. C. (2003), Language, logical thinking and communication in school mathematics: Whose responsibility?, *in* ‘Studies in science, mathematics ans technical education’, Brunei Darussalam: Universiti Brunei Darussalam, pp. 99–116. `https://www.researchgate.net/profile/Philip-Clarkson/publication/242663372_LANGUAGE_LOGICAL_THINKING_AND_COMMUNICATION_IN_SCHOOL_MATHEMATICS_WHOSE_RESPONSIBILITY/links/0c960533b34e685b5e000000/LANGUAGE-LOGICAL-THINKING-AND-COMMUNICATION-IN-SCHOOL-MATHEMATICS-WHOSE-RESPON` `pdf`, (viitattu 12.6.2022).

Jaakkola, R., Janhunen, T., Kuusisto, A., Rankooh, M. F. & Vilander, M. (2022), ‘Explainability via short formulas: the case of propositional logic with implementation’, *CoRR abs/2209.01403* **Preprint, to appear in the proceedings of the 29th RCRA workshop on Experimental evaluation of algorithms for solving problems with combinatorial explosion (RCRA 2022)**.
URL: *https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.01403*

Joutsenlahti, J. (2003), Kielentäminen matematiikan opiskelussa, *in* ‘Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003’, Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72, pp. 188–196.

Joutsenlahti, J. (2005), Lukiolaisen tehtäväoritentoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä., PhD thesis, Tampereen yliopisto (väitöskirja). `https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/67453/951-44-6204-1.pdf?sequence=1&isAllowed=y` (viitattu 5.7.2022).

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015), *Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa*, number 8 *in* ‘Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja’, pp. 45–62.

Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018), Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa, *in* ‘Matematiikan opetus ja oppiminen’, Niilo Mäki Instituutti, pp. 410–431.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2007), Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa?, *in* 'Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet. Ainedidaktinen symposium 9.2.2007', Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:77. Turun opettajankoulutuslaitos., pp. 184–191.

Juuti, K. & Lavonen, J. (2006), 'Design-based research in science education: One step towards methodology', *Nordic studies in science education* **2**(2), 54–68. `https://journals.uio.no/nordina/article/view/424/486`.

Järvinen, R. (2003), *Loogiset palat. Opettajan käsikirja.*, Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki.

Kananen, J. (2012), *Kehittämistutkimus opinnäytetyönä. Kehittämistutkimuksen kirjoittamisen käytännön opas.*, Jyväskylän ammattikorkeakoulu.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001), *Adding it up: Helping children learn mathematics*, National Academies Press. `https://ebookcentral.proquest.com/lib/tampere/reader.action?docID=3375421#ppg=36`, viitattu 27.9.2022.

Kupari, P. & Hiltunen, J. (2018), Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa, *in* 'Matematiikan opetus ja oppiminen', Niilo Mäki Instituutti, pp. 16–52.

Laine, A., Huhtala, S. & Kaasila, R. (2018), Jakolaskun oppimisesta ja oppimisen ongelmista, *in* 'Matematiikan opetus ja oppiminen', Niilo Mäki Instituutti, pp. 70–85.

Laine, A., Näveri, L., Ahtee, M. & Pehkonen, E. (2014), 'Development of finnish elementary pupils' problem-solving skills in mathematics', *CEPS journal* **4**, 111–129.

Leinonen, J. (2018), Matematiikan ymmärtämisestä - käsitteistä käytäntöön, PhD thesis, Lapin yliopisto. `https://lauda.ulapland.fi/bitstream/handle/10024/63282/Leinonen_Jorma_ActaE_238_pdfA.pdf?sequence=1&isAllowed=y` (viitattu 5.8.2022).

Leppäaho, H. (2018), Ongelmanratkaisun opettamisesta, *in* 'Matematiikan opetus ja oppiminen', Niilo Mäki Instituutti, pp. 368–393.

Lähteenmäki, Y. (2019), Kehittämistutkimus: matematiikan hiihtolomakurssi yhdeksäsluokkalaisille, Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto. `https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/118353/L%c3%a4hteenm%c3%a4kiYk%c3%a4.pdf?sequence=5&isAllowed=y`, (viitattu 1.7.2022).

Metsämuuronen, J. & Nousiainen, S. (2021), 'Matematiikkaa covid-19-pandemian varjossa. matematiikan osaaminen 9. luokan lopussa keväällä 2021', *Karvi, Julkaisut* **27**. https://karvi.fi/wp-content/uploads/2021/12/KARVI_2721.pdf (viitattu 14.8.2022).

Nuutinen, E. (2022), Pakopeli kirstussa - pakopelipedagogiikka matematiikan opetuksessa, Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto. https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/138051/NuutinenEmmi.pdf?sequence=2&isAllowed=y#page=25&zoom=100,109,94 (viitattu 1.7.2022).

Opetushallitus (2014), 'Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet'. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf (viitattu 13.6.2022).

Opetushallitus (2019), 'Lukion opetussuunnitelman perusteet'. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf (viitattu 3.8.2022).

Pehkonen, E. & Rossi, M. (2018), *Hyvää matematiikan opetusta etsimässä*, MFKA-Kustannus Oy.

Perkkilä, P. (2002), Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa, *in* 'Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa', Jyväskylä studies in education, psychology and social research, 195, Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä.

Perkkilä, P. & Joutsenlahti, J. (2022), 'Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana', *Dimensio* . https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/ (viitattu 3.8.2022).

Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V.-M. (2018), Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta, *in* 'Matematiikan opetus ja oppiminen', Niilo Mäki Instituutti, pp. 344–367.

Pernaa, J. (2013), Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä, *in* 'Kehittämistutkimus opetusalalla', PS-kustannus, pp. 9–26.

Priest, G. (2008), *An introduction to non-classical logic: From if to is*, Cambridge University Press. https://users.fmi.uni-jena.de/~mundhenk/Webseite/FDE/PriestAuszug.pdf (viitattu 30.6.2022).

Puusa, A. & Juuti, P. t. (2020), *Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät*, Helsinki: Gaudeamus.

Rosenberg, M. (2019), Kirjalliseen kielentämiseen johtavat murtolukutehtävät alakoulussa, Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto. https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/105567/1556792472.pdf?sequence=1&isAllowed=y, (viitattu 1.7.2022).

Schoenfeld, A. H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, Academic Press: Orlando, Florida.

Smullyan, R. (2008), *Mikä tämän kirjan nimi on?*, Terra Cognita.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018), *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*, Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki. Uudistettu laitos.

van Dalen, D. (2008), *Logic and structure*, Vol. 4, Springer. https://www.lri.fr/~wolff/teach-material/2018-19/M2-CSMR/vanDalen.pdf (viitattu 30.6.2022).

LIITE A. Neljännen tunnin kyselylomake

Matka logiikkaan - Oppitunti 4 ja loppukysely

Vastaathan alla oleviin kysymyksiin rehellisesti. Vastauksia käytetään nimettömänä materiaalin kehittämiseen.

* Pakollinen

Oppitunti 4

1. Oppilastunnus (löytyy monisteen yläreunasta) *

2. Mitkä tehtävät sait ratkaistua (yhdessä tai parin kanssa) tunnin aikana? *

- [ ] Tehtävä 1: Liisa unohduksien metsässä
- [ ] Tehtävä 2: Kuningattaret laudalle
- [ ] Tehtävä 3: Kuninkaan aarre
- [ ] Tehtävä 4: Rikostutkija Rimpula
- [ ] Tehtävä 5: Myöntyväinen kuningas
- [ ] Tehtävä 6: Ketä katselen?

3. Kuinka helppoja tai vaikeita tehtävät olivat sinulle?

	Aivan liian helppo	Vähän liian helppo	Sopiva	Vähän liian vaikea	Aivan liian vaikea	En yrittänyt tehtävää
Tehtävä 1: Liisa unohduksien metsässä	○	○	○	○	○	○
Tehtävä 2: Kuningattaret laudalle	○	○	○	○	○	○
Tehtävä 3: Kuninkaan aarre	○	○	○	○	○	○
Tehtävä 4: Rikostutkija Rimpula	○	○	○	○	○	○
Tehtävä 5: Myöntyväine n kuningas	○	○	○	○	○	○
Tehtävä 6: Ketä katselen?	○	○	○	○	○	○

4. Järjestä tunnin tehtävät mielenkiintoisimmasta tylsimpään.
Raahaa mielenkiintoisin tehtävä ylimmäksi. *

- Tehtävä 1: Liisa unohduksien metsässä
- Tehtävä 2: Kuningattaret laudalle
- Tehtävä 3: Kuninkaan aarre
- Tehtävä 4: Rikostutkija Rimpula
- Tehtävä 5: Myöntyväinen kuningas
- Tehtävä 6: Ketä katselen?

