Jonne Karru

WHITEHEADIN ONGELMA JA MARTININ AKSIOOMA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2022

Tiivistelmä

Jonne Karru: Whiteheadin ongelma ja Martinin aksiooma
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2022

Tässä tutkielmassa osoitetaan päätuloksena, että kun aksioomasysteemiin ZFC lisätään Martinin aksiooma sekä kontinuumihypoteesin negaatio, niin Whiteheadin ongelmaan "Onko jokainen Whiteheadin ryhmä vapaa?" saadaan kielteinen vastaus tässä systeemissä. Whiteheadin ryhmät ovat sellaisia Abelin ryhmiä A, että Ext(A,Z)=0, missä 0 on triviaali ryhmä.

Tutkielman alussa esitellään joukko-opillisia perustietoja Martinin aksiooman myötä sekä vapaiden ja torsiottomien Abelin ryhmien ominaisuuksia. Tämän jälkeen esitellään homologisen algebran keinoin Whiteheadin ryhmien ominaisuuksia sekä todistetaan myöntävä vastaus Whiteheadin ongelmaan numeroituville Whiteheadin ryhmille systeemissä ZFC. Lopuksi osoitetaan, että lisäämällä Martinin aksiooma ja kontinuumihypoteesin negaatio systeemiin ZFC saadaan kieltävä vastaus Whiteheadin ongelmaan eli on olemassa epävapaa Whiteheadin ryhmä. Loppupohdinnoissa mainitaan esimerkiksi, että tutkielman päätulosta voidaan vahvistaa. Päätuloksen vahvistuksessa osoitetaan, että jokaisella ylinumeroituvalla kardinaalilla on olemassa epävapaa W-ryhmä, jonka mahtavuus vastaa tätä ylinumeroituvaa kardinaalia.

Avainsanat: Vapaa Abelin ryhmä, Abelin ryhmä, Whiteheadin ongelma, Martinin aksiooma, ZFC

Sisältö

1 Johdanto

Bertrand Russell osoitti 1900-luvun alussa, että naiivi joukko-oppi täysine joukkoabstraktioineen johtaa ristiriitaan. Myös Ernst Zermelo oli osoittanut tämän riippumatta Russellista jo vuonna 1899. Ristiriidan kiihdyttämänä kehitettiin joukko-oppia, joka olisi ristiriidaton. Tämä johti Zermelon aksiomatisoimaan joukko-opin. Lopulta kehitys johti aksiomaattiseen Zermelon ja Fraenkelin joukko-oppiin ZF. Muista joukko-opin ZF aksioomista riippumaton valinta-aksiooma lisättynä ZF-joukko-oppiin tuotti modernin matematiikan suosituimman perustan matematiikalle: aksioomasysteemin ZFC [2]. Tässä pro gradussa tarkastellaan myös systeemiä ZFC + MA + $\neg$ CH, missä tavanomaisiin systeemin ZFC aksioomiin on lisätty Martinin aksiooma MA sekä kielteinen vastaus kontinuumihypoteesiin $\neg$ CH.

Kurt Gödel murskasi toiveen varmasti ristiriidattomasta perustasta matematiikalle, sillä Gödelin toisen epätäydellisyyslauseen nojalla systeemissä ZFC ei voida todistaa systeemin ZFC ristiriidattomuutta. Tämän pro gradu -tutkielman kannalta Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause on kuitenkin tähdellisempi. Sen nojalla systeemissä ZFC voidaan esittää väittämiä, joita ei kuitenkaan voida todistaa oikeaksi eikä vääräksi eli ne ovat riippumattomia systeemistä ZFC. Kenties kuuluisin systeemistä ZFC riippumattomaksi todistettu väite on kontinuumihypoteesi CH.

Matematiikan perusteiden parissa myös työskennelleen Alfred North Whiteheadin veljenpoika John Henry Constantine Whitehead esitti 1950-luvulla Abelin ryhmiin liittyvän nimikko-ongelmansa Whiteheadin ongelman homologisen algebran termein: “Jos A on sellainen Abelin ryhmä, että $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$, niin onko A vapaa?”. Karl Stein osoitti vuonna 1951 ongelmaan myöntävän vastauksen numeroituvien Abelin ryhmien tapauksessa. Ylinumeroituvien Abelin ryhmien tapauksessa tapahtui myös edistystä, mutta ongelmaa ei kuitenkaan saatu ratkaistua. Vuonna 1974 Saharon Shelah osoitti, että Whiteheadin ongelma on riippumaton systeemistä ZFC [7].

Shelah osoitti, että lisäämällä systeemistä ZFC riippumattoman konstruktioaksiooman V = L systeemiin ZFC voidaan osoittaa, että jos $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$, niin A on vapaa. Toisaalta Shelah osoitti myös, että systeemissä ZFC + MA + $\neg$ CH on epävapaita Abelin ryhmiä, joille $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$. Tässä pro gradussa esitetään päätuloksena tämä systeemiä ZFC + MA + $\neg$ CH käyttävä osuus Shelahin todistuksesta, tosin esitys perustuu helpommin lähestyttävään Paul Eklofin artikkeliin Shelahin tuloksesta [1].

Luvussa 2 esitellään Martinin aksiooman esittämiseen tarvittavia esitietoja sekä valinta-aksiooman kanssa yhtäpitävä lause, joka tunnetaan Zornin lemmana. Luvussa 3 esitellään Martinin aksiooma sekä tutkitaan sen ominaisuuksia kahden lauseen myötä. Lisäksi esitetään käyttäen Martinin aksioomaa eräs Martinin aksiooman seuraus, jota käytetään tutkielman päätuloksen esittämisessä. Luvussa 4 siirrytään tutkielman algebran osuuteen käymällä läpi seuraavissa luvuissa tarvittavia vapaiden ja torsiottomien Abelin ryhmien ominaisuuksia.

Luvussa 5 aletaan käsittelemään tarkemmin Whiteheadin ongelmaa ja luvussa tarkastellaankin Whitehead-ryhmiä sekä niiden ominaisuuksia homologisen algebran menetelmin. Erityisesti annetaan täsmällinen määritelmä Whitehead-ryhmille ja osoitetaan se yhtäpitäväksi sen kanssa, että A on Whiteheadin ryhmä, kunhan $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$. Luvussa 6 osoitetaan päätuloksena, että jokainen numeroituva Whitehead-ryhmä on vapaa. Luvussa 7 alustetaan ensin pro gradun päätulosta muotoilemalla Chasen kriteeri. Lopuksi osoitetaan aputulosten myötä, että Martinin aksiooman ja kontinuumihypoteesin negaation alla on olemassa sellainen ylinumeroituva Whitehead-ryhmä, joka ei ole vapaa. Viimeisessä luvussa esitetään vielä lyhyesti loppupohdintoja sekä mainitaan mahdollisia yleistyksiä kahdelle tutkielmassa todistetulle väitteelle.

Päälähteenä tutkielman joukko-opin osuudessa on [4], algebran osuudessa [6] sekä Whitehead-ryhmien osuuksissa [1]. Lukijalta oletetaan perustiedot joukko-opista sekä ryhmäteoriasta. Esimerkiksi Tampereen yliopiston kurssit Joukko-oppi ja Algebra antavat vaadittavat perustiedot.

2 Joukko-oppia

Tässä luvussa alustetaan Martinin aksiooman määrittelyssä käytettäviä joukko-opin käsitteitä. Käsitteet liittyvät osittainjärjestettyihin joukkoihin, joiden määrittelystä aloitetaankin. Lopuksi esitetään myös vapaita Abelin ryhmiä käsiteltäessä tarvittava Zornin lemma todistushahmotelmineen. Määritelmät ja Zornin lemman muotoilu ovat lähteestä [4, s. 17, 49 ja 201–202].

Määritellään ensin järjestysrelaatiot tiukka osittainjärjestys, osittainjärjestys ja Zornin lemman muotoilussa käytettävä lineaarijärjestys. Seuraavassa luvussa muotoiltava Martinin aksiooma koskee osittainjärjestettyjä joukkoja, jotka määritellään myös seuraavaksi.

Määritelmä 2.1. Olkoon P epätyhjä joukko. Kaksipaikkainen joukon P relaatio $<$ on *tiukka osittainjärjestys*, mikäli

(i) $p \nless p$ jokaisella $p \in P$ ja

(ii) jos $p < q$ sekä $q < r$, niin $p < r$ aina, kun $p, q, r \in P$.

Lisäksi relaatio $\leq$, jolla pätee $p \leq q$ jos ja vain jos $p < q$ tai $p = q$, kun $p, q \in P$, on joukon P *osittainjärjestys*. Pari $(P, \leq)$ on *osittainjärjestetty joukko*, mikäli relaatio $\leq$ on joukon P osittainjärjestys. Jos joukon P tiukalle osittainjärjestykselle $<$ pätee lisäksi

(iii) $p < q$ tai $p = q$ tai $q < p$ jokaisella $p, q \in P$,

niin $<$ on joukon P *lineaarijärjestys*.

Huomataan, että joukon P osittainjärjestyksestä $\leq$ saadaan joukon P tiukka osittainjärjestys $<$ poistamalla relaatiosta $\leq$ parit (p, p), missä $p \in P$. Samoin tiukasta osittainjärjestyksestä $<$ voidaan muodostaa osittainjärjestys $\leq$ lisäämällä parit (p, p), missä $p \in P$, relaatioon $<$.

Havainnollistetaan osittainjärjestettyä joukkoa yksinkertaisella esimerkillä.

Esimerkki 2.2. Kun $n, m \in \mathbb{N}$, niin määritellään $n \leq m$, jos ja vain jos $n \mid m$ eli on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$, että $m = k \cdot n$. Tällöin $(\mathbb{N}, \leq)$ on osittainjärjestetty joukko. Nimittäin nythän $n \leq n$ vastaa vain tapausta $k = 1$, ja jos $n < m$ sekä $m < l$ eli on olemassa sellaiset $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 \neq 1$ ja $k_2 \neq 1$, että $m = k_1 \cdot n$ ja $l = k_2 \cdot m$, niin $l = k_2 \cdot k_1 \cdot n$ sekä $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ eli $n < l$.

Martinin aksiooman muotoilussa rajoitutaan osittainjärjestettyihin joukkoihin, jotka toteuttavat numeroituvien antiketjujen ehdon, mikä määritellään seuraavaksi. Lisäksi havainnollistetaan määritelmää yksinkertaisilla esimerkeillä.

Määritelmä 2.3. Olkoon $(P, \leq)$ osittainjärjestetty joukko ja $p, q \in P$. Jos on olemassa sellainen $r \in P$, että $r \leq p$ ja $r \leq q$, niin p ja q ovat *yhteensopivia*. Muuten p ja q ovat *yhteensopimattomia*. Lisäksi, jos osajoukon $W \subseteq P$ alkiot ovat pareittain yhteensopimattomia, niin W on *antiketju*. Edelleen $(P, <)$ toteuttaa *numeroituvien antiketjujen ehdon*, mikäli sen jokainen antiketju on numeroituva.

Tarkastellaan joukkoa $\tilde{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ja käyttäen esimerkin 2.2 järjestystä $<$ saadaan osittainjärjestetty joukko $(\tilde{\mathbb{N}}, <)$. Tällöin nähdään, että esimerkiksi osajoukko $M := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ on alkuluku}\}$ on tämän joukon antiketju. Jos M ei olisi antiketju, niin olisi olemassa sellainen $n \in \tilde{\mathbb{N}}$, että $p_1 = k_1 \cdot n$ ja $p_2 = k_2 \cdot n$ joillakin $p_1, p_2 \in M$, $p_1 \neq p_2$ ja $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Tällöin $p_1 = p_2 = n$, mikä on ristiriitaista.

Mikä tahansa numeroituva osittainjärjestetty joukko toteuttaa triviaalisti numeroituvien antiketjujen ehdon. Tutkielman edetessä tarkastellaan kuitenkin myös ylinumeroituvia joukkoja, jolloin numeroituvien antiketjujen ehdon toteutuminen on epätriviaalia.

Määritelmä 2.4. Olkoon $(P, \leq)$ osittainjärjestetty joukko. Joukko $D \subseteq P$ on *tiheä* joukossa P, mikäli jokaisella $p \in P$ on olemassa sellainen $q \in D$, että $q \leq p$.

Tarkastellaan reaalilukujen $\mathbb{R}$ tavanomaista osittainjärjestystä $\leq$. Tällöinhän $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ ovat tiheitä joukossa $\mathbb{R}$, mutta $\mathbb{N}$ ei ole.

Martinin aksiooma takaa numeroituvien antiketjujen ehdon toteuttavalle osittainjärjestetylle joukolle P ja kokoelmalle $\mathcal{D}$ P:ssä tiheitä osajoukkoja $\mathcal{D}$-geneerisen suodattimen olemassaolon. Määritellään tämä suodatin täsmällisesti.

Määritelmä 2.5. Olkoot $(P, \leq)$ osittainjärjestetty joukko, $p, q \in P$ ja $\mathcal{D}$ kokoelma joukkoja. Joukko $F \subseteq P$ on joukon P *suodatin*, mikäli seuraavat ehdot pätevät:

(i) $F \neq \emptyset$.

(ii) Jos $p \leq q$ ja $p \in F$, niin $q \in F$.

(iii) Jos $p, q \in F$, niin on olemassa sellainen $r \in F$, että $r \leq p$ ja $r \leq q$.

Joukko $G \subseteq P$ on joukon P *$\mathcal{D}$-geneerinen suodatin*, jos G on P:n suodatin ja jokaisella sellaisella P:ssä tiheällä $D \subseteq P$, että $D \in \mathcal{D}$ pätee $G \cap D \neq \emptyset$.

Erittäin yksinkertaiseksi esimerkiksi huomataan, että jokaisella osittainjärjestetyllä joukolla, jolla on osittainjärjestyksen suhteen yksikäsitteinen pienin alkio, on suodatin. Nimittäin osittainjärjestyksen suhteen pienimmän alkion yksiö.

Martinin aksiooman esittämiseen vaadittavat määritelmät on nyt esitetty. Tutkielman Abelin ryhmiä käsittelevässä osiossa tarvitaan kuitenkin vielä seuraavaa joukko-opillista lausetta.

Algebrassa ja joukko-opillisessa topologiassa käytetään usein alla esitettävää valinta-aksiooman kanssa yhtäpitävää Zornin lemmaa [4]. Näin tehdään myös tämän tutkielman vapaita Abelin ryhmiä käsittelevässä osiossa. Määritellään ensin Zornin lemmassa käytettäviä käsitteitä.

Määritelmä 2.6. Olkoon $(P, \leq)$ osittainjärjestetty joukko. Sanotaan, että $a \in P$ on *maksimaalinen* joukossa P, mikäli ei ole olemassa sellaista $x \in P$, että $a < x$. Jos $X \subseteq P$ on epätyhjä, niin $c \in P$ on osajoukon X *yläraja*, mikäli $x \leq c$ jokaisella $x \in X$. Epätyhjää $K \subseteq P$ sanotaan joukon P *ketjuksi*, jos $(K, <)$, missä $<$ on joukon P osittainjärjestyksen alijärjestys, on lineaarijärjestetty.

Nyt voidaan esittää Zornin lemma, jota käytetään myöhemmin osoittamaan merkittävä tulos, että vapaiden Abelin ryhmien aliryhmät ovat vapaita.

