Tampereen yliopisto

Topi Yli-Karhula

Hyperjoukot

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Kesäkuu 2022

TIIVISTELMÄ

Topi Yli-Karhula: Hyperjoukot
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2022

Tämä tutkielma käsittelee joukko-opin säännöllisyysaksiooman suhteen vaihtoehtoista antisäännöllisyysaksioomaa sekä tämän seurauksia. Ensimmäisessä luvussa perehdytään johdantona antisäännöllisyysaksioomien historiaan joukko-opin kehityksen ohella. Toisessa luvussa annetaan tutkielman vaatimia käsitteitä. Nämä ovat pitkälti joukko-opin ja kategoriateorian peruskäsitteitä.

Kolmas luku esittelee itse antisäännöllisyysaksiooman mallintamalla joukkoja yhtälöryhmien avulla. Neljännessä luvussa esitellään bisimulaation konsepti. Ensimmäisessä aliluvussa tutkitaan bisimulaatioita yhtälöryhmien välillä sekä tämän yhteyksiä joukkojen ekstensionaalisuuteen. Toinen aliluku taas esittelee tavan muodostaa antisäännöllisyysaksioomasta poikkeavia muunnelmia käyttäen sopivia bisimulaatioita. Tätä varten tarkennetaan myös yhtälöryhmiin liittyviä käsitteitä. Viidennessä luvussa osoitetaan, että antisäännöllisyysaksiooman tai tämän muunnelman toteuttava malli voidaan rakentaa mallin pohjalta, jossa pätevät ZFC-aksioomat lukuun ottamatta säännöllisyysaksioomaa.

Kuudes luku antaa esimerkin antisäännöllisyysaksiooman käytöstä virtojen avulla. Nämä esitetään järjestettyinä pareina, joiden toisena jäsenenä on aina toinen virta. Kyseinen luku myös esittelee korekursion käsitteen virtojen suhteen. Tämä on tapa määritellä joukkoja suurimpina tietyn ehdon täyttävinä joukkoina, joka on hyödyllistä antisäännöllisyysaksiooman pätiessä. Seitsemännessä luvussa korekursioon perehdytään yleisempään tapaukseen. Tämän luvun lopputuloksena saadaankiin, että korekursio pystytään määrittelemään kaikille tietynlaisille joukkojen operaatioille.

Avainsanat: joukko-oppi, ei-hyvinperustetut joukot, hyperjoukot, antisäännöllisyysaksiooma, korekursio

Sisällys

1 Johdanto

Tämä johdantoluku perustuu pääosin Aczelin [1] sekä Barwisen ja Mossin [3] kirjojen omiin historiakatsauksiin aiheesta. Näitä uudemmat viittaukset ovat omaa hakutyötäni. Johdantoluvussa esitellään ei-hyvinperustettujen joukkojen ja näiden tutkimuksen historiaa joukko-opin alkuajoilta lähtien.

Joukko-opin historian aikana joukoiksi on hyväksytty erilaisia objekteja. Eräs tällainen objektien ryhmä ovat joukot, jotka eivät ole hyvinperustettuja joukkojen kuuluvuusrelaation $\in$ suhteen, ei-hyvinperustetut joukot eli hyperjoukot. Näissä joukoissa on löydettävissä siis ketjuja $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots$, jotka jatkuvat päättymättömästi. Kun joukko-oppia alettiin tutkia, hyperjoukkojen olemassaoloa ei erityisesti kielletty. Tärkeä esimerkki hyperjoukkojen käytöstä on Russelin paradoksi: onko joukko, jonka alkioina ovat vain ne joukot, jotka eivät ole itsensä alkioita, itsensä alkio? Vastaavasti aiempi Burali-Fortin paradoksi kaikkien ordinaalien joukosta olisi myös ollut hyperjoukko ja täten johtanut kyseiseen paradoksiin.

Joukkojen luokittelu hyvinperustettuihin ja ei-hyvinperustettuihin joukkoihin esitettiin 1917, kun Mirimanoff määritteli joukkojen hyvinperustuneisuuden. Tämän lisäksi hän myös esitti ekstensionaalisuuden vahvennuksen ei-hyvinperustettujen joukkojen välille, joka perustui isomorfismeihin näiden kanonisien puuesityksien kuuluvuusrelaation mukaan. Joukko-opin aksioomajärjestelmiä oli jo alettu tutkia tähän aikaan, mutta hyperjoukkojen olemassaoloa ei vielä kielletty tai varmennettu. Ensimmäisenä joukot rajoitti hyvinperustetuiksi joukoiksi von Neumann 1925 aksioomalla, joka kielsi loputtomat kuuluvuusrelaation $\in$ ketjut. Nykyisessä muodossaan säännöllisyysaksiooman esitti Zermelo 1930.

Samoihin aikoihin esiteltiin myös ensimmäinen aksioomajärjestelmä, joka mahdollisti hyperjoukkojen olemassaolon. Tämä oli Finslerin vuonna 1926 muotoilema järjestelmä, jossa isomorfiset joukot katsottiin samoiksi. Eräänä tämän tutkielman esimerkkinä onkin Aczelin näkemys tästä aksioomasta esimerkissä 4.19. Säännöllisyysaksiooman esittelyn myötä ei-hyvinperustettujen joukkojen tutkimus jäi kuitenkin verrattain taka-alalle.

Säännöllisyysaksiooman riippumattomuuden muista ZFC-aksioomista todisti Bernays 1954, ja vuonna 1957 Rieger esitti tavan yleistää tämä todistus. Seuraava aksiooma, joka rikkoi säännöllisyysaksioomaa oli Scottin esitys 1960, joka Mirimanffin tavoin vahvisti ekstensionaalisuutta joukkojen kanonisten puuesitysten isomorfisuudella sekä rakensi tämän toteuttavan joukko-opin mallin.

Laajimman hyperjoukkojen luokan antaa Boffan 1972 esittämä aksiooma. Tämän seurauksena jokaiselle joukolle saadaan itse asiassa aito luokka keskenään isomorfisia joukkoja, jotka ovat tietyn verkon kuvia. Useimmissa muissa säännöllisyysaksioomaa rikkovissa malleissa pyritään välttämään tällaiset samankaltaisten joukkojen luokat sekä rajoittamaan hyperjoukkojen mahdollisia rakenteita vieläkin tarkemmin.

Ehkä yleisesti esitetyin näistä antisäännöllisyysaksioomista nähtiin ensin Fortin ja Honsellin julkaisussa 1983, joka oli osa monista heidän muodostamistaan aksioomista. Myöhemmin 1988 Aczel julkaisi kirjansa Non-Well-Founded Sets, joka laajalti vakiinnutti hyperjoukkoihin liittyvää terminologiaa. Hän esittää verkkojen avulla Fortin ja Honsellin aksiooman pääsääntöisenä antisäännöllisyysaksioomana ja esittää tulkintansa muista aiemmista antisäännöllisyysaksioomista tämän muunnelmina. Erityisesti Aczel käsittelee myös ekstensionaalisuuden vahvistamista bisimulaatioiden avulla sekä esittää kirjansa päätuloksena korekursiotuloksen, jonka avulla pystytään muodostamaan maksimaalisia hyperjoukkojen luokkia.

Aczelin jälkeen tärkeä teos hyperjoukkojen parissa oli Barwisen ja Mossin kirja Vicious Circles 1996. Barwise ja Moss mallinsivat Aczelin pääsääntöisen antisäännöllisyysaksiooman yhtäpitävästi yhtälöryhmien avulla sekä esittivät omat tuloksensa tämän toteuttavan mallin rakentamisesta ja korekursiosta. He kokosivat teokseensa myös monia sovelluksia hyperjoukoille, kuten modaalilogiikan ja peliteorian ongelmia.

Tästä samasta aksioomasta on esitetty muitakin yhtäpitäviä muotoja, kuten Dannerin ja Mossin esitys korvauksien avulla 1995 [4] sekä Hyttisen ja Paunan muotoilu korvauksien kiintopisteinä 2001 [5]. Samassa julkaisussa Hyttinen ja Pauna luokittelevat hyperjoukkoja riippuen näiden ei-hyvinperustetun osan haarautumisen monimutkaisuudesta. Muiden antisäännöllisyysaksioomien luokitteluja kokosivat Takashi, Tomoko ja Tzouvaras 2003 [7], joiden lisäksi he tutkivat myös niin sanottuja antihyvinperustettuja joukkoja, joiden jokaisen maksimaalisen kuuluvuusrelaation $\in$ ketjun tulee olla itseensä viittaava.

2 Esitiedot

Tutkielman esitiedoiksi tarvitaan tiettyjä joukko-opin perusmääritelmiä [6] sekä kategoriateorian käsitteitä [2].

Aloitetaan esittelemällä joukko-opissa käytettävät *joukko-opin kaavat*. Näissä käytetään predikaatteina joukkoon kuuluvuusrelaatiota $\in$ ja joukkojen yhtäsuuruutta $=$.

Olkoot x ja y muuttujia. Tällöin yksinkertaisimmat mahdolliset kaavat $x \in y$ ja $x = y$ ovat *atomikaavoja*. Loput kaavat saadaan käyttämällä tuttuja konnektiiveja $\varphi \land \psi$, $\varphi \lor \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ ja $\varphi \leftrightarrow \psi$ sekä kvanttoreita $\forall x\varphi$ ja $\exists x\varphi$. Tässä φ ja ψ ovat muita joukko-opin kaavoja.

Jos muuttuja x kaavassa φ ei liity mihinkään kvanttoriin, niin muuttuja x on *vapaa*. Tällöin voidaan merkitä $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, missä kaavan φ kaikki vapaat muuttujat ovat muuttujien $x_1, \ldots, x_n$ joukossa.

Lisäksi eräät lyhenteet ovat hyödyllisiä kaavojen esityksen kannalta. Käytettävät lyhennysmerkinnät ovat osajoukkous $y \subseteq z$ sekä joukkojen yhdisteet $y \cup z$ ja leikkaukset $y \cap z$. Näitä merkintöjä voidaan käyttää aksioomissa, sillä ne voidaan avata käyttämään pelkästään symbolia $\in$.

Esitellään yleisesti käytetty joukko-opin aksioomajärjestelmä ZFC:

I. Ekstensionaalisuusaksiooma: $\forall a \forall b \big(\forall c (c \in a \leftrightarrow c \in b) \to a = b\big)$: Jos kahdella joukolla on täsmälleen samat alkiot, niin ne ovat sama joukko.

II. Pariaksiooma: $\forall a \forall b \exists x \forall c \big(c \in x \leftrightarrow (c = a \lor c = b)\big)$: Jos a ja b ovat joukkoja, niin on olemassa joukko, jonka alkiot ovat täsmälleen nämä joukot.

III. Yhdisteaksiooma: $\forall a \exists x \forall c \big(c \in x \leftrightarrow \exists y (y \in a \land c \in y)\big)$: Kun a on joukko, niin on olemassa joukko, jonka alkioita ovat täsmälleen joukon a alkioiden alkiot.

IV. Potenssijoukkoaksiooma: $\forall a \exists x \forall b (b \in x \leftrightarrow b \subseteq a)$: Jokaiselle joukolle a on olemassa joukko, jonka alkiot ovat täsmälleen joukon a osajoukot.

V. Äärettömyysaksiooma: $\exists x \Big(\emptyset \in x \land \forall a \big(a \in x \to (a \cup \{a\} \in x)\big)\Big)$: On olemassa induktiivinen joukko.

VI. Erotteluaksioomat: Kun $\varphi(c, b)$ on kaava, niin seuraava on aksiooma:
$\forall a \forall b \exists x \forall c \big(c \in x \leftrightarrow c \in a \land \varphi(c, b)\big)$. Siis on olemassa joukko $x = \{c \in a \mid \varphi(c, b)\}$.

VII. Korvausaksioomat: Kun $\varphi(a, b, p)$ on kaava, niin seuraava on aksiooma:
$\forall a \forall b \forall c \big(\varphi(a, b, p) \land \varphi(a, c, p) \to b = c\big) \to \forall a' \exists b' \forall b \Big(b \in b' \leftrightarrow \exists a \big(a \in a' \land \varphi(a, b, p)\big)\Big)$. Siis jos φ määrittelee kuvauksen, niin sen antamat kuvat ovat jonkin joukon alkioita.

VIII. Säännöllisyysaksiooma: $\forall a \big(a \neq \emptyset \to \exists b \in a (a \cap b = \emptyset)\big)$. Jokaisella epätyhjällä joukolla a on olemassa alkio b, jolle pätee $a \cap b = \emptyset$.

IX. Valinta-aksiooma: Jokaisella epätyhjien joukkojen perheellä on olemassa valintafunktio. Toisin sanoen, jos S on joukko ja $\emptyset \notin S$, niin on olemassa kuvaus määrittelyjoukkonaan S, jolle $f(X) \in X$ kaikilla $X \in S$.

Koska tärkeimpänä tavoitteena on aksioomien päteminen, tutkielmassa käytettävässä aksioomajärjestelmässä käytetään joistakin aksioomaista heikompia versioita, jotka kuitenkin erotteluaksioomien avulla ovat yhtäpitäviä vahvojen versioiden kanssa. Säännöllisyysaksiooma jätetään pois, jotta tämän kanssa ristiriitaisia aksioomia voidaan tutkia. Korvausaksioomien sijaan käytetään vahvempia keräysaksioomia, jotka ovat johdettavissa korvausaksioomista säännöllisyysaksiooman avulla ja siten eivät muuten ehkä pätisi mallissa ilman säännöllisyysaksioomaa.

I. Ekstensionaalisuusaksiooma: $\forall a \forall b \big(\forall c (c \in a \leftrightarrow c \in b) \to a = b\big)$

II. Pariaksiooma: $\forall a \forall b \exists x (a \in x \wedge b \in x)$

III. Yhdisteaksiooma: $\forall a \exists x \Big(\forall b \big(\exists y (y \in a \wedge b \in y)\big) \to b \in x\Big)$

IV. Potenssijoukkoaksiooma: $\forall a \exists x \forall b (b \subseteq a \to b \in x)$

V. Äärettömyysaksiooma: $\exists x \Big(\emptyset \in x \wedge \forall a \big(a \in x \to \exists y (y \in x \wedge y = a \cup \{a\})\big)\Big)$

VI. Erotteluaksioomat: Kun $\varphi(c, b)$ on kaava, niin seuraava on aksiooma:
$\forall a \forall b \exists x \forall c \Big(c \in x \leftrightarrow \big(c \in a \wedge \varphi(c, b)\big)\Big)$

VII. Keräysaksioomat: Kun $\varphi(a, b, p)$ on kaava, niin seuraava on aksiooma:
$\forall a \forall b \Big(\exists p \big(b \in a \wedge \varphi(a, b, p)\big) \to \exists x \forall b \Big(b \in a \to \exists p \big(p \in x \wedge \varphi(a, b, p)\big)\Big)\Big)$

VIII. Valinta-aksiooma: Jokaisella epätyhjien joukkojen perheellä on olemassa valintafunktio.

Tähän aksioomajärjestelmään viitataan lyhenteen ZFC^- avulla, tai ilman valinta-aksioomaa lyhenteellä ZF^-.

Vaikka uusia aksioomia tullaan esittelemään, kuvausten ja näitä yksinkertaisempien joukkojen määrittely tutulla tavalla ei tuota ongelmia.

Määritelmä 2.1. Kun a ja b ovat joukkoja, niin tällöin $\{\{a\}, \{a, b\}\} = (a, b)$ on *järjestetty pari*.

Olkoon R joukko. Jos kaikki sen alkiot $r \in R$ ovat järjestettyjä pareja (p_r, q_r), joille $p_r \in A$ ja $p_r \in B$ joillakin joukoilla A ja B, niin R on joukkojen A ja B välinen *relaatio*.

Lisäksi jos kaikille $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R$ pätee, että jos $a_1 = a_2$, niin myös $b_1 = b_2$, relaatio R on *kuvaus* $A \to B$.

Jos R ja S ovat relaatioita, niin näiden *yhdistetty relaatio* on relaatio $R \circ S = \{(a, c) \mid$ on olemassa b, jolle aRb ja $bSc\}$.

Jos f ja g ovat kuvauksia, niin näiden *yhdistetty kuvaus* on kuvaus $f \circ g = \{(x, z) \mid f(g(x)) = z\}$.

Seuraavaksi lajitellaan joukot kahteen eri tyyppiin riippuen niiden suhteesta säännöllisyysaksioomaan. Tähän käytetään kumulatiivista hierarkiaa, sillä se esittelee muitakin hyödyllisiä käsitteitä.

Määritelmä 2.2. Olkoon $<$ joukon P relaatio. Tämä on *hyvinjärjestys*, jos

- Millään $p \in P$ ei päde $p < p$
- Jos $p < q$ ja $q < r$, niin $p < r$

- Jos $p, q \in P$, niin täsmälleen yksi seuraavista pätee: $p < q$, $p = q$ tai $q < p$
- Jokaisella joukon P epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio.

Määritelmä 2.3. Joukko a on transitiivinen, jos kaikille sen alkioille $b \in a$ pätee $b \subseteq a$.

Määritelmä 2.4. Joukko a on *ordinaali*, jos se on transitiivinen ja hyvinjärjestetty joukkoon kuuluvuuden $\in$ suhteen. Jos ordinaali α ei ole muotoa $\beta \cup \{\beta\} = \beta + 1$ millään ordinaalilla β, niin α on *rajaordinaali*.

Määritelmä 2.5. Transfiniittisen induktion avulla kaikille ordinaaleille α voidaan määritellä

- $V_0 = \emptyset$,
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$,
- $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$, jos α on rajaordinaali.

Tämä on *joukkojen kumulatiivinen hierarkia*. Jos joukko a on jonkin hierarkian joukon V_α alkio, niin joukon sanotaan olevan *hyvinperustettu*. Muuten joukko on *hyperjoukko*.

Huomautus. Nyt jos joukko a on hyvinperustettu joukko, niin tästä triviaalisti seuraa, että kaikki joukot $b \in a$ ovat myös hyvinperustettuja.

Esitellään vielä transitiivisen sulkeuman käsitteen sekä todistetaan tämän olemassaolo.

Määritelmä 2.6. Olkoon a joukko. Tällöin joukon a *transitiivinen sulkeuma* on pienin transitiivinen joukko, jonka osajoukko a on. Merkitään tätä $\mathrm{TC}(a)$.

Lause 2.7. *Transitiivinen sulkeuma on hyvinmääritelty.*

Todistus. Olkoon a joukko. Määritellään $a_0 = a$ ja $a_{n+1} = \bigcup a_n$. Tutkitaan joukkoa $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} a_n$. Ensinnäkin koska $a_0 = a$, niin $a \subseteq A$. Olkoon sitten $b \in A$. Tällöin $b \in a_k$ jollakin k. Nyt jos $c \in b$, niin myös $c \in a_{k+1}$. Täten $c \in A$. Siis A on transitiivinen.

Olkoon T vielä sellainen transitiivinen joukko, jolle $a \subseteq T$. Nyt selvästi jos $b \in A$, niin myös $b \in T$. Siis $A \subseteq T$. Täten A on pienin transitiivinen joukko, jolle $a \subseteq A$. Siis $A = \mathrm{TC}(a)$. □

Huomautus. Olkoon A hyvinperustettu epätyhjä joukko. Nyt on itse asiassa yhtäpitävää sanoa, että kaikille $a \in \mathrm{TC}(A)$ on olemassa $b \in a$, jolle $b \cap a = \emptyset$, eli että säännöllisyysaksiooma pätee tämän joukon transitiiviseen sulkeumaan.

Joukkojen lisäksi tarvitaan myös aitoja luokkia.

Määritelmä 2.8. Olkoon $\varphi(x, p_1, \ldots, p_n)$ joukko-opin kaava. Tällöin $C = \{x \mid \varphi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$ on *luokka*.

Määritellään luokille myös eräät käsitteet vastaavasti kuin joukoille. Olkoot C ja D luokkia. Tällöin $C \cup D = \{x \mid x \in C \vee x \in D\}$ on luokkien yhdiste ja $C \cap D = \{x \mid x \in C \wedge x \in D\}$ luokkien leikkaus. Luokkien väliset *luokkarelaatiot* ja *luokkakuvaukset* määritellään myös vastaavasti.

Jos C on luokka mutta ei joukko, niin C on *aito luokka*.

Esimerkkinä aidosta luokasta, joka ei ole kaikkien joukkojen luokka, on $O = \{\alpha \mid \alpha \text{ on ordinaali}\}$.

Viimein esitellään kategoriateorian peruskäsitteitä viimeisen luvun tarpeisiin.

Määritelmä 2.9. *Kategoria* koostuu

- *Objekteista* $A, B, C, \ldots$

- *Morfismeista* $f, g, h, \ldots$

Morfismit ovat nuolia $f\colon A \to B$ objektien A ja B välillä. Jos $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ ovat morfismeja, niin on olemassa morfismi $g \circ f\colon A \to C$, joka on näiden morfismien *yhdiste*. Yhdisteen on oltava liitännäinen, eli kaikilla morfismeilla $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ ja $h\colon C \to D$ on pädettävä $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Lisäksi kaikilla objekteilla A on oltava olemassa *identiteettimorfismi* $1_A\colon A \to A$. Identiteettimorfismeille on pädettävä $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ kaikilla morfismeilla $f\colon A \to B$.

Kategorian C *täydet osakategoriat* ovat ne kategoriat, joiden objekteina ovat jotkin kategorian C objektit sekä morfismeina kaikki näiden objektien väliset kategorian C morfismit.

Huomautus. Tässä tutkielmassa käytetyt morfismit tulevat olemaan (luokka)kuvauksia, mutta yleisemmin kategoriateoriassa tämä ei ole välttämätöntä.

Erityisesti tietynlaiset objektit ovat hyödyllisiä.

Määritelmä 2.10. Olkoon C kategoria ja A tämän objekti. Nyt A on kategorian C *loppuobjekti*, jos jokaiselle objektille C on olemassa yksikäsitteinen morfismi $C \to A$. Vastaavasti A on *alkuobjekti*, jos kaikille objekteille C on olemassa yksikäsitteiset morfismit $A \to C$.

Huomautus. Samalla kategorialla voi olla useita loppuobjekteja (alkuobjekteja), mutta tällöin ne ovat keskenään isomorfisia.

Kategorioiden välisiä suhteita voidaan tutkia funktoreilla.

Määritelmä 2.11. Olkoot C ja D kategorioita. Tällöin luokkakuvaus $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ on kategorioiden C ja D välinen *funktori*, jos

- Kategorian C objekteille A pätee, että $F(A)$ on kategorian D objekti
- Kategorian C morfismeille $f\colon A \to B$ pätee, että $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ on kategorian D morfismi
- Kategorian C identiteettimorfismeille 1_A pätee, että $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- Kaikkien morfismien g ja f yhdisteiden kuville pätee, että $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Näihin vaatimuksiin voidaan viitata yksinkertaisemmin funktoriaalisuutena.

Jos F on funktori kategoriasta C itseensä, kutsutaan sitä *endofunktoriksi*.

3 Antisäännöllisyysaksiooma

Tämän luvun lähteenä käytetään Barwisen ja Mossin kirjaa [3].

Aloitetaan antisäännöllisyysaksiooman käsittely tavalla esittää hyperjoukkoja vain hyvinperustettujen joukkojen avulla. Esimerkkitapauksena yritetään kuvata sellaiset a, b ja c, jotka toteuttavat yhtälöt

$$\begin{aligned} a &= \{b, c\} \\ b &= \emptyset \\ c &= \{a, c\} \end{aligned}$$

Joukkoon kuuluvuuden sijaan voidaan esittää tarvittava joukkorakenne sopivalla kuvauksella. Kuvauksen määrittelyjoukko ei tässä ole tärkeä, joten käytetään joitain eri joukkoja x, y ja z. Määritellään kuvaus e siten, että $e(x) = \{y, z\}$, $e(y) = \{\}$ ja $e(z) = \{x, z\}$. Tällöin $e(x)$ vastaa yhtälöä $a = \{b, c\}$, $e(y)$ yhtälöä $b = \emptyset$ ja $e(z)$ yhtälöä $c = \{a, c\}$. Esityksessä on siis tietty yhtälöissä käytettävien ”tuntemattomien” joukko $\{x, y, z\}$ ja itse yhtälöryhmää vastaava kuvaus e. Yhtälöissä voidaan käyttää myös ”vakioita”, esimerkiksi ensin muuttamalla kuvaus e sellaiseksi, että $e(x) = \{\emptyset, z\}$ ja karsimalla määrittelyjoukon tuntemattomien joukoksi $X = \{x, z\}$. Tällöin on sen sijaan käytettävä vakioiden joukkoa $C = \{\emptyset\}$ sekä varmistettava, ettei päde $\emptyset \in X$, jotta käytetty kuvaus vastaa yhtälöitä tarkasti. Yhtälöryhmää voidaan siis kuvata objektilla (X, C, e). Tällöin joukot a, b ja c toimivat ratkaisuna tälle rakennetulle objektille.

Seuraavaksi yleistetään näiden yhtälöryhmäobjektien ja niiden ratkaisujen määritelmiä.

Määritelmä 3.1. *Yhtälöryhmä* on kolmikko $\mathcal{E} = (X, C, e)$, missä X ja C ovat keskenään erillisiä joukkoja ja $e\colon X \to \mathcal{P}(X \cup C)$ on kuvaus. Tällöin

- X on yhtälöryhmän *tuntemattomien* joukko,
- C on yhtälöryhmän *vakioiden* joukko ja
- $b_v = e(v) \cap X$ on alkioon v *suoraan vaikuttavien tuntemattomien* joukko kaikilla $v \in X$. Samoin $c_v = e(v) \cap C$ on alkioon v *suoraan vaikuttavien vakioiden* joukko kaikilla $v \in C$.

Jos $C = \emptyset$, niin voidaan sanoa yhtälöryhmän sanotaan olevan *vakioton*. Tällöin voidaan käyttää myös lyhennysmerkintää $\mathcal{E} = (X, e)$.

Jos s on kuvaus määrittelyjoukkonaan $X \cup C$, jolla $s(a) = a$ kaikilla $a \in C$ ja $s(x) = \{s(y) \in \mathrm{Im}(s) \mid y \in e(x)\}$ kaikilla $x \in X$, niin s on yhtälöryhmän *ratkaisu*.

Näiden peruskäsitteiden avulla voidaan jo määritellä antisäännöllisyysaksiooma keskittymällä ratkaisujen olemassaoloon.

Antisäännöllisyysaksiooma: Jokaisella yhtälöryhmällä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu.