5. Lue väittämät ja merkitse, oletko samaa vai eri mieltä niiden kanssa. *

	Samaa mieltä	Osittain samaa mieltä	En osaa sanoa	Osittain eri mieltä	Eri mieltä
Omien ratkaisujen selittäminen parille oli helppoa	○	○	○	○	○
Ratkaisun perustelu oli helppo keksiä	○	○	○	○	○
Muiden oppilaiden ratkaisuja oli helppo ymmärtää	○	○	○	○	○
Opin uutta loogisesta ajattelusta	○	○	○	○	○

6. Kuinka monta tähteä antaisit oppitunnin tehtäville? (1 on huonoin ja 5 on paras) *

☆ ☆ ☆ ☆ ☆

7. Vapaa sana

esim.
Oliko materiaalissa jokin erityisen mielenkiintoinen tehtävä?
Millaisia tehtäviä olisit halunnut lisää?

Loppukysely

8. Mitä looginen ajattelu mielestäsi tarkoittaa? *

9. Missä arkielämän tilanteissa tarvitaan loogista ajattelua? Anna vähintään yksi esimerkki. *

10. Mille tunneille osallistuit? Valitse kaikki, joiden aikana olit tunnilla. *

- [ ] Loogisten palojen ominaisuudet ja totuus (Oppitunti 1, perjantai)
- [ ] Jonoja ja ryhmiä loogisilla paloilla (Oppitunti 2, maanantai)
- [ ] Sanallisten tehtävien päättelyä (Oppitunti 3, torstai)
- [ ] Päättelyä sanoista ja kuvista (Oppitunti 4, perjantai)

11. Järjestä tunnit mielenkiintoisimmasta tylsimpään. *

- Loogisten palojen ominaisuudet ja totuus (Oppitunti 1)
- Jonoja ja ryhmiä loogisilla paloilla (Oppitunti 2)
- Sanallisten tehtävien päättelyä (Oppitunti 3)
- Päättelyä sanoista ja kuvista (Oppitunti 4)

12. Opin Matka logiikkaan -tunneilla jotain uutta loogisesta ajattelusta. *

- ◯ Kyllä
- ◯ En

13. Mitä uutta opit? Valitse kaikki sopivat väitteet. *

- ☐ Ratkaisun perustelemista
- ☐ Ratkaisuni selostamista muille
- ☐ Oikeita ratkaisuja voi olla useita
- ☐ Ei ole olemassa "parasta" ratkaisua
- ☐ Kuuntelemaan muiden ratkaisuja
- ☐ Yhteistyötaitoja
- ☐ Päättelemistä voi harjoitella
- ☐ Looginen ajattelu on hyödyllistä arjessa
- ☐ Jotain muuta

14. Mikä esti sinua oppimasta? Valitse kaikki sopivat väitteet. *

- [ ] Tehtävät olivat liian vaikeita
- [ ] Tehtävät olivat liian helppoja
- [ ] Parityöskentely ei onnistunut
- [ ] Minua ei kiinnostanut
- [ ] Olin väsynyt
- [ ] Olen matematiikassa huono
- [ ] Tehtävät olivat epäselviä
- [ ] Luokassa oli liikaa hälinää
- [ ] Tehtävät tuntuivat turhilta
- [ ] En ymmärtänyt tehtäviä, vaikka sain apua
- [ ] Jokin muu syy/en tiedä

15. Mikä muu esti oppimistasi? *

16. Mitä muuta opit loogisesta ajattelusta? *

17. Lue väittämät. Valitse, oletko väittämän kanssa samaa vai eri mieltä. *

	Samaa mieltä	Osittain samaa mieltä	En osaa sanoa	Osittain eri mieltä	Eri mieltä

Tehtävät olivat motivoivia minulle					
Looginen ajatteluni kehittyi jakson aikana					
Loogisen ajattelun tehtäviä tulisi olla enemmän matematiikan oppikirjoissa					
Tarvitsin paljon apua					
Tehtävänannot olivat selkeitä					
Opin, että oikeita ratkaisuja samaan tehtävään voi olla useita					
Tein tehtäviä mielelläni					
Minusta oli kiva tehdä tehtäviä yhdessä luokkakaverin kanssa					
Opin perustelemaan omia ratkaisujani entistä paremmin					
Loogista ajattelua on tärkeä kehittää					

18. Kuinka monta tähteä antaisit *Matka logiikkaan* -tunneille yhteensä? (1 on huonoin ja 5 on paras) *

19. Vapaa sana

Terveisiä tai palautetta materiaalista tai oppitunneista.

LIITE B. Matka logiikkaan -oppimateriaali

Matka logiikkaan
Oppitunti 1 Oppilastunnus:____________________

Loogisten palojen ominaisuudet ja totuus

Tehdään yhdessä: Tutustutaan loogisten palojen ominaisuuksiin

Täydennä taulukko ohjeiden perusteella.

ominaisuus	vaihtoehdot

Tehtävä 1: Arvaa pala!

Pelissä on kysyjän ja vastaajan roolit.

Vastaaja valitsee pelin aluksi yhden loogisen palan ja painaa sen mieleensä. Kysyjän tehtävänä on yrittää päätellä, minkä palan vastaaja on valinnut. Päättelyn apuna kysyjä saa käyttää kysymyksiä, joihin vastaaja vastaa ainoastaan ”kyllä” tai ”ei”. Väärät arvaukset lasketaan kysymyksiksi. Ympyröi taulukosta oma roolisi pelissä. Laskekaa, kuinka monta kysymystä käytettiin ennen oikeaa vastausta ja merkatkaa ne taulukkoon. Vaihtakaa tämän jälkeen rooleja. Pelatkaa peliä yhteensä 6 kertaa.

	peli 1	peli 2	peli 3	peli 4	peli 5	peli 6
roolini	kysyjä vastaaja	kysyjä vastaaja	kysyjä vastaaja	kysyjä vastaaja	kysyjä vastaaja	kysyjä vastaaja
kysymysten lukumäärä						

Pohtikaa pelien jälkeen yhdessä, millaisia kysymyksiä pelissä kannattaa kysyä. Miksi?

____

____

____

____

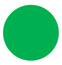
Matka logiikkaan
Oppitunti 1

Tehtävä 2a: Onko väite tosi?

Arvioi, onko annettu väite annetulle palalle tosi vai epätosi. Merkitse vastaus rastilla oikeaan sarakkeeseen. Ympyröi väitteestä epätodet kohdat.

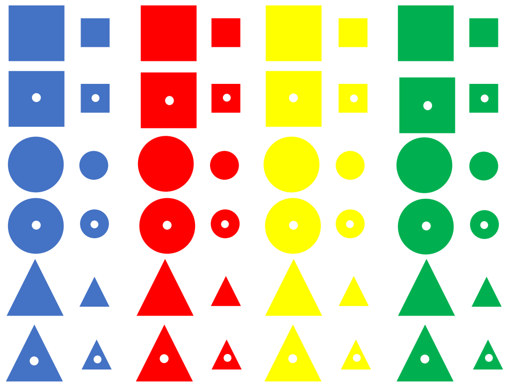
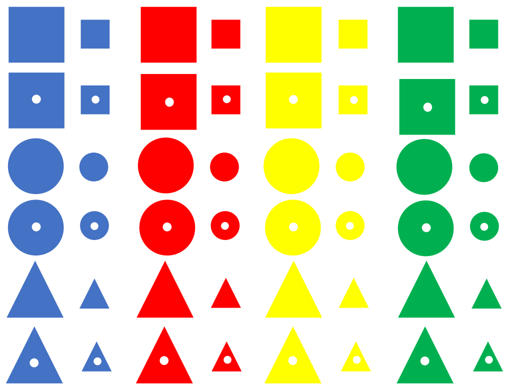
Esimerkki:

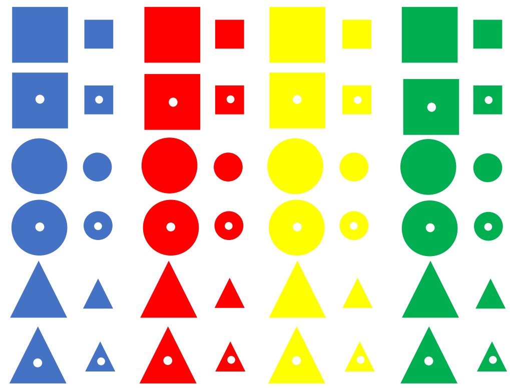
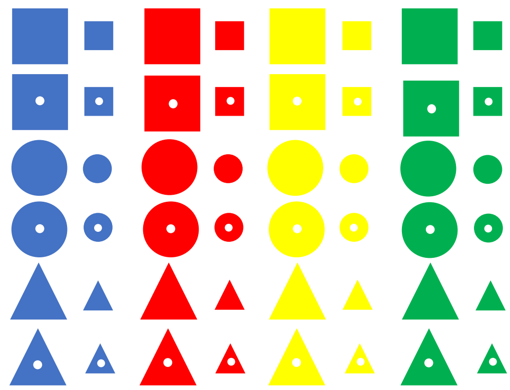
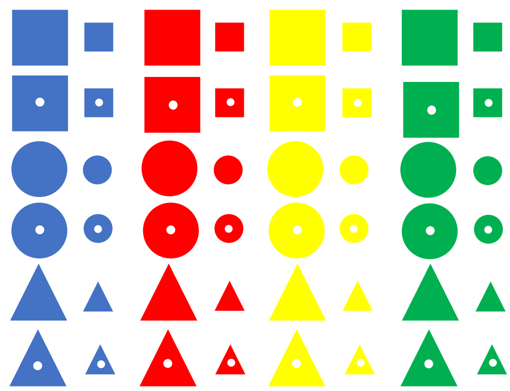
pala	väite	tosi	epätosi
	Pala on punainen ja pieni.		X

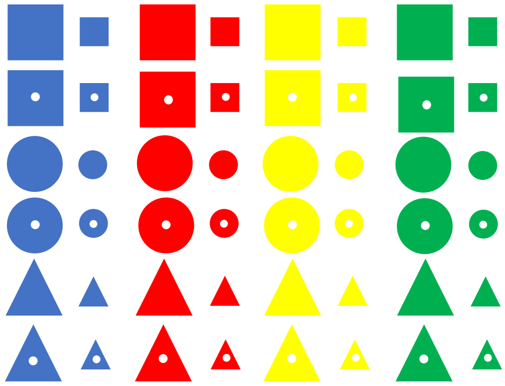
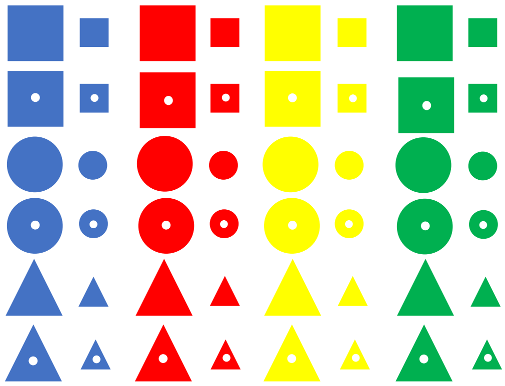
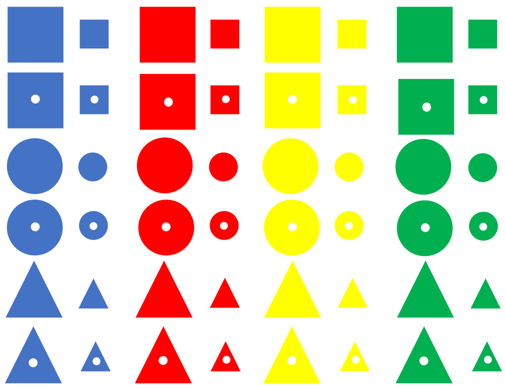
pala	väite	tosi	epätosi
	Pala on punainen.		
	Pala on iso ja neliö.		
	Pala on reiätön ja ympyrä.		
	Pala on pieni tai vihreä.		
	Pala ei ole keltainen ja se ei ole reiällinen, ja se on ympyrä tai kolmio.		
	Pala on pieni ja vihreä, tai se on iso ja kolmio.		
	Pala ei ole sininen tai punainen, ja siinä ei ole reikää.		
	Pala on pieni ja reiällinen, tai se on punainen ympyrä.		
	Pala on iso tai punainen, ja se on reiätön tai ympyrä.		
	Pala on iso ja pieni.		
	Pala on iso tai pieni.		

Tehtävä 2b: Totuuden etsintää – montako vaihtoehtoa löydät?

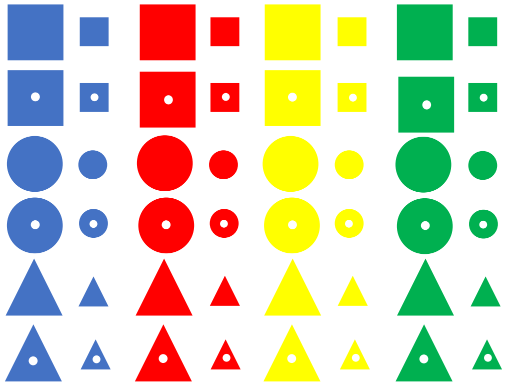
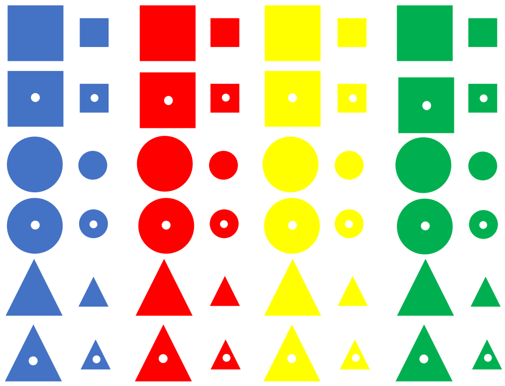
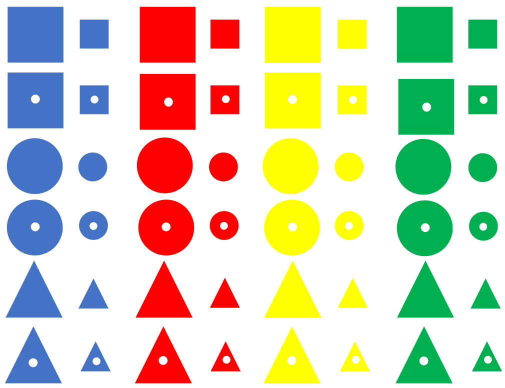
Väite voi olla tosi useammalle erilaiselle palalle. Etsi kaikki ne palat, joille annettu väite on tosi. Merkitse väitteen toteuttavat palat rastilla.

väite	palat, joille väite on tosi
Pala on punainen.	
Pala on iso ja neliö.	

Pala on reiätön ja ympyrä.	
Pala on pieni tai vihreä.	
Pala ei ole keltainen ja se ei ole reiällinen, ja se on ympyrä tai kolmio.	

Pala on pieni ja vihreä, tai se on iso ja kolmio.	
Pala ei ole sininen tai punainen, ja siinä ei ole reikää.	
Pala on pieni ja reiällinen, tai se on punainen ympyrä.	

Matka logiikkaan
Oppitunti 1

Pala on iso tai punainen, ja se on reiätön tai ympyrä.	
Pala on iso ja pieni.	
Pala on iso tai pieni.	

Matka logiikkaan
Oppitunti 1

Tehtävä 3a: Keksi tosi ja epätosi väite

Keksi jokaiselle palalle kaksi väitettä siten, että toinen väite on tosi ja toinen epätosi. Jokaisen väitteen pitää sisältää ainakin yksi seuraavista sanoista: ”*ja*”, ”*tai*”, ”*ei*”.

a. 

Tosi väite:____

____

Epätosi väite:____

____

b. 

Tosi väite:____

____

Epätosi väite:____

____

c.