Lause 2.7. *(Zornin lemma) Jos $(P, \leq)$ on sellainen osittainjärjestetty joukko, että jokaisella P:n ketjulla on yläraja, niin joukossa P on maksimaalinen alkio.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 49]) Hahmotellaan todistus lyhyesti.

Määritellään transfiniittisella induktiolla ja käyttämällä valinta-aksiooman takaamaa valintafunktiota F joukon P epätyhjille osajoukoille ketju, joka johtaa maksimaaliseen alkioon P:ssä.

Olkoon $a_0 \in P$. Jos a_0 on maksimaalinen, niin väite on todistettu. Muuten $P_0 := \{p \in P \mid a_0 < p\} \neq \emptyset$, jolloin valitaan $F(P_0) = a_1$.

Oletetaan, että a_α on määritelty. Jos a_α on maksimaalinen, niin väite on todistettu. Muuten $P_\alpha := \{p \in P \mid a_\alpha < p\} \neq \emptyset$, jolloin valitaan $F(P_\alpha) = a_{\alpha+1}$.

Jos $\alpha > 0$ on rajaordinaali ja jokaisella $\beta < \alpha$ on valittu a_β, niin $C_\alpha = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ on P:n ketju, joten sillä on oletuksen nojalla yläraja. Siis $\bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta \neq \emptyset$ jolloin valitaan $F(\bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta) = a_\alpha$.

Jatkamalla määriteltyä induktiota päädytään sellaiseen ordinaaliin γ, että ei ole olemassa sellaista $a_{\gamma+1} \in P$, että $a_{\gamma+1} > a_\gamma$, joten a_γ on maksimaalinen P:ssä. Jos ei päädyttäisi tähän maksimaaliseen alkioon, niin saataisiin injektio kaikkien ordinaalien aidolta luokalta joukolle P, mikä on mahdotonta. $\square$

3 Martinin aksiooma

Oletetaan, että systeemi ZFC on ristiriidaton. Tällöin tiedetään tunnettuna faktana, että myös ZFC + MA + $\neg$ CH on ristiriidaton. Ainakin tässä mielessä Martinin aksiooma on mielekäs lisä aksiomaattisen joukko-opin ZFC aksioomiin. Kuten edellisessä luvussa mainittiin, Martinin aksiooma takaa numeroituvien antiketjujen ehdon toteuttavalle osittainjärjestetylle joukolle ja kokoelmalle sen tiheitä osajoukkoja geneerisen suodattimen. Muotoillaan tämä tässä luvussa täsmällisesti. Ensin esitetään Martinin aksioomassa käytettävä väite $\mathrm{MA}(\kappa)$ jokaiselle äärettömälle kardinaalille κ. Väitteen $\mathrm{MA}(\kappa)$ myötä saadaan muotoiltua Martinin aksiooma jokaiselle kontinuumia pienemmälle äärettömälle kardinaalille. Martinin aksiooman esittelyn jälkeen osoitetaan, että $\mathrm{MA}(\aleph_0)$ pätee systeemissä ZFC ja että $\mathrm{MA}(2^{\aleph_0})$ voidaan todistaa vääräksi. Täten siis perustellaan Martinin aksiooman rajoittuminen kontinuumia pienempiin äärettömiin kardinaaleihin.

Tutkielman päälähteessä [1] ei käytetä suoraan Martinin aksioomaa, kun osoitetaan, että systeemissä ZFC + MA + $\neg$ CH on epävapaita Whiteheadin ryhmiä. Martinin aksiooman sijaan käytetään Martinin aksioomasta johdettavaa seurausta. Täten luvun lopuksi sovelletaan seuraavaksi esiteltävää Martinin aksioomaa, kun todistetaan tämä tutkielman päälähteessä [1] käytettävä Martinin aksiooman seuraus. Martinin aksiooma on muotoiltu lähteen [4, Luku 16] mukaan.

Olkoon κ ääretön kardinaali. Muotoillaan siis ensin väite $\mathrm{MA}(\kappa)$:

$\mathrm{MA}(\kappa)$ Jos $(P,<)$ on osittainjärjestetty joukko, joka toteuttaa numeroituvien antiketjujen ehdon ja jos $\mathcal{D}$ on sellainen kokoelma joukossa P tiheitä osajoukkoja, että $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, niin on olemassa $\mathcal{D}$-geneerinen suodatin joukolle P.

Martinin aksiooma MA saadaan nyt muotoiltua väitteen $\mathrm{MA}(\kappa)$ avulla.

MA Olkoon κ sellainen kardinaali, että $\kappa < 2^{\aleph_0}$. Tällöin $\mathrm{MA}(\kappa)$ pätee.

Martinin aksioomassa rajoitutaan siis kontinuumia pienempiin äärettömiin kardinaaleihin. Perustellaan tämä käsittelemällä kardinaaleja $\aleph_0$ ja $2^{\aleph_0}$ väitteen $\mathrm{MA}(\kappa)$ valossa. Seuraavan lauseen myötä väite $\mathrm{MA}(\aleph_0)$ voidaan todistaa systeemissä ZFC ja tämä tulos tunnetaan myös Rasiowa-Sikorskin lemmana.

Lause 3.1. $\mathrm{MA}(\aleph_0)$ *pätee.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 203]) Oletetaan, että $|\mathcal{D}| = \aleph_0$. Luetellaan $\mathcal{D}$:n joukot $D_1, D_2, \cdots$. Määritellään $p_n \in P$ induktiolla luvun n suhteen: Nyt $P \neq \emptyset$, joten valitaan $p_0 \in P$. Nyt, kun $n > 0$, niin joukon D_n tiheyden nojalla voidaan valita $p_n \leq p_{n-1}$ ja $p_n \in D$. Osoitetaan, että

$$G = \{q \in P \mid q \geq p_n \text{ jollakin } n \in \omega\}$$

on $\mathcal{D}$-geneerinen suodatin joukolle P.

(i) Koska $P \neq \emptyset$ ja $p_0 \in P$ sekä esimerkiksi $p_0 \geq p_0$, niin $p_0 \in G$ eli $G \neq \emptyset$.

(ii) Olkoot $p, q \in P$, $p \leq q$ ja $p \in G$. Tällöin $p \geq p_n$ jollakin $n \in \omega$, joten myös $q \geq p_n$ eli $q \in G$.

(iii) Olkoot $p, q \in G$. Suoraan G:n määritelmästä seuraa, että $p_n \leq p$ ja $p_m \leq q$ joillakin $n, m \in \omega$ ja $p_n, p_m \in G$. Siis $p_k \leq p$ ja $p_k \leq q$, missä $k = \max\{n, m\}$ ja $p_k \in G$.

G on siis suodatin P:lle. Selvästi jokaisella $n \in \omega$ pätee, että $p_n \in G$ ja koska $p_n \in D_n$ jokaisella $n \in \omega$, niin $G \cap D_n \neq \emptyset$ jokaisella $n \in \omega$ eli G on $\mathcal{D}$-geneerinen suodatin joukolle P. □

Koska lause 3.1 saatiin todistettua systeemissä ZFC, niin intuitiivisesti Martinin aksiooman voidaan nähdä asettavan kardinaalia $2^{\aleph_0}$ pienemmät kardinaalit toteuttamaan samoja ominaisuuksia kuin kardinaali $\aleph_0$ toteuttaa. Osoitetaan vielä, miksi Martinin aksiooman muotoilussa rajoitutaan kontinuumia pienempiin kardinaaleihin. Poiketen muista tutkielman joukko-opin tuloksista, tässä lauseessa lähteenä on [5].

Osoitetaan siis, että väite $\mathrm{MA}(2^{\aleph_0})$ voidaan todistaa vääräksi.

Lause 3.2. $\mathrm{MA}(2^{\aleph_0})$ *ei päde.*

Todistus. (Vrt. [5, s. 54]) Tehdään vastaoletus, että $\mathrm{MA}(2^{\aleph_0})$ pätee. Tarkastellaan joukkoa

$$P := \{p \subseteq \omega \times \{0,1\} \mid |p| < \aleph_0 \text{ ja } p \text{ on kuvaus}\}$$

ja sen osittainjärjestystä $p \leq q$ jos ja vain jos $q \subseteq p$, kun $p, q \in P$. Jos p ja q ovat yhteensopivia, niin on olemassa sellainen $r \in P$, että $r \leq p$ ja $r \leq q$ eli $p \subseteq r$ ja $q \subseteq r$. Merkitään $d := \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$. Jos $p \restriction d \neq q \restriction d$, niin on olemassa sellainen $n \in d$, että $p(n) = r(n) \neq r(n) = q(n)$, mikä on mahdotonta, joten $p \restriction d = q \restriction d$. Kun $p \restriction d = q \restriction d$, niin $p \cup q$ on kuvaus ja p:n ja q:n yhteinen laajennus, joten p ja q ovat yhteensopivia. Kokonaisuutena saadaan siis, että p ja q ovat yhteensopivia, jos ja vain jos $p \restriction d = q \restriction d$. Jos G on joukon P suodatin, niin sen alkiot ovat pareittain yhteensopivia, joten $\bigcup G$ on kuvaus. Koska joukon P alkiot ovat kuvauksia ja mahtavuudeltaan pienempiä kuin $\aleph_0$, niin

$$\aleph_0 \leq |P| \leq |\omega \times \{0,1\}|^{<\aleph_0} = \aleph_0^{<\aleph_0} = \aleph_0$$

eli $|P| = \aleph_0$, joten P toteuttaa triviaalisti numeroituvien antiketjujen ehdon.

Asetetaan

$$D_n := \{p \in P \mid n \in \mathrm{dom}(p)\},$$

kun $n \in \omega$. Koska jokainen $q \in P$ voidaan laajentaa sellaiseksi kuvaukseksi r, että $n \in \mathrm{dom}(r)$, niin D_n on tiheä joukossa P. Olkoon G joukon P suodatin. Suodattimen G alkiot ovat tällöin pareittain yhteensopivia, joten kun merkitään $f_G := \bigcup G$, niin f_G on sellainen kuvaus, että $\mathrm{dom}(f_G) \subseteq \omega$ ja edelleen, jos $G \cap D_n \neq \emptyset$ jokaisella $n \in \omega$, niin $\mathrm{dom}(f_G) = \omega$.

Olkoon $h\colon \omega \longrightarrow \{0,1\}$ ja asetetaan

$$E_h = \{p \in P \mid p(n) \neq h(n) \text{ jollakin } n \in \omega\}.$$

Osajoukko E_h on tiheä joukossa P, sillä jokainen $q \in P$ voidaan laajentaa sellaiseksi kuvaukseksi r, että $n \in \mathrm{dom}(r)$ ja $r(n) \neq h(n)$ jollakin $n \in \omega$. Lisäksi, jos $G \cap E_h \neq \emptyset$, niin $f_G \neq h$. Asetetaan vielä

$$\mathcal{D} := \{D_n \mid n \in \omega\} \cup \{E_h \mid h \in {}^{\omega}\{0,1\}\}.$$

Tällöin $|\mathcal{D}| = 2^{\aleph_0}$, joten vastaoletuksen nojalla on olemassa $\mathcal{D}$-geneerinen suodatin G' joukolle P eli $G' \cap D \neq \emptyset$ jokaisella $D \in \mathcal{D}$. Tällöin edellä käytetyin merkinnöin $f_{G'}$ on kuvaus $\omega \to \{0,1\}$, joka on eri, kuin jokainen joukon ${}^{\omega}\{0,1\}$ kuvaus, mikä on ristiriitaista. □

Kuten on jo todettu, lauseet 3.1 ja 3.2 edustavat Martinin aksiooman kardinaalirajojen ääripäitä. Esitetään kuitenkin lause, joka todistetaan käyttämällä Martinin aksioomaa ja jota käytetään edelleen, kun osoitetaan, että systeemistä ZFC + MA +¬ CH on todistettavissa, että on olemassa Whiteheadin ryhmiä, jotka eivät ole vapaita. Tämän tuloksen, joka osoitetaan tutkielmassa, lisäksi Martinin aksioomalla on seurauksia muun muassa mittateoriassa, kombinatoriikassa ja topologiassa.

Lause 3.3. *(Vrt. [1, s. 784]) Oletetaan Martinin aksiooma. Olkoot A ja B sellaisia joukkoja, että $|A|, |B| < 2^{\aleph_0}$. Olkoon lisäksi P epätyhjä perhe sellaisia kuvauksia, että:*

(i) Jokainen $f \in P$ on kuvaus $C \to B$, missä $C \subseteq A$.

(ii) Jokaisella $a \in A$ ja jokaisella $f \in P$ on olemassa sellainen $g \in P$, että $f \subseteq g$ ja $a \in \mathrm{dom}(g)$.

(iii) Jokaisella ylinumeroituvalla $P' \subseteq P$ on olemassa sellaiset $f_1, f_2 \in P'$ ja $f_3 \in P$, että $f_1 \neq f_2$ sekä $f_1 \subseteq f_3$ ja $f_2 \subseteq f_3$.

Tällöin on olemassa sellainen kuvaus $g \colon A \to B$, että jokaisella äärellisellä $F \subseteq A$ on olemassa sellainen $f \in P$, että $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$ ja $g \restriction F = f \restriction F$.

Todistus. Osittainjärjestetään P siten, että $f \leq g$, jos ja vain jos $g \subseteq f$, kun $f, g \in P$. Joukon P määritelmän kohdasta (iii) seuraa, että P toteuttaa numeroituvien antiketjujen ehdon. Olkoon $F \subseteq A$ äärellinen ja asetetaan

$$D_F := \{f \in P \mid F \subseteq \mathrm{dom}(f)\}.$$

Olkoon $f \in P$. Osoitetaan induktiolla luvun $|F|$ suhteen, että D_F on tiheä joukossa P. Jos $F = \emptyset$, niin $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$, joten $f \in D_F$ ja $f \subseteq f$ eli D_F on tiheä. Oletetaan, että kun $|F| = n$ jollakin $n > 1$, niin D_F on tiheä. Olkoon $|F'| = n+1$ ja $a' \in F'$. Induktio-oletuksen nojalla $D_{F' \setminus \{a'\}}$ on tiheä, joten on olemassa sellainen $h \in D_{F' \setminus \{a'\}}$, että $f \subseteq h$. Edelleen P:n määritelmän kohdan (ii) nojalla on olemassa sellainen $h' \in P$, että $a' \in \mathrm{dom}(h')$ ja $h \subseteq h'$. Tällöin $h' \in D_{F'}$ ja $f \subseteq h \subseteq h'$, joten D'_F on tiheä.