Suurimmassa osassa tulevissa todistuksissa tullaan toimimaan aksioomajärjestelmässä ZF^- antisäännöllisyysaksiooman kanssa eli ZFA, tai tarvittaessa ZFA + C valinta-aksiooman kanssa. Tämä johtaa hyperjoukkojen olemassaoloon, joista yksinkertaisin esitellään seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 3.2. Voidaan osoittaa, että on olemassa vain yksi joukko, joka on oma yksiönsä.

Osoitetaan ensin, että tällainen joukko on olemassa. Tarkastellaan tätä varten yhtälöryhmää $\mathcal{E} = (\{x\}, \{(x, \{x\})\})$, missä x on jokin joukko. Nyt antisäännöllisyysaksiooman mukaan tälle on olemassa ratkaisu s, jolle $s(x) = \{s(y) \in \operatorname{Im}(s) \mid y \in b_x\} = \{s(x)\}$.

Oletetaan sitten, että m on joukko, joka on itsensä yksiö eli $m = \{m\}$. Nyt kuitenkin havaitaan, että kuvaus $s' = \{(x, m)\}$ sopii yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ ratkaisuksi, sillä $s'(x) = m = \{m\} = \{s'(x)\} = \{y \in \operatorname{Im}(s') \mid y \in b_x\}$. Täten ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla $s = s'$ ja $s(x) = s'(x) = m$.

Merkitään tätä yksikäsitteistä joukkoa $m = \Omega$.

Ratkaisun yksikäsitteisyys antisäännöllisyysaksiooman ollessa voimassa antaa mahdollisuuden määritellä jokaiselle yhtälöryhmälle oman ratkaisujoukkonsa.

Määritelmä 3.3. Olkoon $\mathcal{E} = (X, C, e)$ yhtälöryhmä ja s sen ratkaisu. Tällöin $\mathrm{S}(\mathcal{E}) = s[X]$ on yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ *ratkaisujoukko*.

Esimerkin 3.2 yhtälöryhmän ratkaisujoukko on $\{\Omega\}$. Tämä nostaa esiin kysymyksen, että saadaanko jokaiselle olemassaolevalle joukolle rakennettua yhtälöryhmä, jonka ratkaisujoukossa se on?

Määritelmä 3.4. Olkoon A joukko. Tällöin $A_{\mathcal{E}} = \big(\mathrm{TC}(\{A\}), \mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}\big)$ on joukon A *kanoninen yhtälöryhmä*.

Halutaan tietenkin varmistaa, että kyseessä on yhtälöryhmä. Lisäksi joukon A kanoniselle yhtälöryhmälle halutaan ominaisuus, että $A \in \mathrm{S}(A_{\mathcal{E}})$.

Lause 3.5. *Kanoniset yhtälöryhmät todellakin ovat yhtälöryhmiä, joiden ratkaisuna on joukon* $\mathrm{TC}(\{A\})$ *identtinen kuvaus.*

Todistus. Olkoon A joukko.

Olkoon $a \in \mathrm{TC}(\{A\})$. Tällöin myös $a \in \mathrm{TC}(\{A\})$. Siis $\mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}(a) = a \in \mathcal{P}\big(\mathrm{TC}(\{A\})\big)$, eli $\mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})} \colon \mathrm{TC}(\{A\}) \to \mathcal{P}\big(\mathrm{TC}(\{A\})\big)$. Siis $A_{\mathcal{E}}$ todellakin on yhtälöryhmä.

Tarkastellaan kuvausta $\mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}$. Nyt $\operatorname{dom}(\mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}) = \mathrm{TC}(\{A\})$. Olkoon $a \in \mathrm{TC}(\{A\})$. Koska $b \in \mathrm{TC}(\{A\})$ kaikilla $b \in a$, niin

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}(a) &= a = \{b \in a \mid b \in a\} \\ &= \{\mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}(b) \in \mathrm{TC}(\{A\}) \mid b \in \mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}(a)\}.\end{aligned}$$

Siis $\mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{A\})}$ on yhtälöryhmän $A_{\mathcal{E}}$ ratkaisu. □

Tämän lauseen tapaisesti huomataan myös, ettei yhtälöryhmissä ei tarvitse käyttää vakioita kaikkien mahdollisten ratkaisujoukkojen saamiseen.

Lause 3.6. *Jos* $\mathcal{E}$ *on yhtälöryhmä, jossa esiintyy vakioita, niin on olemassa vakioton yhtälöryhmä* $\mathcal{E}'$*, jolle* $\mathrm{S}(\mathcal{E}) \cup \mathrm{TC}(C) = \mathrm{S}(\mathcal{E}')$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{E} = (X, C, e)$ yhtälöryhmä ja $C \neq \emptyset$. Ensinnäkin voidaan olettaa, että $\mathrm{TC}(C) \cap X = \emptyset$. Nimittäin jos tutkitaan tällaista transitiivisen sulkeuman $\mathrm{TC}(C)$ suhteen erillistä joukkoa Y sekä bijektiota $g \colon Y \to X$, niin saadaan yhtälöryhmä $\mathcal{E}_2 = (Y, C, f)$, missä $f(y) = e(g(y))$ kaikilla $y \in Y$. Erityisesti myös $\mathrm{S}(\mathcal{E}_2) = \mathrm{S}(\mathcal{E})$.

Muodostetaan uusi yhtälöryhmä $\mathcal{E}' = (X', e')$, missä $X' = X \cup \mathrm{TC}(C)$ ja $e' \colon X' \to \mathcal{P}(X')$. Kuvauksessa määritellään $e'(x) = e(x)$, jos $x \in X$ sekä $e'(a) = a$, jos $a \in \mathrm{TC}(C)$. Näin voidaan tehdä, sillä $\mathrm{TC}(C) \subseteq X'$. Etsitään tälle ratkaisu alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisun avulla.

Olkoon s yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ ratkaisu. Tarkastellaan kuvausta s', missä $s'(x) = s(x)$ kaikilla $x \in X$ ja $s'(a) = a$ kaikilla $a \in \mathrm{TC}(C)$. Tämä on kuitenkin yhtälöryhmän $\mathcal{E}'$ ratkaisu. Nimittäin jos $x \in X$, niin $s'(x) = s(x) = \{s(y) \mid y \in e(x)\} = \{s'(y) \mid y \in e'(x)\}$, sekä jos $a \in \mathrm{TC}(C)$, niin $s'(a) = a = \{b \mid b \in a\} = \{s(b) \mid b \in e'(a)\}$.

Nyt kuitenkin kuvaukselle annetun määritelmän nojalla $\mathrm{S}(\mathcal{E}) \cup \mathrm{TC}(C) = \mathrm{S}(\mathcal{E}')$. $\square$

Tästä lähtien tutkitaan vain vakiottomia yhtälöryhmiä, ellei toisin mainita.

Eräs kiinnostava yksityiskohta viimeisessä todistuksessa on, että yhtälöryhmän tuntemattomat pystytään vaihtamaan toisiin tuntemattomiin vaikuttamatta sen ratkaisujoukkoon. Seuraavassa luvussa tutkitaan tarkemmin yhtälöryhmiä, jotka jakavat ratkaisujoukot.

4 Bisimulaatio

Tässä luvussa tarkastellaan antisäännöllisyysaksioomaan liittyvien objektien välisiä bisimulaatiorelaatioita ja niihin liittyviä seurauksia. Ensimmäisessä aliluvussa tutkitaan bisimulaatioiden kytköksiä anisäännöllisyysaksioomaan, kun taas toisessa aliluvussa tutkitaan, miten tietynlaisten bisimulaatioiden avulla pystytään määrittelemään antisäännöllisyysaksiooman muunnelmia. Määritellään ensin kuitenkin, mitä joukkojen väliset bisimulaatiot yleisesti ovat.

Määritelmä 4.1. Olkoot A ja B luokkia sekä $S_1 \subseteq A \times A$, $S_2 \subseteq B \times B$ ja $R \subseteq A \times B$ (luokka)relaatioita. Nyt sanotaan, että R on *bisimulaatio* (relaatioiden S_1 ja S_2 suhteen), jos seuraavat ehdot pätevät:

- Oletetaan, että xRx'. Tällöin kaikille joukoille $y \in A$, joille xS_1y, on olemassa $y' \in B$, jolle $x'S_2y'$.
- Oletetaan, että xRx'. Tällöin kaikille joukoille $y' \in B$, joille $x'S_2y'$, on olemassa $y \in A$, jolle xS_1y.

Bisimulaatioiden avulla pyritään tutkimaan, miten samanlaisia tutkittavat joukot ovat tiettyjen relaatioiden suhteen. Esimerkiksi yhtälöryhmien rakennekuvaukset ja joukkoon kuuluvuus osoittautuvat hyödyllisiksi vertailun kohteiksi.

4.1 Bisimulaatio yhtäsuuruusrelaationa

Tämän aliluvun lähteenä käytetään Barwisen ja Mossin kirjaa [3].

Edellisessä luvussa huomattiin, että yhtälöryhmän tuntemattomat voidaan vaihtaa vaikuttamatta sen ratkaisujoukkoon. On kuitenkin löydettävissä monimutkaisempiakin esimerkkejä eri yhtälöryhmistä, joilla on samat ratkaisujoukot. Seuraavassa esimerkissä tutkitaan monimutkaisemmalta vaikuttavaa hyperjoukkoihin liittyvää esimerkkiä.

Esimerkki 4.2. Tutkitaan seuraavia yhtälöryhmiä:

$$\mathcal{E}_1 = \big(\{w\}, \{(w, \{w\})\}\big)$$
$$\mathcal{E}_2 = \big(\{x, y, z\}, \{(x, \{y\}), (y, \{y, z\}), (z, \{z\})\}\big)$$

Aiemman esimerkin nojalla tiedetään, että $\mathrm{S}(\mathcal{E}_1) = \{\Omega\} = \Omega$. Lisäksi huomataan, että $s = \{(x, \Omega), (y, \Omega), (z, \Omega)\}$ on yhtälöryhmän $\mathcal{E}_2$ ratkaisu, sillä $s(x) = \Omega = \{\Omega\} = \{s(y)\}$, $s(y) = \{\Omega\} = \{\Omega, \Omega\} = \{s(y), s(z)\}$ ja $s(z) = \{\Omega\} = \{s(z)\}$. Siis myös $\mathrm{S}(\mathcal{E}_2) = \Omega$.

Halutaan löytää tapa selvittää, milloin kahdella yhtälöryhmällä on samat ratkaisujoukot. Esitellään tätä varten yhtälöryhmiin liittyvä bisimulaatio.

Määritelmä 4.3. Olkoot $\mathcal{E} = (X, e)$ ja $\mathcal{E}' = (X', e')$ yhtälöryhmiä. Tällöin

1. Yhtälöryhmien $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{E}'$ välillä sanotaan olevan *yhtälöryhmien bisimulaatio* $R \subseteq X \times X'$, jos seuraavat ehdot pätevät:
   - Oletetaan, että xRx'. Tällöin kaikille tuntemattomille $y \in b_x$ on olemassa tuntematon $y' \in b_{x'}$, jolle yRy'.

- Oletetaan, että xRx'. Tällöin kaikille tuntemattomille $y' \in b_{x'}$ on olemassa tuntematon $y \in b_x$, jolle yRy'.

2. Yhtälöryhmien $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{E}'$ sanotaan olevan *bisimilaarisia*, $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, jos niiden välillä on bisimulaatio R, jolle pätevät seuraavat ehdot:

   - Jokaiselle $x \in X$ on olemassa $x' \in X'$, jolle xRx'.
   - Jokaiselle $x' \in X'$ on olemassa $x \in X$, jolle xRx'.

Tässä yhtälöryhmien bisimulaatiossa on siis määritelty bisimulaatio tuntemattomien joukon relaatioiden S_1 ja S_2 suhteen, missä $xS_1y \Leftrightarrow y \in e(x)$ ja $xS_2y \Leftrightarrow y \in e'(x)$.

Varmistetaan ensimmäiseksi, että ensimmäisen esimerkin yhtälöryhmien väliltä löytyy tällainen bisimulaatio.

Esimerkki 4.4. Tarkastellaan edellisen esimerkin yhtälöryhmiä $\mathcal{E}_1$ ja $\mathcal{E}_2$, sekä osoitetaan ne bisimilaarisiksi.

Nyt relaatio $R = \{(w, x), (w, y), (w, z)\}$ on vaaditun ehdon toteuttava bisimulaatio:

- Kaikki joukon $\{w\}$ alkiot ovat relaatiossa jonkin joukon $\{x, y, z\}$ alkion kanssa sekä toisinpäin.

- Jokainen joukoista b_x, b_y, b_z ja b_w on epätyhjä. Koska nämä ovat aina yhtälöryhmän tuntemattomien joukon osajoukkoja, niin tämän ja edellisen kohdan nojalla bisimulaatioehto toteutuu.

Täten $\mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_2$.

Yleistetään tämä havainto kaikkien yhtälöryhmien väliseksi ominaisuudeksi seuraavassa lauseessa.

Lause 4.5. *Vakiottomat yhtälöryhmät ovat bisimilaarisia, jos ja vain jos niillä on samat ratkaisujoukot.*

Todistus. Olkoot $\mathcal{E} = (X, e)$ ja $\mathcal{E}' = (X', e')$ yhtälöryhmiä ja kuvaukset s ja s' näiden ratkaisut.

Oletetaan ensin, että $\mathrm{S}(\mathcal{E}) = \mathrm{S}(\mathcal{E}')$. Määritellään relaatio $R \subseteq X \times X'$:

$$xRx' \iff s(x) = s'(x')$$

Osoitetaan R näiden yhtälöryhmien väliseksi vaaditunlaiseksi bisimulaatioksi:

- Olkoon $x' \in X'$. Tällöin $s'(x') \in \mathrm{S}(\mathcal{E}')$. Kuitenkin $\mathrm{S}(\mathcal{E}) = \mathrm{S}(\mathcal{E}')$, jolloin $s'(x') \in \mathrm{S}(\mathcal{E})$. Tällöin $s'(x') = s(x)$ jollakin $x \in X$. Täten xRx'. Toinen suunta todistetaan vastaavasti.

- Oletetaan, että xRx' ja $y' \in b_{x'}$. Tällöin $s'(y') \in s'(x')$, ja koska $s(x) = s'(x')$, niin $s'(y') = s(y)$ jollakin $y \in b_x$. Siis yRy'. Toinen suunta todistetaan vastaavasti.

Täten yhtälöryhmät ovat bisimilaariset.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$. Olkoon R näiden yhtälöryhmien välinen bisimulaatio.

Todistetaan ensin, että $s(x) = s'(x')$, kun xRx'. Rakennetaan tätä varten uusi yhtälöryhmä $\mathcal{E}^* = (X^*, e^*)$. Tässä $X^* = R$ ja $e^*(u, u') = \{(v, v') \in X^* \mid v \in e(u) = b_u$ ja $v' \in e'(u') = b_{u'}\}$. Selvästi tämä on yhtälöryhmä. Tutkitaan kuvauksia $s_1(u, u') = s(u)$ ja $s_2(u, u') = s'(u')$, missä $(u, u') \in X^*$. Voidaan osoittaa, että ne ovat kummatkin yhtälöryhmän $\mathcal{E}^*$ ratkaisuja, jolloin ratkaisun yksikäsitteisyydestä seuraa $s(u) = s'(u')$, kun uRu'. Osoitetaan seuraavaksi s_2 ratkaisuksi.

Olkoon $(u, u') \in X^*$ ja $b \in s_2(u, u') = s'(u')$. Koska s' on yhtälöryhmän $\mathcal{E}'$ ratkaisu, niin on oltava $b = s'(w')$ jollakin $w' \in b_{u'}$. Toisaalta koska R on bisimulaatio ja uRu', niin on olemassa $w \in b_u$, jolle wRw'. Siis $(w, w') \in b_{(u,u')} \subseteq X^*$ ja $b = s'(w') = s_2(w, w')$. Täten $s_2(u, u') \subseteq \{s_2(v, v') \in \mathrm{Im}(s') \mid (v, v') \in b_{(u,u')}\}$.

Olkoon sitten $b = s_2(v, v')$, missä $(v, v') \in b_{(u,u')}$ ja uRu'. Tällöin $b = s'(v')$ ja lisäksi $s_2(u, u') = s'(u')$. Nyt kuitenkin $v' \in b_{u'}$, joten $b = s'(v') \in s'(u') = s_2(u, u')$. Siis $\{s_2(v, v') \in \mathrm{Im}(s') \mid (v, v') \in b_{(u,u')}\} \subseteq s_2(u, u')$.

Täten s_2 on ratkaisu. Vastaavasti voidaan todistaa kuvauksen s_1 olevan ratkaisu. On siis todistettu, että $s(u) = s'(u')$, kun uRu'.

Olkoon $a' \in \mathrm{S}(\mathcal{E}')$. Tällöin $a' = s'(x')$ jollakin $x' \in X'$. Koska yhtälöryhmät ovat bisimilaariset, niin on olemassa $x \in X$, jolle xRx'. Täten $s(x) = s'(x')$, eli $a' \in \mathrm{S}(\mathcal{E})$. Siis $\mathrm{S}(\mathcal{E}') \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{E})$.

Vastaavasti $\mathrm{S}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{E}')$, joten yhtälöryhmien ratkaisujoukot ovat samat. □

Suorana seurauksena tästä lauseesta on, että bisimilaarisuus $\equiv$ on vakiottomien yhtälöryhmien välinen ekvivalenssi, sillä joukkojen yhtäsuuruus on ekvivalenssi.

Esimerkki 4.6. Todistetaan bisimilaarisuuden avulla, että jos epätyhjän vakiottoman yhtälöryhmän jokainen tuntematon riippuu jostain tuntemattomasta, niin sen ratkaisujoukko on Ω.

Olkoon $\mathcal{E} = (\{x\}, \{(x, \{x\})\})$ aiemman esimerkin yhtälöryhmä, jonka ratkaisujoukkona on $\{\Omega\} = \Omega$, ja $\mathcal{E}' = (X, e)$ yhtälöryhmä, jolle $X \neq \emptyset$ ja $e(w) \neq \emptyset$ kaikilla $w \in X$. Nyt $R = \{x\} \times X$ on yhtälöryhmien välinen bisimulaatio, jossa jokainen tuntematon on relaatiossa jonkin toisen yhtälöryhmän tuntemattoman kanssa. Täten $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, ja lauseen 4.5 nojalla $\mathcal{S}(\mathcal{E}') = \mathcal{S}(\mathcal{E}) = \Omega$.

Esimerkeistä huomataan, että hyperjoukkojen tapauksessa ekstensionaalisuus ei ole hyödyllinen joukkojen yhtäsuuruutta tarkasteltaessa. Esimerkissä 3.2 ei voitaisi todistamaan yhtäsuuruutta $m = s(x)$ ilman yhtälöryhmiä, sillä ekstensionaalisuuden avulla pystytään toteamaan vain, että $m = s(x) \Leftrightarrow m = s(x)$. Halutaan siis jokin joukkojen välinen suhde, joka ilmaisee yhtäsuuruuden ilman yhtälöryhmiä.

Määritelmä 4.7. Sanotaan, että (luokka)relaatio R on *joukkojen välinen bisimulaatio*, jos kaikille joukoille a ja b pätee ehto

$$\begin{aligned} aRb \implies &\text{kaikille } c \in a \text{ on olemassa } d \in b, \text{jolle } cRd \\ &\text{sekä kaikille } d \in b \text{ on olemassa } c \in a, \text{jolle } cRd. \end{aligned}$$

Jos joukkojen a ja b välillä on tällainen bisimulaatio, niin ne ovat *bisimilaariset* ja merkitään $a \equiv b$.

Tämän määritelmän bisimulaatio on siis määritelty yksinkertaisesti kuuluvuusrelaation suhteen.

Seuraavaksi osoitetaan, että joukkojen yhtäsuuruus eli identiteetti luokkarelaationa on oikeastaan suurin joukkojen bisimulaatio. Tämän seurauksena saadaan kaikille joukoille a ja b, että jos $a \equiv b$, niin $a = b$. Seuraavassa lauseessa joukkojen yhtäsuuruutta merkitään symbolilla I sekaannusten välttämiseksi.

Lause 4.8 (Vahva ekstensionaalisuus)**.** *Joukkojen identiteetti* I *on bisimulaatio ja jos* R *on joukkojen bisimulaatio, niin* $R \subseteq \mathrm{I}$.

Todistus. Ensimmäinen väite on triviaali, sillä jokaiselle joukolle a tietenkin $a = a$ eli $a \,\mathrm{I}\, a$. Tällöin jos $a \,\mathrm{I}\, b$ eli $a = b$ ja on olemassa $c \in a$, niin ekstensionaalisuuden nojalla myös $c \in b$, jolloin $c \,\mathrm{I}\, c$ todistaa väitteen.

Toista väitettä varten oletetaan, että R on joukkojen bisimulaatio ja että aRb. Muodostetaan kanoniset yhtälöryhmät $a_{\mathcal{E}} = (X, e)$ ja $b_{\mathcal{E}} = (X', e')$. Merkitään $R^* = R \cap (X \times X')$ bisimulaation R rajoittumalle yhtälöryhmien tuntemattomien väliin. Osoitetaan tämä rajoittuma näiden yhtälöryhmien väliseksi bisimulaatioksi.

Olkoot $x \in X$ ja $x', y' \in X'$ tuntemattomia, joille xR^*x' ja $y' \in b_{x'}$. Kuitenkin $b_{x'} = e(x') \cap X' = \mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{b\})}(x') \cap \mathrm{TC}(\{b\}) = x' \cap \mathrm{TC}(\{b\}) = x'$, joten $y' \in x'$. Koska R on joukkojen bisimulaatio, niin tällöin on olemassa $y \in x$, jolle yRy'. Lisäksi $x \in X$, joten transitiivisen sulkeuman määritelmän nojalla myös $y \in X$. Siis yR^*y' ja $y \in b_x$. Vastaavasti osoitetaan bisimulaatioehdon toinen suunta, mistä seuraa, että R^* on yhtälöryhmien välinen bisimulaatio.

Seuraavaksi määritellään

$$Y' = \{x' \in X' \mid \text{ on olemassa } x \in X, \text{jolle } xR^*x'\}$$

ja osoitetaan $X' = Y'$, jolloin bisimilaarisuuden ehto "jokaiselle $x' \in X'$ on olemassa $x \in X$, jolle ehto xR^*x'"täyttyy. Selvästi $Y' \subseteq X'$, joten todistetaan toinen suunta. Huomataan, että ensinnäkin $b \in Y'$, sillä aR^*b. Toiseksi, jos $x' \in Y'$ ja $y' \in x'$, niin on olemassa $x \in X$, jolle pätee xR^*x'. Tällöin on olemassa myös sellainen $y \in x$, jolle yRy', koska R on joukkojen bisimulaatio. Joukot X ja X' ovat kuitenkin transitiivisia, joten koska $x \in X$ sekä $x' \in Y' \subseteq X'$, niin $y \in X$ ja $y' \in X'$. Siis yR^*y', jolloin $y' \in Y'$. Nyt on osoitettu, että Y' on transitiivinen joukko, jonka alkio b on. Koska $X' = \mathrm{TC}(\{b\})$ on pienen tällainen joukko, joten $X' \subseteq Y'$. Täten $X' = Y'$. Toinen bisimilaarisuuden suunta osoitetaan vastaavasti.

Täten yhtälöryhmät ovat bisimilaarisia, jolloin niiden ratkaisujoukot ovat samat. Koska lisäksi kuvaukset id_X ja $\mathrm{id}_{X'}$ ovat yhtälöryhmien ratkaisut, saadaan lauseen 4.5 toisen suunnan tavoin $a = \mathrm{id}_X(a) = \mathrm{id}_{X'}(b) = b$.

Siis jos aRb, niin $a = b$. Täten $R \subseteq \mathrm{I}$. □

Tämän lauseen avulla voidaan määrittää hyperjoukkojen yhtäsuuruus ilman yhtälöryhmien tarkasteluun siirtymistä.

Esimerkki 4.9. Olkoon $t = \{t, \Omega\}$. Joukkojen bisimulaatiolla voidaan osoittaa, että itse asiassa $t = \Omega$.

Huomataan, että $R = \{(t, \Omega), (\Omega, \Omega)\}$ on joukkojen bisimulaatio. Tarkistetaan tätä varten ehtojen voimassaolo kummallekin järjestetylle parille. Ensinnäkin $tR\Omega$ ja $t, \Omega \in t$, mutta $tR\Omega$ ja $\Omega R\Omega$. Samoin $\Omega R\Omega$ ja tietysti $\Omega \in \Omega$, jolle triviaalisti $\Omega R\Omega$. Täten edellisen lauseen nojalla $t = \Omega$.

4.2 Antisäännöllisyysaksiooman muunnelmat

Tämän aliluvun pääsääntöisenä lähteenä on Aczelin kirja [1]. Yhtälöryhmien sijaan Aczel esitti tulkintansa antisäännöllisyysaksioomista suunnattujen verkkojen avulla. Halusin kuitenkin pitää esitysmuodon samana tutkielman läpi, joten muokkasin tulokset toimimaan yhtälöryhmien kanssa. Tässä Barwisen ja Mossin kirjan [3] verkkoja koskeva luku oli hyödyllinen käsitteitä muokatessani.

Esimerkki 4.9 osoittaa, että tavallinen antisäännöllisyysaksiooma rajoittaa joissain määrin hyperjoukkojen rakennetta. Mitä tarvittaisiin, jos antisäännöllisyysaksioomasta ei haluta näin tiukkaa? Palataan tässä aliluvussa aksioomajärjestelmän ZF^- toteuttavaan malliin.

Ensin laajennetaan yhtälöryhmien rakennetta keskittymällä tiettyyn siinä esiintyvään tuntemattomaan.

Määritelmä 4.10. Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ yhtälöryhmä ja $x \in X$ siinä esiintyvä tuntematon. Tällöin pari $(\mathcal{E}, x)$ on *suunnattu yhtälöryhmä* ja tuntematonta x kutsutaan tämän suunnatun yhtälöryhmän *juureksi*. Suunnatun yhtälöryhmän ratkaisuksi määritellään sen yhtälöryhmän ratkaisu.

Lisäksi on mielekästä, että kaikki suunnatussa yhtälöryhmässä esiintyvät tuntemattomat liittyvät jotenkin sen juureen. Määritellään siis *rajoitettu* yhtälöryhmä $\mathcal{E}_x = (X_x, e_x)$, missä X_x on pienin joukko, jolle

- $x \in X_x$,
- jos $y \in X_x$, niin $b_y \subseteq X_x$,

ja e_x on kuvauksen e rajoittuma joukkoon X_x. Jos suunnatulle yhtälöryhmälle $(\mathcal{E}, x)$ pätee $(\mathcal{E}, x) = (\mathcal{E}_x, x)$, niin sen sanotaan olevan *saavutettava*.