Tosi väite:____

____

Epätosi väite:____

____

d.  ja 

Tosi väite (molemmille paloille):______________________________________

____

Epätosi väite (molemmille paloille):___________________________________

____

Matka logiikkaan
Oppitunti 1

Tehtävä 3b: Keksi tosi ja epätosi väite kahdelle palalle

Valitkaa yhdessä kaksi erilaista loogista palaa. Keksikää valituille paloille yhteensä kolme väitettä. Ensimmäisen väitteen pitää olla tosi molemmille paloille, toisen väitteen tosi toiselle ja epätosi toiselle valitulle palalle ja kolmannen väitteen pitää olla epätosi molemmille paloille.

Piirtäkää valitut palat taulukkoon ja merkatkaa myös niiden ominaisuudet. Kirjoittakaa väitteet taulukon alapuolelle.

Esimerkki:

piirros	**väri**	**koko**	**muoto**	**reiällisyys**
pala 1: 	punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää
pala 2: 	punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Tosi väite molemmille paloille: Pala on vihreä, ja se ei ole kolmio.

Tosi väite vain toiselle palalle: Pala on pieni ja reiätön.

Epätosi väite molemmille paloille: Pala on iso ja ympyrä.

a.

piirros	**väri**	**koko**	**muoto**	**reiällisyys**
pala 1:	punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää
pala 2:	punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Tosi väite molemmille paloille:____

____

____

Tosi väite vain toiselle palalle:____

____

____

Epätosi väite molemmille paloille:____

____

____

b.

piirros	väri	koko	muoto	reiällisyys
pala 1:	punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää
pala 2:	punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Tosi väite molemmille paloille:____

____

____

Tosi väite vain toiselle palalle:____

____

____

Epätosi väite molemmille paloille:____

____

____

BONUS: Osaatteko valita kaksi palaa niin, että on mahdotonta muodostaa väite, joka on tosi molemmille? ____

Jos vastasitte kyllä, anna esimerkki: _____________________________________

____

Jos vastasitte ei, miten perustelette vastauksenne?________________________

____

Osaatteko valita kaksi palaa niin, että on mahdotonta muodostaa väite, joka on epätosi molemmille? ____

Jos vastasitte kyllä, anna esimerkki:_____________________________________

____

Jos vastasitte ei, miten perustelette vastauksenne?________________________

____

Matka logiikkaan
Oppitunti 1

Tehtävä 4: Päättele sääntö

Annetut palat on jaettu kahteen eri ryhmään säännön avulla. Toisessa ryhmässä sääntö on tosi jokaiselle ryhmän palalle ja toisessa ryhmässä sääntö on epätosi jokaiselle ryhmän palalle.

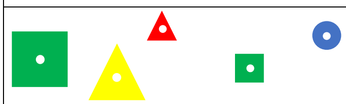
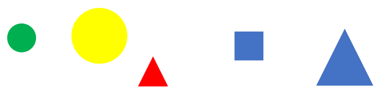
Päättele parin kanssa sääntö, jonka mukaan palat on jaettu ryhmiin. Kirjoita sääntö taulukon yläpuolelle.

Esimerkki:

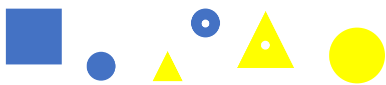
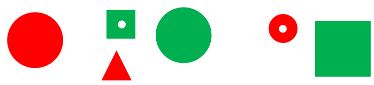
Sääntö: Pala on neliö.

sääntö voimassa	sääntö ei voimassa
	

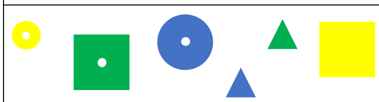
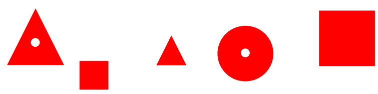
a. Sääntö:____

sääntö voimassa	sääntö ei voimassa
	

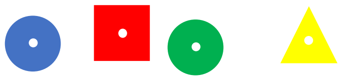
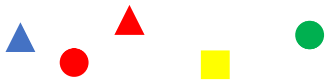
b. Sääntö:____

sääntö voimassa	sääntö ei voimassa
	

c. Sääntö:____

sääntö voimassa	sääntö ei voimassa
	

d. Sääntö:____

sääntö voimassa	sääntö ei voimassa
	

BONUS: Täydennä itse alla olevat taulukot piirtämällä sinne paloja, ja anna parisi keksiä säännöt!

Sääntö:____

sääntö voimassa	sääntö ei voimassa

Sääntö:____

sääntö voimassa	sääntö ei voimassa

Matka logiikkaan
Oppitunti 2 Oppilastunnus:____________________

Jonoja ja ryhmiä loogisilla paloilla

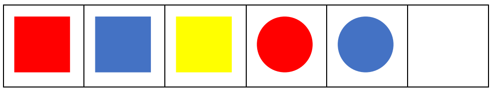
Tehtävä 1a: Jatka jonoa

Havainnoi parin kanssa annettua loogisten palojen jonoa. Päätelkää, mikä pala sopii jonoon seuraavaksi.

Piirrä pala ja ympyröi sen ominaisuudet taulukosta.

Keksikää yhdessä sääntö (tai säännöt), jota jono noudattaa. Kirjoita sääntö taulukon alle.

a.



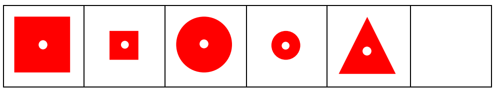
väri		**koko**	**muoto**	**reiällisyys**
punainen keltainen	sininen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Jonon sääntö: ____

____

____

b.



väri		**koko**	**muoto**	**reiällisyys**
punainen keltainen	sininen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

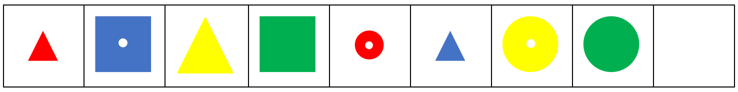
Jonon sääntö: ____

____

____

Matka logiikkaan
Oppitunti 2

c.



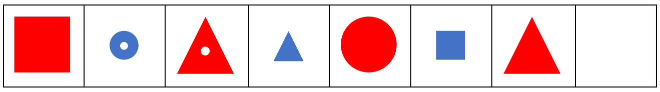
väri	koko	muoto	reiällisyys
punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Jonon sääntö: ____

____

____

d.



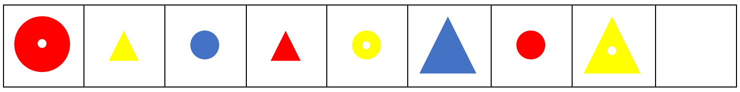
väri	koko	muoto	reiällisyys
punainen sininen keltainen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Jonon sääntö: ____

____

____

e.



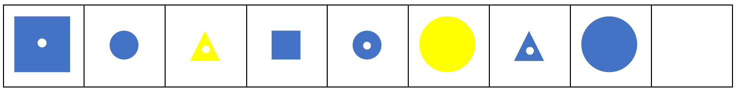
väri		koko	muoto	reiällisyys
punainen keltainen	sininen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Jonon sääntö: ____

____

____

f.



väri		koko	muoto	reiällisyys
punainen keltainen	sininen vihreä	iso pieni	ympyrä neliö kolmio	reikä ei reikää

Jonon sääntö: ____

____

____

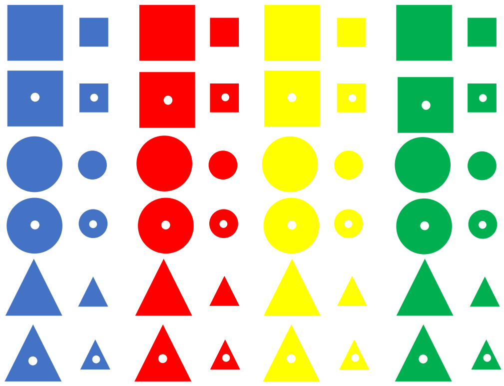
Matka logiikkaan
Oppitunti 2

Tehtävä 1b: Vaihtoehdot seuraavaksi palaksi

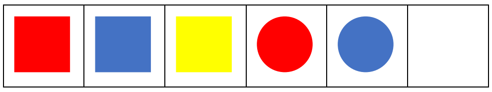
Sinulla on käytössäsi vieressä olevat palat. Muodosta edellisen tehtävän jonot annetuista paloista. Huomaa, että keskenään samanlaisia paloja ei ole.

Kuinka monta erilaista palaa sopii jonoon seuraavaksi?

Mitkä palat sopivat sarjaan seuraavaksi? Piirrä tai kirjoita.