Merkitään

$$\mathcal{D} := \{D_F \mid F \subseteq A \text{ on äärellinen}\}.$$

Nyt

$$|\mathcal{D}| \leq |\{F \subseteq A \mid |F| < \aleph_0\}| \leq \sum_{n\in\omega} |A|^n = \sum_{n\in\omega} |A| = \aleph_0 \cdot |A| = |A| < 2^{\aleph_0},$$

mikäli A on ääretön joukko. Jos A on äärellinen, niin

$$|\mathcal{D}| \leq |\{F \subseteq A \mid |F| < \aleph_0\}| \leq 2^{|A|} < 2^{\aleph_0}.$$

Nyt Martinin aksiooman nojalla on olemassa $\mathcal{D}$-geneerinen suodatin $G \subseteq P$ joukolle P. Asetetaan $g := \bigcup G$ ja olkoot $(a, b_1), (a, b_2) \in g$. Tällöin on olemassa sellaiset $g_1, g_2 \in G$, että $(a, b_1) \in g_1$ ja $(a, b_2) \in g_2$. Koska G on suodatin, niin on olemassa sellainen $g_3 \in G$, että $g_1 \subseteq g_3$ ja $g_2 \subseteq g_3$, joten koska g_3 on kuvaus, niin $b_1 = b_2$ eli g on kuvaus $g \colon C \to B$, missä $C \subseteq A$. Osoitetaan vielä, että $C = A$. Olkoon $a \in A$. Koska G on $\mathcal{D}$-geneerinen, niin $G \cap D_{\{a\}} \neq \emptyset$. Olkoon $h \in G \cap D_{\{a\}}$. Nyt $h \in G$ eli $h \subseteq g$ ja $h \in D_{\{a\}}$ eli $a \in \mathrm{dom}(h)$ joten $a \in \mathrm{dom}(g)$. Olkoon sitten $F \subseteq A$ äärellinen ja $f \in G \cap D_F$. Tällöin $f \subseteq g$ ja $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$, joten $g \restriction F = f \restriction F$. $\square$

4 Vapaista Abelin ryhmistä

Whiteheadin ongelmaan liittyvät myöhemmin määriteltävät W-ryhmät ovat Abelin ryhmiä. Koska Whiteheadin ongelma kysyy W-ryhmien vapaudesta, tässä luvussa esitellään vapaita Abelin ryhmiä siltä osalta, kuin loppututkielman kannalta on tähdellistä. Erityisen tärkeä tulos on, että vapaiden Abelin ryhmien aliryhmät ovat myös vapaita. Lisäksi torsiottomien Abelin ryhmien määritelmä sekä jatkon kannalta tarvittavia tuloksia liittyen torsiottomiin Abelin ryhmiin esitetään. Luvun lopussa alustetaan Whiteheadin ongelmaa sekä W-ryhmiä. Seuraavat määritelmät ja lauseet todistuksineen seuraavat lähdettä [6].

Aloitetaan esittelemällä ja määrittelemällä merkintätapoja. Abelin ryhmille käytetään additiivista merkintätapaa. Lisäksi Abelin ryhmien neutraalialkiota merkitään symbolilla 0 tai 0_A, mikäli 0_A on Abelin ryhmän A neutraalialkio, jos on merkityksellistä erotella eri Abelin ryhmien neutraalialkiot toisistaan. Triviaalia ryhmää merkitään $\mathbf{0}$ tai $\{0\}$.

Määritelmä 4.1. Olkoot A ja I joukkoja. *Perhe* joukon A alkioita indeksöitynä *indeksijoukolla* I on kuvaus $f\colon I \to A$. Tätä merkitään $(f(i))_{i\in I}$ tai $(a_i)_{i\in I}$, kun $a_i = f(i)$.

Olkoon $(a_i)_{i\in I}$ jokin perhe indeksöitynä joukolla I. Tällöin, jos on olemassa äärellinen osajoukko $I_0 \subseteq I$ jolla pätee, että $a_i = 0$ aina, kun $i \in I \setminus I_0$, niin voidaan sanoa, että $a_i = 0$ *melkein jokaisella* $i \in I$.

Abelin ryhmien suorat summat ovat tärkeässä roolissa läpi tutkielman. Aloitetaan suoran summan määrittely määrittelemällä ryhmien suora tulo.

Määritelmä 4.2. Olkoon I indeksijoukko, $(G_i)_{i\in I}$ perhe ryhmiä ja $G = \prod_{i\in I} G_i$ ryhmiä vastaavien joukkojen G_i karteesinen tulo. Joukko G koostuu siis alkioista muotoa $(x_i)_{i\in I}$, missä $x_i \in G_i$. Olkoot $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in G$. Kun määritellään alkioiden tulo komponenteittain eli $(x_i)_{i\in I}(y_i)_{i\in I} = (x_i y_i)_{i\in I}$, niin G on ryhmä, jota kutsutaan perheen $(G_i)_{i\in I}$ *suoraksi tuloksi*.

Määritelmän 4.2 ryhmän alkioiden vasta-alkiot ovat sellaisia, että alkion $(x_i)_{i\in I}$ vasta-alkio on $(x_i^{-1})_{i\in I}$ ja neutraalialkio on $(e_i)_{i\in I}$, kun $x_i \in G_i$ ja $e_i \in G_i$ on ryhmän G_i neutraalialkio.

Määritelmä 4.3. Olkoon $(A_i)_{i\in I}$ perhe Abelin ryhmiä, $\prod_{i\in I} A_i$ sen suora tulo ja $A \subseteq \prod_{i\in I} A_i$ niiden alkioiden $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ osajoukko, että $a_i = 0$ melkein jokaisella $i \in I$. Osajoukkoa A sanotaan perheen $(A_i)_{i\in I}$ *suoraksi summaksi* ja merkitään $A := \bigoplus A_i$.

Määritelmä 4.4. Olkoon A Abelin ryhmä ja $B_1, \ldots, B_n$ sen aliryhmiä. Jos $B_1 + \cdots + B_n = A$, eli A:n alkiot ovat muotoa $b_1 + \cdots + b_n = a$, missä $b_i \in B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ja $a \in A$ ja jos $B_{i+1} \cap (B_1 + \cdots + B_i) = \{0\}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, niin A on aliryhmien $B_1, \ldots, B_n$ *suora summa* ja merkitään $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$.

Havainnollistetaan määritelmän 4.4 suoraa summaa esimerkein. Olkoon $z \in \mathbb{Z}$. Jos z on parillinen, niin jollakin $k \in \mathbb{Z}$ pätee $z = 2k \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$. Jos z on pariton, niin jollakin $k \in \mathbb{Z}$ pätee $z = 2k + 1 = 2 \cdot (k + 2) + 3 \cdot (-1) \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$. Siis $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$. Toisaalta tämä summa ei ole suora, sillä esimerkiksi $0 \neq 6 \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$.

Tekijäryhmä $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} := \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ voidaan esittää aliryhmiensä $\{\overline{0}, \overline{3}\}$ ja $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ suorana summana. Nythän $\{\overline{0}, \overline{3}\} \cap \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{0}\}$ ja $\{\overline{0}, \overline{3}\} + \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{0} + \overline{0}, \overline{0} + \overline{2}, \overline{0} + \overline{4}, \overline{3} + \overline{0}, \overline{3} + \overline{2}, \overline{3} + \overline{4}\} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{1}\} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Siis $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{3}\} \oplus \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$.

Seuraavaa tekijäryhmiä koskevaa kolmatta isomorfialausetta käytetään useasti tutkielmassa.

Lause 4.5. *(Kolmas isomorfialause) Olkoon A Abelin ryhmä, B ja C sen aliryhmiä sekä $C \subseteq B$. Tällöin $(A/C)/(B/C) \cong A/B$.*

Todistus. Asetetaan $h\colon A/C \to A/B$, $h(a + C) = a + B$. Tämä on mielekästä, sillä kun $a_1 + C = a_2 + C$, niin $a_1 - a_2 \in C$ eli $a_1 - a_2 \in B$ ja täten $a_1 + B = a_2 + B$ jolloin $h(a_1 + C) = h(a_2 + C)$. Lisäksi $h(a_1 + C + a_2 + C) = h(a_1 + a_2 + C) = a_1 + a_2 + B = a_1 + B + a_2 + B = h(a_1 + C) + h(a_2 + C)$ eli h on homomorfismi. Vielä, koska $C \subseteq B$, niin h on surjektio eli $\mathrm{Im}(h) = A/B$ ja koska $\mathrm{Ker}(h) = \{a + C \in A/C \mid h(a + C) = a + B = B\} = \{a + C \in A/C \mid a \in B\} = B/C$, niin ensimmäisen isomorfialauseen nojalla $(A/C)/(B/C) \cong A/B$. □

Seuraavaksi esitellään vapaat Abelin ryhmät sekä niiden yhteys jonkin joukon virittämään Abelin ryhmään.

Määritelmä 4.6. Olkoon A Abelin ryhmä ja $(e_i)_{i \in I}$ perhe sen alkioita. Mikäli jokainen $a \in A$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa $a = \sum_{i \in I} a_i e_i$, missä $a_i \in \mathbb{Z}$ ja melkein jokainen $a_i = 0$, kun $i \in I$, niin perhe $(e_i)_{i \in I}$ on Abelin ryhmän A *kanta*. Jos Abelin ryhmällä on kanta, niin sitä sanotaan *vapaaksi*. Jos Abelin ryhmä ei ole vapaa, sitä kutsutaan *epävapaaksi*.

Kun toimitaan niin kuin on tavanomaisesti sovittu, että $\sum_{i \in I} a_i e_i = 0$, kun kanta on tyhjä, niin $\emptyset$ on triviaalin ryhmän $\mathbf{0}$ kanta. Nyt huomattavaa on, että äärellinen epätriviaali Abelin ryhmä ei voi olla vapaa. Äärellisen Abelin ryhmän alkioilla on äärellinen kertaluku, joten esimerkiksi neutraalialkiolla ei olisi yksikäsitteistä esitystä kannan alkioiden suhteen.

Esimerkiksi ääretön syklinen ryhmä $\mathbb{Z}$ on vapaa ja sen kanta on $\{1\}$. Esitetään vielä hieman monimutkaisempi esimerkki. Poiketen muusta tutkielmasta, tässä esimerkissä ei käytetä additiivista merkintätapaa Abelin ryhmälle.

Esimerkki 4.7. Positiivisten rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}_+$ varustettuna tavanomaisella kertolaskulla on vapaa Abelin ryhmä. Kun $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, niin aritmetiikan peruslauseen nojalla $a = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ ja $b = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$, missä $p_1 < \cdots < p_k$ ovat alkulukuja sekä $n_i, m_i \geq 0$, kun $i = 1, \ldots, k$. Täten jälleen aritmetiikan peruslauseen nojalla saadaan yksikäsitteisesti $\frac{a}{b} = p_1^{n_1 - m_1} \cdots p_k^{n_k - m_k}$ eli alkulukujen joukko on tällöin kanta Abelin ryhmälle $\mathbb{Q}_+$ varustettuna kertolaskulla.

Määritelmä 4.8. Olkoon S joukko ja merkitään

$$\mathbb{Z}\langle S\rangle := \{f : S \to \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \text{ melkein jokaisella } x \in S\}.$$

Käytetään merkintää $k \cdot x$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $x \in S$, sellaiselle kuvaukselle $f \in \mathbb{Z}\langle S\rangle$, että $f(x) = k$ ja $f(y) = 0$, kun $y \neq x$. Nythän, kun $g \in \mathbb{Z}\langle S\rangle$, niin se voidaan kirjoittaa muodossa $g = k_1 \cdot x_1 + \cdots + k_n \cdot x_n$ joillakin $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ ja eri alkioilla $x_1, \ldots, x_n \in S$. Lisäksi tämä muoto on yksikäsitteinen, sillä jos $f = \sum_{x \in S} k_x \cdot x = \sum_{x \in S} k'_x \cdot x$, niin $0 = \sum_{x \in S}(k_x - k'_x) \cdot x$ eli $k_x = k'_x$ jokaisella $x \in S$.

Tällöin $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ on Abelin ryhmä varustettuna tavanomaisella kuvauksien yhteenlaskulla ja sitä kutsutaan *joukon S virittämäksi vapaaksi Abelin ryhmäksi*. Lisäksi joukon S alkioita kutsutaan Abelin ryhmän $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ *vapaiksi virittäjiksi*.

Osoitetaan sitten vapaiden Abelin ryhmien ja edellä määriteltyjen jonkin joukon virittämän vapaan Abelin ryhmän välinen yhteys.

Lause 4.9. *Abelin ryhmä A on vapaa, jos ja vain jos $A \cong \mathbb{Z}\langle S\rangle$ jollakin joukolla S.*

Todistus. (Vrt. [6, ss. 38–39]) Kun A on vapaa ja S sen kanta, niin asettamalla $h : A \to \mathbb{Z}\langle S\rangle$, $h(\sum k_i x_i) = \sum k_i \cdot x_i$, missä $\sum k_i x_i \in A$ on esitetty kannan S avulla ja $\sum k_i \cdot x_i \in \mathbb{Z}\langle S\rangle$ kuten määritelmässä 4.8. Tällöin h on isomorfismi eli $A \cong \mathbb{Z}\langle S\rangle$.

Jos taas $A \cong \mathbb{Z}\langle S\rangle$ jollakin joukolla S, niin joukko S voidaan voidaan liittää joukkoon $\langle S\rangle$ injektiolla $f_S(x) = 1 \cdot x$, kun $x \in S$. Tällöin $f_S(S)$ virittää Abelin ryhmän $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ ja määritelmässä 4.8 esitetyn perusteella se on myös Abelin ryhmän $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ kanta eli $A \cong \mathbb{Z}\langle S\rangle$ on vapaa. □

Jos A on Abelin ryhmä ja $T \subseteq A$, niin merkitään $\langle T\rangle$:llä sitä A:n aliryhmää, jonka T *virittää* eli pienintä sellaista aliryhmää, joka sisältää joukon T.

Esitetään sitten merkittävä tulos vapaille Abelin ryhmille, jota käytetään myös useiden tutkielmassa vielä esitettävien lauseiden todistuksissa.

Lause 4.10. *Olkoon A vapaa Abelin ryhmä ja B sen aliryhmä. Tällöin B on vapaa Abelin ryhmä.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 41 ja ss. 880–881]) Olkoon X vapaan Abelin ryhmän A kanta. Todistetaan ensin tapaus, kun X on äärellinen. Edetään induktiolla luvun $|X|$ suhteen. Jos $B = \{0\}$, niin väite pätee, joten olkoon $B \neq \{0\}$ ja täten $X \neq \emptyset$. Kun $|X| = 1$, niin $A \cong \mathbb{Z}$, joten $B \cong \mathbb{Z}$ eli B on vapaa Abelin ryhmä. Oletetaan, että jos vapaan Abelin ryhmän kannan mahtavuus on korkeintaan n, niin sen aliryhmät ovat vapaita Abelin ryhmiä.

Merkitään $X := \{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$. Abelin ryhmä A voidaan nyt esittää suorana summana $A = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_{n+1}$. Olkoon $p : A \to \mathbb{Z}e_1$ projektio eli sellainen homomorfismi, että $p(a_1 e_1 + \cdots + a_{n+1} e_{n+1}) = a_1 e_1$, kun $a_i \in \mathbb{Z}$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Jos $p[B] = \{0\}$, niin $B \subseteq \langle e_2, \ldots, e_{n+1}\rangle$ ja induktio-oletuksen nojalla B on tällöin vapaa. Oletetaan siis, että $p[B] \neq \{0\}$ ja olkoon $a > 0$ pienin sellainen kokonaisluku, että $ae_1 \in p[B]$ ja $x \in B$ sellainen, että $(p \restriction B)(x) = ae_1$. Jos $x \in \operatorname{Ker}(p \restriction B)$, niin $ae_1 = 0$ eli $p[B] = \{0\}$ vastoin oletusta. Täten $x \notin \operatorname{Ker}(p \restriction B)$. Jos $y \in B$, niin $p(y) = bp(x)$ jollakin $b \in \mathbb{Z}$. Täten $p(y - bx) = 0$ eli $y = bx + c$ joillakin $b \in \mathbb{Z}$ ja $c \in \operatorname{Ker}(p \restriction B)$.