Tavallisten yhtälöryhmien bisimilaarisuus voidaan muuntaa sopimaan myös suunnatuille yhtälöryhmillekin. Tämä vaatii vain yhden yksinkertaisen ehdon lisäämistä.

Määritelmä 4.11. Olkoot $(\mathcal{E}, x)$ ja $(\mathcal{E}', x')$ suunnattuja yhtälöryhmiä. Näiden sanotaan olevan *bisimilaarisia*, jos on olemassa yhtälöryhmien $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{E}'$ välinen bisimulaatio R, jonka seurauksena $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$ sekä pätee xRx'. Merkitään tätä bisimilaarisuutta edelleen $(\mathcal{E}, x) \equiv (\mathcal{E}', x')$.

Koska tarkasteltavien suunnattujen yhtälöryhmien on toteutettava useita ominaisuuksia, määritellään lisäksi luokka

$$\mathcal{PS} = \{\mathsf{e} \mid \mathsf{e} \text{ on saavutettava suunnattu yhtälöryhmä, jonka vakioiden joukko on tyhjä}\}$$

yksinkertaistamaan merkintöjä.

Lauseessa 4.5 tutkimalla bisimilaaristen yhtälöryhmien sijaan bisimilaarisia suunnattuja yhtälöryhmiä huomataan, että suunnattujen yhtälöryhmien juurien kuvien on oltava ratkaisuissa sama joukko. Suunnattujen yhtälöryhmien bisimilaarisuuden määritelmän nojalla näiden juuret ovat nimittäin bisimulaatiorelaatiossa, jolloin lauseessa tehdyn konstruktion nojalla näiden on vastattava samaa joukkoa.

Määritellään seuraavaksi suunnattujen yhtälöryhmien välinen isomorfisuus.

Määritelmä 4.12. Olkoot $(\mathcal{E}, x)$ ja $(\mathcal{E}', x')$ vakiottomia saavutettavia suunnattuja yhtälöryhmiä. Tällöin kuvaus $\pi \colon X \to X'$ on näiden välinen *isomorfismi*, jos

- $\pi[e(y)] = e'(\pi(y))$ kaikilla $y \in X$,
- $\pi(x) = x'$ ja
- π on bijektio.

Jos saavutettavien suunnattujen yhtälöryhmien välillä on olemassa isomorfismi, niin niiden sanotaan olevan *isomorfiset* ja merkitään $(\mathcal{E}, x) \cong (\mathcal{E}', x')$.

Isomorfia voidaan määritellä vastaavasti suuntaamattomien yhtälöryhmien välille, jolloin isomorfismin on noudatettava vain ensimmäistä ja kolmatta ehtoa.

Viimein määritellään luokan yhtälöryhmien välille luokkarelaatioiden tyyppi, joka yhdistää tietyillä tavoin suhteessa olevat yhtälöryhmät.

Määritelmä 4.13. Olkoon $\sim$ luokan $\mathcal{PS}$ luokkarelaatio. Sitä kutsutaan *tavalliseksi bisimulaatioksi*, jos

1. Luokkarelaatio $\sim$ on ekvivalenssi.
2. Jos $(\mathcal{E}, x) \cong (\mathcal{E}', x')$, niin $(\mathcal{E}, x) \sim (\mathcal{E}', x')$.
3. Jos y ja y' ovat saman yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ tuntemattomia ja $b_y = b_{y'}$, niin $(\mathcal{E}_y, y) \sim (\mathcal{E}_{y'}, y')$.
4. Jos $((X, e), x) \sim ((Y, f), y)$, tällöin pätee:
   - Jos $x' \in e(x)$, niin on olemassa $y' \in f(y)$, jolle $((X_{x'}, e_{x'}), x') \sim ((Y_{y'}, f_{y'}), y')$.
   - Jos $y' \in f(y)$, niin on olemassa $x' \in e(x)$, jolle $((X_{x'}, e_{x'}), x') \sim ((Y_{y'}, f_{y'}), y')$.

Tässä määritelmässä toinen ehto varmistaa, että täsmälleen samanrakenteiset yhtälöryhmät ovat aina relaatiossa keskenään ja kolmas ehto varmistaa, että hyperjoukkoihin liittyvät yhtälöryhmät, joiden tuntemattomilla on turhaa syvyyttä, ovat sisäisesti relaatiossa "oikean"alkukohdan kanssa. Neljäntenä vielä varmistetaan, että luokkarelaatio on bisimulaatio samoin kuin yhtälöryhmien bisimulaatiot ovat. Tavalliset bisimulaatiot voitaisiin määritellä ilmankin neljättä vaatimusta, mutta tällöin tiettyjen yhtälöryhmien vertailuihin tulisi käyttää isomorfisuutta tavallisen bisimulaation sijaan. Lisäksi luokkarelaatio olisi tällöin bisimulaatio pelkästään rajattuna suppeampaan muotoon, toisin kuin yleisesti neljännen ehdon ollessa voimassa.

Esimerkki 4.14. Annetaan esimerkki kolmannen ehdon toiminnasta. Olkoon siis $\sim$ tavallinen bisimulaatio. Tarkastellaan yhtälöryhmää $\mathcal{E} = (\{x, y, a\}, \{(x, \{y, a\}), (y, \{y, a\}), (a, \emptyset)\})$. Koska nyt $b_x = b_y$, täytyy olla $(\mathcal{E}, x) = (\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{E}_y, y) = ((\{y, a\}, \{(y, \{y, a\}), (a, \emptyset)\}), y)$.

Tämän aliluvun aikana on esitelty jo kaksi luokan $\mathcal{PS}$ luokkarelaatiota, bisimilaarisuus ja isomorfia. Näistä isomorfia ei ole tavallinen bisimulaatio, mikä esitetään seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 4.15. Suunnattujen yhtälöryhmien isomorfia ei ole tavallinen bisimulaatio. Vaikka ensimmäiset kaksi ehtoa pätevät triviaalisti, kolmannesta ehdosta voidaan antaa vastaesimerkki. Tutkitaan nimittäin yhtälöryhmää $\mathcal{E} = (X, e)$, missä $X = \{x, x'\}$ ja $e = \{(x, \{x\}), (x', \{x\})\}$. Tässä $b_x = b_{x'}$, joten jos isomorfia olisi tavallinen bisimulaatio, pitäisi olla $(X_x, e_x) \cong (X_{x'}, e_{x'}$. Näitä saavutettavia suunnattuja yhtälöryhmiä tutkimalla kuitenkin havaitaan, että $X_x = \{x\}$ ja $X_{x'} = \{x, x'\}$. Bijektion $X_x \longrightarrow X_{x'}$ muodostus on siis mahdotonta, joten isomorfiaakaan ei voi olla olemassa.

Toisin kuin isomorfia, luokan $\mathcal{PS}$ bisimilaarisuus sen sijaan on tavallinen bisimulaatio. Esitetään tämän todistus seuraavassa apulauseessa.

Apulause 4.16. Suunnattujen yhtälöryhmien bisimilaarisuus $\equiv$ on tavallinen bisimulaatio.

Todistus. Olkoot $(\mathcal{E}, x)$, $(\mathcal{F}, y)$ ja $(\mathcal{G}, z)$ saavutettavia suunnattuja yhtälöryhmiä. Todistetaan tämä ensin ekvivalenssiksi ilman antisäännöllisyysaksiooman apua.

- Refleksiivisyys: Selvästi $R = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\} = \mathrm{id}_X$ on bisimulaatio, joten $(\mathcal{E}, x) \equiv (\mathcal{E}, x)$.

- Symmetrisyys: Olkoon $(\mathcal{E}, x) \equiv (\mathcal{F}, y)$. Siis on olemassa bisimulaatio R, joka toteuttaa määritelmän ehdot. Nyt selvästi myös R^{-1} toteuttaa nämä ehdot, joten saadaan $(\mathcal{F}, y) \equiv (\mathcal{E}, x)$.

- Transitiivisuus: Olkoot $(\mathcal{E}, x) \equiv (\mathcal{F}, y)$ ja $(\mathcal{F}, y) \equiv (\mathcal{G}, z)$. Tällöin on olemassa määritelmän mukaiset bisimulaatiot $R \subseteq X \times Y$ ja $S \subseteq Y \times Z$. Nyt yhdistetty relaatio $R \circ S \subseteq X \times Z$ täyttää vaaditut ehdot. Siis $(\mathcal{E}, x) \equiv (\mathcal{G}, z)$.

Isomorfiaehto: Olkoon $(\mathcal{E}, x) \cong (\mathcal{F}, y)$. Tällöin yhtälöryhmien isomorfisuuden määritelmän mukaan on olemassa isomorfismi $\pi\colon X \longrightarrow Y$. Huomataan, että π sopii bisimulaatioksi, jolloin yhtälöryhmät ovat bisimilaariset:

- Määritelmän nojalla $\pi(x) = y$.
- Oletetaan, että $\pi(u) = v$ ja $m \in b_u$. Nyt isomorfismin määritelmän nojalla on olemassa $n = \pi(m) \in b_v$. Vastaavasti toisin päin käyttäen hyväksi käänteiskuvausta π^{-1}.
- Koska π on bijektio, toinen ehtopari selvästi tosi.

Olkoon viimein $\mathcal{D} = (W, d)$ yhtälöryhmä ja $u, v \in W$ tuntemattomia, joille $b_u = b_v$. Tällöin $R = (\mathrm{id}_W \cap (W_u \times W_v)) \cup \{(u, v)\}$ on määritelmän mukainen bisimulaatio yhtälöryhmien $(\mathcal{D}_u, u)$ ja $(\mathcal{D}_v, v)$ välillä. Jos nimittäin tarkastellaan jotakin tuntematonta x, joka on ainakin toisen yhtälöryhmän tuntematon, saadaan kaksi tapausta:

- Jos tuntematon kuuluu kummankin yhtälöryhmän tuntemattomiin, niin kuvauksen id_W rajoittuma selvästi toteuttaa bisimulaatioehdon.
- Jos tuntematon on vain toisessa yhtälöryhmässä, on sen oltava u tai v. Koska $b_u = b_v$, niin bisimulaatioehto toteutuu ensimmäisen kohdan sekä suhteen uRv nojalla.

Lisäksi selvästi kaikki tuntemattomat ovat relaatiossa jonkin toisen yhtälöryhmän tuntemattoman kanssa. Täten $(\mathcal{D}_u, u) \equiv (\mathcal{D}_v, v)$

Viimeinen ehto taas seuraa helposti yhtälöryhmien välisten bisimulaatioiden määritelmästä. Kyseessä on siis tavallinen bisimulaatio. $\square$

Seuraava määritelmä perustuu huomioon, että suuntaamattomista yhtälöryhmistä voidaan muodostaa useita suunnattuja yhtälöryhmiä riippuen, mitä tuntematonta käyttää juurena. Tällä tavoin saadut suunnatut yhtälöryhmät voivat olla keskenään relaatiossa jonkin tavallisen bisimulaation suhteen. Erityisen hyödyllisiä ovat kuitenkin sellaiset yhtälöryhmät, joissa tällaisia suhteita löytyy pelkästään triviaalisissa tapauksissa.

Määritelmä 4.17. Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ yhtälöryhmä ja $\sim$ tavallinen bisimulaatio. Nyt jos kaikilla tuntemattomilla $x, x' \in X$ pätee

$$(\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{E}_{x'}, x') \implies x = x',$$

niin sanotaan, että $\mathcal{E}$ on $\sim$*-ekstensionaalinen* yhtälöryhmä.

Tällaiset yhtälöryhmät ovat siis tuntemattomiltaan minimaalisia tavallisen bisimulaation $\sim$ suhteen. Tämän avulla antisäännöllisyysaksiooma voidaan tarkentamaa tietylle rajoitetulle yhtälöryhmien luokalle, ja jokaista tavallista bisimulaatiota $\sim$ vastaakin antisäännöllisyysaksiooman muunnelma.

Antisäännöllisyysaksiooma$^{\sim}$: Jokaisella $\sim$-ekstensionaalisella yhtälöryhmällä on olemassa yksikäsitteinen injektiivinen ratkaisu.

Huomautus. Joukon $\Omega = \{\Omega\}$ yksikäsitteisyys pätee myös kaikilla antisäännöllisyysaksiooman muunnelmilla, sillä esimerkissä 3.2 tutkittava yhtälöryhmä $\mathcal{E}$ on selvästi todettavissa $\sim$-ekstensionaaliseksi kaikilla tavallisilla bisimulaatioilla $\sim$.

Nyt verrattuna ensiksi esiteltyyn antisäännöllisyysaksioomaan tarkasteltavia yhtälöryhmiä on siis rajoitettu sen suhteen, miten ne käyttäytyvät tietyn tavallisen bisimulaation $\sim$ kanssa, mutta näiden ratkaisujen on sen sijaan toteutettava tiukemmat vaatimukset. Tavallisen bisimulaation määritelmä myös takaa, että ratkaisujoukoista saatavilla joukoilla on eräitä mielekkäitä ominaisuuksia, jotka vastaavat määritelmän 4.13 jälkeisen esityksen ominaisuuksia. Neljäs ominaisuus tulee etenkin pitämään tavallisen bisimulaation $\sim$ suhteen erillään suunnatut yhtälöryhmät, joiden injektiivisten ratkaisujen ratkaisujoukot eivät ole samat.

Käytetään tästä lähtien luvussa 3 esitellystä antisäännöllisyysaksioomasta nimitystä yleinen antisäännöllisyysaksiooma. Itse asiassa tämä yleinen muoto voidaan esittää myös muunnelmana valitsemalla tavalliseksi bisimulaatioksi suunnattujen yhtälöryhmien bisimilaarisuuden $\equiv$.

Lause 4.18. *Antisäännöllisyysaksiooma*$^{\equiv}$ *on yhtäpitävä yleisen antisäännöllisyysaksiooman kanssa.*

Todistus. Oletetaan ensin, että yleinen antisäännöllisyysaksiooma pätee. Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ $\equiv$-ekstensionaalinen yhtälöryhmä. Nyt yleisen antisäännöllisyysaksiooman nojalla tällä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu s. Todistetaan tämä injektioksi.

Olkoot $x, y \in X$ tuntemattomia, joille $s(x) = s(y)$. Tutkitaan suunnattuja yhtälöryhmiä $(\mathcal{E}_x, x)$ ja $(\mathcal{E}_y, y)$. Nyt koska $s(x) = s(y)$ ja yhtälöryhmien saavutettavuus pakottaa kaikki tuntemattomat liittymään toiseen näistä juurista jotenkin, niin on näillä samat ratkaisujoukot. Tällöin taas lauseen 4.5 todistuksen nojalla $(\mathcal{E}_x, x) \equiv (\mathcal{E}_y, y)$. Kuitenkin $\mathcal{E}$ on $\equiv$-ekstensionaalinen, joten $x = y$.

Oletetaan sitten, että antisäännöllisyysaksiooma$^{\equiv}$ pätee. Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ yhtälöryhmä. Jos se on $\equiv$-ekstensionaalinen, niin sillä on yksikäsitteinen ratkaisu. Voidaan siis olettaa, että se ei ole $\equiv$-ekstensionaalinen. Tarkastellaan tämän rajattuja yhtälöryhmiä $(\mathcal{E}_x, x)$ ja etenkin näiden ekvivalenssiluokkia $[(\mathcal{E}_x, x)]$ bisimilaarisuuden $\equiv$ suhteen valitun yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ rajattuihin yhtälöryhmiin rajoitettuna, jolloin ekvivalenssiluokat ovat joukkoja. Rakennetaan näiden avulla $\equiv$-ekstensionaalinen yhtälöryhmä $\mathcal{M} = (X_M, e_M)$:

- $X_M = \{[(\mathcal{E}_x, x)] \mid x \in X\}$
- $e_M([(\mathcal{E}_x, x)]) = \{[(\mathcal{E}_y, y)] \mid y \in b_x\}$ kaikilla $m \in X_M$.

Tässä toinen kohta on hyvinmääritelty: Olkoon $(\mathcal{E}_x, x) \equiv (\mathcal{E}_{x'}, x')$. Siis on olemassa määritelmän mukainen bisimulaatio $R \subseteq X_x \times X_{x'}$. Tällöin jos $y \in b_x$, niin on olemassa $y' \in b_{x'}$, jolle yRy'. Tämän seurauksena taas $(\mathcal{E}_y, y) \equiv (\mathcal{E}_{y'}, y')$, koska nyt $R \cap (X_y \times X_{y'})$ on vaadittu bisimulaatio. Ekvivalenssiluokan jäsenen valinta ei siis vaikuta kuvaukseen.

Saadaan, että $\mathcal{E} \equiv \mathcal{M}$, sillä $R_M = \{(x, [(\mathcal{E}_x, x)]) \in X \times X_M \mid x \in X\}$ on sopiva bisimulaatio. Nyt $\mathcal{M}$ on $\equiv$-ekstensionaalinen: Olkoot $[(\mathcal{E}_x, x)], [(\mathcal{E}_{x'}, x')] \in X_M$ sellaisia, että $(\mathcal{M}_{[(\mathcal{E}_x,x)]}, [(\mathcal{E}_x, x)]) \equiv (\mathcal{M}_{[(\mathcal{E}_{x'},x')]}, [(\mathcal{E}_{x'}, x')])$. Olkoon R tätä vastaava bisimulaatio. Lisäksi huomataan, että $R_M \cap (X_x \times X_M) = R_x$ on bisimulaatio yhtälöryhmien $\mathcal{E}_x$ ja $\mathcal{M}_{[(\mathcal{E}_x,x)]}$ välillä. Vastaavasti saadaan bisimulaation $R_{x'}$. Tällöin $R_x \circ R \circ R_{x'}^{-1} = T$ on yhtälöryhmien $\mathcal{E}_x$ ja $\mathcal{E}_{x'}$ välinen määritelmän mukainen bisimulaatio, jossa xTx'. Täten $(\mathcal{E}_x, x) \equiv (\mathcal{E}_{x'}, x')$, eli $[(\mathcal{E}_x, x)] = [(\mathcal{E}_{x'}, x')]$.

Täten yhtälöryhmällä $\mathcal{M}$ on yksikäsitteinen injektiivinen ratkaisu s. Jos määritellään $s'(x) = s([(\mathcal{E}_x, x)])$ kaikilla $x \in X$, niin s' on yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ ratkaisu. Toisaalta jos on olemassa ratkaisu t, niin huomataan, että yhtälöryhmä $\mathcal{T} = (\mathrm{Im}(t), \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(t)})$ on $\equiv$-ekstensionaalinen yksikäsitteisenä injektiivisenä ratkaisunaan $\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(t)}$. Lisäksi $\mathcal{T}$ on bisimilaarinen yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ kanssa bisimulaation $R_T = \{(x, t(x)) \in X \times \mathrm{Im}(t) \mid x \in X\}$ nojalla. Nyt huomataan, että $\mathcal{M} \equiv \mathcal{T}$, bisimulaationaan $R_M^{-1} \circ R_T = \{([(\mathcal{E}_x, x)], t(x)) \in X_M \times \mathrm{Im}(t) \mid x \in X\} = \mathcal{R}$. Nyt relaation $\mathcal{R}$ on oltava bijektio, koska $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ ja toistapäin on määritelmän mukainen bisimulaatio, ja kumpikin yhtälöryhmistä on $\equiv$-ekstensionaalinen.

Tällöin $\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(t)} \circ \mathcal{R}$ on yhtälöryhmän $\mathcal{M}$ injektiivinen ratkaisu. Tämä on kuitenkin yksikäsitteinen, joten $s'(x) = s([(\mathcal{E}_x, x)]) = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(t)}\big(\mathcal{R}([(\mathcal{E}_x, x)])\big) = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(t)}(t(x)) = t(x)$ kaikilla $x \in X$. Täten $s' = t$, eli ratkaisu on myös yksikäsitteinen. □

Tarkoituksena antisäännöllisyysaksiooman muunnelmille oli kuitenkin tutkia aksioomia, jotka eroavat yleisestä antisäännöllisyysaksioomasta. Esitellään esimerkkinä erästä muunnelmaa, joka ei rajoita hyperjoukkojen rakennetta luvun alussa annetulla tavalla.

Esimerkki 4.19. Esitellään tässä esimerkissä niin sanottu Finslerin antisäännöllisyysaksiooma. Tätä varten tarvitaan ensin suunnattuihin yhtälöryhmiin liittyvä operaatio, joka osoitetaan tavalliseksi bisimulaatioksi.

Olkoot $(\mathcal{E}, x)$, missä $\mathcal{E} = (X, e)$, ja $(\mathcal{F}, y)$ saavutettavia suunnattuja yhtälöryhmiä. Tällöin $\mathcal{E}^* = (X^*, e^*)$ on uusi yhtälöryhmä, jossa $X^* = \bigcup_{x' \in b_x} X_{x'} \cup \{*\}$, eli kaikkien tuntemattomaan x transitiivisesti liittyvien tuntemattomien ja uuden tuntemattoman $*$ muodostama joukko. Erityisesti siis tuntematon x ei välttämättä kuuluu joukkoon X^*, eikä hyvinperustettujen yhtälöryhmien tapauksessa ikinä kuulukaan. Lisäksi $e^* = \bigcup_{x' \in b_x} e_{x'} \cup \{(*, b_x)\}$, eli joukosta X luonnollisesti säilytetyt kuuluvuussuhteet sekä uuden tuntemattoman $*$ ja tuntemattomaan x suoraan liittyvien tuntemattomien yksisuuntaiset suhteet.

Nyt voidaan määritellä luokkarelaatio $\cong^*$:

$$(\mathcal{E}, x) \cong^* (\mathcal{F}, y) \iff (\mathcal{E}^*, *) \cong (\mathcal{F}^*, *),$$

missä $\cong$ on yhtälöryhmien isomorfisuus. Tämä uusi luokkarelaatio eroaa isomorfisuudesta, sillä toisin kuin isomorfia, se osoittautuu tavalliseksi bisimulaatioksi.

Refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus pätevät, sillä isomorfisuudella on nämä ominaisuudet. Oletetaan siis, että $(\mathcal{E}, x) \cong (\mathcal{F}, y)$. Olkoon $\pi\colon X \to Y$ näiden välinen isomorfismi. Huomataan, että $\pi' \cup \{(*, *)\}$, missä π' on isomorfismin π rajoittuma joukkoon X^*, on isomorfismi $X^* \to Y^*$. Tärkeintä tämän todistuksessa on havaita, että $x \in X^* \Leftrightarrow y \in Y^*$, mikä on seurausta isomorfismin π ominaisuuksista. Täten $(\mathcal{E}^*, *) \cong (\mathcal{F}^*, *)$ eli $(\mathcal{E}, x) \cong^* (\mathcal{F}, y)$.

Olkoot sitten x ja y yhtälöryhmän $\mathcal{G}$ tuntemattomia, joilla $b_x = b_y$. Tarkastellaan yhtälöryhmiä $(\mathcal{G}_x^*, *)$ ja $(\mathcal{G}_y^*, *)$. Nämä ovat selvästi samat ja täten isomorfiset, joten $(\mathcal{G}_x, x) \cong^* (\mathcal{G}_y, y)$.

Viimein olkoon $((X, e), x) \cong^* ((Y, f), y)$ sekä $x' \in e(x)$. Nyt siis $((X^*, e^*), *) \cong ((Y^*, f^*), *)$. Koska $x' \in e(x)$, niin nyt $x' \in e^*(*)$ yhtälöryhmän (X^*, e^*) määritelmän nojalla. Tällöin isomorfian ominaisuuksien nojalla $((X_{x'}^*, e_{x'}^*), x') \cong ((Y_{y'}^*, f_{y'}^*), y')$ jollakin $y' \in f^*(*)$. Tässä huomataan, että uuden yhtälöryhmän muodostamisen määritelmän nojalla $f^*(*) = f(y)$, $(X_{x'}^*, e_{x'}^*) = (X_{x'}, e_{x'})$ sekä $(Y_{y'}^*, f_{y'}^*) = (Y_{y'}, f_{y'})$. Siis $y' \in f(y)$ ja $((X_{x'}, e_{x'}), x') \cong ((Y_{y'}, f_{y'}), y')$. Tällöin toisen kohdan nojalla $((X_{x'}, e_{x'}), x') \cong^* ((Y_{y'}, f_{y'}), y')$, missä $y' \in f(y)$. Toinen suunta todistetaan vastaavasti.

Täten $\cong^*$ on tavallinen bisimulaatio.

Oletetaan, että antisäännöllisyysaksiooma$^{\cong^*}$ pätee ja tarkastellaan, millaisia joukkoja voidaan muodostaa sen avulla.

Tutkitaan yhtälöryhmää $\mathcal{E} = (X, e)$, missä $X = \{x, y\}$ ja $e = \{(x, \{x, y\}), (y, \{y\})\}$. Yleisen antisäännöllisyysaksiooman kanssa tämän ratkaisujoukko on Ω esimerkin 4.6 nojalla. Halutaan tarkistaa, päteekö $(\mathcal{E}_x, x) \cong^* (\mathcal{E}_y, y)$ eli $(\mathcal{E}_x^*, *) \cong (\mathcal{E}_y^*, *)$. Nyt $X_x = \{x, y\}$, $e_x = e$ ja $X_y = \{y\}$, joten $X_x^* = \{*, x, y\}$ ja $X_y^* = \{*, y\}$. Täten ei voi olla olemassa bijektiota $X_x^* \to X_y^*$, joten isomorfiaakaan ei voida muodostaa. Seurauksena saadaan, että yhtälöryhmä $\mathcal{E}$ on $\cong^*$-ekstensionaalinen. Antisäännöllisyysaksiooman$^{\cong^*}$ nojalla yhtälöryhmällä on siis yksikäsitteinen injektiivinen ratkaisu s. Tässä ratkaisussa $s(y) = \{s(y)\} = \Omega$ ja $s(x) = t = \{s(x), s(y)\} = \{t, \Omega\}$. Ratkaisun injektiivisyydestä seuraa, että $t \neq \Omega$. Hyperjoukkojen rakenteet ovat ovat tällöin siis monipuolisempia verrattuna yleiseen antisäännöllisyysaksioomaan.

Todistetaan vielä lausetta 4.5 vastaava tulos $\sim$-ekstensionaalisten yhtälöryhmien tapauksessa.

Lause 4.20. *Olkoot $\mathcal{E} = (X, e)$ ja $\mathcal{F} = (Y, f)$ $\sim$-ekstensionaalisia yhtälöryhmiä. Tällöin kaikille $x \in X$ on olemassa $y \in Y$, jolle $(\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{F}_y, y)$ sekä toisinpäin, jos ja vain jos yhtälöryhmien $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{F}$ injektiivisten ratkaisujen ratkaisujoukot ovat samat.*

Todistus. Merkitään yhtälöryhmien yksikäsitteisiä injektiivisiä ratkaisuja $s_{\mathcal{E}}$ ja $s_{\mathcal{F}}$.