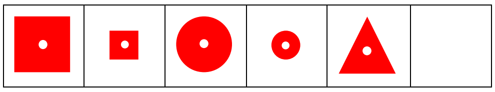
a.



Vaihtoehtoja seuraavaksi palaksi on ____ kpl.

Sopivia paloja ovat:

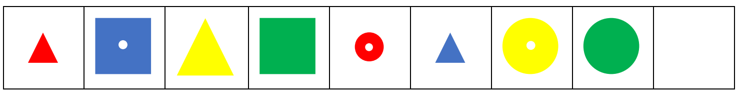
b.



Vaihtoehtoja seuraavaksi palaksi on ____ kpl.

Sopivia paloja ovat:

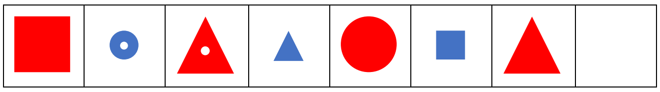
c.



Vaihtoehtoja seuraavaksi palaksi on ____ kpl.

Sopivia paloja ovat:

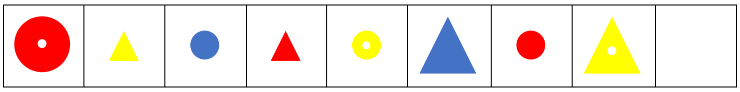
d.



Vaihtoehtoja seuraavaksi palaksi on ____ kpl.

Sopivia paloja ovat:

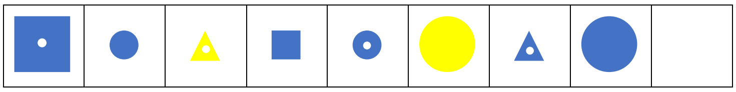
e.



Vaihtoehtoja seuraavaksi palaksi on ____ kpl.

Sopivia paloja ovat:

f.

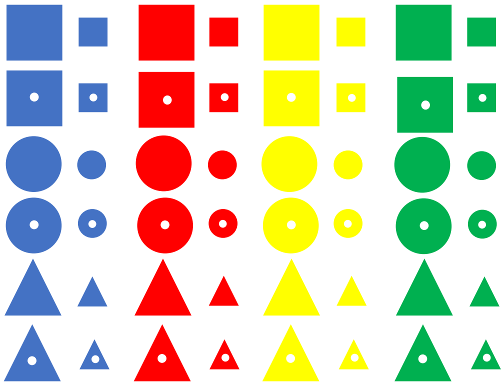


Vaihtoehtoja seuraavaksi palaksi on ____ kpl.

Sopivia paloja ovat:

Matka logiikkaan
Oppitunti 2

Tehtävä 1c: Täydennä jono



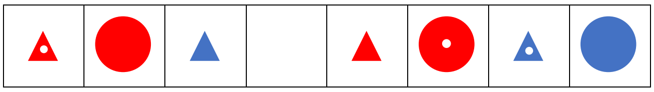
Sinulla on käytössäsi vieressä olevat palat. Muodosta niistä ensin annettu jono.

Mikä pala sopii tyhjään ruutuun?

Piirrä tai kirjoita.

Selvitä jonon sääntö ja kirjoita.

a.



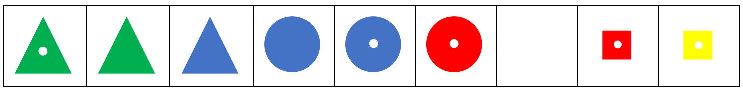
Tyhjään ruutuun sopii:____

Jonon sääntö:____

____

____

b.



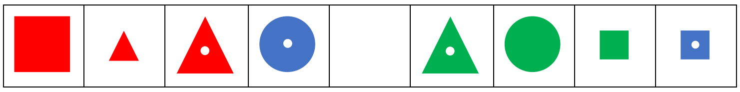
Tyhjään ruutuun sopii:____

Jonon sääntö:____

____

____

c.



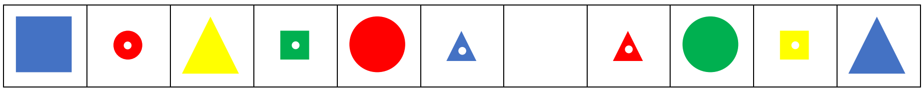
Tyhjään ruutuun sopii:____

Jonon sääntö:____

____

____

d.



Tyhjään ruutuun sopii:____

Jonon sääntö:____

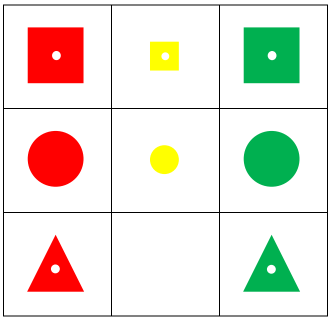
____

____

Tehtävä 2: Puuttuva palanen

Päättele parin kanssa, mikä pala sopii tyhjään ruutuun. Piirrä pala ruudukkoon ja kirjoita sen ominaisuudet ruudukon viereen. Perustele valintasi.

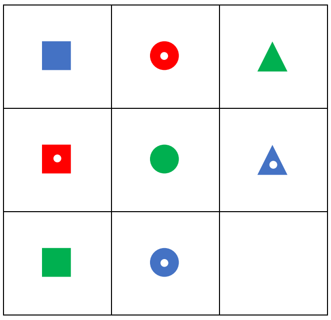
a.



Palan ominaisuudet:________________________
____

Perustelu:___________________________________
____
____
____
____

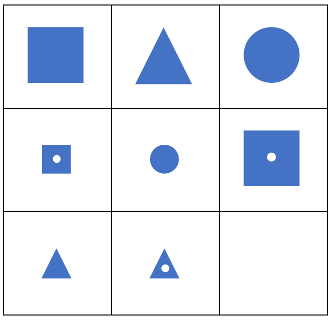
b.



Palan ominaisuudet:________________________
____

Perustelu:___________________________________
____
____
____
____

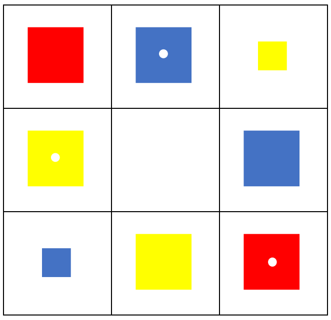
c.



Palan ominaisuudet:________________________
____

Perustelu:__________________________________
____
____
____
____

d.



Palan ominaisuudet:________________________

____

Perustelu:_________________________________

____

____

____

____

Tehtävä 3: Muodosta oma jono

Muodosta loogisista paloista jono, ja anna parisi ratkaista siihen seuraava pala. Käytettävissä on yksi sarja loogisia paloja, eli jokainen pala on erilainen.

a. Tee jono, jonka jatkoksi sopii tasan yksi pala. Piirrä palat ruutuihin.

Saiko parisi ratkaistua seuraavan palan ilman vinkkejä? ______________________

Oliko ratkaisu sama, jota sinä ajattelit jonoa rakentaessa?

____

b. Tee jono, jonka jatkoksi sopii enemmän kuin yksi pala. Piirrä palat ruutuihin.

Saiko parisi ratkaistua seuraavan palan ilman vinkkejä? ______________________

Oliko ratkaisu sama, jota sinä ajattelit jonoa rakentaessa?

____

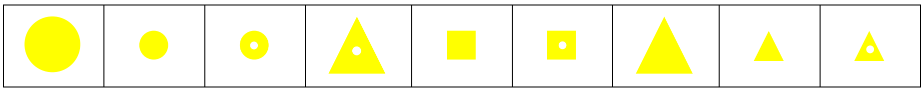
Tehtävä 4: Virheellinen jono!

Voi ei! Jonoja muodostaessa kävi moka ja nyt jokaisessa jonossa on yksi väärä pala.

Mikä pala ei kuulu jonoon? Mikä pala sopisi virheellisen palan tilalle?

Merkitse virheellinen pala rastilla ja kirjoita jonon alle, mikä pala sen tilalle sopii. Perustele vastauksesi.

a.



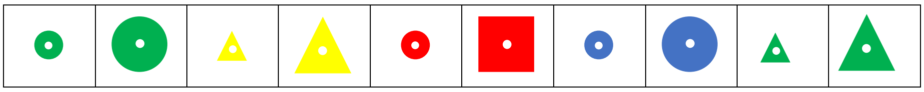
Palan tilalle sopii: ____

Perustelu: ____

____

____

b.