Siis $B = \langle x \rangle \oplus \mathrm{Ker}(p \restriction B)$. Nyt B on vapaa, sillä induktio-oletuksen nojalla $\mathrm{Ker}(p \restriction B)$ ja $\langle x \rangle$ ovat vapaita, koska $\mathrm{Ker}(p \restriction B) = C$ jollakin $C \subseteq \langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$ ja $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Todistetaan sitten tapaus, kun kanta on mielivaltainen. Merkitään $X := \{e_i \mid i \in I\}$. Merkitään lisäksi $A_J := \langle \{e_i \mid i \in J\} \rangle$ jokaisella $J \subseteq I$ ja vielä $B_J := A_J \cap B$. Olkoon sitten S sellaisten parien (J, w) muodostama joukko, että $J \subseteq I$ ja $w \colon J' \to B_J$ on B_J:n kanta eli w on injektio, $J' \subseteq J$ ja $B_J = \langle w[J'] \rangle$. Merkitään lisäksi $w_j := w(j)$, kun $j \in J'$. Nyt $S \neq \emptyset$, sillä kun $x \in B$, niin $x = a_1 e_{i_1} + \cdots + a_n e_{i_n}$, joten $x \in A_J$, missä $J = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ eli $x \in A_J \cap B$, mikä on vapaa äärellisesti viritetyn A_J:n aliryhmänä edellä todistetun nojalla. Nyt kun $(J, w), (K, u) \in S$, niin määritellään $(J, w) \leq (K, u)$ jos ja vain jos $J \subseteq K$, $J' \subseteq K'$ ja $u \restriction J = w$. Olkoon $S' := \{(J_i, w_i) \mid i \in L\} \subseteq S$. missä L on lineaarijärjestetty, ketju joukossa S. Tällöin $(\bigcup_{i \in L} J_i \bigcup_{i \in L} w_i) \in S$ on sen yläraja, sillä jos $(K, u) \in S'$, niin $K \subseteq \bigcup_{i \in L} J_i$ ja $u \subseteq \bigcup_{i \in L} w_i$ joista ylärajuus seuraa suoraan.

Nyt voidaan käyttää Zornin lemmaa, joten olkoon $(J, w) \in S$ maksimaalinen. Osoitetaan, että $J = I$. Oletetaan vastoin väitettä, että $k \in I \setminus J$ ja asetetaan $K = J \cup \{k\}$. Jos $B_K = A_K \cap B = B_J$, niin $(J, w) \leq (K, w)$ mutta $J \neq K$ eli $(J, w) \neq (K, w)$, mikä on ristiriidassa alkion (J, w) maksimaalisuuden kanssa. Jos $B_K = A_K \cap B \neq B_J$, niin on olemassa sellainen alkio $ne_k + y \in B_K$, että $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ja $y \in B_J \subseteq A_J$. Tällöin ne $n \in \mathbb{Z}$ joilla on olemassa sellainen $y \in B_J$, että $ne_k + y \in B$ muodostavat $\mathbb{Z}$:n aliryhmän. Olkoon n_0 tämän aliryhmän virittäjä ja $w_k = n_0 e_k + y \in B$. Nyt, jos $z \in B_K$, niin jollakin $m \in \mathbb{Z}$ pätee, että $z = z - mw_k + mw_k$, missä $z - mw_k \in B_J$, sillä $z \in B$ ja $-mw_k \in B$. Lisäksi $B_J \cap \mathbb{Z}w_k = \{0\}$ joten $B_K = B_J \oplus \mathbb{Z}w_k$ ja $w' := w \cup \{\langle k, w_k \rangle\}$ on B_K:n kanta, jolloin $(J, w) < (K, w')$, sillä $w' \restriction J \neq w$, mikä on ristiriidassa alkion (J, w) maksimaalisuuden kanssa. ◻

Määritelmä 4.11. Olkoon A Abelin ryhmä. Alkion $a \in A$ sanotaan olevan *torsioalkio*, mikäli sen kertaluku on äärellinen. Lisäksi A:n sanotaan olevan *torsioton*, jos sen ainoa torsioalkio on neutraalialkio.

Jokainen äärellisen Abelin ryhmän alkio on torsioalkio. Tämän nojalla torsiottomalla Abelin ryhmällä ei voi olla epätriviaaleja äärellisiä aliryhmiä. Kuten vapaan Abelin ryhmän tapauksessa, torsiottomuuden tyyppiesimerkki on myös $\mathbb{Z}$. Esimerkki äärettömästä Abelin ryhmästä, joka ei ole torsioton, on $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Olkoon $\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Tällöin $b(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, sillä $a \in \mathbb{Z}$. Täten $\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on torsioalkio eli on itse asiassa osoitettu, että jokainen äärettömän Abelin ryhmän $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ alkio on torsioalkio.

Kuten edellä mainittiin, Abelin ryhmä $\mathbb{Z}$ on torsioton. Lisäksi $\mathbb{Z}$ on isomorfiaa vaille ainoa ääretön syklinen ryhmä ja täten äärellisesti viritetty. Vapaiden Abelin ryhmien yhteydessä on myös mainittu, että $\mathbb{Z}$ on vapaa. Yleistetään näiden ominaisuuksien yhteys mielivaltaisille Abelin ryhmille seuraavalla lauseella.

Lause 4.12. *Olkoon A äärellisesti viritetty torsioton Abelin ryhmä. Tällöin A on vapaa.*

Todistus. (Vrt. [6, ss. 45–46]) Oletetaan, että $A \neq \{0\}$ ja olkoon S joukon A äärellinen virittäjäjoukko. Olkoon lisäksi $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S$ sellainen maksimaalinen osajoukko, että kun $a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$ ovat sellaisia, että $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$, niin $a_j = 0$ jokaisella

$j = 1, \ldots, n$. Olkoon $B = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subseteq A$, joten B on vapaa. Kun $y \in S$, niin joukon $\{x_1, \ldots, x_n\}$ maksimaalisuuden nojalla on olemassa sellaiset $b_1, \ldots, b_n, b_y \in \mathbb{Z}$, joista kaikki eivät ole nollia, että $b_y y + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = 0$. Lisäksi $b \neq 0$, sillä muuten $b_1, \ldots, b_n = 0$. Täten $b_y y \in B$ ja tämä pätee jokaiselle S:n alkiolle y, jolle on olemassa sellainen $b_y \neq 0$, että kun $b := \prod_{y \in S} b_y$, niin $bA \subseteq B$.

Nyt $h \colon A \to A$, $h(x) = bx$ on homomorfismi ja $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, sillä A on torsioton. Täten h on isomorfismi $h \colon A \to C$, missä $C \subseteq B$ on B:n aliryhmä. Siis lauseen 4.10 nojalla bA on vapaa, joten A on vapaa. □

Seuraavaa torsiottomaan tekijäryhmään sekä aliryhmään liittyvää aputulosta käytetään myöhemmin todistettaessa tutkielman päätulosta.

Lause 4.13. *Olkoon A Abelin ryhmä ja $B \subseteq A$ sen aliryhmä. Jos A/B ja B ovat torsiottomia, niin A on torsioton.*

Todistus. Oletetaan, että A/B ja B ovat torsiottomia. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $0 \neq x \in A$, että $nx = 0$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin $x + B \neq B$, sillä B on torsioton, joten $n(x + B) = nx + B = 0 + B = B$ eli $x + B \in A/B$ on kertaluvultaan äärellinen, mikä on ristiriidassa A/B:n torsiottomuuden kanssa. □

Seuraavaksi esiteltävää homomorfismien ominaisuutta käytetään seuraavassa luvussa W-ryhmien määrittelyyn. Seuraavat määritelmät ja lauseet ovat lähteestä [1].

Määritelmä 4.14. Olkoot A ja B Abelin ryhmiä sekä $h \colon A \to B$ ja $g \colon B \to A$ homomorfismeja. Jos g on lisäksi surjektio, niin sanotaan, että homomorfismi g *halkeaa*, mikäli on olemassa sellainen homomorfismi $f \colon A \to B$, että $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Lisäksi kutsutaan homomorfismia h *halkaisevaksi homomorfismiksi* homomorfismille g, jos $g \circ h = \mathrm{id}_A$.

Huomataan, että edellisessä määritelmässä halkaiseva homomorfismi h on injektio, sillä jos $a \in A$ ja $h(a) = 0$, niin $a = (g \circ h)(a) = g(h(a)) = g(0) = 0$.

Osoitetaan seuraavaksi riittävä ja välttämätön ehto Abelin ryhmän vapaudelle halkeavien homomorfismien suhteen.

Lause 4.15. *Abelin ryhmä A on vapaa, jos ja vain jos jokainen surjektiivinen homomorfismi A:lle halkeaa.*

Todistus. (Vrt. [1, Lause 2.3]) Olkoon B Abelin ryhmä ja $X := \{x_i \mid i \in I\}$ vapaan Abelin ryhmän A kanta. Oletetaan, että $h \colon B \to A$ on surjektiivinen homomorfismi. Valitaan jokaisella $i \in I$ sellainen $b_i \in B$, että $h(b_i) = x_i$. Koska X on A:n kanta, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen homomorfismi $f \colon A \to B$, että $f(x_i) = b_i$ jokaisella $i \in I$. Yksikäsitteisyys seuraa siitä, että jos $f' \colon A \to B$ on toinen homomorfismi, jolla pätee $f'(x_i) = b_i$ jokaisella $i \in I$, ja kun $a \in A$, niin voidaan kirjoittaa $a = \sum_{i \in I} n_i x_i$ ja saadaan

$$f'(a) = f'\left(\sum_{i \in I} n_i x_i\right) = \sum_{i \in I} n_i f'(x_i) = \sum_{i \in I} n_i b_i = \sum_{i \in I} n_i f(x_i) = f\left(\sum_{i \in I} n_i x_i\right) = f(a).$$

Edelleen

$$\begin{aligned}(h\circ f)(a) &= h\left(f\left(\sum_{i\in I} n_i x_i\right)\right) = h\left(\sum_{i\in I} n_i f(x_i)\right)\\ &= h\left(\sum_{i\in I} n_i b_i\right) = \sum_{i\in I} n_i h(b_i) = \sum_{i\in I} n_i x_i = a.\end{aligned}$$

Siis h halkeaa.

Oletetaan sitten, että jokainen surjektiivinen homomorfismi A:lle halkeaa. Olkoon F vapaa Abelin ryhmä, jonka kanta on $X := \{x_a \mid a \in A\}$. Olkoon lisäksi $h\colon F \longrightarrow A$ se yksikäsitteinen homomorfismi, että $h(x_a) = a$ jokaisella $a \in A$. Oletuksen nojalla h halkeaa, joten olkoon $g\colon A \longrightarrow F$ homomorfismin h:n halkaiseva homomorfismi. Kuten määritelmässä 4.14 todettiin, g on injektio. Siis A on isomorfinen jonkin F:n aliryhmän kanssa eli A on vapaa. □

Edellisen lauseen seurauksena saadaan torsiottomien Abelin ryhmien lausetta 4.13 vastaava tulos vapaille Abelin ryhmille.

Seuraus 4.16. *Olkoon A Abelin ryhmä ja $B \subseteq A$ sen aliryhmä. Jos A/B ja B ovat vapaita, niin A on vapaa. Lisäksi jokainen B:n kanta voidaan laajentaa A:n kannaksi.*

Todistus. (Vrt. [1, Seuraus 2.5]) Olkoon $p\colon A \longrightarrow A/B$ kanoninen surjektio. Koska A/B on vapaa, niin lauseen 4.15 nojalla on olemassa p:n halkaiseva homomorfismi $h\colon A/B \rightarrow A$.

Olkoon sitten $b \in h[A/B] \cap B$. Koska h on injektio, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen $c + B \in A/B$, että $h(c + B) = b$. Tällöin $p(h(c + B)) = p(b)$ ja koska h on halkaiseva homomorfismi p:lle, niin $p(b) = c + B$. Täten $c \in B$ ja koska $c + B \in A/B$ oli yksikäsitteinen, niin $b = 0$. Siis $h[A/B] \cap B = \{0\}$.

Lisäksi nyt $(h \circ p)(a) \in h[A/B]$ ja $a - (h \circ p)(a) = c \in A$. Tällöin $p(a) - (p \circ (h \circ p))(a) = p(c)$ eli $p(c) = p(a) - p(a) = 0 + B$, joten $c = a - (h \circ p)(a) \in B$. Täten, kun $a \in A$, niin a voidaan esittää yksikäsitteisesti $h[A/B]$:n ja B:n summana muodossa $a = (h \circ p)(a) + (a - (h \circ p)(a))$ ja erityisesti $A = h[A/B] \oplus B$ eli A on vapaa.

Edelleen h:n injektiivisyyden nojalla, jos Y on A/B:n kanta, niin $h[Y]$ on $h[A/B]$:n kanta. Tällöin, mikäli X on B:n jokin kanta, niin $h[Y] \cup X$ on A:n kanta. □

Tutkielman useassa todistuksessa tarkastellaan nousevia ketjuja Abelin ryhmiä, joille asetetaan erilaisia ehtoja, kun halutaan esimerkiksi muodostaa Abelin ryhmä tällaisen nousevan ketjun yhdisteenä. Määritellään seuraavaksi Abelin ryhmien ketjut sekä sileät ketjut.

Määritelmä 4.17. Olkoon

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_\beta \subseteq \cdots, \qquad \beta < \alpha$$

nouseva ketju joukkoja indeksöitynä ordinaalilla α. Ketju on *sileä*, mikäli jokaisella rajaordinaalilla $\lambda < \alpha$ pätee, että $A_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} A_\beta$. Ketju on *aidosti kasvava*, mikäli jokaisella $\beta < \alpha$ pätee, että $A_\beta \neq A_{\beta+1}$. Lisäksi ketju on *Abelin ryhmien ketju*, jos jokaisella $\beta < \alpha$ pätee, että A_β on Abelin ryhmä ja $A_{\beta+1}$:n aliryhmä.

Osoitetaan vielä yhden määritelmän jälkeen eräs vapaita ryhmiä koskeva lause, jota tarvitaan myöhemmin W-ryhmien ominaisuuksien tarkastelussa.

Kuten seuraavassa lauseessa, monissa seuraavissa todistuksissa muodostetaan uusi Abelin ryhmä yhdisteenä sileästä ketjusta Abelin ryhmiä.