Oletetaan ensin, että yhtälöryhmien $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{F}$ ratkaisujoukot ovat samat. Merkitään näiden yhteistä ratkaisujoukkoa A. Nyt yhtälöryhmien ratkaisuille A on tietenkin kuvajoukko. Ne ovat siis bijektioita $X \to A$ ja $Y \to A$, joten kaikille $a \in A$ on olemassa yksikäsitteiset $x_a \in X$ ja $y_a \in Y$, joille $s_{\mathcal{E}}(x_a) = a = s_{\mathcal{F}}(y_a)$. Täten voidaan määritellä kuvaus $\pi\colon X \to Y$, missä $\pi(x_a) = y_a$ kaikille $a \in A$.

Isomorfian ensimmäisen ehdon huomataan pätevän tämän suhteen kaikilla rajoitetuilla tuntemattomien joukoilla X_x: oletetaan, että $x \in X$. Nyt ratkaisujen määritelmän sekä injektiivisyyden nojalla saadaan $y \in e(x) \Leftrightarrow s_{\mathcal{E}}(y) \in s_{\mathcal{E}}(x) \Leftrightarrow s_{\mathcal{F}}(\pi(y)) \in s_{\mathcal{F}}(\pi(x)) \Leftrightarrow \pi(y) \in f(\pi(x))$ kaikilla $y \in e(x)$. Vastaavasti jos $y \in f(\pi(x))$, niin $\pi^{-1}(y) \in e(x)$. Siis $y = \pi(z)$ jollakin $z \in e(x)$. Täten $\pi[e(x)] = f(\pi(x))$.

Määritellään rajattu kuvaus $\pi_x\colon X_x \to Y$ kaikille $x \in X$. Nyt edellisen perusteella kyseessä on bijektio $\pi_x\colon X_x \to Y_{\pi(x)}$. Lisäksi huomataan, että yhtälöryhmien rajoitetut kuvaukset e_x ja $f_{\pi(x)}$ toteuttavat edelleen isomorfian ensimmäisen ehdon rajoitetuissa yhtälöryhmissä. Täten saadaan isomorfia $(\mathcal{E}_x, x) \cong (\mathcal{F}_{\pi(x)}, \pi(x))$. Viimein tavallisen bisimulaation määritelmän nojalla nyt $(\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{F}_{\pi(x)}, \pi(x))$. Vastaavasti saadaan toinen suunta käänteiskuvauksen π^{-1} avulla.

Oletetaan sitten, että kaikilla $x \in X$ on olemassa $y \in Y$, jolle $(\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{F}_y, y)$ sekä toisinpäin. Merkitään yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ ratkaisujoukkoa $A_{\mathcal{E}}$ sekä yhtälöryhmän $\mathcal{F}$ ratkaisujoukkoa $A_{\mathcal{F}}$. Olkoon $a \in A_{\mathcal{E}}$. Tällöin on olemassa jokin $x \in X$, jolle $s_{\mathcal{E}}(x) = a$. Olkoon $y_x \in Y$ tuntematon, jolle $(\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{F}_{y_x}, y_x)$. Tällöin yhtälöryhmän $\mathcal{E}_x$ yksikäsitteinen injektiivinen ratkaisu on ratkaisun $s_{\mathcal{E}}$ rajoittuma joukolle X_x. Merkitään tätä ratkaisua $s_{\mathcal{E},x}$.

Huomataan, että ei voi olla olemassa tuntematonta $z \in Y$, jolle $(\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{F}_z, z)$ sekä $y_x \neq z$. Nimittäin koska $\sim$ on ekvivalenssi, tällöin olisi $(\mathcal{F}_z, z) \sim (\mathcal{F}_{y_x}, y_x)$, jolloin yhtälöryhmän $\mathcal{F}$ $\sim$-ekstensionaalisuuden nojalla $y_x = z$. Vastaavasti myös toiseen suuntaan. Täten tällaiset $\sim$-yhteyden luovien juurien parit muodostavat bijektion $R\colon X \to Y$.

Toisaalta tavallisen bisimulaation neljännen ominaisuuden nojalla saadaan, että jos $x' \in e(x)$, niin tämän parille $R(x') \in f(y_x)$. Tämän perusteella saadaan uusi injektiivinen ratkaisu yhtälöryhmälle $\mathcal{E}_x$, nimittäin yhdistetty kuvaus $s_2 = s_{\mathcal{F},y_x} \circ R_x$, missä R_x on bijektion R rajoittuma joukolle X_x. Antisäännöllisyysaksiooman$^{\sim}$ nojalla injektiivinen ratkaisu on kuitenkin yksikäsitteinen. Täten $s_{\mathcal{F}}(y_x) = s_{\mathcal{F},y_x}(y_x) = s_{\mathcal{F},y_x}(R(x)) = s_2(x) = s_{\mathcal{E},x}(x) = a$, joten $a \in A_{\mathcal{F}}$. Toinen suunta todistetaan vastaavasti. Tällöin siis $A_{\mathcal{E}} = A_{\mathcal{F}}$. □

5 Mallin rakennus

Tämän luvun lähteenä on Barwisen ja Mossin kirja [3], jonka esitystä mallin rakentamisesta olen laajentanut toimimaan yleisen antisäännöllisyysaksiooman lisäksi myös tavallisten bisimulaatioiden avulla muodostetuille muunnelmille. Luvun tavoitteena on siis rakentaa malli, joka toteuttaa aksioomajärjestelmän ZFA$^\sim$+ C, missä A$^\sim$ edustaa antisäännöllisyysaksioomaa$^\sim$ jollakin tavallisella bisimulaatiolla $\sim$. Konstruktion perusideana on samaistaa suunnatut yhtälöryhmät joukoiksi sen perusteella, mitä niiden juurien kuvat olisivat antisäännöllisyysaksiooman$^\sim$ pädetessä. Ensin luvussa annetaan tarvittavia käsitteitä, jonka jälkeen ensimmäinen aliluku tarkistaa perusaksioomien voimassaolon, kun taas toinen aliluku keskittyy itse antisäännöllisyysaksioomaan$^\sim$ ja tämän apukäsitteisiin.

Aloitetaan luku oletuksella, että M on joukko-opin aksioomajärjestelmän ZFC$^-$ toteuttava malli. Käytetään antisäännöllisyysaksiooman$^\sim$ toteuttavan mallin $M^\sim$ rakentamiseen luokan $\mathcal{PS}^\sim$ tavallisen bisimulaation $\sim$ ekvivalenssiluokkia. Tässä

$$\mathcal{PS}^\sim = \{\mathsf{e} \in \mathcal{PS} \mid \mathsf{e} = (\mathcal{E}, x), \text{ missä } \mathcal{E} \text{ on } \sim\text{-ekstensionaalinen}\}.$$

Yksinkertaisuuden vuoksi kutsutaan myös suunnattuja yhtälöryhmiä $\sim$-ekstensionaalisiksi, vaikka tarkalleen ottaen tarkoitetaan, että näihin liittyvä yhtälöryhmä on $\sim$-ekstensionaalinen.

Mallin rakennusta varten nämä ekvivalenssiluokat on rajoitettava joukoiksi. Oletetaan, että $\mathsf{e} \in \mathcal{PS}^\sim$ ja $\sim$ on tavallinen bisimulaatio tässä luokassa. Merkitään tällöin yhtälöryhmän e ekvivalenssiluokkaa $[\mathsf{e}]$.

Määritelmä 5.1. Olkoon $\mathsf{e} \in \mathcal{PS}^\sim$ yhtälöryhmä, jonka tuntemattomien joukko koostuu ordinaaleista $X \subset \mathcal{O}$. Merkitään $\sup_{x \in X} x = \alpha_X$.

Yhtälöryhmää e kutsutaan *standardiksi*, jos tämän tuntemattomien joukolle pätee $X \subset \mathcal{O}$ ja kaikille $\mathsf{f} \in \mathcal{PS}^\sim$, joilla $Y \subset \mathcal{O}$, pätee

$$\mathsf{f} \sim \mathsf{e} \implies \alpha_X \leq \alpha_Y,$$

missä Y on yhtälöryhmän f tuntemattomien joukko.

Jokaiselle luokan $\mathcal{PS}^\sim$ yhtälöryhmälle voidaan löytää vastaava standardi yhtälöryhmä, sillä valinta-aksiooman nojalla tuntemattomien joukon voidaan hyvinjärjestää. Lisäksi huomataan, että tällöin mahdollisia joukkoja, jotka ovat sekä standardeja että suhteessa $\sim$ keskenään, voi olla vain tuntemattomien joukon permutaatioiden verran. Täten tällaisten suunnattujen yhtälöryhmien kokoelma on joukko. Merkitään siis

$$[\mathsf{e}] = \{\mathsf{f} \mid \mathsf{f} \text{ on standardi ja } \mathsf{f} \sim \mathsf{e}\}$$

Mallissa tarvitaan vielä joukkojen lisäksi kuuluvuuden käsitteen. Määritellään tätä varten ensin uusi luokan $\mathcal{PS}^\sim$ luokkarelaatio E:

$$(\mathcal{E}, x) E (\mathcal{F}, y) \iff \text{on olemassa jokin } z \in b_y, \text{ jolle } (\mathcal{E}, x) \sim (\mathcal{F}_z, z).$$

Tarvittaessa tämä voidaan laajentaa myös koko luokan $\mathcal{PS}$ relaatioksi.

Tätä käyttäen voidaan määritellä uuteen malliin kuuluvuusrelaation:

$$[(\mathcal{E}, x)] \in [(\mathcal{F}, y)] \text{ mallissa } M^\sim \iff (\mathcal{E}, x) E (\mathcal{F}, y) \text{ mallissa } M.$$

Koska tarkastellaan ekvivalenssiluokille määriteltyä relaatiota, täytyy varmistetaa, että se toimii ekvivalenssiluokan edustajan valinnasta riippumatta.

Apulause 5.2. Luokan $\mathcal{PS}^{\sim}$ luokkarelaatio E käyttäytyy hyvin ekvivalenssiluokkien suhteen:

1. Jos $(\mathcal{E}_x, x)$ on suunnattu yhtälöryhmä ja $y \in b_x$, niin $(\mathcal{E}_y, y)E(\mathcal{E}, x)$.
2. Jos $\mathsf{e}_1 \sim \mathsf{e}_2$, $\mathsf{f}_1 \sim \mathsf{f}_2$ ja $\mathsf{f}_1 E \mathsf{e}_1$, niin myös $\mathsf{f}_2 E \mathsf{e}_2$.
3. Olkoot e ja f suunnattuja yhtälöryhmiä. Tällöin $\mathsf{e} \sim \mathsf{f}$, jos ja vain jos
   a. Kaikille $\mathsf{e}' E \mathsf{e}$ on olemassa $\mathsf{f}' E \mathsf{f}$, jolle $\mathsf{e}' \sim \mathsf{f}'$.
   b. Kaikille $\mathsf{f}' E \mathsf{f}$ on olemassa $\mathsf{e}' E \mathsf{e}$, jolle $\mathsf{e}' \sim \mathsf{f}'$.

Todistus. Ensimmäinen kohta seuraa helposti relaation E määritelmästä, koska tietenkin pätee $(\mathcal{E}_y, y) \sim (\mathcal{E}_y, y)$ kaikilla $y \in b_x$.

Toisessa kohdassa oletetaan, että $(\mathcal{E}, x) = \mathsf{e}_1 \sim \mathsf{e}_2 = (\mathcal{E}', x')$, $\mathsf{f}_1 \sim \mathsf{f}_2$ ja $\mathsf{f}_1 E \mathsf{e}_1$. Suhteen E määritelmän perusteella on olemassa jokin $y \in e(x)$, jolle $(\mathcal{E}_y, y) \sim \mathsf{f}_1$. Tavallisen bisimulaation neljännen ominaisuuden nojalla on olemassa jokin $y' \in e'(x')$, jolle $(\mathcal{E}_y, y) \sim (\mathcal{E}'_{y'}, y')$. Tällöin kuitenkin transitiivisuuden nojalla $\mathsf{f}_2 \sim (\mathcal{E}'_{y'}, y')$. Täten $\mathsf{f}_2 E \mathsf{e}_2$.

Kolmatta kohtaa varten oletetaan ensin, että $\mathsf{e} \sim \mathsf{f}$. Nyt jos $\mathsf{f}' E \mathsf{f}$, niin relaation $\sim$ refleksiivisyydestä ja kohdasta 2 seuraa, että $\mathsf{f}' E \mathsf{e}$ ja $\mathsf{f}' \sim \mathsf{f}'$. Toinen alakohta todistetaan vastaavasti.

Oletetaan sitten, että alakohdat ovat voimassa. Olkoot $\mathsf{e} = (\mathcal{E}, x)$ ja $\mathsf{f} = (\mathcal{F}, y)$ suunnatut yhtälöryhmät, sekä olkoot $\mathcal{E} = (X, e)$ ja $\mathcal{F} = (Y, f)$.

Tutkitaan relaatiota $x' R y' \iff \mathsf{e}_{x'} \sim \mathsf{f}_{y'}$. Ensinnäkin tämän on oltava bijektiivinen kuvaus, sillä e ja f ovat $\sim$-ekstensionaalisia. Lisäksi alakohtien ja ensimmäisen kohdan nojalla $b_x \subseteq \mathrm{dom}(R)$ ja $b_y \subseteq \mathrm{Im}(R)$. Tällöin taas tämän kohdan ensimmäisen suunnan ja alakohtien seurauksena $X_{x'} \subseteq \mathrm{dom}(R)$ kaikilla $x' \in b_x$ sekä samoin $Y_{y'} \subseteq \mathrm{Im}(R)$ kaikilla $y' \in b_y$. Seuraavaksi olkoon $x' \in \mathrm{dom}(R)$. Tällöin jos $x'' \in e(x')$, niin on oltava $R(x'') \in f(R(x'))$ ensimmäisen kohdan ja tämän kohdan ensimmäisen suunnan nojalla. Vastaavasti myös $R^{-1}(y'') \in e(R^{-1}(y'))$ kaikilla $y'' \in f(y')$, kun $y' \in Y$. Etenkin kun valitaan $y' = R(x')$, saadaan $R^{-1}(y'') \in e(x')$ kaikilla $y'' \in f(R(x'))$. Koska R on bijektio, niin tästä seuraa $R[e(x')] = f(R(x'))$.

Tutkitaan vielä erikseen juurta x. Nyt alakohtien ja ensimmäisen kohdan nojalla $R[e(x)] = f(y)$. Määritellään kuvaus $\pi \colon X \to Y$ siten, että $\pi(x') = R(x')$, kun $x' \in \mathrm{dom}(R)$ ja $\pi(x) = y$. Tämä on hyvin määritelty, sillä mikäli $x \in \mathrm{dom}(R)$, niin saataisiin $b_{R(x)} = f(R(x)) = R[e(x)] = f(y) = b_y$, jolloin taas tavallisen bisimulaation kolmannen ominaisuuden ja suunnatun yhtälöryhmän f $\sim$-ekstensionaalisuuden nojalla $R(x) = y$. Nyt kuitenkin π on isomorfia suunnattujen yhtälöryhmien e ja f välillä, joten tavallisen bisimulaation isomorfiaominaisuuden nojalla $\mathsf{e} \sim \mathsf{f}$. □

Tarkistetaan ensin, että hyvinperustetut joukot pystytään upottamaan uuteen malliin. Todistetaan ensin myös apulause kanonisten yhtälöryhmien $\sim$-ekstensionaalisuudesta.

Apulause 5.3. Olkoon $a_{\mathcal{E}}$ hyvinperustetun joukon a kanoninen yhtälöryhmä. Tällöin $(a_{\mathcal{E}}, a)$ on saavutettava sekä $\sim$-ekstensionaalinen.

Todistus. Ensinnäkin $a_{\mathcal{E}} = (\mathrm{TC}(\{a\}), \mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{a\})})$. Täten selvästi $a_{\mathcal{E}} = a_{\mathcal{E},a}$, missä jälkimmäinen yhtälöryhmä on ensimmäinen joukolla a rajoitettuna. Siis $(a_{\mathcal{E}}, a)$ on saavutettava.

Olkoot a ja b hyvinperustettuja ja eri joukkoja. Voidaan olettaa, että on olemassa joukko a_1, jolle pätee $a_1 \in a \backslash b$. Tehdään vastaoletus, että $(a_{\mathcal{E}}, a) \sim (b_{\mathcal{E}}, b)$. Tällöin tavallisen bisimulaation neljännen ominaisuuden nojalla $(a_{\mathcal{E},a_1}, a_1) = (a_{1,\mathcal{E}}, a_1) \sim (b_{1,\mathcal{E}}, b_1) = (b_{\mathcal{E},b_1}, d)$ jollakin joukolla $b_1 \in b$. Jos olisi $b = \emptyset$, saataisiin ristiriita, joten tutkitaan tapausta $b \neq \emptyset$. Nyt kuitenkin $a_1 \neq b_1$ joukon a_1 valinnan nojalla. Jatketaan vastaavaa tarkastelua niin kauan kuin mahdollista valitsemalla aina vaiheessa n joukko $a_n \in a_{n-1} \setminus b_{n-1}$ (tai $b_n \in b_{n-1} \setminus a_{n-1}$, jos $a_{n-1} \setminus b_{n-1} = \emptyset$), sekä valitsemalla $b_n \in b_{n-1}$ ($a_n \in a_{n-1}$) tavallisen bisimulaation neljännen ominaisuuden avulla. Tässäkin $b_{n-1} = \emptyset$ ($a_{n-1} = \emptyset$) tuottaisivat ristiriidan, joten tutkitaan muita tapauksia.

Koska a ja b olivat hyvinperustettuja, niissä ei voi olla loputtomia $\in$-ketjuja. Täten jossain vaiheessa N ensimmäisen valinnan on oltava joko $a_N = \emptyset$ tai $b_N = \emptyset$. Käsitellään ensimmäinen tapaus, sillä toinen tapaus on symmetrinen. Tässä huomataan edelleen, että $(\emptyset_{\mathcal{E}}, \emptyset) \sim (b_{N,\mathcal{E}}, b_N)$ jollakin joukolla $b_N \in b_{N-1}$. Tällöin kuitenkin $b_N \neq \emptyset$, sillä $a_N \notin b_{N-1}$. Siis on olemassa jokin joukko $b_k \in b_N$. Tavallisen bisimulaation neljännen ominaisuuden nojalla tällöin tulisi olla $(a_{k,\mathcal{E}}, a_k) \sim (b_{k,\mathcal{E}}, b_k)$ jollakin $a_k \in a_N = \emptyset$, mutta tämä on ristiriita. Täten vastaoletus on väärä, ja on pakko olla $(a_{\mathcal{E}}, a) \nsim (b_{\mathcal{E}}, b)$, jos $a \neq b$ näiden ollessa hyvinperustettuja joukkoja.

Tämän perusteella voidaan tarkastella hyvinperustetun joukon a kanonista yhtälöryhmää $a_{\mathcal{E}}$. Nyt kaikki joukot $b, c \in \mathrm{TC}(\{a\})$ ovat myös hyvinperustettuja, joten jos $(b_{\mathcal{E}}, b) \sim (c_{\mathcal{E}}, c)$, niin täytyy olla $b = c$. Siis $(a_{\mathcal{E}}, a)$ on $\sim$-ekstensionaalinen. □

Huomautus. Edellisessä apulauseessa käytettiin suunnattujen kanonisten yhtälöryhmien yhtäsuuruutta $(c_{\mathcal{E},d}, d) = (d_{\mathcal{E}}, d)$, kun $d \in c$. Tämä nähdään selvästi tarkasteltaessa yhtälöryhmien tuntemattomia ja kuvauksia.

Lause 5.4. *Hyvinperustetut joukot saadaan upotettua malliin.*

Todistus. Olkoon a hyvinperustettu joukko mallissa M. Tällöin on olemassa kanoninen yhtälöryhmä $a_{\mathcal{E}}$, josta voidaan muodostaa suunnattu saavutettava yhtälöryhmä $(a_{\mathcal{E}}, a)$. Edellisen apulauseen nojalla tämä on myös $\sim$-ekstensionaalinen. Merkitään $(a_{\mathcal{E}}, a) = \overline{a}$. Tutkitaan kuvausta $x \longrightarrow [\overline{x}]$. Tämä on injektiivinen, sillä jos $x \neq y$, niin voidaan tutkia suunnattua yhtälöryhmää $\overline{\{x, y\}}$. Nyt $\overline{\{x, y\}}_x = \overline{x}$ ja $\overline{\{x, y\}}_y = \overline{y}$. Koska $\overline{\{x, y\}}$ on $\sim$-ekstensionaalinen, niin jos $\overline{x} \sim \overline{y}$, täytyisi olla $x = y$. Vaihtoehtoisesti tämä saadaan kuten edellisen apulauseen todistuksessa. Täten $\overline{x} \nsim \overline{y}$ eli $[\overline{x}] \neq [\overline{y}]$.

Varmistetaan myös, että $a \in b$, jos ja vain jos $[\overline{a}] \in [\overline{b}]$. Oletetaan ensin, että $a \in b$. Tällöin $a \in e(b)$, kun $b_{\mathcal{E}} = (X, e)$. Täten saadaan $(b_{\mathcal{E},a}, a) = (a_{\mathcal{E}}, a)E(b_{\mathcal{E}}, b)$. Siis $[\overline{a}] \in [\overline{b}]$.

Oletetaan sitten, että $[\overline{a}] \in [\overline{b}]$. Nyt siis on olemassa $c \in e(b)$, jolle $(a_{\mathcal{E}}, a) \sim (b_{\mathcal{E},c}, c)$. Koska kyseessä on hyvinperustettuja joukkoja, saadaan $a = c$. Kanonisen yhtälöryhmän määritelmän nojalla tällöin $a = c \in b$. □

Lauseessa käytettyä merkintää $\overline{a}$ joukon a kanonisesta yhtälöryhmästä käytetään vastaisuudessakin.

Lause 5.5. *Olkoon $S \subseteq \mathcal{PS}^{\sim}$ joukko suunnattuja yhtälöryhmiä. Tällöin on olemassa suunnattu yhtälöryhmä $S^+ \in \mathcal{PS}^{\sim}$, joka toteuttaa seuraavan ehdon: $\mathsf{p}ES^+$, jos ja vain jos jollekin $\mathsf{q} \in S$ pätee $\mathsf{p} \sim \mathsf{q}$. Lisäksi S^+ on yksikäsitteinen tavallista bisimulaatiota $\sim$ vaille, eli jos s toteuttaa myös ehdon, niin $S^+ \sim \mathsf{s}$.*

Todistus. Jos $\mathsf{s} \in S$ on eräs joukon S yhtälöryhmä, merkitään $\mathsf{s} = ((X_{\mathsf{s}}, e_{\mathsf{s}}), x_{\mathsf{s}})$. Voidaan olettaa, että $X_{\mathsf{s}} \cap X_{\mathsf{s}'} = \emptyset$ kaikilla $\mathsf{s}, \mathsf{s}' \in S$, joilla $\mathsf{s} \neq \mathsf{s}'$. Olkoon tämän lisäksi z sellainen joukko, jolle pätee $z \notin \bigcup_{\mathsf{s} \in S} X_{\mathsf{s}}$. Asetetaan $X = \bigcup_{\mathsf{s} \in S} X_{\mathsf{s}} \cup \{z\}$ sekä $e = \bigcup_{\mathsf{s} \in S} e_{\mathsf{s}} \cup \{(z, \{x_{\mathsf{s}} \mid \mathsf{s} \in S\}\}$. Tällöin $\mathsf{e} = ((X, e), z)$ on suunnattu yhtälöryhmä, jolle E-relaatiossa ovat täsmälleen joukon S yhtälöryhmien kanssa bisimulaatiossa olevat yhtälöryhmät. Mikäli tämä ei ole $\sim$-ekstensionaalinen, voidaan alkuperäisten yhtälöryhmien tuntemattomia yhdistämällä helposti rakentaa sen pohjalta $\sim$-ekstensionaalinen yhtälöryhmä e', jolle edelleen $\mathsf{s}E\mathsf{e}'$ kaikilla $\mathsf{s} \in S$.

Tämän yhtälöryhmän yksikäsitteisyys tavallista bisimulaatiota vaille on seurausta apulauseen 5.2 kolmannesta kohdasta. □

5.1 Perusaksioomien voimassaolo

Tässä aliluvussa todistetaan perusaksioomat valinta-aksioomaa lukuun ottamatta, joka jätetään koko luvun loppuun.

Luvun alun työkalujen avulla pystytään tarkistamaan ZFC$^-$-aksioomien voimassaolo uudessa mallissa. Huomautuksena, että aksioomia tarkasteltaessa riittää tarkistaa seuraavanlaiset käännökset: kun aksiooma on kirjoitettu vain symbolien $\in$ ja $=$ avulla, korvataan nämä symboleilla E ja $\sim$, sekä rajoitetaan kvanttorit kaikkien joukkojen sijasta kaikkiin luokan $\mathcal{PS}^{\sim}$ suunnattuihin yhtälöryhmiin. Tämä rajoitus jätetään kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi kirjoittamatta.

Tämä on mahdollista, sillä uusi malli koostuu tavallisen bisimulaation ekvivalenssiluokista sekä sen kuuluvuus perustuu näiden suhteen hyvin käyttäytyvään relaatioon E. Esimerkkinä esitetään ekstensionaalisuusaksiooma ja tämän käännös, jonka jälkeen lopuissa aksioomissa aloitaan suoraan käännöksistä.

Ekstensionaalisuusaksiooma: $\forall a \forall b \big(\forall c (c \in a \leftrightarrow c \in b) \to a = b\big)$

Nyt aksiooman käännökseksi saadaan $\forall \mathsf{e} \forall \mathsf{f} \big(\forall \mathsf{g} (\mathsf{g} E \mathsf{e} \leftrightarrow \mathsf{g} E \mathsf{f}) \to \mathsf{e} \sim \mathsf{f}\big)$.

Ekstensionaalisuuden tapauksessa huomataan, että tämä seuraa suoraan apulauseen 5.2 kolmannesta kohdasta.

Pariaksiooma: $\forall \mathsf{e} \forall \mathsf{f} \exists \mathsf{g} (\mathsf{e} E \mathsf{g} \land \mathsf{f} E \mathsf{g})$

Pariaksiooma voidaan todistaa yksinkertaisesti käyttämällä lausetta 5.5 joukkoon $\{\mathsf{e}, \mathsf{f}\}$. Tällöin yhtälöryhmä $\{\mathsf{e}, \mathsf{f}\}^+$ toteuttaa aksiooman.