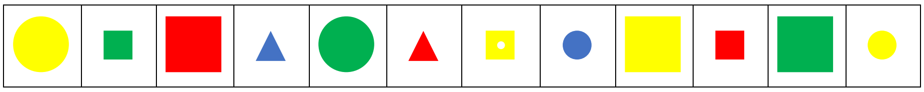
Palan tilalle sopii: ____

Perustelu: ____

____

____

c.



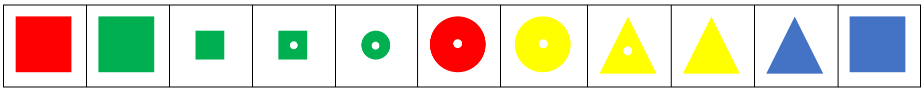
Palan tilalle sopii: ____

Perustelu: ____

____

____

d.



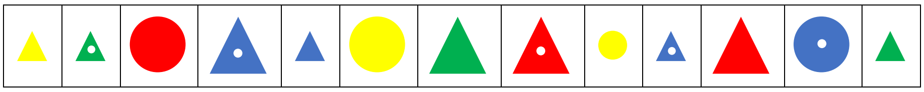
Palan tilalle sopii: ____

Perustelu: ____

____

____

e.



Palan tilalle sopii: ____

Perustelu: ____

____

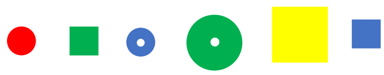
____

Tehtävä 5: Palojen luokittelua

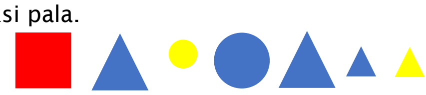
Keksikää parin kanssa sääntöjä, joiden avulla annetut palat voidaan luokitella laatikoihin ohjeiden mukaisesti. Kirjoita säännöt laatikoihin

a. Annetut palat jaetaan kahteen laatikkoon siten, että kummassakin laatikossa on yhtä monta palaa.

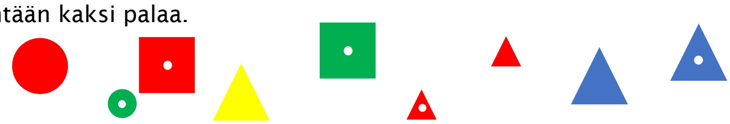
b. Annetut palat jaetaan kolmeen laatikkoon siten, että jokaisessa laatikossa on yhtä monta palaa.



c. Annetut palat jaetaan kolmeen laatikkoon siten, että jokaisessa laatikossa on vähintään yksi pala.



d. Annetut palat jaetaan neljään laatikkoon siten, että jokaisessa laatikossa on vähintään kaksi palaa.



BONUS: Keksitkö muita tapoja jakaa samat palat ryhmiin? Kirjoita vaihtoehtoiset säännöt alle.

a. ____

____

____

b. ____

____

____

c. ____

____

____

d. ____

____

____

Matka logiikkaan
Oppitunti 3 Oppilastunnus:____________________

Sanallisten tehtävien päättelyä

Tehtävä 1: Montako sukkaa?

a. Pilkkopimeän huoneen laatikossa on 14 punaista ja 14 sinistä sukkaa. Mikä on pienin määrä sukkia, joiden nostamisen jälkeen voit olla varma, että kädessäsi on vähintään kaksi saman väristä sukkaa?

Vastaus:________________sukkaa

Perustelu:

b. Entä jos laatikossa on 12 punaista, 12 sinistä ja 12 keltaista sukkaa? Montako sukkaa tällöin pitää vähintään nostaa, jotta sinulla on varmasti ainakin kaksi samanväristä sukkaa?

Vastaus:________________sukkaa

Perustelu:

c. Tällä kertaa laatikossa on neljä punaista ja kuusi keltaista sukkaa. Kuinka monta sukkaa sinun pitää vähintään ottaa, jotta sinulla on varmasti kaksi punaista sukkaa?

Vastaus:________________sukkaa

Perustelu:

Tehtävä 2: Päättele iät

Ihmisten iät ovat menneet sekaisin. Päättele vihjeiden avulla ihmisten iät ja merkitse ne taulukkoon.

a. Miisa on kaksi vuotta nuorempi kuin Linda.
Linda on viisi vuotta nuorempi kuin Siiri.
Siiri on vuotta nuorempi kuin Joanna.
Jenni on kolme vuotta vanhempi kuin Miisa.
Joanna on 15-vuotias.

Miisa	
Linda	
Siiri	
Jenni	
Joanna	

b. Maria on viisi vuotta nuorempi kuin Sonja.
Joonas on kolme vuotta vanhempi kuin Maria.
Maria on yhtä vanha kuin Sami.
Sami on 12-vuotias.

Maria	
Sonja	
Joonas	
Sami	

c. Pekka on kaksi kertaa vanhempi kuin Paavo.
Paavo on kaksi vuotta nuorempi kuin Laura.
Laura on kolme vuotta vanhempi kuin Tero.
Tero on 13-vuotias.

Tero	
Laura	
Paavo	
Pekka	

d. Kaksi lapsista ovat saman ikäisiä.
Lasten yhteenlaskettu ikä on 50 vuotta.
Pinja on neljä vuotta vanhempi kuin Pasi.
Serina on 11 vuotta nuorempi kuin Pinja.
Saara on 5 vuotta vanhempi kuin Serina.
Pasi on 11-vuotias.
Tarmo ei ole saman ikäinen kuin Pinja tai Saara.

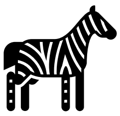
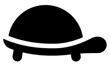
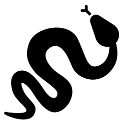
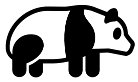
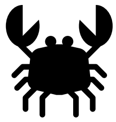
Pinja	
Pasi	
Serina	
Saara	
Tarmo	

Matka logiikkaan
Oppitunti 3

Tehtävä 3: Eläimet järjestykseen

Eläintarhan eläimet ovat sikin sokin. Järjestä eläimet taulukkoon ohjeiden mukaisesti.

Kirjoita vastaukset taulukkoon.

					
seepra	kilpikonna	pöllö	käärme	panda	rapu

a. Kilpikonna on pöllön yläpuolella.
   Panda on käärmeen ja kilpikonnan välissä.
   Pöllö on ravun vasemmalla puolella.
   Seepra on pandan alapuolella.

b. Käärme on alarivillä.
   Pöllö ei ole käärmeen yläpuolella.
   Panda on seepran ja pöllön välissä.
   Kilpikonna ei ole pandan alapuolella.
   Rapu ei ole pöllön alapuolella.

c. Rapu, panda ja pöllö ovat samalla rivillä.
   Kilpikonna ei ole seepran vieressä.
   Käärme on pöllön alapuolella.
   Panda on kilpikonnan yläpuolella.

Matka logiikkaan
Oppitunti 3

Tehtävä 4: Murhamysteerejä

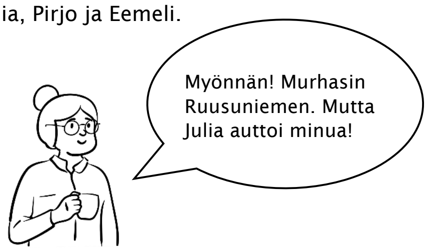
Rouva Ruusuniemi on kutsunut kesähuvilallensa vieraita juhlimaan. Kesähuvila sijaitsee saarella, jonne ei pääse muita kuin rouva Ruusuniemen kutsuvieraat. Juhlat jatkuvat pitkälle yöhön, ja vieraat siirtyvät vähitellen juhlien jälkeen omiin huoneisiinsa nukkumaan.

Aamulla Rouva Ruusuniemi löytyy kuolleena ja sinä saat johtaa murhatutkintaa. Tehtävänäsi on tunnistaa, kuka tai ketkä murhasivat Rouva Ruusuniemen.

Muista, että **syyttömät puhuvat aina totta**. **Murhaaja valehtelee aina ainakin kerran**. **Murhaajia voi olla enintään kaksi**. Jos murhaajia on kaksi, molemmat valehtelevat vähintään kerran. Poliisikonstaapeli Rinne ei voi olla murhaaja, paitsi jos muita mahdollisuuksia ei ole.

a. Kuulusteltavana on kolme henkilöä: Julia, Pirjo ja Eemeli.