Lause 4.18. *(Vrt. [1, Seuraus 2.5]) Olkoon A sellainen sileän Abelin ryhmien ketjun $\{A_\beta \mid \beta < \alpha\}$ yhdiste, että A_0 on vapaa ja jokaisella $\beta < \alpha$ pätee, että $A_{\beta+1}/A_\beta$ on vapaa. Tällöin A on vapaa ja jokaisella $\beta < \alpha$ pätee, että A/A_β on vapaa.*

Todistus. Olkoon X_0 Abelin ryhmän A_0 kanta. Muodostetaan transfiniittisella induktiolla sellainen sileä ketju joukkoja

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_\beta \subseteq \cdots, \qquad \beta < \alpha,$$

että X_β on A_β:n kanta. Oletetaan, että tällainen ketju on muodostettu jollekin ordinaalille $\gamma < \alpha$. Jos γ on rajaordinaali, niin asetetaan $X_\gamma = \bigcup_{\mu<\gamma} X_\mu$. Tällöin määritelmän 4.17 nojalla $A_\gamma = \bigcup_{\mu<\gamma} A_\mu$ joten X_γ on A_γ:n kanta. Jos γ on seuraajaordinaali $\gamma = \delta + 1$, niin $A_{\delta+1}/A_\delta$ on oletuksen nojalla vapaa, joten seurauksen 4.16 nojalla X_δ voidaan laajentaa kannaksi $X_{\delta+1}$ Abelin ryhmälle $A_{\delta+1}$. Täten $X = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ on A:n kanta ja $\{x + A_\beta \mid x \in X \setminus X_\beta\}$ on A/A_β:n kanta. □

5 Whiteheadin ongelma ja W-ryhmät

Tässä luvussa esitellään Whitehead-ryhmät eli W-ryhmät sekä Whiteheadin ongelma. Lisäksi sovelletaan homologisen algebran menetelmiä Abelin ryhmien teoriaan. Lähteitä [6], [3] ja [1] käytetään tässä luvussa vaihtelevasti. Esitys Abelin ryhmien teoriasta homologisen algebran menetelmin on tässä luvussa suppea. Esitietoihin Abelin ryhmien algebran kannalta voi tutustua tarkemmin esimerkiksi lähteestä [3, s. 6–14,75–79].

Whiteheadin ongelma voidaan nyt esittää täsmällisesti W-ryhmien täsmällisen määritelmän jälkeen.

Määritelmä 5.1. Abelin ryhmää A kutsutaan *Whitehead-ryhmäksi* (*W-ryhmäksi*), mikäli jokainen surjektiivinen homomorfismi h Abelin ryhmälle A, jolle pätee $\mathrm{Ker}(h) \cong \mathbb{Z}$, halkeaa.

Whiteheadin ongelma voidaan nyt muotoilla täsmällisesti:

Onko jokainen W-ryhmä vapaa?

Lauseen 4.15 seurauksena nähdään heti, että jokainen vapaa Abelin ryhmä on W-ryhmä. Lähdetään alustamaan seuraavan luvun päätulosta, että jokainen numeroituva W-ryhmä on vapaa. W-ryhmien ominaisuuksien osoittamiseen määritellään ensin homologisen algebran käsitteitä.

Määritelmä 5.2. (Vrt. [6, ss. ix–x]) Olkoot A, B, C ja D Abelin ryhmiä sekä f, g, φ ja ψ homomorfismeja. Sanotaan, että *kaavio*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array}$$

kommutoi, mikäli $g \circ f = \psi \circ \varphi$. Monimutkaisemman kaavion sanotaan kommutoivan, mikäli eri reittejä pitkin samaan päämäärään kuljettaessa vastaavat yhdistetyt kuvaukset ovat samat. Siis, jos kaaviossa on reitit

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

ja

$$A_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_{m-1}} B_m = A_n,$$

Abelin ryhmästä A_1 Abelin ryhmään A_n, niin $f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1 = g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1$.

Kun A ja C ovat Abelin ryhmiä, niin merkitään $\mathrm{Hom}(A, C)$:llä kaikkien homomorfismien $h\colon A \to C$ joukkoa. Joukko $\mathrm{Hom}(A, C)$ on myös Abelin ryhmä varustettuna tavanomaisella kuvausten yhteenlaskulla. Lisäksi Abelin ryhmien välinen homomorfismi $h\colon A_1 \to A_2$ indusoi jokaiselle Abelin ryhmälle C homomorfismin $h'\colon \mathrm{Hom}(A_2, C) \to \mathrm{Hom}(A_1, C)$, jonka määrää $h'(f) = f \circ h$, kun $f \in \mathrm{Hom}(A_2, C)$.

Määritellään seuraavaksi tarkat jonot Abelin ryhmiä ja homomorfismeja, jotka ovat tärkeässä roolissa loppuluvun ajan.

Määritelmä 5.3. Sanotaan, että jono Abelin ryhmiä ja homomorfismeja

$$\cdots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{h_{i+1}} A_i \xrightarrow{h_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

on *tarkka* eli *eksakti*, mikäli $\mathrm{Ker}(h_i) = \mathrm{Im}(h_{i+1})$ jokaisella i.

Tarkastellaan tarkkaa jonoa, jonka alku ja loppu on triviaali ryhmä. Nyt, jos

$$\mathbf{0} \xrightarrow{f_1} A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f_2} \mathbf{0}$$

on tarkka jono Abelin ryhmiä ja homomorfismeja, niin homomorfismit $f_1\colon \mathbf{0} \to A$ sekä $f_2\colon C \to \mathbf{0}$ jätetään yleensä merkitsemättä, sillä molempiin on vain yksi vaihtoehto, nimittäin $f_1(0) = 0$ ja $f_2(x) = 0$ jokaisella $x \in C$. Seuraavat tulokset saadaan, sillä jono on tarkka. Ensinnäkin $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Ker}(h)$ eli $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$, joten h on injektio. Lisäksi, koska $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f_2)$ ja $\mathrm{Ker}(f_2) = C$, niin g on surjektio. Vielä jonon tarkkuuden nojalla $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(h)$, joten ensimmäisen isomorfialauseen nojalla $\mathrm{Im}(g) = C \cong B/\mathrm{Ker}(g) = B/\mathrm{Im}(h)$.

Määritellään sitten tarkka jono, jossa esiintyy vapaita Abelin ryhmiä. Lisäksi määritellään tekijäryhmä $\mathrm{Ext}(A, C)$ Abelin ryhmille A ja C.

Määritelmä 5.4. Tarkkaa jonoa

$$\mathbf{0} \longrightarrow F_1 \xrightarrow{h} F_0 \xrightarrow{g} A \longrightarrow \mathbf{0},$$

missä F_0 ja täten myös F_1 ovat vapaita Abelin ryhmiä, kutsutaan Abelin ryhmän A *vapaaksi resoluutioksi*. Edellä esitetyn vapaan resoluution avulla määritellään vielä

$$\mathrm{Ext}(A, C) := \mathrm{Hom}(F_1, C)/\mathrm{Im}(h'),$$

kun C on Abelin ryhmä ja $h'\colon \mathrm{Hom}(F_0, C) \to \mathrm{Hom}(F_1, C)$ homomorfismin h indusoima homomorfismi.

Määritelmän 5.4 Abelin ryhmä F_1 on välttämättä vapaa, kun F_0 on vapaa, sillä määritelmää edeltävien kommenttien nojalla h on injektio eli F_1 on isomorfinen vapaan Abelin ryhmän F_0 vapaan aliryhmän kanssa.

Määritellään vielä projektiiviset Abelin ryhmät ja todistetaan, että Abelin ryhmän projektiivisuus on yhtäpitävää Abelin ryhmän vapauden kanssa.

Määritelmä 5.5. (Vrt. [3, s. 78]) Abelin ryhmää P kutsutaan *projektiiviseksi*, mikäli jokainen kaavio Abelin ryhmiä ja homomorfismeja

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "q"] & \\ \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \mathbf{0}, \end{tikzcd}$$

missä alarivi on tarkka, voidaan täydentää kommutoivaksi kaavioksi

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "q"] \arrow[dl, "f"'] & \\ \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

homomorfismilla $f\colon P \to B$ eli $g \circ f = q$. Tällöin sanotaan, että q *nostetaan* homomorfismiksi f.

Määritelmän 5.5 kaaviossa osuuden

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{h} B,$$

merkitys on rakenteen kiinnittäminen Abelin ryhmälle B ja osuus jätetäänkin implisiittiseksi seuraavan lauseen todistuksessa.

Lause 5.6. *Abelin ryhmä on projektiivinen, jos ja vain jos se on vapaa.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 78]) Olkoon F vapaa Abelin ryhmä, B ja C Abelin ryhmiä ja $g\colon B \to C$ surjektio. Olkoon lisäksi $q\colon F \to C$ homomorfismi sekä $X = \{x_i \mid i \in I\}$ vapaan Abelin ryhmän F kanta. Valitaan g:n surjektiivisuuden nojalla sellainen $b_i \in B$, että $g(b_i) = q(x_i)$. Kuten lauseen 4.15 todistuksessa osoitettiin, kannasta määräytyy yksikäsitteinen homomorfismi $f\colon F \to B$, jolle $f(x_i) = b_i$. Nyt, koska $g \circ f \restriction X = q \restriction X$ ja X on F:n kanta, niin $g \circ f = q$. Siis F on projektiivinen.

Olkoon P projektiivinen Abelin ryhmä ja F sellainen vapaa Abelin ryhmä, että $g\colon F \to P$ on surjektiivinen homomorfismi. Identtinen kuvaus $\mathrm{id}_P\colon P \to P$ voidaan nostaa homomorfismiksi $f\colon P \to F$ eli $g \circ f = \mathrm{id}_P$ kaavion

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "id"] \arrow[dl, "f"'] \\ F \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

mukaisesti. Tällöin f on injektio eli P on isomorfinen jonkin vapaan Abelin ryhmän F aliryhmän kanssa, joka on lauseen 4.10 nojalla vapaa eli P on vapaa. $\square$

Lauseen 5.6 nojalla voidaan siis puhua yhtäpitävästi vapaista ja projektiivisista Abelin ryhmistä.

Esitetään ja todistetaan seuraavaksi käärmelemma liittyen isompaan kaavioon Abelin ryhmiä ja homomorfismeja. Käärmelemman avulla hahmotellaan myös lyhyesti todistus lauseelle, jolla taataan pitkän tarkan jonon Abelin ryhmiä ja homomorfismeja

$$0 \to \mathrm{Hom}(A_3, C) \xrightarrow{h_1'} \mathrm{Hom}(A_2, C) \xrightarrow{h_2'} \mathrm{Hom}(A_1, C) \to \mathrm{Ext}(A_3, C) \to \mathrm{Ext}(A_2, C) \to \mathrm{Ext}(A_1, C) \to 0$$

olemassaolo. Tämän pitkän tarkan jonon avulla saadaan luvun lopussa todistettua esimerkiksi, että vapaiden Abelin ryhmien tapaan W-ryhmien aliryhmät ovat myös W-ryhmiä.

Kun $h\colon A \to B$ on Abelin ryhmien välinen homomorfismi, niin määritellään tekijäryhmä $\mathrm{Coker}(h) = B/\mathrm{Im}(h)$.

Apulause 5.7. (Käärmelemma) Olkoon

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "q_1"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[r, "r"] \arrow[d] & {} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A' \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "q'"] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
{} \arrow[r, "r"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(g) \arrow[r, "q_2"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(h) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} &
\end{tikzcd}
$$

kommutoiva kaavio Abelin ryhmiä ja homomorfismeja, missä kaksi keskimmäistä riviä ja kaikki sarakkeet ovat tarkkoja. Tällöin on olemassa homomorfismit, jotka tekevät ylimmästä ja alimmasta rivistä tarkat sekä homomorfismi $r\colon \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$, jota kutsutaan *yhdistäväksi homomorfismiksi*, joka tekee jonosta

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{r} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(g) \longrightarrow \mathrm{Coker}(h) \longrightarrow \mathbf{0}$$

tarkan. Merkitsemättä jätetyt sarakkeiden homomorfismit $\mathrm{Ker}(f) \to A$, $\mathrm{Ker}(g) \to B$ ja $\mathrm{Ker}(h) \to C$ ovat inkluusioita sekä myös merkitsemättä jätetyt sarakkeiden homomorfismit $A' \to \mathrm{Coker}(f)$, $B' \to \mathrm{Coker}(g)$ ja $C' \to \mathrm{Coker}(h)$ ovat kanonisia surjektioita.

Todistus. (Vrt. [3, s. 12]) Määritellään ensin yhdistävä homomorfismi $r\colon \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$. Olkoon $c \in \mathrm{Ker}(h)$. Tällöin, koska toinen rivi on tarkka, niin q on surjektio, joten on olemassa sellainen $b \in B$, että $q(b) = c$. Koska $h(c) = 0$, niin kaavion kommutoidessa myös $q'(g(b)) = 0$. Täten, koska kolmas rivi on tarkka, niin jollakin $a' \in A'$ pätee, että $p'(a') = g(b)$. Asetetaan $r(c) = a' + \mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Coker}(f)$. Tämä on mielekästä, sillä jos $b^* = b + p(x) \in B$ $(x \in A)$, niin päädytään alkioon $a^* = a' + f(x)$ ja $a^* + \mathrm{Im}(f) = (a' + f(x)) + \mathrm{Im}(f) = a' + \mathrm{Im}(f)$.

Koska kaavio kommutoi, niin p_1 ja q_1 käyttäytyvät kuin p ja q eli $p_1 = p \restriction \mathrm{Ker}(f)$ ja $q_1 = q \restriction \mathrm{Ker}(g)$ sekä p_2 ja q_2 käyttäytyvät kuin p' ja q'. Täten kaavion osat

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{p_1} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{q_1} \mathrm{Ker}(h)$$

ja

$$\mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{p_2} \mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{q_2} \mathrm{Coker}(h) \longrightarrow \mathbf{0}$$

ovat tarkkoja. Osoitetaan siis vielä tarkkuus kohdassa

$$\mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{r} \mathrm{Coker}(f)$$

Nyt, koska $r(c) = a' + \mathrm{Im}(f)$, kuten edellä määriteltiin, niin $r(c) = 0$, jos ja vain jos $a' = f(a)$ jollakin $a \in A$. Tällöin $g(b) = p'(a') = g(p(a))$ eli $g(b - p(a)) = 0$, joten $b - p(a) \in \mathrm{Ker}(g)$. Lisäksi, koska $c = q(b) = q(b - p(a))$, niin $\mathrm{Im}(q_1) = \mathrm{Ker}(r)$.

Vastaavasti, kun $a' + \mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Ker}(p_2)$, niin $p'(a') \in \mathrm{Im}(g)$. Tällöin on olemassa sellainen $b \in B$, että $p'(a') = g(b)$, joten $g(b) = c \in \mathrm{Ker}(h)$ ja täten $r(c) = r(q(b)) = a' + \mathrm{Im}(f)$ eli $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Ker}(p_2)$. □

Lause 5.8. *Jokaiselle tarkalle jonolle*

$$\mathbf{0} \longrightarrow A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \xrightarrow{h_2} A_3 \longrightarrow \mathbf{0}$$

ja jokaiselle Abelin ryhmälle C on olemassa tarkka jono

$$0 \to \mathrm{Hom}(A_3, C) \xrightarrow{h_1'} \mathrm{Hom}(A_2, C) \xrightarrow{h_2'} \mathrm{Hom}(A_1, C) \to \mathrm{Ext}(A_3, C) \to \mathrm{Ext}(A_2, C) \to \mathrm{Ext}(A_1, C) \to 0$$

Todistus. Ks. [3, ss. 263–264] (Hahmotelma) Olkoot

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

ja

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_2 \longrightarrow F_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow \mathbf{0}$$

vapaita resoluutioita. Tällöin on olemassa vapaa resoluutio

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_1 \oplus H_2 \longrightarrow F_1 \oplus F_2 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Näitä vapaita resoluutioita käytetään kaaviossa

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A_3, C) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(A_2, C) \arrow[r, "q_1"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(A_1, C) \arrow[d] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F_2, C) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}(F_1 \oplus F_2, C) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Hom}(F_1, C) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_2, C) \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(H_1 \oplus H_2, C) \arrow[r, "q'"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(H_1, C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & \mathrm{Ext}(A_3, C) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}(A_2, C) \arrow[r, "q_2"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}(A_1, C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} &
\end{tikzcd}$$

missä keskimmäiset rivit ovat tarkkoja, koska F_1, F_2, H_1, H_2 ovat vapaita Abelin ryhmiä. Lisäksi sarakkeet ovat tarkkoja, joten apulauseen 5.7 nojalla lause saadaan todistettua. □

Nyt voidaan osoittaa määritelmän 5.4 avulla riittävä ja välttämätön ehto sille, että Abelin ryhmä on W-ryhmä.