Yhdisteaksiooma: $\forall \mathsf{e} \exists \mathsf{f} \Big(\forall \mathsf{h} \big(\exists \mathsf{g} (\mathsf{g} E \mathsf{e} \land \mathsf{h} E \mathsf{g})\big) \to \mathsf{h} E \mathsf{f}\Big)$

Olkoon $\mathsf{e} = ((X, e), x)$. Asetetaan $Y = \{z \in X \mid \text{on olemassa } y \in e(x), \text{jolle } z \in e(y)\}$. Tällöin huomataan, että yhtälöryhmä $\{((X_y, e_y), y) \mid y \in Y\}^+$ sopii halutuksi yhtälöryhmäksi f. Merkitään yhtälöryhmien yhdisteitä tästä lähtien normaalin yhdisteen tavoin symbolin $\cup$ avulla.

Potenssijoukkoaksiooma: $\forall \mathsf{e} \exists \mathsf{f} \forall \mathsf{g} \big(\forall \mathsf{h} (\mathsf{h} E \mathsf{g} \to \mathsf{h} E \mathsf{e}) \to \mathsf{g} E \mathsf{f}\big)$

Aksiooma on tässä käännetty ilman lyhennysmerkintää $\subseteq$. Käytetään kuitenkin osajoukkouden käännöstä E-luokkarelaation vastaavaksi käsitteksi: yhtälöryhmä g on yhtälöryhmän e *E-osajoukko*, jos kaikille yhtälöryhmille $\mathsf{h} E \mathsf{g}$ pätee myös $\mathsf{h} E \mathsf{e}$.

Olkoon $\mathsf{e} = (\mathcal{E}, x)$ suunnattu yhtälöryhmä ja $\mathcal{E} = (X, e)$. Tarkastellaan yhtälöryhmiä $\mathsf{e}_Y = \{(\mathcal{E}_y, y) \mid y \in Y\}^+$, missä $Y \subseteq b_x$. Nyt apulauseen 5.2 ensimmäisen kohdan nojalla nämä ovat yhtälöryhmän e E-osajoukkoja. Lisäksi huomataan, että jos g on yhtälöryhmän e E-osajoukko, niin $\mathsf{g} \sim \mathsf{e}_Y$ jollakin $Y \subseteq b_x$. Täten kaikki halutut E-osajoukot ovat annettua muotoa. Asetetaan siis

$$\mathsf{f} = \{\mathsf{e}_Y \mid Y \subseteq b_x\}^+.$$

Tämä on siis suunnattu yhtälöryhmä, jonka E-jäsenet ovat täsmälleen yhtälöryhmän e E-osajoukot.

Äärettömyysaksiooma: $\exists \mathsf{e} \Big(\overline{\emptyset} E \mathsf{e} \land \forall \mathsf{f} \big(\mathsf{f} E \mathsf{e} \to \exists \mathsf{g} (\mathsf{g} E \mathsf{e} \land \mathsf{g} \sim \mathsf{f} \cup \{\mathsf{f}\}^+)\big)\Big)$

Tässä huomautettakoon, että yhtälöryhmä $\{\mathsf{f}\}^+$ vastaa joukkomerkintää $\{b\}$.

Huomataan ensin, että lauseen 5.4 nojalla luonnollisten lukujen joukolla ω on kuva $\overline{\omega}$ uudessa mallissa. Koska $\emptyset \in \omega$, niin $\overline{\emptyset} E \overline{\omega}$. Lisäksi jos $\mathsf{f} E \overline{\omega}$, niin on olemassa $b \in \omega$, jolle $\mathsf{f} \sim \overline{b}$. Tällöin myös $\overline{b \cup \{b\}} E \overline{\omega}$ ja $\mathsf{f} \cup \{\mathsf{f}\}^+ \sim \overline{b \cup \{b\}}$. Täten $\overline{\omega}$ on vaadittu yhtälöryhmä e.

Valinta-aksiooma: Todistetaan valinta-aksiooma myöhemmin koko luvun lopussa. Tätä tulevat helpottamaan eräät kuvauksiin liittyvät apulauseet, joita tarvitaan myös antisäännöllisyysaksioomia$^\sim$ tutkittaessa.

Erotteluaksioomat: $\forall \mathsf{e} \forall \mathsf{g} \exists \mathsf{f} \forall \mathsf{p} \Big(\mathsf{p} E \mathsf{f} \leftrightarrow \big(\mathsf{p} E \mathsf{e} \wedge \varphi(\mathsf{p}, \mathsf{g}) \big) \Big)$

Oletetaan, että $\mathsf{e} = (\mathcal{E}, z)$, missä $\mathcal{E} = (X, e)$ on suunnattu yhtälöryhmä sekä $\phi(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ on suunnattuja yhtälöryhmiä koskeva kaava, joka on käännetty normaalista kaavasta aliluvun alussa määriteltiin. Huomataan ensin, että jos jollekin $\mathsf{p} \in \mathcal{PS}^\sim$ pätee $\mathsf{p} E \mathsf{e}$, niin on olemassa jokin $w \in b_z$, jolle $\mathsf{p} \sim (\mathcal{E}_w, w)$. Toisaalta voidaan määritellä joukko $S = \{w \in b_z \mid \varphi'(w, \mathsf{g})\} \subseteq X$ normaalien erotteluaksioomien avulla, missä $\varphi'(w, \mathsf{g}) \Leftrightarrow \varphi\big((\mathcal{E}_w, w), \mathsf{g}\big)$ kaikilla $w \in b_z$. Tämän avulla voidaan taas määritellä uusi yhtälöryhmä $\mathcal{F} = (X, e')$, missä $e'(a) = e(a)$, kun $a \neq z$ sekä $e'(z) = S$. Tätä yhtälöryhmää voidaan vielä rajoittaa suunnatuksi yhtälöryhmäksi $(\mathcal{F}_z, z) \in \mathcal{PS}^\sim$. Tämä on $\sim$-ekstensionaalinen, sillä jos se ei olisi, niin myöskään alkuperäinen yhtälöryhmä e ei olisi. Huomataan kuitenkin helposti, että tämä on haettu f.

Keräysaksioomat: $\forall \mathsf{e} \forall \mathsf{p} \Bigg(\exists \mathsf{q} \big(\mathsf{p} E \mathsf{e} \wedge \varphi(\mathsf{e}, \mathsf{p}, \mathsf{q}) \big) \to \exists \mathsf{f} \forall \mathsf{p} \Big(\mathsf{p} E \mathsf{e} \to \exists \mathsf{q} \big(\mathsf{q} E \mathsf{f} \wedge \varphi(\mathsf{e}, \mathsf{p}, \mathsf{q}) \big) \Big) \Bigg)$

Oletetaan, että $\mathsf{e} = (\mathcal{E}, x)$ on suunnattu yhtälöryhmä, $\mathsf{p} E \mathsf{e}$ sekä φ on suunnattuja yhtälöryhmiä koskeva käännetty kaava. Tällöin on olemassa $w \in b_x$, jolle $(\mathcal{E}_w, w) \sim \mathsf{p}$. Oletetaan, että kaikille $\mathsf{p} E \mathsf{e}$ on olemassa suunnattu yhtälöryhmä q_p, jolle $\varphi(\mathsf{e}, \mathsf{p}, \mathsf{q}_\mathsf{p})$. Tällöin koska kaava on käännetty, myös $\varphi(\mathsf{e}, (\mathcal{E}_w, w), \mathsf{q}_\mathsf{p})$. Nyt riittää myös tarkastella vain yhtälöryhmiä $\mathsf{q}_{(\mathcal{E}_w, w)}$, sillä $\mathsf{q}_\mathsf{p} \sim \mathsf{q}_{(\mathcal{E}_w, w)}$, kun $\mathsf{p} \sim (\mathcal{E}_w, w)$. Toisaalta voidaan määritellä kaava φ' siten, että $\varphi'(b_x, w, \mathsf{q}_{(\mathcal{E}_w, w)}) \Leftrightarrow \varphi(\mathsf{e}, (\mathcal{E}_w, w), \mathsf{q}_{(\mathcal{E}_w, w)})$ kaikilla $w \in b_x$. Tällöin normaalien keräysaksioomien sekä joukon b_x avulla saadaan joukko S, jonka alkioita suunnatut yhtälöryhmät $\mathsf{q}_{(\mathcal{E}_w, w)}$ ovat. Lopulta suunnatun yhtälöryhmän S^+ huomataan olevan vaadittu f käytetyn kaavan määrittelyn perusteella.

5.2 Antisäännöllisyysaksiooman$^\sim$ voimassaolo

Perusaksioomien jälkeen voidaan siirtyä antisäännöllisyysaksiooman$^\sim$ pariin. Tätä varten esitellään eräitä hyödyllisiä apukäsitteitä, jotka vastaavat tuttuja joukkorakenteita luokkarelaation E suhteen. Esitellään ensin yhtälöryhmien ratkaisujen vastine.

Määritelmä 5.6. Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ $\sim$-ekstensionaalinen yhtälöryhmä. Tämän *bisimulaatioratkaisu* on kuvaus s lähtöjoukolla X, jonka kuvajoukko koostuu luokan $\mathcal{PS}^\sim$ suunnatuista yhtälöryhmistä seuraavasti:

- Jos $x, y \in X$ ja $x \neq y$, niin $s(x) \nsim s(y)$.
- Kaikilla $x \in X$ pätee $s(x) \sim \{s(y) \mid y \in b_x\}^+$,

missä b_x on yhtälöryhmän $s(x)$ tuntemattomaan x suoraan liittyvien tuntemattomien joukko.

Tämän käsitteen on tarkoitus vastata normaalien yhtälöryhmien injektiivisiä ratkaisuja. Todistetaan sitten, että nämä bisimulaatioratkaisut ovat aina olemassa ilmankin antisäännöllisyysaksioomaa$^\sim$.

Lause 5.7. *Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ $\sim$-ekstensionaalinen yhtälöryhmä. Tällöin yhtälöryhmällä $\mathcal{E}$ on olemassa bisimulaatioratkaisu s. Lisäksi tämä on yksikäsitteinen tavallista bisimulaatiota vaille, eli jos t on myös yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ bisimulaatioratkaisu, niin $s(x) \sim t(x)$ kaikilla $x \in X$.*

Todistus. Bisimulaatioratkaisun olemassaolo on helppo osoittaa: asetaan $s(x) = (\mathcal{E}_x, x)$. Tämän osoittaminen sopivaksi kuvaukseksi on myös yksinkertaista, sillä apulauseen 5.2 nojalla $(\mathcal{E}_y, y)E(\mathcal{E}_x, x)$ kaikilla $y \in b_x$, ja kaikille $\mathsf{e}E(\mathcal{E}_x, x)$ pätee $\mathsf{e} \sim (\mathcal{E}_y, y)$ jollakin $y \in b_x$. Lisäksi jos joillakin $x, y \in X$ on $(\mathcal{E}_x, x) \sim (\mathcal{E}_y, y)$, niin yhtälöryhmän $\sim$-ekstensionaalisuuden nojalla ei voi olla $x \neq y$.

Oletetaan sitten, että t on toinen bisimulaatioratkaisu.

Merkitään tämän antamien suunnattujen yhtälöryhmien tuntemattomien joukkoja $X_{t(x)}$, kuvauksia $e_{t(x)}$ ja juuria $x_{t(x)}$. Voidaan olettaa, että nämä tuntemattomien joukot ovat keskenään erilliset, jolloin on yksinkertaista yhdistää saadut yhtälöryhmät yhdeksi suureksi yhtälöryhmäksi $\mathcal{S} = (Y, f)$ lauseen 5.5 todistuksen tavoin. Huomataan ensin, että nyt $(\mathcal{S}_{x_{t(x)}}, x_{t(x)}) = t(x)$.

Seuraavaksi määritellään relaatio T seuraavasti:

$$T = \{(u, v) \in Y \times X \mid (\mathcal{S}_u, u) \sim (\mathcal{S}_{v_{t(v)}}, v_{t(v)})\}$$

Relaatio T on siis uuden yhtälöryhmän ja alkuperäisen yhtälöryhmän välillä siten, että se tarkastelee, mitkä ratkaisun yhtälöryhmiin jossain syvyydelle E-kuuluvat yhtälöryhmät ovat bisimilaarisia bisimulaatioratkaisun t antamien kuvien kanssa.

Olkoon $T_x = T \cap (Y_{x_{t(x)}} \times X_x)$ kaikille tuntemattomille $x \in X$. Halutaan todistaa, että T_x on isomorfismi suunnattujen yhtälöryhmien $t(x)$ ja $(\mathcal{E}_x, x)$ välillä. Ensinnäkin nyt $x_{t(x)} T_x x$, sillä relaatio $\sim$ on refleksiivinen. Siis juuret ovat keskenään relaatiossa. Seuraavaksi huomataan, että ei voi olla olemassa muita pareja kuin $(y_{t(x)}, y) \in T_x$, sillä $(\mathcal{S}_{x_{t(x)}}, x_{t(x)}) = t(x)$ on bisimulaatioratkaisun määritelmän nojalla $\sim$-ekstensionaalinen. Täten jos $(\mathcal{S}_u, u) \sim (\mathcal{S}_{v_{t(v)}}, v_{t(v)})$, kun $u, v_{t(v)} \in X_{t(x)}$, niin on oltava $u = v_{t(v)}$. Siis relaatio on bijektio. Tutkitaan sitten jotain $(u, v) \in T_x$. Tällöin $(\mathcal{S}_u, u) \sim t(v)$. Nyt tavallisen bisimulaation neljännen ominaisuuden sekä bisimulaatioratkaisun määritelmän nojalla kaikille $w \in b_u$ on voimassa $(\mathcal{S}_w, w) \sim t(n)$ jollakin $n \in b_v$, sekä toisinpäin. Huomioidaan, että tässä $v_{t(v)} = u$ ja $n_{t(n)} = w$. Täten $T_x[e_{t(x)}(z)] = e_x(T_x(z))$ kaikilla $z \in X_{t(x)}$.

Siis T_x on annettujen suunnattujen yhtälöryhmien välinen isomorfia. Tavallisen bisimulaation toisen ominaisuuden nojalla nämä ovat tällöin relaatiossa $\sim$ keskenään. Täten on todistettu, että $t(x) \sim (\mathcal{E}_x, x)$ kaikilla $x \in X$. Siis bisimulaatioratkaisu on tavallista bisimilaatiota vaille yksikäsitteinen. □

Käytetään seuraavaksi muiden rakenteiden esittämiseen yksinkertaisia merkintöjä kuormittamalla +-merkintää.

Määritelmä 5.8. Olkoot $a, b \in \mathcal{PS}^\sim$ suunnattuja yhtälöryhmiä, $f \colon X \to Y$ luokan $\mathcal{PS}^\sim$ sisäinen kuvaus ja $\mathcal{E} = (Z, e)$ yhtälöryhmä. Merkitään tällöin

- $(a, b)^+ = \{\{a\}^+, \{a, b\}^+\}^+$,
- $f^+ = \{(x, f(x))^+ \mid x \in X\}^+$ ja
- $\mathcal{E}^+ = (\overline{Z}, \{(\overline{x}, \overline{e(x)}) \mid x \in Z\}^+)^+$

Todistetaan tässä pareja ja järjestettyjä pareja vastaavien yhtälöryhmien toimivan odotetusti.

Apulause 5.9. Olkoot e_1, e_2, f, g, h ja d suunnattuja yhtälöryhmiä luokassa $\mathcal{PS}^\sim$. Tällöin

1. $\mathsf{g} \sim \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\}^+$, jos ja vain jos $\mathsf{e}_1 E \mathsf{g}$, $\mathsf{e}_2 E \mathsf{g}$ sekä kaikilla $\mathsf{h} E \mathsf{g}$ pätee $\mathsf{h} \sim \mathsf{e}_i$ $(i \in \{1, 2\})$
2. $\mathsf{d} \sim (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2)^+$, jos ja vain jos e_1, e_2 ja g kuten ensimmäisessä kohdassa, $\mathsf{e}_1 E \mathsf{f}$ sekä kaikilla $\mathsf{h} E \mathsf{f}$ pätee $\mathsf{h} \sim \mathsf{e}_1$, sekä g, f ja d kuten ensimmäisessä kohdassa

Todistus. Suunta oikealta vasemmalle seuraa kummassakin kohdassa lauseesta 5.5. Ensimmäisen kohdan toinen suunta taas seuraa lauseen 5.5 yksikäsitteisyysehdosta.

Toisen kohdan toisessa suunnassa taas saadaan ensimmäisen kohdan avulla $\mathsf{g} \sim \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\}^+$ ja $\mathsf{f} \sim \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_1\}^+ = \{\mathsf{e}_1\}^+$, sekä tästä jälleen $\mathsf{d} \sim \{\mathsf{f}, \mathsf{g}\}^+ \sim \{\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\}^+, \{\mathsf{e}_1\}^+\}^+ = (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2)^+$. □

Todistetaan vielä kuvauksien ja yhtälöryhmien toimivan odotetusti.

Apulause 5.10. Olkoot e, f, g ja h suunnattuja yhtälöryhmiä luokassa $\mathcal{PS}^{\sim}$. Tällöin

1. Yhtälöryhmä f on kuvaus, jos ja vain jos on olemassa kuvaus $f\colon X \to Y$, $X, Y \subset \mathcal{PS}^{\sim}$, jolle
   - jos $\mathsf{p} \sim \mathsf{q}$, niin $f(\mathsf{p}) \sim f(\mathsf{q})$
   - $f^+ \sim \mathsf{f}$
2. Oletetaan, että $f\colon X \to Y$, $X, Y \subset \mathcal{PS}^{\sim}$ sekä $f^+ \sim \mathsf{f}$. Tällöin $\mathsf{f}(\mathsf{g}) = \mathsf{h}$, jos ja vain jos on olemassa jotkin $\mathsf{g}' \sim \mathsf{g}$ ja $\mathsf{h}' \sim \mathsf{h}$, joille $f(\mathsf{g}') = \mathsf{h}'$.
3. Olkoon $S, X, Y \subset \mathcal{PS}^{\sim}$, $f\colon S \to X$ sekä $g\colon S \to Y$. Tällöin $f(\mathsf{p}) \sim g(\mathsf{p})$ kaikilla $\mathsf{p} \in S$, jos ja vain jos $f^+ \sim g^+$.
4. Suunnattu yhtälöryhmä e on $\sim$-ekstensionaalinen vakioton yhtälöryhmä, jonka tuntemattomat hyvinperustettuja, jos ja vain jos on olemassa vakioton $\sim$-ekstensionaalinen yhtälöryhmä $\mathcal{E}$, jolle $\mathsf{e} \sim \mathcal{E}^+$.
5. Suunnattu yhtälöryhmä e on $\sim$-ekstensionaalinen vakioton yhtälöryhmä, jonka tuntemattomat hyvinperustettuja, injektiivisenä ratkaisunaan suunnattu yhtälöryhmä s, jos ja vain jos on olemassa $\sim$-ekstensionaalinen vakioton yhtälöryhmä $\mathcal{E}$ sekä tämän bisimulaatioratkaisu $s = \{(a, s(a)) \mid a \in X_{\mathcal{E}}\}$, joille $\mathsf{e} \sim \mathcal{E}^+$ ja $\{(\overline{a}, s(a)) \mid a \in X_{\mathcal{E}}\}^+ \sim \mathsf{s}$.

Todistus. Tässä käytetään väitteiden vasemmilla puolilla lyhennyksiä, jotka vastaavat alkuperäisen mallin vastaavia määritelmiä. Esimerkiksi nyt ”f on kuvaus” tarkoittaa, että yhtälöryhmän f suorat E-alkiot ovat suhteessa $\sim$ muotoa $(a, b)^+$ olevien suunnattujen yhtälöryhmien kanssa, joillain $a, b \in \mathcal{PS}^{\sim}$. Lisäksi jos kahta E-alkioita vastaavien järjestettyjen parien (a, b) ja (c, d) ensimmäisille alkioille $a \sim c$, niin myös niiden toisille alkioille $b \sim d$. Tällöin ekvivalenssijoukkoihin siirryttäessä toteutetaan kaikki kuvauksien vaatimukset.

Todistaan edelleen vain suunnat vasemmalta oikealle.

Aloitetaan kohdasta 1. Merkitään $\mathsf{f} = ((X, e), x)$. Tällöin siis jokaiselle $y \in e(x)$ pätee, että rajoitettu yhtälöryhmä $\mathsf{f}_y = ((X_y, e_y), y)$ on järjestetty pari E-mielessä. Nyt normaalin keräysaksiooman nojalla olkoon S joukko, jossa on tällainen vastaava järjestetty pari $(\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y)$ jokaiselle tuntemattomalle $y \in e(x)$. Normaalin valinta-aksiooman nojalla taas saadaan osajoukko $f \subseteq S$, jolle

- jokaiselle $(\mathsf{p}, \mathsf{q}) \in S$ on olemassa jokin $(\mathsf{p}', \mathsf{q}') \in f$, jolle $\mathsf{p} \sim \mathsf{p}'$.
- jos $(\mathsf{p}, \mathsf{q}), (\mathsf{p}', \mathsf{q}') \in f$ ovat eri alkioita, niin $\mathsf{p} \nsim \mathsf{p}'$.

Tässä toisen kohdan seurauksena on, että f on kuvaus, ja siitä seuraa myös ensimmäinen vaatimus. Nimittäin nyt jos $\mathsf{p} \sim \mathsf{p}'$, niin ei voi olla $\mathsf{q} \nsim \mathsf{q}'$, koska tällöin kyseessä olisivat eri alkiot ja $\mathsf{p} \nsim \mathsf{p}'$, mikä on ristiriita.

Todistetaan sitten toinen ehto eli $f^+ \sim \mathsf{f}$. Tätä varten riittää todistaa, että jokaiselle $y \in e(x)$ on olemassa jokin $(\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y) \in f$, jolle $(\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y)^+ \sim \mathsf{f}_y$. Oletuksen nojalla tiedetään, että tällainen $(\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y)$ on olemassa joukossa S, sekä osajoukon f määritelmästä saadaan, että on olemassa $(\mathsf{p}', \mathsf{q}') \in f$, jolle $\mathsf{p}' \sim \mathsf{p}_y$. Tälle alkiolle taas on olemassa jokin $z \in e(x)$, jolle $(\mathsf{p}', \mathsf{q}')^+ \sim \mathsf{f}_z$.

Koska nyt f oli kuvaus, niin täytyy olla myös $\mathsf{q}' \sim \mathsf{q}_y$. Tästä seuraa, että $(\mathsf{p}', \mathsf{q}')^+ \sim (\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y)^+ \sim \mathsf{f}_y$. Täten $f^+ \sim \mathsf{f}$, sillä kummankin jokaisella E-jäsenellä on nyt tavallisen bisimilaarisuuden suhteen vastaavuus toisessa. Tämän pohjalta voidaan rakentaa isomorfian, josta tulos seuraa.

Toisessa kohdassa aloitetaan oletuksesta $f^+ \sim \mathsf{f}$ jollakin suunnattuja yhtälöryhmiä käsittelevällä kuvauksella f, sekä $\mathsf{f}(\mathsf{g}) = \mathsf{h}$. Viimeinen oletus kuvaa tavallisen bisimilaarisuuden suhteen vastaavuutta suunnattujen yhtälöryhmien $(\mathsf{g}, \mathsf{h})^+$ ja $\mathsf{a}E\mathsf{f}$ välillä. Koska myös $f^+ \sim \mathsf{f}$, niin on olemassa järjestetty pari $(\mathsf{g}', \mathsf{h}') \in f$, jolle $(\mathsf{g}', \mathsf{h}')^+ \sim (\mathsf{g}, \mathsf{h})^+$. Tällöin kuitenkin edellisen apulauseen nojalla $\mathsf{g} \sim \mathsf{g}'$ ja $\mathsf{h} \sim \mathsf{h}'$. Lisäksi $(\mathsf{g}', \mathsf{h}') \in f$ vastaa tietenkin merkintää $f(\mathsf{g}') = \mathsf{h}'$.

Kolmannessa kohdassa oletetaan, että f ja g ovat kuvauksia määrittelyjoukkoinaan $S \subset \mathcal{PS}^{\sim}$, sekä $f(\mathsf{p}) \sim g(\mathsf{p})$ kaikilla $\mathsf{p} \in S$. Olkoon nyt $\mathsf{e}Ef^+$. Tällöin on oltava jokin $\mathsf{q} \in S$, jolle $\mathsf{e} \sim (\mathsf{q}, f(\mathsf{q}))^+$. Toisaalta koska $f(\mathsf{q}) \sim g(\mathsf{q})$, niin myös $\mathsf{e} \sim (\mathsf{q}, g(\mathsf{q}))^+$. Siis $\mathsf{e}Eg^+$. Vastaavasti saadaan, että jos $\mathsf{e}'Eg^+$, niin $\mathsf{e}'Ef^+$. Täten lopulta $f^+ \sim g^+$.

Neljännessä kohdassa oletus tarkoittaa, että $\mathsf{e} \sim (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2)^+$, missä e_1 ja e_2 toteuttavat yhtälöryhmän vaatimusten vastaavuudet E-mielessä. Se, että tuntemattomat ovat hyvinperustettuja, taas tarkoittaa, että kaikille $\mathsf{e}'E\mathsf{e}_1$ pätee $\mathsf{e}' \sim \overline{a_{\mathsf{e}'}}$ jollakin joukolla $a_{\mathsf{e}'}$. Tällöin isomorfian rakentamalla saadaan $\mathsf{e}_1 \sim \overline{A}$, missä A on näiden joukkojen kokoelma. Aiemman kohdan nojalla saadaan myös, että $\mathsf{e}_2 \sim f^+$ sopivalla suunnattujen yhtälöryhmien kuvauksella f. Lisäksi nyt kaikille $\overline{a}E\mathsf{e}_1$ pätee, että jos $\mathsf{f}E\mathsf{e}_2(\overline{a})$, niin $\mathsf{f}E\mathsf{e}_1$ eli kuvauksien kuvat ovat oikean joukon E-osajoukkoja. Täten $\mathsf{e}_2(\overline{a}) \sim \overline{b_a}$ jollakin $b_a \subseteq A$. Määritellään kuvaus e määrittelyjoukkonaan A asettamalla $e(a) = b_a$. Nyt $\mathcal{E} = (A, e)$ on yhtälöryhmä ja $\{(\overline{a}, \overline{e(a)})^+ \mid a \in A\}^+ = e'^+ \sim \mathsf{e}_2$. Tällöin saadaan, että

$$\mathcal{E}^+ = (\overline{A}, e'^+)^+ \sim (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2)^+ \sim \mathsf{e}$$

Lopulta suunnatun yhtälöryhmän puolella $\sim$-ekstensionaalisuuden käännös tarkoittaa, että kaikilla $\mathsf{e}_3E\mathsf{e}_1$, kun suunnataan yhtälöryhmää e E-alkioiden mielessä vastaavasti kuten normaalien yhtälöryhmien suuntauksella, nämä ovat uudessa mallissa suhteessa $\sim$ vain, kun näiden juuret ovat $\sim$-suhteessa alkuperäisessä mallissa. Tästä seuraa myös rakennetun yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ normaali $\sim$-ekstensionaalisuus. Nimittäin jos $a, b \in A$ olisivat alkioita, joille $(\mathcal{E}_a, a) \sim (\mathcal{E}_b, b)$, niin huomataan, että $\mathsf{e}_{\overline{a}} \sim \mathsf{e}_{\overline{b}}$ suunnattujen yhtälöryhmien vastaavalla rajoituksella. Tällöin oletuksen nojalla $\overline{a} \sim \overline{b}$, ja koska joukkojen a ja b oletettiin olevan hyvinperustettuja, täytyy olla $a = b$.