Julia



Pirjo

Eemeli

Kuka tai ketkä murhasivat Ruusuniemen?____

Perustelu:____

____

____

____

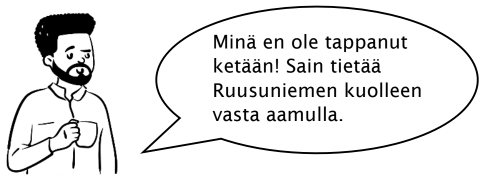
____

Matka logiikkaan
Oppitunti 3

b. Kuulusteltavana on kolme henkilöä, Suvi, Dennis ja Tuomas.

Suvi

Dennis



Tuomas

Kuka tai ketkä murhasivat Ruusuniemen? ____

Perustelu:____

____

____

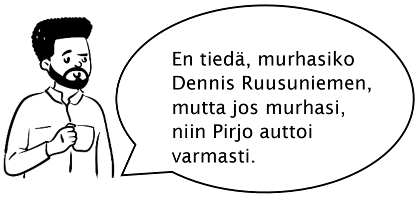
____

____

c. Kuulusteltavana on neljä henkilöä, Suvi, Pirjo, Tuomas ja Dennis.

Suvi

Pirjo



Tuomas

Dennis

Kuka tai ketkä murhasivat Ruusuniemen? ____

Perustelu:____

____

____

____

____

d. Kuulusteltavana on viisi henkilöä, Eemeli, Pirjo, Julia, Anneli ja poliisikonstaapeli Rinne.

Eemeli

Pirjo

Julia

Anneli

poliisikonstaapeli Rinne

Kuka tai ketkä murhasivat Ruusuniemen? ____

Perustelu:____

____

____

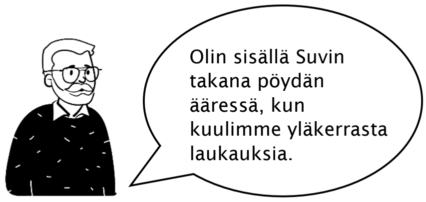
____

____

Matka logiikkaan
Oppitunti 3

e. Kuulusteltavana on kuusi henkilöä, Julia, poliisikonstaapeli Rinne, Dennis, Suvi, Eemeli ja Pirjo.

Julia



poliisikonstaapeli Rinne

Dennis

Suvi

Eemeli

Pirjo

Kuka tai ketkä murhasivat Ruusuniemen? ____

Perustelu:____

____

____

____

____

Matka logiikkaan
Oppitunti 3

Tehtävä 5: Rehti vai retku?

Olet päätynyt saarelle, jossa asuu vain joko rehtejä ja retkuja. Rehdit puhuvat aina totta, ja retkut valehtelevat aina. Saatko selville, kuka on rehti ja kuka retku? Merkitse vastauksesi taulukkoon.

Huomaa, että jokaisessa tehtävässä pystyy päättelemään vähintään yhden henkilön!

a. Kysyt ensin Artolta, onko hän rehti vai retku. Arto puhuu niin hiljaa, ettet kuule hänen vastaustaan. Et kehtaa toistaa kysymystäsi Artolle, joten kysyt Beritiltä: ”*Mitä Arto vastasi*?”. Berit vastaa sinulle: ”*Arto sanoi olevansa retku*”. Voitko päätellä, onko Arto rehti vai retku? Entä Berit?

   Arto: ___________________________ Berit: _____________________________________

b. Tapaat Alinan ja Benin. Alina kertoo sinulle, että ”*ainakin toinen meistä on retku*”. Onko Alina rehti vai retku? Entä Ben?

   Alina: ____________________________ Ben: ____________________________________

c. Tapaat Antonin, Benjaminin ja Celinen. He kertovat sinulle seuraavat asiat:
   Anton: *Me olemme kaikki retkuja!*
   Benjamin: *Tasan yksi meistä on rehti.*
   Onko Anton rehti vai retku? Entä Benjamin ja Celine?

   Anton: _________________ Benjamin:____________________Celine:______________

Matka logiikkaan
Oppitunti 4 Oppilastunnus:____________________

Päättelyä sanoista ja kuvista

Tehtävä 1: Liisa unohduksien metsässä

Liisa ei millään muista, mikä viikonpäivä on. Hänellä on kaksi ystävää, Leijona ja Yksisarvinen, jotka vierailevat usein unohduksien metsässä.

Ystävillä tosin on yksi mielenkiintoinen piirre. He valehtelevat tiettyinä viikonpäivinä, ja muina puhuvat totta. Leijona valehtelee maanantaisin, tiistaisin ja keskiviikkoisin. Yksisarvisen valehtelupäivät ovat torstaisin, perjantaisin ja lauantaisin. Totuuspäivät on merkattu taulukkoon vihreällä ja valehtelupäivät punaisella.

maanantai	tiistai	keskiviikko	torstai	perjantai	lauantai	sunnuntai
						
						

a. Eräänä päivänä Liisa tapasi Leijonan ja Yksisarvisen lepäilemästä puun alta. Ystävät kertoivat:
   Leijona: *Eilen oli valehtelupäiväni.*
   Yksisarvinen: *Eilen oli minunkin valehtelupäiväni!*
   Hetken pohdinnan jälkeen Liisa hihkaisi: Tiedän mikä viikonpäivä nyt on!

   Mikä viikonpäivä oli? ____

   Miten Liisa päätteli viikonpäivän?

   ____

   ____

   ____

   ____

b. Liisa tapasi vain Leijonan. Hän kertoi kaksi asiaa:
   1. *Valehtelin eilen.*
   2. *Valehtelin myös sitä edeltävänä päivänä.*

   Liisa ei valitettavasti saanut pääteltyä varmaa viikonpäivää, mutta hän onnistui päättelemään jotain Leijonan väitteistä.

   Mitä Liisa sai selville ja miten?

   ____

   ____

   ____

   ____

   Mitä Liisan kannattaisi kysyä Leijonalta, jotta hän saisi tietää, mikä viikonpäivä oikeasti on?

   ____

   ____

   ____

   ____

c. Liisa näki Leijonan ja Yksisarvisen.
   Leijona: *Minä valehtelen huomenna.*
   Yksisarvinen: *Minä valehtelin eilen.*
   Taas Liisa sai selville viikonpäivän.

   Mikä viikonpäivä oli?____

   Miten Liisa päätteli viikonpäivän?

   ____

   ____

   ____

   ____

d. Liisa törmäsi Yksisarviseen metsässä. Yksisarvinen sanoi: ”*Tänään sinun ei kannata luottaa Leijonaan, sillä hän valehtelee*”. Liisa kiitti vinkistä, mutta suhtautui siihen hieman epäillen. Myöhemmin hän törmäsi Leijonaan, joka sanoi: ”*Ei tänään ole minun valehtelupäiväni, vaan Yksisarvisen! Minä valehtelen vasta huomenna!*”.

Mikä viikonpäivä oli?____

Miten Liisa sai sen pääteltyä?

____

____

____

____

Tehtävä 2: Kuningattaret laudalle

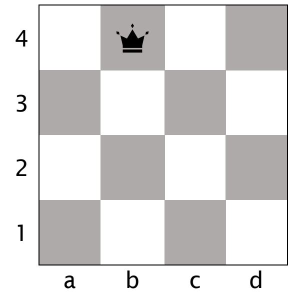
Shakissa sanotaan, että kuningatar uhkaa toista kuningatarta, jos ne ovat samalla rivillä (vaakaan, pystyyn tai diagonaalisesti).

a. Kuinka monta kuningatarta voit lisätä viereiselle shakkilaudalle siten, että yksikään kuningatar ei ole uhattuna?

______________ kuningatarta.

Mille paikoille (esim. (b,4)) voit laittaa uudet kuningattaret?

____

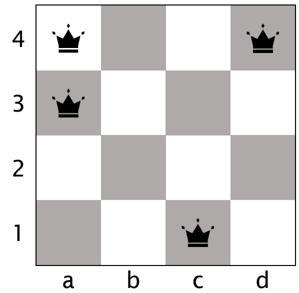


b. Kuinka monta kuningatarta voit ottaa laudalta pois siten, että joku jäljelle jäävistä kuningattarista on poistojen jälkeenkin uhattuna?

______________ kuningatarta.

Miltä paikoilta voit poistaa kuningattaret?