Lause 5.9. *Abelin ryhmä A on W-ryhmä, jos ja vain jos* $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$.

Todistus. (Vrt. [1, Lauseen 3.5 todistus]) Olkoon A W-ryhmä ja tarkastellaan määritelmän 5.4 mukaista vapaata resoluutiota A:lle:

$$\mathbf{0} \longrightarrow F_1 \xrightarrow{h} F_0 \xrightarrow{g} A \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Osoitetaan, että $\mathrm{Im}(h') = \mathrm{Hom}(F_1, \mathbb{Z})$, missä $h' \colon \mathrm{Hom}(F_0, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(F_1, \mathbb{Z})$ on homomorfismin h indusoima homomorfismi. Toisin sanoen osoitetaan, että homomorfismi h' on surjektio, jolloin $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(F_1, \mathbb{Z})/\mathrm{Hom}(F_1, \mathbb{Z}) = \{0\}$. Nyt määritelmässä 5.4 esiintyvä Abelin ryhmä C on siis kokonaislukujen ryhmä $\mathbb{Z}$.

Olkoon $f \colon F_1 \to \mathbb{Z}$. Merkitään $B := (\mathbb{Z} \oplus F_0)/I$, missä $I := \{(f(y), -h(y)) \mid y \in F_1\}$. Muodostetaan kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{h} & F_0 & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle id_A} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{q} & B & \xrightarrow{r} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Kaaviossa homomorfismit p, q ja r ovat $p(x) = (0, x) + I$, $q(n) = (n, 0) + I$ ja $r((n, x) + I) = g(x)$. Osoitetaan, että kaavion alemman rivin jono on tarkka. Olkoon $n \in \mathrm{Ker}(q)$. Tällöin $(n, 0) \in I$ joten on olemassa sellainen $y \in F_1$, että $f(y) = n$ ja $h(y) = 0$. Koska h on injektio, niin $y = 0$ eli $n = 0$ ja täten q on injektio. Olkoon sitten $a \in A$. Koska g on surjektio, niin on olemassa sellainen $y \in F_0$, että $g(y) = a$. Koska kaavio kommutoi, niin $r(p(y)) = a$ eli r on surjektio. Osoitetaan vielä, että $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(r)$. Olkoon $(n, x) + I \in \mathrm{Im}(q)$. Tällöin on olemassa sellainen $m \in \mathbb{Z}$, että $q(m) = (m, 0) + I = (n, x) + I$. Siis $r((n, x) + I) = r((m, 0) + I) = g(0) = 0$ eli $(n, x) + I \in \mathrm{Ker}(r)$. Olkoon vielä $(n, x) + I \in \mathrm{Ker}(r)$. Tällöin $r((n, x) + I) = g(x) = 0$ eli $x \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(h)$ joten h:n injektiivisyyden nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen $y \in F_1$, että $h(y) = x$. Tällöin $(n, x) + I = (n, h(y)) + I = (n + f(y), 0) + I$ joten $q(n + f(y)) = (n, x) + I$ eli $(n, x) + I \in \mathrm{Im}(q)$.

Koska q on injektio, niin $\mathbb{Z} \cong \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(r)$. Täten, koska A on W-ryhmä, niin on olemassa sellainen $s \colon A \to B$, että $r \circ s = \mathrm{id}_A$. Asetetaan $t \colon B \to B$, $t = \mathrm{id}_B - s \circ r$. Nyt $r \circ t = r \circ \mathrm{id}_B - r \circ s \circ r = r - \mathrm{id}_A \circ r = r - r = 0$, joten $t((n, x) + I) \in \mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Im}(q)$ jokaisella $(n, x) + I \in B$ eli $\mathrm{Im}(t) \subseteq \mathrm{Im}(q)$. Nyt, koska q on injektio, niin $q^{-1} \colon \mathrm{Im}(q) \to \mathbb{Z}$ on homomorfismi ja voidaan asettaa $u = q^{-1} \circ t$. On siis olemassa sellainen $u \colon B \to \mathbb{Z}$, että $q \circ u = t$. Tällöin $q \circ u \circ q = t \circ q = \mathrm{id}_B \circ q - s \circ r \circ q = q$, sillä $(r \circ q)(n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$. Nythän, kun $n \in \mathbb{Z}$, niin $q(n) = q(u(q(n)))$ ja q:n injektiivisyyden nojalla $n = u(q(n))$ eli $u \circ q = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

Asetetaan vielä $w = u \circ p$. Tällöin $h'(w) = w \circ h = u \circ p \circ h = u \circ q \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \circ f = f$ eli $\mathrm{Im}(h') = \mathrm{Hom}(F_1, \mathbb{Z})$.

Oletetaan sitten, että $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \{0\}$ ja tarkastellaan tarkkaa jonoa

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{q} B \xrightarrow{r} A \longrightarrow \mathbf{0},$$

joka vastaa W-ryhmän määritelmän 5.1 tilannetta, sillä nyt $\mathbb{Z} \cong \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(r)$ ja r on surjektiivinen homomorfismi A:lle. Osoitetaan, että r halkeaa.

Olkoon

$$\mathbf{0} \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_0} F_0 \xrightarrow{f_1} A \longrightarrow \mathbf{0}.$$

A:n määritelmän 5.4 mukainen vapaa resoluutio ja olkoon $p\colon F_0 \to B$ sellainen F_0:n vapauden eli projektiivisuuden takaama surjektiivinen homomorfismi, että $r \circ p = f_1$. Olkoon $f\colon F_1 \to \mathbb{Z}$, jolloin voidaan muodostaa kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f_0} & F_0 & \xrightarrow{f_1} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow f & & \big\downarrow p & & \big\downarrow id_A & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{q} & B & \xrightarrow{r} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nyt, koska $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \{0\}$, niin on olemassa sellainen $g\colon F_0 \to \mathbb{Z}$, että $g \circ f_0 = f$. Kun $x \in \mathrm{Ker}(p)$, niin $f_1(x) = (r \circ p)(x) = 0$ joten koska A:n vapaa resoluutio on tarkka, niin $x = f_0(y)$ jollakin $y \in F_1$. Täten $g(x) = (g \circ f_0)(y) = f(y) = 0$, sillä q on injektio ja $(q \circ f)(y) = (p \circ f_0)(y) = p(x) = 0$. Tällöin g indusoi kuvauksen $u\colon B \to \mathbb{Z}$. Kun $n \in \mathbb{Z}$, niin $(u \circ q)(n) = g(x)$, missä $p(x) = q(n)$. Nyt $g(x) = (r \circ p)(x) = (r \circ q)(n) = 0$, joten jälleen koska jono on tarkka, niin $x = f_0(y)$ jollakin $y \in F_1$. Siis $g(x) = (g \circ f_0)(y) = f(y)$. Lisäksi $(q \circ f)(y) = (p \circ f_0)(y) = p(x) = q(n)$. Koska q on injektio, niin $n = f(y) = (u \circ q)(n)$ eli $u \circ q = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

Kun $b \in B$, niin $b = (b - (q \circ u)(b)) + (q \circ u)(b)$. Nyt $(q \circ u)(b) \in \mathrm{Im}(q)$ ja $b - (q \circ u)(b) \in \mathrm{Ker}(u)$, sillä

$$u(b - (q \circ u)(b)) = u(b) - (u \circ q)(u(b)) = u(b) - u(b) = 0.$$

Lisäksi $\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, sillä jos $q(n) = b$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$ ja $u(b) = 0$, niin $0 = (u \circ q)(n) = n$, joten $b = 0$. Täten $B = \mathrm{Im}(q) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

Olkoon $a \in A$. Koska r on surjektio, niin on olemassa sellainen $b = q(n) + k \in B$, missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $k \in \mathrm{Ker}(u)$, että $a = r(q(n) + k) = 0 + r(k) = r(k)$. Täten jokaisella $a \in A$ on olemassa sellainen $k \in \mathrm{Ker}(u)$, että $a = r(k)$. Edelleen $r[\mathrm{Ker}(u)] = A$ ja jos $r(k) = 0$, niin $k \in \mathrm{Im}(q)$ joten tällöin $k = 0$. Siis $\mathrm{Ker}(u) \cong A$. Vielä, koska q on injektio, niin $\mathbb{Z} \cong \mathrm{Im}(q)$ ja täten $B \cong \mathbb{Z} \oplus A$.

On siis löydetty isomorfismit $h\colon B \to \mathbb{Z} \oplus A$ ja $h^{-1}\colon \mathbb{Z} \oplus A \to B$. Nyt jonon

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{q'} \mathbb{Z} \oplus A \xrightarrow{r'} A \longrightarrow \mathbf{0},$$

tarkkuuden nojalla ainoa vaihtoehto homomorfismille $r'\colon \mathbb{Z} \oplus A \to A$ on $r'(n, a) = a$. Tällöin $r = r' \circ h$, joten asettamalla $s'\colon A \to \mathbb{Z} \oplus A$, $s'(a) = (0, a)$ ja $s\colon A \to B$, $s(a) = (h^{-1} \circ s')(a)$ saadaan

$$(r \circ s)(a) = (r \circ h^{-1} \circ s')(a) = (r' \circ h \circ h^{-1} \circ s')(a) = (r' \circ s')(a) = a,$$

kun $a \in A$ joten $r \circ s = \mathrm{id}_A$. Siis r halkeaa eli A on W-ryhmä. □

Yhtäpitävästi voidaan siis määritellä W-ryhmät sellaisiksi Abelin ryhmiksi A, että $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$. Tällöin saadaan vaihtoehtoinen muotoilu Whiteheadin ongelmalle:

Onko jokainen Abelin ryhmä A, jolla pätee $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$, vapaa?

Vapaille Abelin ryhmille saatiin osoitettua merkittävänä tuloksena, että jokainen vapaan Abelin ryhmän aliryhmä on vapaa. Osoitetaan edellisten lauseiden avulla, että sama pätee myös W-ryhmille. Lisäksi osoitetaan, että jokainen W-ryhmä on torsioton.

Lause 5.10. *W-ryhmien aliryhmät ovat W-ryhmiä.*

Todistus. (Vrt. [1, Lauseen 3.1 todistus]) Olkoon A_2 W-ryhmä ja $A_1 \subseteq A_2$ sen aliryhmä. Tällöin jono

$$\mathbf{0} \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\ i\ } A_2 \xrightarrow{\ h\ } A_2/A_1 \longrightarrow \mathbf{0},$$

missä i on inkluusio ja h kanoninen surjektio, on tarkka. Lauseen 5.8 nojalla on olemassa tarkka jono

$$\operatorname{Ext}(A_2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Ext}(A_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Koska A_2 on W-ryhmä, niin lauseen 5.9 nojalla $\operatorname{Ext}(A_2, \mathbb{Z}) = 0$ ja täten on oltava $\operatorname{Ext}(A_1, \mathbb{Z}) = 0$. Siis lauseen 5.9 nojalla A_1 on W-ryhmä. □

Lause 5.11. *Jokainen W-ryhmä on torsioton.*

Todistus. (Vrt. [1, Lauseen 3.2 todistus]) Olkoon A W-ryhmä ja oletetaan, että A ei ole torsioton. Tällöin on olemassa sellainen $a \in A$, että $\langle a \rangle$ on epätriviaali äärellinen syklinen ryhmä. Tarkastellaan kanonista surjektiota $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nyt $\operatorname{Ker}(p) = n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ mutta p ei halkea, sillä $\mathbb{Z}$ on torsioton. Jos p halkeaisi, niin olisi olemassa sen halkaiseva homomorfismi $h\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, jolloin aliryhmä $h[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \subseteq \mathbb{Z}$ ei olisi torsioton, mikä olisi ristiriitaista.

Siis $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ei ole W-ryhmä millään n. Nyt kuitenkin $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jollakin n, mikä on ristiriita lauseen 5.10 nojalla. □

Seuraavaa tulosta tarvitaan, kun osoitetaan, että jokainen numeroituva W-ryhmä on vapaa.

Lause 5.12. *Olkoon B_1 W-ryhmä ja $B_0 \subseteq B_1$ sellainen aliryhmä, että B_1/B_0 ei ole W-ryhmä. Tällöin on olemassa homomorfismi $h\colon B_0 \to \mathbb{Z}$, jota ei voida laajentaa homomorfismiksi $B_1 \to \mathbb{Z}$.*

Todistus. (Vrt. [1, Lauseen 3.3 todistus]) Tarkastellaan tarkkaa jonoa

$$\mathbf{0} \longrightarrow B_0 \xrightarrow{\ i\ } B_1 \longrightarrow B_1/B_0 \longrightarrow \mathbf{0},$$

missä i on inkluusio. Lauseen 5.8 nojalla on olemassa tarkka jono

$$\operatorname{Hom}(B_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\ i'\ } \operatorname{Hom}(B_0, \mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Ext}(B_1/B_0, \mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Ext}(B_1, \mathbb{Z}).$$

Lauseen 5.9 nojalla $\operatorname{Ext}(B_1, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}$ ja koska B_1/B_0 ei ole W-ryhmä, niin $\operatorname{Ext}(B_1/B_0, \mathbb{Z}) \neq \mathbf{0}$. Täten i' ei ole surjektio eli on olemassa $h \in \operatorname{Hom}(B_0, \mathbb{Z})$, jota ei voida laajentaa homomorfismiksi $B_1 \to \mathbb{Z}$. □

6 Numeroituvat W-ryhmät

Tässä luvussa osoitetaan, että jokainen numeroituva W-ryhmä on vapaa. Whiteheadin ongelmaan saadaan siis myönteinen vastaus, kun rajoitutaan numeroituviin W-ryhmiin. Aloitetaan tuloksen alustaminen määrittelemällä torsiottoman Abelin ryhmän puhdas aliryhmä sekä Abelin ryhmän aliryhmän puhdas sulkeuma. Luvun päälähteenä on [1].

Määritelmä 6.1. Olkoon A torsioton Abelin ryhmä ja $B \subseteq A$ sen aliryhmä. Aliryhmää B kutsutaan A:n *puhtaaksi aliryhmäksi*, mikäli A/B on torsioton.