Viimeinen kohta on laajennus edellisestä. Ensin voidaan löytää tarvittava yhtälöryhmä $\mathcal{E} = (A, e)$, jolle $\mathcal{E}^+ \sim \mathsf{e}$. Ensimmäisen kohdan nojalla voidaan löytää myös suunnattujen yhtälöryhmien kuvaus s, jolle $s^+ \sim \mathsf{s}$. Koska s on injektiivinen ratkaisu, pätee $\mathsf{s}(\overline{a}) \sim \{\mathsf{s}(\overline{b}) \mid b \in e(a)\}^+$ kaikilla $a \in A$. Toisaalta $\mathsf{s}(\overline{a}) \sim s(\overline{a})$ kaikilla $a \in A$. Täten

$$s(\overline{a}) \sim \{s(\overline{b}) \mid b \in e(a)\}^+$$

Viimein jos $\overline{a} \nsim \overline{b}$ eli $a \neq b$, kun $a, b \in A$, niin ei voi olla $s(\overline{a}) \sim s(\overline{b})$, sillä tällöin $\mathsf{s}(\overline{a}) \sim \mathsf{s}(\overline{b})$, mikä tarkoittaisi ratkaisun s injektiivisyyttä vastaavan ominaisuuden perusteella $\overline{a} \sim \overline{b}$. Siis s on injektio. Määritellään sitten $s'(a) = s(\overline{a})$, joka säilyttää halutut ominaisuudet. Siis s' on yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ bisimulaatioratkaisu. □

Apulauseessa oletetaan, että yhtälöryhmiä vastaavien suunnattujen yhtälöryhmien tuntemattomat ovat E-mielessä hyvinperustettuja, sillä suhteen $\sim$ isomorfiaehdon avulla loput yhtälöryhmät saadaan samaistettua hyvinperustettujen joukkojen avulla rakennettuihin yhtälöryhmiin. Esitetään tämä tarkemmin seuraavaksi.

Olkoon $\mathsf{e} \in \mathcal{PS}^{\sim}$ yhtälöryhmää vastaava suunnattu yhtälöryhmä. Siis on olemassa yhtälöryhmät X ja f, jotka vastaavat tuntemattomien joukkoa ja yhtälöryhmän rakennekuvausta, sekä joille $\mathsf{X}E\mathsf{e}$ ja $\mathsf{f}E\mathsf{e}$. Nyt tuntemattomien joukossa voi olla mikä tahansa luokan $\mathcal{PS}^{\sim}$ suunnattu yhtälöryhmä. Oletetaan siis, että $\mathsf{k}E\mathsf{X}$ on sellainen yhtälöryhmä, joka ei ole E-relaation suhteen hyvinperustettu. Ei siis ole olemassa hyvinperustettua joukkoa a, jolle $\overline{a} = \mathsf{k}$.

Tämän sijaan yhtälöryhmän e pohjalta voidaan rakentaa yhtälöryhmä e', jossa kaikki E-relaation suhteen ei-hyvinperustetut tuntemattomia vastaavat suunnatut yhtälöryhmät korvataan uusilla tuntemattomilla, jotka ovat hyvinperustettuja. Konkreettisesti tämä voidaan tehdä muuttamalla itse yhtälöryhmän e rakennetta. Tällöin jos yhtälöryhmien isomorfisuus käännetään koskemaan näitä yhtälöryhmiä vastaavia suunnattuja yhtälöryhmiä, huomataan yhtälöryhmien e ja e' toteuttavan tämän isomorfian. Tällöin nimittäin voidaan muodostaa tuntemattomien välille bijektio, jossa säilytetään alunperin hyvinperustetut tuntemattomat paikollaan, mutta kuvataan alunperin ei-hyvinperustetut tuntemattomat niiden korvaajille. Esitetään tästä yksinkertainen esimerkki.

Esimerkki 5.11. Tutkitaan $\sim$-ekstensionaalista suunnattua yhtälöryhmää $\mathsf{e} = (\mathcal{E}, j)$, missä $\mathcal{E} = (\{j, j_1, j_2, a, b, x, y, m, n, m_1, m_2, n_1, n_2, t\}, \{(j, \{j_1, j_2\}), (j_1, \{a\}), (j_2, \{a, b\}), (a, \{x, y\}), (x, \{x\}), (y, \emptyset), (b, \{m, n\}), (m, \{m_1, m_2\}), (n, \{n_1, n_2\}), (m_1, \{x\}), (m_2, \{x, t_1\}), (t_1, \{y\}), (n_1, \{y\}), (n_2, \{y, t_2\}), (t_2, \emptyset)\})$. Yhtälöryhmänä esitettynä tämä on siis

$$
\begin{aligned}
j &= \{j_1, j_2\} & j_1 &= \{a\} & j_2 &= \{a, b\}\\
a &= \{x, y\} & x &= \{x\} & y &= \{\}\\
b &= \{m, n\} & m &= \{m_1, m_2\} & n &= \{n_1, n_2\}\\
m_1 &= \{x\} & m_2 &= \{x, t_1\} & t_1 &= \{y\}\\
n_1 &= \{y\} & n_2 &= \{y, t_2\} & t_2 &= \{\}
\end{aligned}
$$

Tämä on yhtälöryhmää vastaavaa suunnattu yhtälöryhmä, jonka tuntemattomina toimivat e_x ja e_y, tuntemattomien joukkona e_a sekä kuvauksena e_b. Esitettävän yhtälöryhmän rakenteeksi siis saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathsf{e}_x &= \{\mathsf{e}_y\}\\
\mathsf{e}_y &= \emptyset
\end{aligned}
$$

eli joukon $\{\{\}\}$ esitys, sillä nyt $\mathsf{e}_{t_2} \cong \overline{\emptyset}$. Huomautuksena, että $\sim$-ekstensionaalisuuden takia on oltava $x = m_1$, $t_2 = y$ ja $t_1 = n_1 = n_2$. Muunnosta varten on kuitenkin hyödyllistä esittää yhtälöryhmä tarkemmassa muodossa, jottä tuntemattomia vastaavat kohdat pysyvät oikeilla paikoillaan.

Huomataan, että tuntematonta vastaava suunnattu yhtälöryhmä e_x ei ole hyvinperustettu relaation E suhteen, sillä $\mathsf{e}_x E \mathsf{e}_x$. Rakennetaan siis suunnattu yhtälöryhmä $\mathsf{e}' = (\mathcal{E}', j)$, missä $\mathcal{E}'$ on muuten kuten $\mathcal{E}$ tarkassa muodossaan, paitsi korvataan rakennekuvauksen $(x, \{x\})$ asettamalla $(x, \{y\})$. Tämä varmistaa, että e'_x on hyvinperustettu relaation E suhteen. Tällöin voidaan löytää normaali yhtälöryhmä $\mathcal{F}$, jolle $\mathsf{e}' \sim \mathcal{F}^+$. Isomorfian vastaavuutena on tällöin kuvaus π, missä $\pi(\mathsf{e}_x) = \mathsf{e}'_x$ ja $\pi(\mathsf{e}_y) = \mathsf{e}'_y$. Tämä nimittäin on tuntemattomia vastaavien yhtälöryhmien välinen bijektio, joka säilyttää yhtälöryhmän rakenteen.

Nyt tästä isomorfiasta seuraa, että kunhan $\sim$-ekstensionaalisina yhtälöryhminä toimivilla suunnatuilla yhtälöryhmillä $\mathcal{E}^+$ on yksikäsitteiset injektiiviset ratkaisut, on myös kaikilla muillakin oltava yksikäsitteiset injektiiviset ratkaisut. Olemassaolo seuraa yksinkertaisesti korvaamalla osan lähtöjoukosta. Toisaalta jos jollakin $\sim$-ekstensionaalista yhtälöryhmää vastaavalla suunnatulla yhtälöryhmällä olisi kaksi erillistä injektiivistä ratkaisua, tällöin isomorfian avulla saataisiin myös yhtälöryhmälle $\mathcal{F}^+$ kaksi erillistä injektiivistä ratkaisua, mikä on ristiriita.

Täten antisäännöllisyysaksioomaa$^\sim$ todistettaessa ei tarvitse huomioida muuta kuin alkuperäisen mallin yhtälöryhmien ja niiden bisimulaatioratkaisujen käännökset. Todistetaan viimein antisäännöllisyysaksiooman$^\sim$ käännös uudessa mallissa.

Lause 5.12. *Olkoon* e *suunnattu yhtälöryhmä, jolle* $[\mathsf{e}]$ *on uudessa mallissa* $\sim$*-ekstensionaalinen yhtälöryhmä. Tällöin on olemassa suunnattu yhtälöryhmä* s*, joka on sen injektiivinen ratkaisu. Lisäksi jos* t *on myös injektiivinen ratkaisu, niin* $\mathsf{s} \sim \mathsf{t}$.

Todistus. Voidaan edelleen olettaa, että yhtälöryhmän e E-tuntemattomat ovat hyvinperustettuja.

Kuten todettiin edellisessä apulauseessa, nyt on olemassa yhtälöryhmä $\mathcal{E}$, jolle $\mathsf{e} \sim \mathcal{E}^+$. Lisäksi lauseen 5.7 nojalla tämän injektiivinen bisimulaatioratkaisu s' on olemassa, ja apulauseen nojalla s^+ on yhtälöryhmän e injektiivinen ratkaisu, missä s on kuvauksen s' muunnos luokan $\mathcal{PS}^\sim$ sisäiseksi lauseen 5.4 upotuksen avulla. Edelleen jos f on toinen injektiivinen ratkaisu, niin on olemassa yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ injektiivinen bisimulaatioratkaisu t', jolle $t^+ \sim \mathsf{f}$. Tässä t on määritelty vastaavasti kuin s. Toisaalta lauseen 5.7 nojalla $s'(x) \sim t'(x)$ kaikilla yhtälöryhmän $\mathcal{E}$ tuntemattomilla x. Tällöin taas edellisen lemman nojalla $s^+ \sim t^+$, joten $s^+ \sim \mathsf{f}$. □

Viimeiseksi on vielä todistettava valinta-aksiooman voimassaolo. Aiemmin todistettu apulause 5.10 auttaa tässä.

Valinta-aksiooman todistus: Todistetaan valinta-aksioomasta muoto ”jokaisella indeksöidyllä perheellä epätyhjiä joukkoja $(X_i)_{i\in I}$ on olemassa indeksöity perhe $(x_i)_{i\in I}$, jolle $x_i \in X_i$ kaikilla $i \in I$.” Oletetaan siis, että $\mathsf{R} = (\mathcal{R}, x) \in \mathcal{PS}^\sim$ on relaatio määrittelyjoukkonaan jokin X E-mielessä: jos $y \in b_x$, niin on olemassa $\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y \in \mathcal{PS}^\sim$, joille $(\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y)^+ \sim (\mathcal{R}_y, y)$ sekä $\mathsf{p}_y E \mathsf{X}$. Normaalin keräysaksiooman avulla saadaan joukko S, jonka alkioita ovat jokin tällainen pari $(\mathsf{p}_y, \mathsf{q}_y)$ jokaiselle $y \in b_x$. Nyt joukosta S saadaan normaalin valinta-aksiooman avulla osajoukko $f \subseteq S$, jolla on samat ominaisuudet kuin apulauseen 5.10 ensimmäisen kohdan todistuksessa. Huomataan samoin kuin apulauseen todistuksessa, että f^+ on E-mielessä kuvaus määrittelyjoukkonaan X. Tämän huomataan kuitenkin olevan etsitty valintakuvaus.

6 Virrat

Antisäännöllisyysaksioomien avulla voidaan muodostaa erilaisia monia erilaisia rakenteita sekä johtaa näihin liittyviä tuloksia. Tässä luvussa tutkitaan esimerkkinä virtoja. Käytettävä antisäännöllisyysaksiooman muoto rajoitetaan yleiseksi antisäännöllisyysaksioomaksi. Luvun lähteenä käytetään Barwisen ja Mossin kirjan [3] esitystä virroista.

Yleisen antisäännöllisyysaksiooman avulla esiteltävät virrat ovat järjestettyjä pareja, joiden toisena alkiona on toinen virta. Ensimmäisen alkion avulla taas halutaan luokitella virtoja tiettyihin joukkohin. Halutaan siis määritellä, että virrat joukon A suhteen ovat järjestettyjä pareja (a, b), missä $a \in A$ ja b on virta joukon A suhteen.

Koska virtojen toivotaan olevan järjestettyjä pareja, otetaan käyttöön järjestetyille pareille määritellyt luokkakuvaukset I ja II, joille $\mathrm{I}(a, b) = a$ ja $\mathrm{II}(a, b) = b$ kaikilla järjestetyillä pareilla (a, b).

Virrat ovat siis tietynlaisia hyperjoukkoja, joiden halutaan kuuluvan yhtälön $Z = A \times Z$ toteuttavaan joukkoon. Kiinnostuksen kohteena tässä on siis uudenlainen yhtälö, jota ei saada suoraan yleisestä antisäännöllisyysaksioomasta. Vastaavia joukkoja voitaisiin mallintaa yksinkertaisesti esimerkiksi kuvauksilla $\mathbb{N} \to A$, mutta luvun tavoitteena on antaa esimerkki yleisen antisäännöllisyysaksiooman mahdollisesta sovelluksesta. Ensinnäkin halutaan todistaa, että tällainen joukko Z todellakin on olemassa.

Yksittäisten virtojen joukon A suhteen olemassaolo voidaan todistaa helposti yhtälöryhmällä, joka vastaa yhtälöitä

$$\begin{aligned} x_1 &= \{y_1, z_1\} \\ y_1 &= \{a_1\} \\ z_1 &= \{a_1, x_2\} \\ x_2 &= \{y_2, z_2\} \\ y_2 &= \{a_2\} \\ z_2 &= \{a_2, x_3\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tässä joukot $a_n \in A$ ovat vakioita.

Kaikkien tällaisten joukkojen joukon olemassaoloa varten tarvitaan tarkempi todistus.

Lause 6.1. *Olkoon A joukko. Tällöin on olemassa suurin joukko Z, jolle $Z \subseteq A \times Z$. Itse asiassa pätee $Z = A \times Z$. Lisäksi, jos $A \neq \emptyset$, niin myös $Z \neq \emptyset$.*

Todistus. Olkoon F kuvausten $f : \mathbb{N} \to A$ joukko. Tällöin kaikille $f \in F$ on olemassa kuvaus $f^+ \in F$, jolle pätee $f^+(n) = f(n + 1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Liitetään jokaiselle $f \in F$ tuntemattomat x_f, y_f ja z_f siten, että $x_f, y_f, z_f \notin \mathrm{TC}(\{A\})$. Tutkitaan yhtälöryhmää $\mathcal{E}$, missä asetetaan jokaiselle $f \in F$

$$\begin{aligned} x_f &= \{y_f, z_f\} \\ y_f &= \{f(0)\} \\ z_f &= \{f(0), x_{f^+}\} \end{aligned}$$

sekä $f(0)$ vastaa kanonista yhtälöryhmäänsä. Nyt $\mathcal{E}$ on yhtälöryhmä, joten tällä on ratkaisu s. Tällöin tuntemattomien yhtälöiden perusteella saadaan $s(x_f) = \{s(y_f), s(z_f)\} =$

$\{\{s(f(0))\}, \{s(f(0)), s(x_{f^+})\}\} = (s(f(0)), s(x_{f^+}))$ kaikilla f. Kuitenkin koska $f(0)$ vastaa omaa kanonista yhtälöryhmäänsä ja uudet tuntemattomat ovat erillisiä joukosta $\mathrm{TC}(\{A\})$, niin on oltava $s(f(0)) = f(0)$. Siis $s(x_f) = (f(0), s(x_{f^+}))$. Saatu joukko $s(x_f)$ on täten virta joukon A suhteen. Asetetaan $Z = \{s(x_f) \mid f \in F\}$. Nähdään helposti, että $Z \subseteq A \times Z$. Nimittäin jos $s(x_f) = (a, b) \in Z$, niin $a \in A$ ja $b = s(x_{f^+}) \in Z$. Täten $s(x_f) \in A \times Z$. Merkitään näitä virtoja symbolilla s_f.

Seuraavaksi olkoon W joukko, jolle $W \subseteq A \times W$, sekä $w = (a, b) \in W$. Olkoon lisäksi $f_w \colon \mathbb{N} \to A$ kuvaus, jolle $f_w(n) = \mathrm{I}(\mathrm{II}^n(w))$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Huomataan, että $f_w \in F$, joten myös $s_{f_w} \in Z$. Vielä on todistettava, että Z on suurin halutun kaltainen joukko. Tätä varten pitää varmistaa, että $w = s_{f_w}$. Nähdään ensin, että $f_{\mathrm{II}(w)} = (f_w)^+$. Täten $s_{f_w} = (\mathrm{I}(w), s_{f_{\mathrm{II}(w)}}) = (\mathrm{I}(w), s_{\mathrm{II}(w)})$. Toisaalta tietenkin $w = (\mathrm{I}(w), \mathrm{II}(w))$. Tällöin saadaan bisimulaatio

$$\begin{aligned} R =& \{(w, s_{f_w}) \mid w \in W\} \cup \{(\{a\}, \{a\}) \mid a \in A\} \\ &\cup \{(a, a) \mid a \in A\} \cup \{(\{a, w\}, \{a, s_{f_w}\}) \mid a \in A \text{ ja } w \in W\}. \end{aligned}$$

Rajoitettuna joukon w transitiiviseen sulkeumaan tämä on joukkojen välinen bisimulaatio, ja tämän nojalla huomataankin, että $w = s_{f_w}$. Siis $w \in Z$.

Sitten todistetaan vielä, että $A \times Z \subseteq Z$. Olkoon $a \in A$ ja $b \in Z$. Tällöin on olemassa jokin $f \colon \mathbb{N} \to A$, jolle $s_{x_f} = b$. Määritellään kuvaus $g \colon \mathbb{N} \to A$ asettamalla $g(0) = a$ ja $g(n+1) = f(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Huomataan, että $g^+ = f$. Täten $s_{x_g} = (a, s_{x_{g^+}}) = (a, s_{x_f}) = (a, b)$. Siis $A \times Z \subseteq Z$.

Viimein jos $A \neq \emptyset$, niin kuvausten joukko $\mathbb{N} \to A$ ei myöskään ole tyhjä. Täten $Z \neq \emptyset$. □

Asetetaan tämän lauseen avulla määritelmä virroille.

Määritelmä 6.2. Olkoon A joukko. Merkitään tällöin edellisen lauseen antamaa joukkoa $Z = A^\infty$. Lisäksi jos $s \in A^\infty$, niin sanotaan, että s on *virta joukon A suhteen*.

Nyt joukko A^∞ on virtaesimerkin tapauksessa *kiintopiste* luokkaoperaatiolle Γ, missä $\Gamma(c) = A \times c$ kaikilla joukoilla c, sillä edellisen lauseen perusteella $\Gamma(A^\infty) = A^\infty$. Tarkemmin sanottuna kyseessä on tämän operaation *suurin* kiintopiste, sillä myös tyhjä joukko $\emptyset$ on operaation kiintopiste. Seuraavassa luvussa määritellään kiintopisteet yleisemmin sekä nähdään, millaisille operaatioille saadaan laajimpia kiintopisteitä.

Kiintopisteiden lisäksi halutaan tarkastella myös joukkojen määrittelyä tietyllä tavalla sekä tällaisten joukkojen todistusperiaatteita. Halutaan löytää suurimpia joukkoja, joiden jokainen alkio toteuttaa jonkin ehdon. Kutsutaan tätä määrittelytapaa *korekursioksi*.

Esimerkki 6.3. Annetaan esimerkki tapauksesta, jossa pitäisi rakentaa kuvaus korekursiivisesti. Olkoon A joukko sekä $f \colon A \to A$ kuvaus. Tällöin saataisiin luonnollisesti kuvaus $F \colon A^\infty \to A^\infty$, missä $F(s) = (f(\mathrm{I}(s)), F(\mathrm{II}(s)))$. Esimerkiksi jos $A = \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$ ja $s = (1, (2, (3, \ldots)))$, niin tulisi saada $F(s) = (1, (4, (9, \ldots)))$.

Ongelmana tässä kuvauksen määritelmässä on kuitenkin se, että virrassa ei ole mitään perustapausta. Uuden kuvauksen antamat kuvat on siis rakennettava jotenkin eri tavalla. Joukko, joka koostuu kaiksita virroista joukon A suhteen rakennettiin yhtälöryhmien avulla, ja yhtälöryhmien avulla rakennetaan myös tämä uusi kuvaus.

Ideana on antaa jokaiselle virralle $s \in A^\infty$ uusi tuntematon x_s, joka tulee vastaamaan kuvauksen antamaa kuvaa $F(s)$. Nyt voidaan käyttää yhtälöryhmää, jonka rakenne vastaa yhtälöä $x_s = (f(a), x_{s'})$ kaikilla $a \in A$ ja $s, s' \in A^\infty$. Tämän yhtälöryhmän vastauksesta saadaan halutut kuvat $F(s)$ kaikilla $s \in A^\infty$. Viimeisenä askeleena tulee vielä varmistaa, että saadut joukot ovat virtoja. Tätä voidaan kutsua *koinduktioksi*.

Lause 6.4 (Koinduktioperiaate virroille)**.** *Jos halutaan todistaa, että joukko Z on joukon A^∞ osajoukko, niin riittää osoittaa, että $Z \subseteq A \times Z$.*

Todistus. Todistus seuraa suoraan siitä, että A^∞ on laajin joukko W, jolle $W \subseteq A \times W$. □

Koinduktioperiaatteen avulla voidaan osoittaa, että $A_F = \{F(s) \mid s \in A^\infty\} \subseteq A^\infty$ näyttämällä, että $A_F \subseteq A \times A_F$. Olkoon siis $F(s) \in A_F$. Nyt $s = (a, s')$ joillain $a \in A$ ja $s \in A^\infty$. Toisaalta $F(s) = (f(a), F(s'))$, $f(a) \in A$ ja $F(s') \in A_F$. Siis $F(s) \in A \times A_F$. Täten $A_F \subseteq A \times A_F$ ja koinduktioperiaatteen nojalla $A_F \subseteq A^\infty$.

Esitetään tämä korekursioperiaate tarkemmin seuraavassa lauseessa.

Lause 6.5 (Korekursioperiaate virroille)**.** *Olkoon C joukko. Tällöin mille vain kuvauksille $G\colon C \to A$ ja $H\colon C \to C$ on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $F\colon C \to A^\infty$, jossa kaikilla $c \in C$ pätee $F(c) = \big(G(c), F(H(c))\big)$. Kutsutaan tätä kuvauksen F* korekursioyhtälöksi.

Todistus. Olkoot $G\colon C \to A$ ja $H\colon C \to C$ kuvauksia. Ideana on luoda jälleen yhtälöryhmä uuden kuvauksen antamille kuville. Olkoon siis x_c uusi tuntematon jokaiselle $c \in C$. Yhtälöryhmään asetetaan yhtälöitä $x_c = (G(c), x_{H(c)})$ vastaavat yhtälöt, missä $G(c)$ vastaa oman kanonisen yhtälöryhmänsä rakennetta. Kun s on tämän yhtälöryhmän ratkaisu, niin määritellään $F(c) = s(x_c)$. Huomataan, että tällöin $F(c) = \big(G(c), s(x_{H(c)})\big) = \big(G(c), F(H(c))\big)$. Viimein koska yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen, täytyy määritellyn kuvauksenkin olla tämän ehdon suhteen yksikäsitteinen. □

Tutkitaan, miten edellisen esimerkin kuvaus pystytään muodostamaan lauseen avulla.

Esimerkki 6.6. Osoitetaan edellisessä esimerkissä esitellyn kuvauksen F rakennus. Tarvittavat kuvaukset ovat $G\colon \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}, G(s) = \mathrm{I}(s)^2$ ja $H\colon \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty, H(s) = \mathrm{II}(s)$. Tällöin edellisen lauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $F\colon \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$, jolle pätee $F(a,b) = (G(a,b), F(H(a,b))) = (a^2, F(b))$ kaikilla $a \in \mathbb{N}$ ja $b \in \mathbb{N}^\infty$.

Korekursion avulla saadaan myös mielenkiintoisempia kuvauksia. Annetaan esimerkkinä kuvaus $\mathrm{zip}\colon A^\infty \times A^\infty \to A^\infty$, joka lomittaa kaksi virtaa yhdeksi uudeksi virraksi siten, että $\mathrm{zip}\big((a,s),(b,t)\big) = \big(a, (b, \mathrm{zip}(s,t))\big)$ kaikilla $a, b \in A$ ja $s, t \in A^\infty$. Tämän määrittely onnistuu kuvausten $G\colon A^\infty \times A^\infty \to A, G(s,t) = \mathrm{I}(s)$ ja $H\colon A^\infty \times A^\infty \to A^\infty \times A^\infty, H(s,t) = (t,s)$ avulla. Tätä voitaisiin yleistää vielä joukolle $(A^\infty)^n$, missä asetettaisiin vastaavasti $\mathrm{zip}_n(s_1, \ldots, s_n) = \Big(\mathrm{I}(s_1), \Big(\ldots, \big(\mathrm{I}(s_n), \mathrm{zip}_n(\mathrm{II}(s_1), \ldots, \mathrm{II}(s_n))\big)\Big)\Big)$.

Todistuksista huomataan, että virtoja varten oli muodostettava yhtälöryhmiä. Tätä voitaisiin yksinkertaistaa erikoistuneilla yhtälöryhmillä, joiden ratkaisujoukot koostuvat pelkästään virroista.