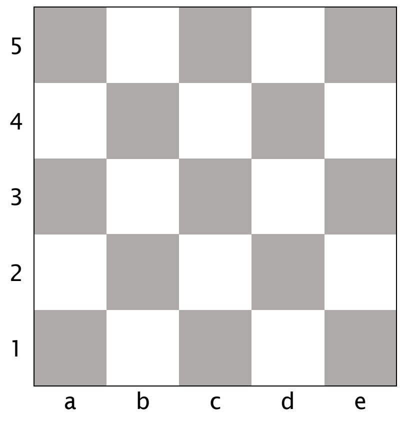
____



c. Kuinka monta kuningatarta voit enintään laittaa laudalle siten, että yksikään kuningatar ei ole uhattuna?

______________ kuningatarta.

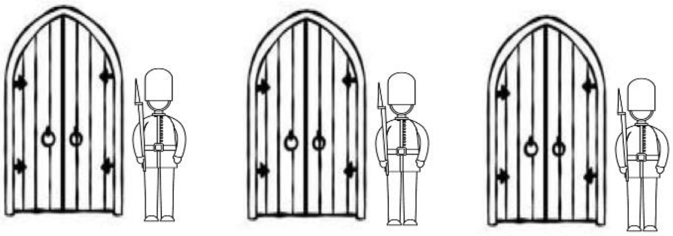
Merkitse kuningattarien paikat ruudukkoon.



Tehtävä 3: Kuninkaan aarre

Kuninkaan kalleimmat aarteet ovat turvassa yhden oven takana. Hämäykseksi kuningas on rakennuttanut oikean oven viereen kaksi samannäköistä hämäysovea. Jokaista ovea vartioi vartija. Viekkaiden vierailijoiden varalta kuningas on käskenyt vartijoiden välillä hämätä vierailijoita valehdellen.

Kuningas on palkannut sinut tutkimaan, voiko vierailija saada aarteiden olinpaikan selville. Tehtävänäsi on päätellä, minkä oven takana aarteet sijaitsevat.



a. Sinulle on kerrottu, että **enintään yksi vartija puhuu totta** vierailijoille. Jututat vartijoita.

   Ensimmäisen oven vartija sanoo sinulle: *”Aarre on täällä”*.
   Toisen oven vartija sanoo: *”Aarre ei ole täällä”*.
   Kolmatta ovea vartioiva henkilö kertoo sinulle että*: ”Aarre ei ole ensimmäisen oven takana”*.

   Minkä oven takana aarre on? Perustele vastauksesi.

   ____

   ____

   ____

   ____

b. Kuningas kuvitteli hämäävänsä varmasti kaikkia edellisen päivän taktiikallaan. Onnistuit kuitenkin päättelemään aarteen sijainnin. Tämän vuoksi kuningas antoi uusia käskyjä. Nyt **ainakin yksi vartija valehtelee ja ainakin yksi vartija puhuu totta**. Jututat vartijoita uudelleen.

Ensimmäinen vartija: *”Aarre ei ole toisen oven takana.”*
Toinen vartija: *”Aarre ei ole täällä.”*
Kolmas vartija: *”Aarre on täällä.”*

Minkä oven takana aarre on? Perustele vastauksesi.

____

____

____

____

c. Kuningas ei ollut tyytyväinen, kun kuuli sinun ratkaisseen aarteen olinpaikan jo toistamiseen! Hän määräsi vartijoille uudet säännöt. Jokaisen vartijan tulee kertoa kaksi väitettä aarteen olinpaikasta. **Joku vartijoista puhuu ainoastaan totta, joku valehtelee molemmat väitteensä ja joku kertoo yhden totuuden ja yhden valheen**. Jututat taas vartijoita.

Ensimmäinen vartija: *”Aarre ei ole täällä.”*
Ensimmäinen vartija: *”Aarre on toisen oven takana.”*
Toinen vartija: *”Aarre ei ole ensimmäisen oven takana.”*
Toinen vartija: *”Aarre on kolmannen oven takana.”*
Kolmas vartija: *”Aarre ei ole täällä.”*
Kolmas vartija: *”Aarre on ensimmäisen oven takana.”*

Mistä aarteen löytää? Perustele vastauksesi.

____

____

____

____

Tehtävä 4: Rikostutkija Rimpula

Rikostutkija Rimpula on koko valtakunnan paras tutkija. Vakavissa rikoksissa hänet kutsutaan aina paikalle, sillä hänellä on ilmiömäiset päättelytaidot.

Olisiko sinusta Rimpulan haastajaksi?

a. Jalokiviliikkeestä on edellisenä iltana varastettu valtava määrä äärimmäisen arvokkaita jalokiviä. Tiedetään, että ryöstöön osallistuneet ovat poistuneet rikospaikalta autolla. Rikollisten tarkkaa lukumäärää ei tiedetä. Kolme tunnettua rikollista, Riku, Riina ja Risto, on tuotu poliisiasemalle kuulusteltaviksi. Kuulusteluissa on käynyt ilmi kolme vedenpitävää totuutta:

   1. Ainoastaan Riku, Riina ja Risto ovat sotkeentuneet ryöstöön. Ulkopuolisia ei ole.
   2. Risto ei koskaan tee keikkaa ilman, että hänellä on apurinaan ainakin Riina.
   3. Riku ei osaa ajaa autoa.

   Onko Riina syyllinen vai syytön? Perustele vastauksesi.

   ____

   ____

   ____

   ____

b. Seuraavana päivänä ryöstön kohteeksi joutui antiikkikauppa. Kuulusteltavaksi tuotiin kolme tunnettua rikollista, Raimo, Raisa ja Rami. Kuulusteluissa saatiin selville kolme asiaa:

1. Juttuun ei ole sekaantunut muita kuin Raimo, Raisa ja Rami.
2. Raimo ei koskaan tee keikkaa yksin.
3. Rami on syytön.

Onko Raisa syyllinen vai syytön? Perustele vastauksesi.

____

____

____

____

c. Kolmas ryöstö tapahtui taidemuseossa. Useita mittaamattoman arvokkaita taideteoksia oli viety. Kuulusteltavaksi tuotiin kolme rikollista, Ronja, Romeo ja Rosa. Kuulusteluissa saatiin selville seuraavat asiat.

1. Ryöstöpäivänä taidemuseossa olivat vierailleet ainoastaan Ronja, Romeo ja Rosa.
2. Ronja tekee keikkoja vain kahdestaan, eli jos Ronja on syyllinen, niin hänellä on tasan yksi rikostoveri.
3. Jos Romeo on syytön niin Rosakin on syytön.
4. Jos syyllisiä on tasan kaksi, niin Ronja on toinen heistä.
5. Jos Rosa on syytön niin Romeokin on syytön.

Kuka kolmikosta tulisi pidättää? Perustele vastauksesi.

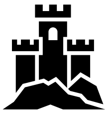
____

____

____

____

Tehtävä 5: Myöntyväinen kuningas



Olet saarella, jonka kieltä et ymmärrä. Saaren asukkaat ymmärtävät sinun kieltäsi, mutta kieltäytyvät jyrkästi itse puhumasta sitä sanaakaan. Olet saanut selville, että *”bal”* ja *”da”* tarkoittavat *”kyllä”* ja *”ei”*, mutta et tiedä kumpi tarkoittaa kumpaa.

Ainut tapa päästä saarelta ehjin nahoin pois, on saada kuningas vastaamaan kysymykseen *”bal”*. Tilannetta hankaloittaa se, että kuningas voi yksinvaltiaana joko valehdella tai puhua totta, eikä kukaan tiedä kumpaan hän tällä kertaa kallistuu.

Sinulla on mahdollisuus kysyä **tasan yksi kysymys** kuninkaalta, ja tämä kysymys määrittää koko tulevaisuutesi.

Mitä sinun kannattaa kysyä? Perustele vastauksesi.

Tehtävä 6: Ketä katselen?

Mies katseli muotokuvaa, kun joku kysyi häneltä: *”Kenen kuvaa sinä katselet?”*. Mies vastasi *”Minulla ei ole sisaria eikä veljiä, mutta tämän miehen isä on isäni poika.”*

Kenen kuvaa mies katselee? Perustele vastauksesi.

Matka logiikkaan -materiaali päättyy tähän.

Toivottavasti ajattelet loogisesti jatkossakin!