Kuten luvussa 4 mainittiin, $\mathbb{Z}$ on torsioton Abelin ryhmä. Toisaalta tällöin esimerkiksi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ei ole äärellisenä torsioton, eli $2\mathbb{Z}$ ei ole Abelin ryhmän $\mathbb{Z}$ puhdas aliryhmä. Lisäksi, kuten luvussa 4 myös mainittiin, niin tekijäryhmän $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ jokainen alkio on torsioalkio. Erityisesti $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on tekijäryhmän $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ aliryhmä, joka sisältää sen kaikki torsioalkiot eli *torsioaliryhmä*. Nyt kolmannen isomorfialauseen nojalla $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ eli $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ on torsioton. Siis $\mathbb{Q}$ on torsiottoman Abelin ryhmän $\mathbb{R}$ puhdas aliryhmä.

Määritelmä 6.2. Olkoon A Abelin ryhmä ja $B \subseteq A$ sen aliryhmä. Aliryhmän B *puhdas sulkeuma* A:ssa on aliryhmä $B' := \{a \in A \mid na \in B \text{ jollakin } n \neq 0\}$.

On helposti todettavissa, että määritelmän 6.2 aliryhmä B' on pienin A:n puhdas aliryhmä, joka sisältää B:n. Osoitetaan sitten vapaille Abelin ryhmille ominaisuus käyttäen puhtaan aliryhmän määritelmää.

Lause 6.3. *Olkoon A Abelin ryhmä. Jos A on vapaa, niin jokainen äärellisesti viritetty A:n aliryhmä sisältyy äärellisesti viritettyyn A:n puhtaaseen aliryhmään.*

Todistus. Olkoon A vapaa ja $B \subseteq A$ äärellisesti viritetty. Nyt B:n puhdas sulkeuma B' on lauseen 4.10 nojalla vapaa. Olkoon nyt X aliryhmän B kanta ja Y puhtaan sulkeuman B' kanta. Nyt $B = \langle X \rangle$, $B' = \langle Y \rangle$ ja X on äärellinen. Tehdään vastaoletus, että $|Y| = |X| + 1$. Kun $y \in Y$, niin on olemassa sellainen $n_y \in \mathbb{Z}_+$, että $n_y y \in B$. Merkitään $n := \prod_{y \in Y} n_y$. Tällöin $ny = \sum_{x \in X} m_{x,y} x$. Lisäksi $(m_{x,y})_{x \in X} \in {}^X\mathbb{Z} \subseteq {}^X\mathbb{Q}$ ja ${}^X\mathbb{Q}$ on funktioavaruus. Täten, kun $\sum_{y \in Y} \lambda_y m_{x,y} = 0$ skalaareilla $\lambda_y \in \mathbb{Q}$, niin saadaan

$$\sum_{y \in Y} \lambda_y n y = \sum_{y \in Y} \lambda_y \sum_{x \in X} m_{x,y} x = \sum_{y \in Y} \lambda_y m_{x,y} \sum_{x \in X} x = 0.$$

Tällöinhän $n \sum_{y \in Y} \lambda_y y$, mutta $\sum_{y \in Y} \lambda_y y \neq 0$, mikä on ristiriita.

Siis $|X| = |Y|$, kun X on B:n kanta ja Y on B':n kanta, niin B:n ollessa äärellisesti viritetty on myös B':n oltava äärellisesti viritetty. □

Osoitetaan, että edellinen lause pätee kääntäen numeroituville torsiottomille Abelin ryhmille. Tämä lause tunnetaan myös *Pontryaginin kriteerinä*.

Lause 6.4. *(Pontryaginin kriteeri) Olkoon A sellainen numeroituva torsioton Abelin ryhmä, että jokainen A:n äärellisesti viritetty aliryhmä sisältyy äärellisesti viritettyyn A:n puhtaaseen aliryhmään. Tällöin A on vapaa.*

Todistus. Listataan numeroituvan A:n alkiot siten, että $A = \{a_n \mid n < \omega\}$, ja määritellään induktiolla luvun $n < \omega$ suhteen sileä ketju $\{B_n \mid n < \omega\}$ äärellisesti viritettyjä A:n puhtaita aliryhmiä. Asetetaan $B_0 = \{0\}$ ja jos B_n on määritelty, niin olkoon B_{n+1} sellainen äärellisesti viritetty A:n puhdas aliryhmä, että $B_n \cup \{a_n\} \subseteq B_{n+1}$. Tällöin $\bigcup_{n<\omega} B_n = A$. Nyt B_{n+1}/B_n on torsioton, sillä B_n on A:n puhdas aliryhmä, ja äärellisesti viritetty, koska B_{n+1} on äärellisesti viritetty. Täten lauseen 4.12 nojalla B_{n+1}/B_n on vapaa ja lauseen 4.18 nojalla A on vapaa. □

Määritellään seuraavaksi luvun päätuloksen todistuksessa käytettävät $(B, \mathbb{Z})$-ryhmät, joissa Abelin ryhmän perusjoukko on muotoa $B \times \mathbb{Z}$, missä B on Abelin ryhmä.

Määritelmä 6.5. Olkoon B Abelin ryhmä. Kutsutaan $(B, \mathbb{Z})$*-ryhmäksi* sellaista Abelin ryhmää C, jonka perusjoukko on muotoa $B\times\mathbb{Z}$ ja projektio $p\colon C \to B, p(b, n) = b$ on homomorfismi sekä $(0, n) + (0, m) = (0, n + m)$ jokaisella $n, m \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki $(B, \mathbb{Z})$-ryhmästä on $B \oplus \mathbb{Z}$. Erityisen hyödyllisen $(B, \mathbb{Z})$-ryhmän käsitteestä tekee se, että $\mathrm{Ker}(p) = \{0\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Tällöinhän W-ryhmien määritelmästä seuraa suoraan, että jos projektio $p\colon C \to B$ ei halkea, niin B ei ole W-ryhmä.

Apulause 6.6. Olkoon B_1 Abelin ryhmä ja $B_0 \subseteq B_1$ sen sellainen aliryhmä, että B_1 on W-ryhmä mutta B_1/B_0 ei ole W-ryhmä. Olkoon lisäksi C_0 $(B_0, \mathbb{Z})$-ryhmä ja h projektion $p_0\colon C_0 \to B_0$ halkaiseva homomorfismi.Tällöin on olemassa sellainen Abelin ryhmää C_0 laajentava $(B_1, \mathbb{Z})$-ryhmä C_1, että homomorfismille h ei ole laajennusta projektion $p_1\colon C_1 \to B_1$ halkaisevaksi homomorfismiksi.

Todistus. W-ryhmän aliryhmänä B_0 on W-ryhmä, joten lausetta edeltävän kommentin nojalla $p_0\colon C_0 \to B_0$ halkeaa. Täten on olemassa sellainen homomorfismi $h\colon B_0 \to C_0$, että $p_0 \circ h = \mathrm{id}_{B_0}$ joten jokaisella $b \in B_0$ on olemassa sellainen $m \in \mathbb{Z}$, että h on muotoa $h(b) = (b, m)$. Tällöin $g\colon B_0 \oplus \mathbb{Z} \to C_0$, $g(b, n) = h(b) + (0, n)$ on isomorfismi. Voidaan siis olettaa, että $C_0 = B_0 \oplus \mathbb{Z}$ ja $h(b) = (b, 0)$ jokaisella $b \in B_0$. Merkitään $\tilde{C_1} := B_1 \oplus \mathbb{Z}$ ja olkoon $f\colon B_0 \to \mathbb{Z}$ lauseen 5.12 takaama homomorfismi. Määritellään $q\colon C_0 \to \tilde{C_1}$, $q(b, n) = (b, n + f(b))$. Koska homomorfismia f ei voida laajentaa homomorfismiksi $B_1 \to \mathbb{Z}$, niin ei ole olemassa homomorfismia $\tilde{h_1}\colon B_1 \to \tilde{C_1}$, joka on halkaiseva homomorfismi projektiolle $p_1\colon \tilde{C_1} \to B_1$ ja $\tilde{h_1}\restriction B_0 = q \circ h$. Jos tällainen $\tilde{h_1}$ olisi olemassa, niin asettamalla $r := p_1 \circ \tilde{h_1}\colon B_1 \to \mathbb{Z}$ saadaan jokaisella $b \in B_0$, että $r(b) = p_1(\tilde{h_1}(b)) = p_1(q(h(b))) = f(b)$ eli r laajentaa ristiriitaisesti lauseen 5.12 takaamaa homomorfismia. Asetetaan joukkojen välinen bijektiivinen kuvaus $s\colon \tilde{C_1} \to B_1 \times \mathbb{Z}$,

$$s(b, n) = \begin{cases} (b, n) & \text{jos } b \notin B_0 \\ (b, n - f(b)) & \text{jos } b \in B_0 \end{cases}$$

Nyt, kun $(b, n) \in B_0 \oplus \mathbb{Z}$, niin $s(q(b, n)) = s(b, n + f(b)) = (b, n)$ eli $s \circ q$ on inkluusio $B_0 \oplus \mathbb{Z} \to B_1 \times \mathbb{Z}$. Olkoon sitten C_1 joukon $B_1 \times \mathbb{Z}$ Abelin ryhmä missä laskutoimitus $u + v = s(s^{-1}(u) + s^{-1}(v))$, kun $u, v \in B_1 \times \mathbb{Z}$ tekee kuvauksesta s ryhmäisomorfismin. Tällöinhän C_1 laajentaa Abelin ryhmää C_0, mutta kuten yllä osoitettiin, niin ei ole olemassa laajennusta homomorfismille h projektion $p_1\colon C_1 \to B_1$ halkaisevaksi homomorfismiksi. □

Nyt voidaan todistaa luvun päätulos ja samalla saadaan myöntävä vastaus Whiteheadin ongelmaan, kun rajoitutaan numeroituviin W-ryhmiin.

Lause 6.7. *Jokainen numeroituva W-ryhmä on vapaa.*

Todistus. Olkoon A numeroituva W-ryhmä. Lauseen 5.11 nojalla A on torsioton. Osoitetaan, että A toteuttaa Pontryaginin kriteerin 6.4 oletuksen. Tällöinhän A olisi vapaa. Tehdään vastaoletus, että A ei toteuta kriteerin oletusta eli on olemassa sellainen äärellisesti viritetty A:n aliryhmä B_0, että se ei sisälly äärellisesti viritettyyn A:n puhtaaseen aliryhmään. Olkoon B aliryhmän B_0 puhdas sulkeuma A:ssa. Vastaoletuksen nojalla B ei ole äärellisesti viritetty. Täten numeroituvana B voidaan kirjoittaa yhdisteenä aidosti kasvavasta ketjusta äärellisesti viritettyjä Abelin ryhmiä

$$B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n \subsetneq \cdots, \quad n < \omega.$$

Määritellään induktiolla luvun n suhteen sellainen ketju Abelin ryhmiä

$$C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n \subsetneq \cdots, \quad n < \omega,$$

että C_n on torsioton $(B_m, \mathbb{Z})$-ryhmä jokaisella $n < \omega$. Ennen tämän määrittelyn aloittamista huomataan, että jos S on B_0:n virittäjäjoukko ja C on torsioton Abelin ryhmä, niin jokainen homomorfismi $h\colon B \to C$ määrittyy täysin joukosta $S \subseteq B_0 \subseteq B$. Kun $b \in B$, niin $nb \in B_0$ jollakin $n \neq 0$. Koska S määrittää homomorfismin h ja C on torsioton, niin yhtälöllä $nx = h(nb)$ on yksikäsitteinen ratkaisu Abelin ryhmässä C: $x = h(b)$.

Olkoon $\{g_n \mid n < \omega\}$ sellainen lista joukkojen välisiä kuvauksia $g_n\colon S \to S \times \mathbb{Z}$, että $p \circ g_n = \mathrm{id}_S$, missä p on projektio $p\colon S \times \mathbb{Z} \to S$. Koska S on äärellinen ja $\mathbb{Z}$ numeroituva, niin listakin on numeroituva. Olkoon sitten $C_0 = B_0 \oplus \mathbb{Z}$ ja oletetaan, että C_n on määritelty. Jos g_n voidaan laajentaa halkaisevaksi homomorfismiksi h projektiolle $p_n\colon C_n \to B_n$, niin asetetaan, että C_{n+1} on Abelin ryhmän C_n sellainen laajennus, että homomorfismille h ei ole laajennusta halkaisevaksi homomorfismiksi projektiolle $p_{n+1}\colon C_{n+1} \to B_{n+1}$. Nyt B_{n+1}/B_n ei ole torsioton, sillä kun $b \in B_{n+1}$, niin $mb \in B_0 \subseteq B_n$ jollakin $m \neq 0$ eli $mb + B_n = B_n$. Täten lauseen 5.11 nojalla B_{n+1}/B_n ei ole W-ryhmä, joten apulauseen 6.6 nojalla tällainen C_{n+1} on olemassa. Jos kuvausta g_n ei voida laajentaa halkaisevaksi homomorfismiksi h projektiolle $p_n\colon C_n \to B_n$, niin asetetaan, että h on jokin halkaiseva homomorfismi projektiolle $p_n\colon C_n \to B_n$ ja määritellään C_{n+1} kuten edellä. Koska B_n on äärellisesti viritetty ja torsioton, niin lauseen 4.12 nojalla se on myös vapaa, joten lauseen 4.15 nojalla tällainen jokin h on olemassa.

Olkoon nyt $C := \bigcup_{n<\omega} C_n$. Määritelmän nojalla C on torsioton $(B, \mathbb{Z})$-ryhmä. Oletetaan, että projektio $p\colon C \to B$ halkeaa ja olkoon $h\colon B \to C$ halkaiseva homomorfismi p:lle. Tällöin $h{\restriction}S = g_n$ jollakin $n < \omega$, joten $h{\restriction}B_n$ on halkaiseva homomorfismi projektiolle $p_n\colon C_n \to B_n$ ja täten laajennus kuvaukselle g_n ja voidaan edelleen laajentaa halkaisevaksi homomorfismiksi projektiolle $p_{n+1}\colon C_{n+1} \to B_{n+1}$ mutta tämä on ristiriidassa juuri määritellyn C_{n+1}:n kanssa. Täten projektio $p\colon C \to B$ ei halkea. Määritelmän 6.5 jälkeisissä kommenteissa mainittiin, että $\mathrm{Ker}(p) \cong \mathbb{Z}$ ja koska B on W-ryhmän aliryhmänä W-ryhmä, niin päädytään ristiriitaan eli A toteuttaa Pontryaginin kriteerin 6.4 oletuksen ja on täten vapaa. □

7 Epävapaat W-ryhmät

Tässä luvussa osoitetaan päätuloksena, että systeemissä $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$ löydetään epävapaita W-ryhmiä eli esitetään kieltävä vastaus Whiteheadin ongelmaan toisin kuin edellisessä luvussa numeroituvien W-ryhmien tapauksessa. Tätä varten käytetään Martinin aksiooman nojalla todistettua lausetta 3.3. Päälähteenä tässä luvussa on [1].

Ensimmäiseksi määritellään sellaiset Abelin ryhmät, joiden jokainen numeroituva aliryhmä on vapaa.

Määritelmä 7.1. Abelin ryhmää A sanotaan $\aleph_1$-*vapaaksi*, mikäli sen jokainen aliryhmä $B \subseteq A$, jolle pätee, että $|B| < \aleph_1$, on vapaa.