Määritelmä 6.7. *Virtayhtälöryhmä* joukon A suhteen on pari $\mathcal{E} = (X, e)$, missä X joukko ja $e\colon X \to A \times X$.

Kuvaus s on virtayhtälöryhmän $\mathcal{E}$ ratkaisu, mikäli $\mathrm{dom}(s) = X$ ja kaikille $x \in X$ pätee $s(x) = \Big(\mathrm{I}(e(x)), s\big(\mathrm{II}(e(x))\big)\Big)$.

Seuraavassa todistuksessa nähdään, että virtayhtälöryhmien ratkaisut toimivat odotetusti.

Lause 6.8. *Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ virtayhtälöryhmä joukon A suhteen. Tällöin sillä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, sekä tämän ratkaisujoukko on joukko virtoja joukon A suhteen.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{E} = (X, e)$ virtayhtälöryhmä joukon A suhteen. Ratkaisun olemassaolo saadaan muuntamalla virtayhtälöryhmä normaaliksi yhtälöryhmäksi. Tässä voidaan olettaa, että $X \cap \mathrm{TC}(A) = \emptyset$. Tällöin määritellään uusi yhtälöryhmä $\mathcal{E}' = (X', e')$. Tässä $X' = X \cup \mathrm{TC}(A) \cup Y$, missä Y koostuu kahdesta uudesta tuntemattomasta jokaiselle tuntemattomalle $x \in X$. Kuvauksessa taas määritellään $e'(x) = \{y_x, y'_x\}$ uusilla tuntemattomilla $y_x, y'_x \in Y$, kun $x \in X$. Nyt kun $e(x) = (a, b)$, niin määritellään $e'(y_x) = \{a\}$, $e'(y'_x) = \{a, b\}$ sekä kaikille $c \in \mathrm{TC}(A)$ määritellään kuten kanonisessa yhtälöryhmässä. Tällä yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu s. Huomataan, että nyt $s(x) = (a, s(y))$ kaikilla $x \in X$, missä $y \in X$ ja $e(x) = (a, b)$. Nyt voidaan kuitenkin asettaa $s'(z) = s(z)$ kaikilla $z \in X$, jolloin tämähän on virtayhtälöryhmän ratkaisu. Jos taas t olisi virtayhtälöryhmän ratkaisu, voitaisiin laajentaa se yhtälöryhmän $\mathcal{E}'$ ratkaisuksi. Tämän ratkaisu on kuitenkin yksikäsitteinen, joten täytyy olla $t(z) = s'(z)$ kaikilla $z \in X$.

Osoitetaan seuraavaksi, että ratkaisujoukko koostuu virroista. Olkoon s virtayhtälöryhmän $\mathcal{E}$ ratkaisu sekä S ratkaisun s arvojoukko. Koinduktioperitaatteen nojalla riittää osoittaa, että $S \subseteq A \times S$. Kirjoitetaan kaikilla $x \in X$ $e(x) = (a_x, y_x)$, missä $a_x \in A$ ja $y_x \in X$.

Nyt $S = \{s(x) \mid x \in X\} = \{\Big(\mathrm{I}(e(x)), s\big(\mathrm{II}(e(x))\big)\Big) \mid x \in X\} = \{(a_x, s(y_x)) \mid x \in X\} \subseteq A \times S$. Täten S on joukko virtoja joukon A suhteen. □

7 Koinduktio ja korekursio

Tämän luvun lähteinä käytetään Barwisen ja Mossin kirjaa [3] sekä Dannerin ja Mossin artikkelia [4]. Tuloksista pelkästään kiintopisteisiin liittyvät lauseet perustuvat kirjaan, joten jätän viittaukset pois muista kohdista.

Tässä luvussa yleistetään korekursiota ja koinduktiota koskemaan tiettyjä vaatimuksia toteuttavia joukkojen operaatioita, joita kutsutaan operaattoreiksi. Koinduktiosta annetaan ensimmäisessä aliluvussa lyhyt tulos, mutta korekursiota varten toisessa aliluvussa esitetään useita esitystä helpottavia käsitteitä sekä kategorioihin liittyviä tuloksia.

Muista luvuista poiketen tässä luvussa käytetään hieman erilaista aksioomajärjestelmää, joka lisää käytettäviksi *alkualkioiden* tai *atomien* luokan, joilla ei ole alkioita. Tämä toteutetaan uusilla joukko-opin kaavojen relaatiosymboleilla $\mathcal{U}$ sekä new. Ensimmäiseksi aksioomaksi asetetaan alkualkioiden haluttu ominaisuus:

Alkualkioaksiooma: $\forall a \forall b \big(\mathcal{U}(a) \to \neg(b \in a)\big)$

Täten $\mathcal{U}(x)$ tarkoittaa, että x on alkualkio sekä $\neg\mathcal{U}(x)$, että x on joukko, mutta merkitään yksinkertaisemmin $x \in \mathcal{U}$ tai $X \subseteq \mathcal{U}$ alkualkioille tai vain alkualkioista koostuville joukoille. Seuraavaksi vaaditaan uusi aksiooma operaation new käytöksestä.

Vahva runsausaksiooma:

- Kaikille joukoille a ja kaikille joukoille $b \subseteq \mathcal{U}$ pätee $\mathsf{new}(a, b) \in \mathcal{U} \setminus b$.
- Kaikille joukoille a ja a' sekä joukoille $b \subseteq \mathcal{U}$ pätee, että jos $a \neq a'$, niin $\mathsf{new}(a, b) \neq \mathsf{new}(a', b)$.

Tämä aksiooma varmistaa, että alkualkioita on olemassa sekä sen, että niitä on olemassa aito luokka. Merkitään tätä luokkaa yksinkertaisesti samalla symbolilla $\mathcal{U}$. Kyseisestä aksioomasta on olemassa myös heikompi versio, joka ei kuitenkaan takaa aidon luokan olemassaoloa, mitä tässä luvussa tarvitaan.

Viimeiseksi alkualkioiden olemassaolo vaatii ekstensionaalisuusaksiooman muokkausta. Koska alkualkiot ovat alkiottomia, ne samaistuisivat normaalin ekstensionaalisuuden voimassaollessa tyhjäksi joukoksi. Ekstensionaalisuusaksiooma on siis rajattava koskemaan pelkästään joukkoja:

$\forall a \forall b \big((\neg\mathcal{U}(a) \land \neg\mathcal{U}(b)) \to (\forall c(c \in a \leftrightarrow c \in b) \to a = b)\big)$

Muut aksioomat eivät vaadi muokkaamista. Tässä luvussa käytettävä aksioomajärjestelmä on siis ZFA + U muokatulla ekstensionaalisuudella, missä U edustaa alkualkioaksioomia.

Jos kanonisia yhtälöryhmiä halutaan käyttää atomien kanssa, on niiden muodostusta muutettava hieman. Atomit saisivat nimittäin identtisessä kuvauksessa kuvikseen tuntemattomien joukon sijaan itsensä, jolloin kyseessä ei olisikaan yhtälöryhmä. Joukon a kanoniseksi yhtälöryhmäksi pitääkin määritellä $(\mathrm{TC}(\{a\}) \setminus A, A, \mathrm{id}_{\mathrm{TC}(\{a\}) \setminus A})$, missä $A = \mathrm{TC}(\{a\}) \cap \mathcal{U}$.

Huomautuksena vielä, että alkualkioiden sijaan voitaisiin käyttää tarvittaessa pelkästään joukkoja, jotka eivät liity muihin halutussa tuloksessa esiintyviin objekteihin. Alkualkiot kuitenkin yksinkertaistavat esitystä, joten muokattua aksioomajärjestelmää on hyödyllistä käyttää.

Atomien luokan määrittelyn jälkeen voidaan tutkia näihin liittyviä kuvauksia.

Määritelmä 7.1. Olkoon s (luokka)kuvaus joltakin atomien joukolta tai luokalta joukkoihin. Tätä kutsutaan *korvaukseksi*. Lisäksi määritellään tämän laajennukseksi *korvauksen kaltainen operaatio* $[s]$, jolle

- $[s](p) = s(p)$, jos $p \in \mathrm{dom}(s)$,
- $[s](p) = p$, jos $p \in \mathcal{U} \setminus \mathrm{dom}(s)$ tai
- $[s](p) = \{[s](a) \mid a \in p\}$, jos $p \notin \mathcal{U}$.

Olkoon a joukko (tai luokka). Käytetään tällöin rajoitetulle kuvaukselle $[s] \restriction a$ yksinkertaisempaa merkintää $[s]_a$.

Huomataan, että jos yhtälöryhmien tuntemattomat rajoitetaan tälle atomien luokalle siten, että niitä ei esiinny yhtälöryhmän vakioiden transitiivisessa sulkeumassa, niin yhtälöryhmien rakennetta esittävä kuvaus e on korvaus, sekä yhtälöryhmän ratkaisu s on korvaus, jolle $s(x) = [s](e(x))$ kaikilla yhtälöryhmän tuntemattomilla x. Yleisen antisäännöllisyysaksiooman seurauksena tämä on myös yksikäsitteinen. Itse asiassa tällaisten korvauksien olemassaolo on yhtäpitävää yleisen antisäännöllisyysaksiooman kanssa.

7.1 Operaattorit ja koinduktio

Tässä aliluvussa käsitellään tarkemmin tietynlaisia luokkakuvauksia, joiden avulla voidaan esittää vastaava tulos koinduktiosta kuin virtojen tapauksessa. Määritellään ensin operaattorit.

Määritelmä 7.2. *Operaattori* on luokkakuvaus Γ, joka kuvaa minkä tahansa joukon jollekin joukolle. Jos lisäksi kaikille joukoille a ja b, joille $a \subseteq b$, pätee $\Gamma(a) \subseteq \Gamma(b)$. niin operaattori on *monotoninen*. Jos kaikille joukoille a pätee, että jokainen $b \in \Gamma(a)$ on myös joukko (ts. $\Gamma(a) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ kaikilla joukoilla a), niin operaattori on *aito*.

Operaattorit voidaan laajentaa toimimaan myös luokkien kanssa: asetetaan $\Gamma(C) = \bigcup_{a \subseteq C} \Gamma(a)$. Tämä laajennus myös säilyttää monotonisuuden, mikäli operaattori oli monotoninen joukkojen suhteen. Tällaiset operaattorit ovat *joukkopohjaisia*, eli jos $a \in \Gamma(C)$, niin on olemassa joukko $b \subseteq C$, jolle $a \in \Gamma(b)$.

Seuraavalla määritelmällä varmistetaan vielä, että voidaan valita atomien joukkoja, jotka eivät liity mitenkään tarkasteltavissa olevaan operaattoriin.

Määritelmä 7.3. Joukko $X \subseteq \mathcal{U}$ on *hyvin uusi* operaattorin Γ suhteen, jos kaikille korvauksille s määrittelyjoukkonaan X ja kaikilla joukoilla a pätee

- $\Gamma([s](a)) = [s](\Gamma(a))$
- Jos $[s]_a \colon a \to [s](a)$ on injektiivinen ja täten bijektiivinen, niin myös $[s]_{\Gamma_a} \colon \Gamma(a) \to [s](\Gamma(a))$ on injektiivinen (joten myös bijektiivinen).

Jos on olemassa sellainen joukko $X_\Gamma \subseteq \mathcal{U}$, että kaikille joukoille $Y \subseteq \mathcal{U}$, joille $Y \cap X_\Gamma = \emptyset$, pätee, että Y on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen, niin sanotaan, että *melkein kaikki* atomit ovat hyvin uusia operaattorin Γ suhteen.

Erityisesti ollaan kiinnostuneita niistä operaattoreista, joille melkein kaikki atomit ovat hyvin uusia.

Määritelmä 7.4. Jos operaattori Γ on monotoninen, aito sekä melkein kaikki atomit ovat tämän suhteen hyvin uusia, niin operaattorin Γ sanotaan olevan *tasainen*.

Annetaan esimerkki tasaisesta operaattorista.

Esimerkki 7.5. Olkoon A joukko. Määritellään kaikille joukoille a operaatio $\Gamma(a) = A \times a$. Tämä ilmenee tasaiseksi operaattoriksi.

Olkoon $a \subseteq b$ sekä $(x, y) \in A \times a$. Selvästi myös $(x, y) \in A \times b$, joten Γ on monotoninen. Lisäksi kaikilla joukoilla b huomataan, että $A \times b$ on joukko. Siis Γ on aito.

Lopulta tutkitaan joukon A transitiivisesti sisältämien atomien joukkoa $\mathrm{support}(A) = X_\Gamma$. Olkoon Y atomien joukko, jolle $Y \cap X_\Gamma = \emptyset$, sekä s korvaus määrittelyjoukkonaan Y. Olkoon b joukko sekä $a \in A$. Ensimmäiseksi määritelmän nojalla $[s](a) = a$, sekä edelleen $[s](A) = A$. Lisäksi jos $c \in b$, niin $[s]((a, c)) = [s](\{\{a\}, \{a, c\}\}) = \{[s](\{a\}), [s](\{a, c\})\} = \{\{a\}, \{a, [s](c)\}\} = (a, [s](c))$. Tämän nojalla $[s](\Gamma(b)) = [s](A \times b) = A \times [s](b) = \Gamma([s](b))$. Lisäksi jos $[s]_b$ on injektiivinen, niin myös $[s]_{A\times b}$ on oltava injektiivinen. Siis melkein kaikki atomit ovat hyvin uusia operaattorin Γ suhteen.

Operaattori Γ on täten tasainen.

Määritellään vielä, mitä operaattorin kiintopiste tarkoittaa. Tämä osio seuraavasta määritelmästä lauseeseen 7.9 asti perustuu Barwisen ja Mossin kirjaa [3].

Määritelmä 7.6. Olkoon Γ monotoninen operaattori. Tällöin

- Joukko tai luokka G on operaattorin Γ *kiintopiste*, mikäli $\Gamma(G) = G$.
- Kiintopiste G on operaattorin Γ suurin (pienin) kiintopiste, mikäli kaikille saman operaattorin kiintopisteille H pätee $H \subseteq G$ ($G \subseteq H$).

Kuvaukset operaattorin pienimmältä kiintopisteeltä tietylle joukolle ovat eräs tapa kuvata rekursiota. Vastaavasti voidaan tutkia tietynlaisia kuvauksia tietyltä joukolta operaattorin suurimpaan kiintopisteeseen, jota tullaan kutsumaan korekursioksi. Ensin on kuitenkin todistettava, että jokaisella operaattorilla on olemassa suurin kiintopiste. Ensin todistetaan tätä helpottava aputulos.

Apulause 7.7. Olkoon Γ monotoninen operaattori sekä D luokka, jolle $D \subseteq \Gamma(D)$. Tällöin jos $a \subseteq D$ on joukko, niin on olemassa joukko $b \subseteq D$, jolle $a \subseteq \Gamma(b)$.

Todistus. Olkoon $a \subseteq D$. Tällöin kaikille $c \in a$ pätee myös $c \in D \subseteq \Gamma(D)$. Nyt määritelmän nojalla $\Gamma(D) = \bigcup_{d\subseteq D} \Gamma(d)$. Täten on olemassa jokin joukko $b_c \subseteq D$, jolle $c \in \Gamma(b_c)$. Asetetaan $b = \bigcup_{c\in a} b_c$. Tällöin operaattorin Γ monotonisuuden nojalla $b \subseteq D$ on joukko, jolle pätee $a \subseteq \Gamma(b)$, eli lause on todistettu. □

Seuraavaksi päästään itse suurimman kiintopisteen olemassaolon todistukseen.

Lause 7.8. *Jokaisella monotonisella operaattorilla Γ on olemassa suurin kiintopiste.*

Todistus. Olkoon Γ monotoninen operaattori, joka on aito. Osoitetaan, että tällöin

$$\bigcup \{b \mid b \text{ on joukko ja } b \subseteq \Gamma(b)\} = B$$

on tämän suurin kiintopiste.

Olkoon $a \in B$. Tällöin joukon B määritelmän nojalla on olemassa joukko $b \subseteq B$, jolle $a \in b$ ja $b \subseteq \Gamma(b)$. Siis myös $a \in \Gamma(b)$. Monotonisuuden nojalla nyt $\Gamma(b) \subseteq \Gamma(B)$, joten $a \in \Gamma(B)$. Täten $B \subseteq \Gamma(B)$.

Oletetaan sitten, että D on jokin luokka, jolle $D \subseteq \Gamma(D)$. Osoittamalla, että $D \subseteq B$ saadaan, että B on suurin tällainen luokka. Olkoon siis $d \in D$. Merkitään $a_0 = \{d\}$. Seuraavaksi edellisen apulauseen nojalla voidaan etsiä sellainen osajoukko $a_1 \subseteq D$, jolle $a_0 \subseteq \Gamma(a_1)$. Jatketaan tätä siten, että kaikille $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $a_n \subseteq D$ ja $a_{n-1} \subseteq \Gamma(a_n)$. Asetetaan $a = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Nyt jos $c \in a$, niin jollekin $n \in \mathbb{N}$ pätee $c \in a_n \subseteq \Gamma(a_{n+1}) \subseteq \Gamma(a)$. Siis $a \subseteq \Gamma(a)$, jolloin $a \subseteq B$. Koska $d \in a_0 \subseteq a$, niin saadaan $d \in B$. Täten $D \subseteq B$.

Viimein todistetaan, että $\Gamma(B) \subseteq B$. Todetaan ensimmäiseksi, että $B \subseteq \Gamma(B)$. Koska Γ on monotoninen, saadaan $\Gamma(B) \subseteq \Gamma(\Gamma(B))$. Edellisen kohdan nojalla tällöin $\Gamma(B) \subseteq B$. Täten B on operaattorin Γ kiintopiste. Lisäksi koska kaikille kiintopisteille D pätee $D \subseteq \Gamma(D)$, niin myös $D \subseteq B$. Siis B on suurin kiintopiste. □

Merkitään lauseessa määriteltyä operaattorin Γ suurinta kiintopistettä Γ^*. Vastaavasti voitaisiin merkitä pienintä kiintopistettä Γ_*.

Suurimpien kiintopisteiden olemassaolon avulla saadaan myös yksinkertainen tulos koinduktiosta.

Lause 7.9. *Olkoon Γ monotoninen operaattori ja G joukko. Tällöin $G \subseteq \Gamma^*$, jos $G \subseteq \Gamma(G)$.*

Todistus. Todistus seuraa suoraan suurimman kiintopisteen Γ^* määritelmästä

$$\Gamma^* = \bigcup\{b \mid b \text{ on joukko ja } b \subseteq \Gamma(b)\}.$$

□

7.2 Korekursio

Tässä aliluvussa siirrytään korekursion määrittelyyn. Tätä varten halutaan käsitellä tasaisia operaattoreita jonkin kategorian endofunktoreina. Muodostetaan ensiksi siis eräs kategoria C.

Asetetaan kategorian C objekteiksi kolmikot (a, X, π), missä a on luokka (ei välttämättä aito), $X \subseteq \mathcal{U}$ sekä π on bijektiivinen korvaus $X \to a$.

Morfismit objektilta (a, X, π) objektille (b, Y, σ) ovat korvaukset $f\colon X \to b$. Tässä objektin (a, X, π) identtinen morfismi on π. Yhdistettyjen morfismien merkintään käytetään symbolia $\cdot$, jotta tämä voidaan erottaa normaalista kuvausten yhdistämisestä. Jos siis $f\colon (a, X, \pi) \to (b, Y, \sigma)$ ja $g\colon (b, Y, \sigma) \to (c, Z, \tau)$ ovat morfismeja, niin määritellään yhdistetyksi morfismiksi $g \cdot f\colon (a, X, \pi) \to (c, Z, \tau)$ korvaus $g \circ \sigma^{-1} \circ f$. Näiden määritelmien vaatimukset kategoriateorian suhteen on yksinkertaista todistaa.

Tämän lisäksi tullaan tutkimaan myös luokkien kategoriaa L ja joukkojen kategoriaa J, joiden objektit ovat vastaavasti luokat ja joukot sekä morfismit ovat objekteihin luonnollisesti rajoitetut joukkopohjaiset operaattorit.

Kategorian C endofunktorien sijaan tarkastellaan tämän tiettyjen osakategorioiden endofunktoreita, joita kutsutaan osittaisiksi endofunktoreiksi.

Määritelmä 7.10. Kategorian C *osittainen endofunktori* on objektien ja morfismien operaatio Γ, joka säilyttää seuraavassa mielessä melkein kaikki yhdisteet.

Olkoon Z joukko. Olkoon tällöin C_Z kategorian C täysi osakategoria, missä objekteille (a, X, π) pätee $X \cap Z = \emptyset$. Tällöin osittainen endofunktori on pari (Γ, Z), missä Z on joukko ja Γ on osakategorian C_Z endofunktori.

Huomautetaan, että jos (Γ, Z) ja (Δ, Y) ovat osittaisia endofunktoreita, niin myös $(\Delta \circ \Gamma, Y \cup Z)$ on osittainen endofunktori.

Lisäksi mikä tahansa tasainen operaattori Γ voidaan muuntaa osittaiseksi endofunktoriksi. Valitaan joukko Z, jolle jos $X \subseteq \mathcal{U}$ ja $X \cap Z = \emptyset$, niin X on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen. Tämä voidaan tehdä, koska melkein kaikki atomit ovat hyvin uusia operaattorin suhteen.

Itse asiassa siis $Z = X_\Gamma$ määritelmän 7.3 kontekstissa. Objekteille $(a, X, \pi) \in \mathsf{C}_Z$ määritellään $\Gamma(a, X, \pi) = (\Gamma(a), \hat{X}, \hat{\pi})$, missä $\hat{X} = \{\mathsf{new}(a', Z) \mid a' \in \Gamma(X)\}$ ja $\hat{\pi}(\mathsf{new}(a', Z)) = [\pi]_{\Gamma(X)}(a')$.

Morfismeille $f\colon (a, X, \pi) \to (b, Y, \sigma)$ taas määritellään $\Gamma(f)\colon \Gamma(a, X, \pi) \to \Gamma(b, Y, \sigma)$, missä $\Gamma(f) = [f]_{\Gamma(X)} \circ [\pi]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ \hat{\pi}$.

Tässä huomataan, että Γ säilyttää identiteetin sekä yhdisteen.

Seuraavaksi tarvitaan vielä algebrojen käsitettä tarkasteltaville objekteille.

Määritelmä 7.11. Olkoon (Γ, Z) kategorian C osittainen endofunktori ja (a, X, π) osakategorian C_Z objekti. Tällöin $f\colon (\Gamma(a), \hat{X}, \hat{\pi}) \to (a, X, \pi)$ on osittaisen endofunktorin (Γ, Z) *algebra*. Vastaavasti $f\colon (a, X, \pi) \to (\Gamma(a), \hat{X}, \hat{\pi})$ on osittaisen endofunktorin (Γ, Z) *koalgebra*.

Seuraavaksi halutaan yhdistää pienimpien ja suurimpien kiintopisteiden käsite näihin määritelmiin. Oletetaan tätä varten, että Γ on tasaisesta operaattorista muunnettu osittainen endofunktori. Siihen halutaan liittää erityinen algebra sekä koalgebra, jotka vastaavat tasaisen operaattorin pienimpiä ja suurimpia kiintopisteitä Γ_* ja Γ^*.

Asetetaan ensin $X = \{\mathsf{new}(a, Z) \mid a \in \Gamma_*\}$ sekä $\pi\colon X \to \Gamma_*$, jolle $\pi(\mathsf{new}(a, Z)) = a$. Tällöin merkitään algebraa $\hat{\pi}\colon (\Gamma_*, \hat{X}, \hat{\pi}) \to (\Gamma_*, X, \pi)$ yksinkertaisemmin Γ_*. Tämä toimii erityisenä algebrana.

Vastaavasti määritellään erityiseksi koalgebraksi

$$\pi\colon (\Gamma^*, X, \pi) \to (\Gamma^*, \hat{X}, \hat{\pi}),$$

missä $X = \{\mathsf{new}(a, Z) \mid a \in \Gamma^*\}$ sekä $\pi\colon X \to \Gamma^*$ kuvaus, jolle $\pi(\mathsf{new}(a, Z)) = a$. Merkitään tätä erityistä koalgebraa myös yksinkertaisemmin Γ^*.

Voidaan osoittaa, että käsiteltäessä kategoriaa, jonka objekteina ovat algebrat kategorian C_Z suhteen, Γ_* on alkuobjekti sekä Γ^* on loppuobjekti. Keskitytään edelleen vain koalgebraan liittyvään puoleen.

Lause 7.12. *Olkoon Γ tasainen operaattori. Tällöin koalgebra Γ^* on loppuobjekti kategoriassa, jonka objektit ovat osittaisen endofunktorin (Γ, Z) koalgebrat sekä morfismit koalgebrojen $f\colon A \to \Gamma(A)$ ja $g\colon B \to \Gamma(B)$ välillä olevat sellaiset kategorian C morfismit $s\colon A \to B$, joille pätee $\Gamma(s) \cdot f = g \cdot s$.*

Todistus. Olkoon $f\colon (b, Y, \sigma) \to (\Gamma(b), \hat{Y}, \hat{\sigma})$ koalgebra sekä asetetaan tämän avulla kuvaus $e = [\sigma]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ f\colon Y \to \Gamma(Y)$.

Yleisen antisäännöllisyysaksiooman avulla saadaan yksikäsitteinen kuvaus $s\colon Y \to \Gamma^*$, jolle $s = [s]_{\Gamma(Y)} \circ e = [s]_{\Gamma(Y)} \circ [\sigma]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ f$.

Tutkitaan nimittäin yhtälöryhmää $\mathcal{E} = (X, C, e')$, joka on muuten kuten joukon $\mathrm{Im}(e)$ kanoninen yhtälöryhmä, paitsi jokaiselle $x \in Y$ korvataan yhtälöryhmän tuntematon $e(x)$ atomilla x sekä tuntemattomien joukossa että kuvaukseen liittyen, ja poistetaan x vakioiden joukosta. Tämä on edelleen yhtälöryhmä.

Yleisen antisäännöllisyysaksiooman nojalla yhtälöryhmällä $\mathcal{E}$ on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu s'. Tämän rajoittuma $s' \upharpoonright Y = s$ toteuttaa nyt annetun vaatimukset yhtälöryhmän ratkaisun määritelmän nojalla. Se on myös yksikäsitteinen tällainen kuvaus, sillä muuten ratkaisu s' ei myöskään olisi yksikäsitteinen.

Täten saadaan kategorian C morfismi $s\colon (b, Y, \sigma) \to \Gamma^* = (\Gamma^*, X, \pi)$. Lisäksi käyttämällä operaattoria Γ funktorina saadaan morfismi $\Gamma(s)\colon (\Gamma(b), \hat{Y}, \hat{\sigma}) \to (\Gamma^*, \hat{X}, \hat{\pi})$.

Nyt koska Y on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen, niin $\Gamma(s) = [s]_{\Gamma(Y)} \circ [\sigma]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ \hat{\sigma}$. Tämä kuitenkin määrää koalgebrojen morfismin:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) \cdot f &= [s]_{\Gamma(Y)} \circ [\sigma]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ \hat{\sigma} \circ \hat{\sigma}^{-1} \circ f \\
&= [s]_{\Gamma(Y)} \circ [\sigma]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ f \\
&= s \\
&= \pi \circ \pi^{-1} \circ s \\
&= \pi \cdot s
\end{aligned}
$$

Kuten ennen lausetta todettiin, $\pi\colon (\Gamma^*, X, \pi) \to (\Gamma^*, \hat{X}, \hat{\pi})$ on tutkittava koalgebra. Täten s on koalgebramorfismi $f \to \pi$.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että mille tahansa morfisimille $t\colon (b, Y, \sigma) \to \Gamma^*$ pätee, että joukkojen kuvauksena $t\colon Y \to \Gamma^*$ saadaan $t(x) = [t](e(x))$, jos ja vain jos $\Gamma(t) \cdot f = \pi \cdot t$. Yleisen antisäännöllisyysaksiooman nojalla tällaiset korvaukset ovat yksikäsitteisiä, joten myös s on se yksikäsitteinen koalgebramorfismi, jolle $\Gamma(s) \cdot f = \pi \cdot s$.

Muita koalgebramorfismeja objektille Γ^* ei siis ole, joten kyseessä on loppuobjekti. □

Annetaan joitakin tärkeitä määritelmiä seuraavia lauseita varten, jotka liittyvät kuvausten toimintaan alkualkioiden kanssa. Aloitetaan korvausten suhteen tietyllä tavalla käyttäytyvistä funktoreista.

Määritelmä 7.13. Endofunktori Γ luokkien tai joukkojen kategorialle on *kuvausuniformi*, jos on olemassa luokka $C \subseteq \mathcal{U}$, jolle $\mathcal{U} \setminus C$ on joukko sekä seuraava ehto pätee: kun $s\colon X \to b$ on korvaus ja $X \subseteq C$, niin $\Gamma(s) = [s]_{\Gamma(X)}$.

Seuraavaksi annetaan operaattorin Γ suhteen tietyssä mielessä hyvin käyttäytyville korvauksille määritelmä.

Määritelmä 7.14. Olkoon C joukko tai luokka, ja olkoon Γ operaattori. Tällöin Γ-*notaatioskeema* joukolle tai luokalle C on bijektio $\mathrm{den}\colon X \to C$, missä X on joukko tai luokka atomeja, jotka ovat hyvin uusia operaattorin Γ suhteen.

Määritellään vielä koalgebroja hieman erilaisessa mielessä.

Määritelmä 7.15. Olkoon Γ operaattori ja C joukko tai luokka. Tällöin $f\colon C \to \Gamma(C)$ on Γ-koalgebra.

Palataan vielä notaatioskeemoihin ja todistetaan seuraavaksi, että tasaisilla operaattoreilla on aina olemassa notaatioskeema.

Lause 7.16. *Olkoon Γ tasainen operaattori ja C jokin joukko tai luokka. Tällöin on olemassa sellainen Γ-notaatioskeema $\mathrm{den}\colon X \to C$, että $[\mathrm{den}](X) = C$.*

Todistus. Koska Γ on tasainen, niin melkein kaikki atomit ovat sen suhteen hyvin uusia. On siis olemassa joukko atomeja X_Γ, jonka komplementti $\mathcal{U} \setminus X_\Gamma = Y$ on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen. Määritellään sitten kuvaus $f\colon C \to \mathcal{U}$ asettamalla $f(c) = \mathsf{new}(c, X_\Gamma)$. Tällöin määritelmän mukaan $f(c) \in Y$ sekä f on injektiivinen. Merkitään $f[C] = X$. Nyt kun $f^{-1}\colon X \to C$ on kuvauksen f käänteiskuvaus, huomataan tämän olevan Γ-notaatioskeema halutulle joukolle tai luokalle. Lisäksi $[f^{-1}](X) = C$, joten voidaan asettaa $f^{-1} = \mathrm{den}$. □

Nyt voidaan siirtyä etsimään yhteyttä monotonisten operaattoreiden ja osittaisten endofunktorien välillä. Todistetaan ensin tekninen tulos näiden välillä.

Lause 7.17. *Olkoon Γ joukkojen operaatio ja C aito luokka atomeja. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

- Γ *on monotoninen ja jokainen luokan C osajoukko on hyvin uusi sen suhteen.*
- Γ *on yksikäsitteisen funktorin objektiosa, jonka morfismiosa toteuttaa seuraavan ehdon: jos $X \subseteq C$ on joukko atomeja ja $s\colon X \to b$ on korvaus, niin $\Gamma(s)\colon \Gamma(X) \to \Gamma(b)$ toteuttaa yhtälön $\Gamma(s) = [s]_{\Gamma(X)}$.*

Todistus. Aloitetaan olettamalla ensimmäinen kohta. Muunnetaan operaattori funktoriksi seuraavalla tavalla. Kun $f\colon a \to b$ on kuvaus, olkoon $d\colon X \to a$ bijektio jollakin $X \subseteq C$. Määritellään tällöin

$$\Gamma(f) = [f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(X)}.$$

Tässä $[d]_{\Gamma(X)}$ on kääntyvä, sillä X on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen. Tarkistetaan vielä, että määritelty kuvaus todellakin on kuvaus $\Gamma(a) \to \Gamma(b)$. Merkitään $\mathrm{Im}([f \circ d]_{\Gamma(X)}) = E$. Ensin huomataan, että $[f \circ d]_{\Gamma(X)}(X) \subseteq b$. Koska lisäksi X on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen, saadaan $E = [f \circ d](\Gamma(X)) = \Gamma([f \circ d](X))$. Monotonisuuden nojalla siis $E \subseteq \Gamma(b)$. Täten siis $\Gamma(f)\colon \Gamma(a) \to \Gamma(b)$.

Nyt tapauksessa $a = X$ saadaan väitteen tapaus $s\colon X \to b$, jolloin

$$\begin{aligned}\Gamma(s)(\Gamma(x)) &= [s \circ d]_{\Gamma(X)}([d]^{-1}_{\Gamma(X)}(\Gamma(x))) \\ &= [s \circ d]_{\Gamma(X)}(\Gamma(d^{-1}(x))) \\ &= \Gamma(s(x)) \\ &= [s]_{\Gamma(X)}(\Gamma(x))\end{aligned}$$

kaikilla $\Gamma(x) \in \Gamma(X)$. Täten $\Gamma(s) = [s]_{\Gamma(X)}$. Lisäksi jos $f = \mathrm{id}_a$, niin voidaan todistaa $\Gamma(f) = \mathrm{id}_{\Gamma(a)}$. Funktori siis säilyttää identiteetin.

Onko kuitenkin Γ riippuvainen joukon X ja korvauksen d valinnasta? Olkoon $e\colon Y \to a$ bijektio, missä $Y \subseteq C$. Muodostetaan uusi bijektio $Y \to X$ asettamalla $\alpha = d^{-1} \circ e$. Pystytään todistamaan, että $[d]_{\Gamma(X)} \circ [\alpha]_{\Gamma(Y)} = [e]_{\Gamma(Y)}$ sekä $[f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [\alpha]_{\Gamma(Y)} = [f \circ e]_{\Gamma(Y)}$.

Ensimmäisessä näistä todistuksista tutkitaan joukkojen $a \in \Gamma(Y)$ transitiivisten sulkeumien atomeja c. Jos $c \in Y$, niin $[e](c) = e(c) = d(\alpha(c)) = [d]([\alpha](c)) = ([d] \circ [\alpha])(c)$. Jos taas $c \notin Y$, tiedetään myös, että $c \notin X$, sillä tämä on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen. Täten $[e](c) = c = [\alpha](c) = ([d] \circ [\alpha])(c)$. Transitiivisen sulkeuman joukoille a taas pystytään muodostamaan bisimulaatio $[e](a) \sim ([d] \circ [\alpha])(a)$, joten lopulta saadaan, että $[e](y) = ([d] \circ [\alpha])(y)$ kaikilla $y \in \Gamma(Y)$. Tässä bisimulaation määritelmää on atomien kohdalla täydennettävä vaatimalla, että jos $x \sim y$ ja jokin atomi $c \in x$, niin myös $c \in y$, sekä toisinpäin. Toinen todistus saadaan vastaavasti. Täten siis

$$\begin{aligned}[f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(X)} &= [f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [\alpha]_{\Gamma(Y)} \circ [e]^{-1}_{\Gamma(Y)} \\ &= [f \circ e]_{\Gamma(Y)} \circ [e]^{-1}_{\Gamma(Y)}.\end{aligned}$$

Viimein todistetaan, että Γ säilyttää yhdisteet. Olkoot siis $f\colon a \to b$ ja $g\colon b \to c$ kuvauksia. Merkitään näiden vastaavia bijektioita luokan C osajoukoilta $d\colon X \to a$ ja $e\colon Y \to b$. Tällöin $\Gamma(f) = [f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(X)}$ ja $\Gamma(g) = [g \circ e]_{\Gamma(Y)} \circ [e]^{-1}_{\Gamma(Y)}$. Vastaavasti kuin aiemmassa kohdassa saadaan $[f \circ d]_{\Gamma(X)} = [e]_{\Gamma(Y)} \circ [e^{-1} \circ f \circ d]_{\Gamma(X)}$. Samoin myös $[g \circ e]_{\Gamma(Y)} \circ [e^{-1} \circ f \circ d]_{\Gamma(X)} =$

$[g \circ f \circ d]_{\Gamma(X)}$. Täten

$$\begin{aligned}\Gamma(g) \circ \Gamma(f) &= [g \circ e]_{\Gamma(Y)} \circ [e]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ [f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(X)} \\ &= [g \circ e]_{\Gamma(Y)} \circ [e]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ [e]_{\Gamma(Y)} \circ [e^{-1} \circ f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(X)} \\ &= [g \circ f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(X)} \\ &= \Gamma(g \circ f).\end{aligned}$$

Operaattori Γ on siis laajennettu funktoriksi, jolla $\Gamma(s) = [s]_{\Gamma(\mathrm{dom}(s))}$ kaikilla luokan C osajoukkojen korvauksilla s.

Oletetaan sitten, että toinen kohta pätee. Ensin tutkitaan, miten funktori Γ vaikuttaa johonkin morfisimiin $f\colon A \to B$. Apulauseen nojalla voidaan löytää jokin joukko $X \subseteq C$ ja bijektio $d\colon X \to A$, jolloin oletuksen ja funktoriaalisuuden nojalla $\Gamma(f) \circ [d]_{\Gamma(X)} = \Gamma(f) \circ \Gamma(d) = \Gamma(f \circ d) = \Gamma([f \circ d]_X) = [f \circ d]_{\Gamma(X)}$. Koska bijektiot ovat täsmälleen luokkien kategorian kääntyvät morfismit, niin saadaan, että $\Gamma(d)$ on bijektio. Täten voidaan kirjoittaa $\Gamma(f) = [f \circ d]_{\Gamma(X)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(X)}$. Jos f on inkluusio, niin huomataan, että myös $\Gamma(f)\colon \Gamma(A) \to \Gamma(B)$ on inkluusio. Täten Γ on monotoninen.

Vielä on todistettava, että C on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen. Osoitetaan tätä varten, että jos $s\colon X \to A$, missä $X \subseteq C$, on korvaus, niin $\Gamma([s]_a) = [s]_{\Gamma(a)}$ millä tahansa joukolla a. Olkoon $d\colon Y \to a$ bijektio, missä $Y \subseteq C$. Tällöin aikaisemman nojalla $\Gamma([s]_a) \circ [d]_{\Gamma(Y)} = [[s]_a \circ d]_{\Gamma(Y)}$. Seuraavaksi huomataan, että $[[s]_a \circ d]_{\Gamma(Y)} = [s]_{\Gamma(a)} \circ [d]_{\Gamma(Y)}$. Saadaan nimittäin, että $\Gamma([s]_a) \circ [d]_{\Gamma(Y)} = [[s]_a \circ d]_{\Gamma(Y)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ [d]_{\Gamma(Y)} = [[s]_a \circ d]_{\Gamma(Y)}$. Lisäksi koska $([s] \circ [d])(c) = [[s]_a \circ d](c)$ kaikilla $c \in Y$ ja $c \notin C$, niin on myös oltava $([s] \circ [d])(b) = [[s]_a \circ d](b)$ kaikilla $b \in \Gamma(Y)$. Täten saadaan, että $\Gamma([s]_a) \circ [d]_{\Gamma(Y)} = [s]_{\Gamma(a)} \circ [d]_{\Gamma(Y)}$.

Viimein koska $[d]_{\Gamma(Y)}$ on kääntyvä, saadaan $\Gamma([s]_a) = [s]_{\Gamma(a)}$. Tästä seuraa, että $\Gamma([s](a)) = [s](\Gamma(a))$. Lisäksi jos $[s]_a$ on bijektio, niin myös $[s]_{\Gamma(a)}$ on bijektio, sillä endofunktori säilytti bijektiot. Täten C on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen. □

Todistetussa lauseessa siis muunnettiin ensimmäisessä kohdassa operaattori Γ joukkojen kategorian J endofunktoriksi, sekä toisessa kohdassa muunnettiin funktori tietynlaiseksi operaattoriksi. Todistetaan vielä aputulos joukkojen kategorian endofunktorien laajentamisesta.

Apulause 7.18. Olkoon Γ joukkojen kategorian joukkopohjainen monotoninen endofunktori. Tällöin Γ voidaan laajentaa luokkien kategorian joukkopohjaiseksi monotoniseksi endofunktoriksi Δ yksikäsitteisesti. Jos Γ on lisäksi kuvausuniformi, niin samoin on Δ.

Todistus. Olkoon C luokka. Asetetaan tällöin $\Delta(C) = \bigcup\{\Gamma(a) \mid a \subseteq C\}$. Tämä voidaan helposti osoittaa monotoniseksi luokkien suhteen. Olkoon seuraavaksi $f\colon C \to D$, ja asetetaan $\Delta(f) = \{\Gamma(f_a) \mid a \subseteq C$ ja f_a on kuvauksen f rajoittuma joukolle $a\}$. Tämä on hyvin määritelty, sillä funktorin Γ funktoriaalisuuden ja monotonisuuden nojalla jos $a \subseteq b$, niin $\Gamma(f_a) = \Gamma((f_b \circ\ i(a,b)) = \Gamma(f_b) \circ i(\Gamma(a), \Gamma(b))$. Sivuutetaan yksikäsitteisyyden ja joukkopohjaisuuden todistukset, jotka ovat yksinkertaisia.

Jos viimein Γ on kuvausuniformi, niin huomataan, että $[s]_C = \bigcup\{[s]_a \mid a \subseteq C\}$, joten $\Delta(s) = \{\Gamma(s_a) \mid a \subseteq C\} = \{[s]_a \mid a \subseteq C\} = [s]_C$, kun s on korvaus määrittelyjoukkonaan jokin kuvausuniformiuden sallima luokka C. Täten myös Δ on kuvausuniformi. □

Lopulta voidaan siirtyä todistamaan etsitty vastaavuus tasaisten operaattoreiden ja endofuktorien välillä.

Lause 7.19. *Jos Γ on tasainen operaattori, niin se on jonkin luokkien kategorian endofunktorin objektiosa, joka on aito ja kuvausuniformi. Vastaavasti jos Γ on luokkien kategorian aito ja kuvausuniformi endofunktori, niin joukkojen operaattorina se on tasainen.*

Todistus. Olkoon Γ tasainen operaattori. Edellisen apulauseen nojalla riittää laajentaa se joukkojen kategorian kuvausuniformiksi ja standardiksi endofunktoriksi. Nyt Γ toteuttaa lauseen 7.17 ensimmäisen kohdan luokalla $C = \mathcal{U} \setminus X_\Gamma$. Täten Γ laajenee kuvausunifomiksi ja standardiksi joukkojen kategorian endofunktoriksi.

Toinen suunta on suora seuraus lauseen 7.17 toisesta suunnasta. □

Tämän tuloksen jälkeen päästään takaisin korekursion todistamiseen. Tämä voidaan osoittaa sekä luokkien kategorian endofunktoreille että tasaisille operaattoreille.

Määritellään Γ-koalgebrojen kategoria, kun Γ on luokan L endofunktori. Tämän objekteja ovat operaatiot $f\colon C \to \Gamma(C)$, missä C on jokin luokka tai joukko, sekä morfismit objektien f ja $g\colon D \to \Gamma(D)$ välillä operaatioita $s\colon C \to D$, joille pätee $\Gamma(s) \circ f = g \circ s$. Tässä huomataan, että Γ-koalgebra $\mathrm{id}_{\Gamma^*}\colon \Gamma^* \to \Gamma^*$ on erityinen, sillä tarkastelussa on kiintopiste. Merkitään tätä $\mathrm{id}_{\Gamma^*} = \Gamma^*$ ja osoitetaan sen olevan kategorian loppuobjekti seuraavassa lauseessa.

Lause 7.20. *Olkoon Γ kategorian L kuvausuniformi ja aito endofunktori. Tällöin Γ-koalgebra Γ^* on loppuobjekti Γ-koalgebrojen kategoriassa. Tässä L on luokkien kategoria, morfismeinaan joukkopohjaiset operaatiot.*

Todistus. Olkoon $f\colon C \to \Gamma(C)$ Γ-koalgebra operaattorille Γ. Nyt lauseen 7.17 nojalla Γ on joukkojen operaattorina on tasainen. Olkoon lisäksi $\sigma\colon Y \to C$ Γ-notaatioskeema joukolle tai luokalle C. Koska Γ on tasainen, voidaan tämä muuntaa osittaiseksi endofunktoriksi (Γ, X_Γ). Tällöin saadaan osittaisen endofunktorin (Γ, X_Γ) koalgebra yhdisteellä $f \circ \sigma\colon (C, Y, \sigma) \to (\Gamma(C), \hat{Y}, \hat{\sigma})$. Nyt lauseen 7.12 perusteella koalgebra $\Gamma^* = \pi\colon (\Gamma^*, X, \pi) \to (\Gamma^*, \hat{X}, \hat{\pi})$ on loppuobjekti, joten on olemassa yksikäsitteinen morfismi $s\colon (C, Y, \sigma) \to \Gamma^*$ koalgebrojen $f \circ \sigma$ ja Γ^* välillä.

Nyt on kuitenkin oltava $\Gamma(s) \cdot (f \circ \sigma) = \pi \cdot s$. Täten $[s]_{\Gamma(Y)} \circ [\sigma]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ f \circ \sigma = s$. Tällöin kuvausuniformiuden ja funktoriaalisuuden nojalla $\Gamma(s \circ \sigma^{-1}) \circ f = [s]_{\Gamma(Y)} \circ [\sigma]^{-1}_{\Gamma(Y)} \circ f = s \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}_{\Gamma^*} \circ (s \circ \sigma^{-1})$. Siis $s \circ \sigma^{-1}$ on Γ-koalgebrojen morfismi Γ-koalgebrasta f Γ-koalgebraan id_{Γ^*}. Tämän morfismin yksikäsitteisyyden todistus osoitetaan vastaavasti morfismin s yksikäsitteisyyden avulla. Täten Γ-koalgebra Γ^* on loppuobjekti Γ-koalgebrojen kategoriassa. □

Tämä lause liittyy endofunktorien korekursiolauseeseen, jota ei kuitenkaan todisteta tässä tutkielmassa. Sen sijaan todistetaan tasaisten operaattorien korekursiolause. Tätä varten annetaan ensin tarkka määritelmä siitä, mitä tällä korekursiolla tarkoitetaan.

Määritelmä 7.21. Olkoon Γ tasainen operaattori, $f\colon C \to \Gamma(C)$ jokin Γ-koalgebra sekä $\mathrm{den}\colon X \to C$ jokin Γ-notaatioskeema. Tällöin kuvauksen $\varphi\colon C \to \Gamma^*$ sanotaan toteuttavan Γ-*korekursion* kuvaukselle f skeeman den suhteen, jos pätee $\varphi = [\varphi \circ \mathrm{den}]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ f$.

Nyt voidaan todistaa korekursion toteuttavien kuvausten olemassaolo, ja vieläpä riippumatta valittavista atomeista ja notaatioskeemoista.

Lause 7.22. *Olkoon Γ tasainen operaattori ja $f\colon C \to \Gamma(C)$, missä C on jokin luokka tai joukko. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $\varphi\colon C \to \Gamma^*$, jolle φ toteuttaa Γ-korekursion kuvaukselle f jonkin Γ-notaatioskeeman arvojoukkonaan C suhteen ($\varphi = [\varphi \circ \mathrm{den}]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ f$). Itse asiassa φ toteuttaa Γ-korekursion kuvaukselle f minkä tahansa Γ-notaatioskeeman arvojoukkonaan C suhteen.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että on olemassa kuvaus $\varphi\colon C \to \Gamma^*$, joka toteuttaa Γ-korekursion kuvaukselle f notaation den suhteen.

Tutkitaan kategoriaa C_Z, missä $\mathcal{U} \setminus Z$ on hyvin uusi operaattorin Γ suhteen. Tällöin on olemassa Γ-koalgebra $f \circ \mathrm{den}\colon (C, X, \mathrm{den}) \to (\Gamma(C), \hat{X}, \widehat{\mathrm{den}})$. Lauseen 7.12 perusteella on olemassa yksikäsitteinen morfismi $s\colon (C, X, \mathrm{den}) \to \Gamma^*$, jolle $s = \Gamma(s) \cdot (f \circ \mathrm{den})$. Nyt $[s]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ f \circ \mathrm{den} = s$. Toisin sanoen siis $[s]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ f = s \circ \mathrm{den}^{-1}$. Asettamalla $\varphi = s \circ \mathrm{den}^{-1}$ vaatimus toteutuu.

Seuraavaksi on osoitettava tämän kuvauksen yksikäsitteisyys. Oletetaan, että kuvaus ψ toteuttaa myös ehdon. Tällöin olisi olemassa koalgebrojen morfismi $\psi \circ \mathrm{den}\colon (C, X, \mathrm{den}) \to \Gamma^*$. Lopullisuuden nojalla saadaan $\psi \circ \mathrm{den} = \varphi \circ \mathrm{den}$. Lopulta koska den on kääntyvä, pätee $\psi = \varphi$.

Lopulta osoitetaan, että φ toteuttaa ehdon minkä tahansa Γ-notaatioskeeman arvojoukkonaan C suhteen. Olkoon täten $d\colon Y \to C$ tällainen skeema. Tällöin $[\varphi \circ d]_{\Gamma(Y)} \circ [d]^{-1}_{\Gamma(Y)} = [\varphi \circ \mathrm{den}]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)}$. Tämä seuraa lauseesta 7.12.

Täten ehto päteen, kun Y korvaa joukon X ja d korvaa notaatioskeeman den. $\square$

Esitetään vielä esimerkki korekursiosta virroille käyttäen yleisempää korekursion määritelmää.

Esimerkki 7.23. Jatketaan tasaisen operaattorin $\Gamma(b) = A \times b$ tutkimista. Lauseen 7.8 nojalla tällä on olemassa suurin kiintopiste Γ^*, ja itse asiassa lauseen 6.1 nojalla on oltava $\Gamma^* = A^\infty$.

Annetaan esimerkki myös itse korekursiosta toteuttamalla kuvauksen $g\colon A \to A$ nosto kuvaukselle $G\colon A^\infty \to A^\infty$, missä $G(a, b) = (g(a), G(b))$. Tätä varten täytyy asetettaa $C = A^\infty$ ja $f\colon C \to \Gamma(C)$, missä $f(a, b) = (g(a), b)$. Nyt lauseen perusteella on olemassa yksikäsitteinen $\varphi\colon C \to A^\infty$, jolle $\varphi = [\varphi \circ \mathrm{den}]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ f$. Tässä $\mathrm{den}\colon X \to C$ on jokin Γ-notaatioskeema. Siis jos $a \in A$ ja $b \in A^\infty$, niin

$$\begin{aligned}
\varphi(a, b) &= ([\varphi \circ \mathrm{den}]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ f)(a, b) \\
&= ([\varphi \circ \mathrm{den}]_{\Gamma(X)} \circ [\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)})(g(a), b) \\
&= [\varphi \circ \mathrm{den}]_{\Gamma(X)}(g(a), x_b) \\
&= (g(a), (\varphi \circ \mathrm{den})(x_b)) = (g(a), \varphi(b))
\end{aligned}$$

Tässä $x_b \in X$ on se atomi, jolle $\mathrm{den}(x_b) = b$. Nyt $[\mathrm{den}]^{-1}_{\Gamma(X)})(g(a), b) = (g(a), x_b)$, sillä $[\mathrm{den}](g(a), x_b) = (g(a), \mathrm{den}(x_b)) = (g(a), b)$. Lisäksi $[\mathrm{den}](g(a)) = g(a)$ ja $[\varphi \circ \mathrm{den}](g(a)) = g(a)$, sillä X on Γ-notaatioskeeman määritelmän nojalla hyvin uusi operaattorin Γ suhteen.

Lähteet

[1] Aczel, P. *Non-well-founded sets.* Stanford University, Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, 1988.

[2] Awodey, S. *Category Theory.* Oxford: OUP Oxford; 2010 [viitattu 2022 Apr 3]. (Oxford Logic Guides; vol. 2nd ed). Saatavilla: https://search-ebscohost-com.libproxy.tuni.fi/login.aspx?direct=true&AuthType=cookie,ip,uid&db=e000xww&AN=375073&site=ehost-live&scope=site

[3] Barwise, J. ja Moss, L. *Vicious circles. On the mathematics of non-wellfounded phenomena.* CSLI Publications, Stanford, CA, 1996.

[4] Danner, M. ja Moss, L. *On the Foundations of Corecursion.* Logic Journal of the IGPL 5 (1997).

[5] Hyttinen, T. ja Pauna, M. *On non-wellfounded sets as fixed points of substitutions.* Notre Dame J. Formal Logic 42 (2001).

[6] Jech, T. *Set theory.* kolmas laitos, uusittu ja laajennettu. Berlin: Springer, 2003.

[7] Takashi, N., Tomoko, O. ja Tzouvaras, A. *Classification of non-well-founded sets and an application.* Mathematical Logic Quarterly 49 (2003).