Määritelmästä 7.1 ja lauseesta 6.7 seuraa nyt suoraan, että jokainen W-ryhmä on $\aleph_1$-vapaa. Kun Abelin ryhmä A on torsioton, niin aliryhmän $B \subseteq A$ ollessa äärellisesti viritetty on sen oltava aliryhmänä myös torsioton ja täten lauseen 4.12 nojalla vapaa. Jos taas Abelin ryhmän A jokainen äärellisesti viritetty aliryhmä on vapaa, niin A:n on oltava torsioton. Mikäli A ei olisi torsioton, niin olisi olemassa sellainen $a \in A$, että $na = 0$ jollakin $n \neq 0$ jolloin $\langle a \rangle \subseteq A$ olisi äärellisesti viritetty, mutta äärellisenä se ei ole vapaa. Täten torsiottomuus on yhtäpitävää sen kanssa, että jokainen äärellisesti viritetty aliryhmä on vapaa. Tällöin määritelmää 7.1 voidaan pitää vahvistuksena torsiottomuudelle ja seuraten tätä esitetään seuraavaksi vahvistus puhtauden määritelmälle.

Määritelmä 7.2. Jos Abelin ryhmä A on $\aleph_1$-vapaa, niin aliryhmää $B \subseteq A$ kutsutaan $\aleph_1$-*puhtaaksi aliryhmäksi*, mikäli A/B on $\aleph_1$-vapaa.

Määritelmät 7.2 ja 6.1 ovat siis eri muotoa, sillä $\aleph_1$-puhtauden määritelmässä tekijäryhmältä edellytetään $\aleph_1$-vapautta, kun taas puhtauden määritelmässä edellytetään vain torsiottomuutta.

Stephen Chase todisti vuonna 1963 ilmestyneessä julkaisussa, että olettaen kontinuumihypoteesin, jokainen W-ryhmä A toteuttaa seuraavan *Chasen kriteeriksi* kutsutun ehdon:

> A on sellainen $\aleph_1$-vapaa Abelin ryhmä, että jokainen A:n numeroituva aliryhmä sisältyy numeroituvaan $\aleph_1$-puhtaaseen A:n aliryhmään.

Chasen kriteeri on merkittävässä roolissa läpi loppututkielman, sillä tullaan osoittamaan, että Martinin aksiooman ja kontinuumihypoteesin negaation pätiessä jokainen Abelin ryhmä, jonka mahtavuus on $\aleph_1$, ja joka toteuttaa Chasen kriteerin on W-ryhmä. Lisäksi systeemissä ZFC voidaan todistaa, että on olemassa epävapaa Abelin ryhmä, jonka mahtavuus on $\aleph_1$ ja joka toteuttaa Chasen kriteerin. Tällöinhän Whiteheadin ongelmaan saadaan kieltävä vastaus systeemissä $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$.

Osoitetaan nyt riittävä ja välttämätön ehto Abelin ryhmän vapaudelle Chasen kriteerin suhteen. Tätä varten esitetään ja todistetaan ensin apulause, jonka avulla saadaan muodostettua Chasen kriteerin toteuttavia Abelin ryhmiä sileän ketjun yhdisteenä. Tästä lähtien ω_1 on pienin ylinumeroituva ordinaali eli ensimmäinen sellainen ordinaali, että $|\omega_1| = \aleph_1$.

Apulause 7.3. Olkoon A sellainen Abelin ryhmä, että $|A| = \aleph_1$. Tällöin A toteuttaa Chasen kriteerin, jos ja vain jos A on sellainen yhdiste sileästä ketjusta numeroituvia vapaita Abelin ryhmiä

$$A_0 \subseteq \cdots \subseteq A_\alpha \subseteq \cdots, \alpha < \omega_1,$$

että $A_0 = \{0\}$ ja jokaisella ordinaalilla $\alpha < \omega_1$ Abelin ryhmä $A_{\alpha+1}$ on $\aleph_1$-puhdas A:ssa.

Todistus. Oletetaan, että A toetuttaa Chasen kriteerin. Koska $|A| = \aleph_1$, niin A:n alkiot voidaan listata siten, että

$$A = \{a_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}.$$

Määritellään A_α transfiniittisella induktiolla ordinaaleille $\alpha < \omega_1$. Asetetaan $A_0 = \{0\}$ ja oletetaan, että A_β on määritelty jokaiselle $\beta < \alpha$. Jos α on raja, niin asetetaan $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$. Tällöin ketju on sileä ja A_α on numeroituvien Abelin ryhmien numeroituvana yhdisteenä numeroituva joten se on vapaa, sillä A on $\aleph_1$-vapaa. Jos α on seuraaja $\alpha = \beta + 1$, niin asetetaan $A_\beta \cup \{a_\beta\} \subseteq A_\alpha$ ja A_α on numeroituva ja $\aleph_1$-puhdas A:ssa. Chasen kriteeri, jonka A toteuttaa, takaa A_α:n olemassaolon.

Olkoon sitten A yhdiste lauseessa muotoillusta sileästä ketjusta ja $B \subseteq A$ numeroituva. Koska $A = \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, niin on olemassa sellainen $\beta < \omega_1$, että $B \subseteq A_{\beta+1}$. Koska $A_{\beta+1}$ on vapaa, niin B on vapaa eli A on $\aleph_1$-vapaa. Lisäksi oletuksen nojalla $A_{\beta+1}$ on $\aleph_1$-puhdas A:ssa ja numeroituva, joten A toteuttaa Chasen kriteerin. $\square$

Olkoon A sellainen Abelin ryhmä, että $|A| = \aleph_1$ ja A toteuttaa Chasen kriteerin. Tällöin apulauseen 7.3 nojalla A on sellainen yhdiste sileästä ketjusta numeroituvia vapaita Abelin ryhmiä

$$A_0 \subseteq \cdots \subseteq A_\alpha \subseteq \cdots, \alpha < \omega_1,$$

että $A_0 = \{0\}$ ja jokaisella ordinaalilla $\alpha < \omega_1$ Abelin ryhmä $A_{\alpha+1}$ on $\aleph_1$-puhdas A:ssa. Tämän jonon nojalla määritellään A:lle sellainen kaikkien rajaordinaalien $\lambda < \omega_1$ joukko E_A, että A_λ ei ole $\aleph_1$-puhdas A:ssa. Osoitetaan riittävä ja välttämätön ehto E_A:n suhteen Abelin ryhmän vapaudelle. Määritellään tätä varten vielä uusia käsitteitä.

Määritelmä 7.4. Kuvausta $f : \omega_1 \to \omega_1$ kutsutaan *aidosti kasvavaksi*, mikäli jos $\alpha < \beta$, niin $f(\alpha) < f(\beta)$, kun $\alpha, \beta \in \omega_1$. Lisäksi kuvausta f sanotaan *jatkuvaksi*, mikäli jokaisella rajaordinaalilla $\lambda \in \omega_1$ pätee, että $f(\lambda) = \sup\{f(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$. Edelleen f on *normaali*, mikäli se on aidosti kasvava ja jatkuva.

Kun λ on rajaordinaali, niin osajoukko $X \subseteq \lambda$ on *rajoittamaton*, mikäli $\sup X = \lambda$. Huomataan, että kun $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ on normaali kuvaus, niin $f[\omega_1] \subseteq \omega_1$ on normaalin kuvauksen kuvana rajoittamaton joukossa ω_1.

Määritelmä 7.5. Joukon ω_1 osajoukkoa S sanotaan *kiinteäksi* eli *stationaariseksi*, mikäli $f[\omega_1] \cap S \neq \emptyset$ jokaisella normaalilla kuvauksella $f\colon \omega_1 \to \omega_1$.

Nythän, kun $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ on normaali kuvaus, niin kuvauksena tietenkin $f[\omega_1] \neq \emptyset$, joten $f[\omega_1] \cap \omega_1 \neq \emptyset$ eli ω_1 itse on ω_1:n kiinteä osajoukko. Esitetään vielä toinen esimerkki ω_1:n kiinteästä osajoukosta.

Esimerkki 7.6. Olkoon $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ normaali kuvaus ja $\lambda \in \omega_1$ rajaordinaali. Koska f on normaali, niin $f(\lambda) = \sup\{f(\beta) \mid \beta < \lambda\}$. Oletetaan, että tämä $f(\lambda)$ ei ole rajaordinaali. Koska f on normaalina aidosti kasvava, niin $f(\lambda) \neq 0$. Täten, koska $f(\lambda) \neq 0$ ja $f(\lambda)$ ei ole rajaordinaali, niin $f(\lambda) = \alpha + 1$ jollakin ordinaalilla α. Tällöin $\sup\{f(\beta) \mid \beta < \lambda\} = \alpha + 1$.

Jos olisi, että $f(\beta) \leq \alpha$ jokaisella $\beta < \lambda$, niin $\sup\{f(\beta) \mid \beta < \lambda\} \leq \alpha$ eli on oltava olemassa sellainen $\gamma < \lambda$, että $f(\gamma) = \alpha + 1$. Nyt λ on rajaordinaali, joten $\gamma + 1 < \lambda$ ja $\gamma < \lambda$ jolloin saadaan, koska f on normaalina aidosti kasvava, että

$$\alpha + 1 = f(\gamma) < f(\gamma + 1) \leq \sup\{f(\beta) \mid \beta < \lambda\} = \alpha + 1,$$

mikä on ristiriitaista. Siis $f(\lambda)$ on rajaordinaali eli on osoitettu, että jokaisen rajaordinaalin kuva normaalissa kuvauksessa $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ on rajaordinaali.

Erityisesti tällöin saadaan, että $S := \{\lambda \in \omega_1 \mid \lambda \text{ on rajaordinaali}\} \subseteq \omega_1$ on ω_1:n kiinteä osajoukko.

Esimerkkejä joukon ω_1 kiinteistä osajoukoista ovat siis kaikkien numeroituvien rajaordinaalien osajoukko ja ω_1 itse.

Osoitetaan sitten, että Abelin ryhmän A vapaus on yhtäpitävää sen kanssa, että E_A ei ole ω_1;n kiinteä osajoukko. Tosin rajoitutaan Abelin ryhmään, jonka mahtavuus on $\aleph_1$. Käytetään seuraavan lauseen esittämisessä ja todistamisessa lauseen 7.3 ja sen jälkeisten kommenttien merkintöjä joukolle E_A.

Lause 7.7. *Olkoon A sellainen Abelin ryhmä, että $|A| = \aleph_1$. Tällöin A on vapaa jos ja vain jos E_A ei ole joukon ω_1 kiinteä osajoukko.*

Todistus. Oletetaan, että E_A ei ole kiinteä ω_1:n osajoukko, joten olkoon $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ sellainen normaali kuvaus, että $f[\omega_1] \cap E_A = \emptyset$. Merkitään lisäksi $\tilde{A_\alpha} := A_{f(\alpha)}$. Koska $f[\omega_1]$ on rajoittamaton ja f on jatkuva, niin $\{\tilde{A_\alpha} \mid \alpha < \omega_1\}$ on sellainen sileä ketju Abelin ryhmiä, että $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \tilde{A_\alpha}$. Oletuksen nojalla $f[\omega_1] \cap E_A = \emptyset$, joten $\tilde{A_\alpha}$ on $\aleph_1$-puhdas A:ssa jokaisella $\alpha < \omega_1$ ja täten $\aleph_1$-puhtauden määritelmän nojalla $\tilde{A_{\alpha+1}}/\tilde{A_\alpha}$ on vapaa jokaisella $\alpha < \omega_1$. Tällöin lauseen 4.18 nojalla A on vapaa.

Oletetaan sitten, että A on vapaa. Olkoon X A:n kanta. Määritellään transfiniittisellä induktiolla sellainen sileä ketju $\{X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ kannan X osajoukkoja ja sellainen normaali kuvaus $f\colon \omega_1 \to \omega_1$, että X_α on Abelin ryhmän $A_{f(\alpha)}$ kanta jokaisella $\alpha < \omega_1$. Olkoon $X_0 = \emptyset$ ja $f(0) = 0$. Oletetaan, että X_β ja $f(\beta)$ on jo määritelty jokaisella $\beta < \alpha$. Jos α on raja, niin asetetaan $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$

ja $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\}$. Nyt X_α on Abelin ryhmän $A_{f(\alpha)}$ kanta, sillä $A_f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} A_f(\beta)$. Jos α on seuraaja $\alpha = \beta + 1$, niin asetetaan, että Y_0 on sellainen numeroituva osajoukko $Y_0 \subseteq X$, että $X_\beta \subsetneq Y_0$. Tämä Y_0 on mahdollista löytää, sillä X on ylinumeroituva. Olkoon γ_0 sellainen ordinaali, että $Y_0 \subseteq A_{\gamma_0}$ ja olkoon Y_1 sellainen numeroituva osajoukko $Y_1 \subseteq X$, että $A_{\gamma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$. Jatkamalla tätä induktiolla luvun n suhteen saadaan sellainen ketju

$$X_\beta \subsetneq Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots \subseteq Y_n \subseteq \cdots, \qquad n < \omega$$

numeroituvia kannan X osajoukkoja sekä sellainen jono

$$f(\beta) < \gamma_0 \leq \cdots \leq \gamma_n \leq \cdots, \qquad n < \omega$$

ordinaaleja, että jokaisella $n < \omega$ pätee $Y_n \subseteq A_{\gamma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$. Tällöin asettamalla $X_\alpha = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ ja $f(\alpha) = \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\}$ saadaan, että X_α on Abelin ryhmän $A_{f(\alpha)}$ kanta. Täten on konstruoitu sellainen sileä ketju $\{X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ kannan X osajoukkoja ja sellainen normaali kuvaus $f\colon \omega_1 \to \omega_1$, että X_α on Abelin ryhmän $A_{f(\alpha)}$ kanta jokaisella $\alpha < \omega_1$. Nyt E_A ei ole joukon ω_1 kiinteä osajoukko, sillä jokaisella $\alpha < \omega_1$ pätee, että $f(\alpha) \notin E_A$, koska $A/A_{f(\alpha)}$ on isomorfinen joukon $X \setminus X_\alpha$ virittämän vapaan joukon kanssa ja täten $A_{f(\alpha)}$ on $\aleph_1$-puhdas A:ssa. □

Luvussa 6 osoitettiin, että rajoittumalla numeroituviin W-ryhmiin saadaan myönteinen vastaus Whiteheadin ongelmaan. Osoitetaan nyt lopuksi, että systeemissä ZFC + MA + ¬ CH Whiteheadin ongelmaan saadaan kielteinen vastaus, sillä löydetään W-ryhmiä, joiden mahtavuus on $\aleph_1$ ja jotka eivät ole vapaita.

Edellä mainittua varten konstruoidaan ensin osittainjärjestetty joukko homomorfismeja, jonka osoitetaan toteuttavan lauseen 3.3 ehdot (i)-(iii).

Olkoon A sellainen Abelin ryhmä, että $|A| = \aleph_1$ ja A toteuttaa Chasen kriteerin. Olkoon myös $p\colon B \to A$ sellainen Abelin ryhmien välinen surjektiivinen homomorfismi, että $\mathrm{Ker}(p) \cong \mathbb{Z}$. Asetetaan, että P on kaikkien niiden homomorfismien $h\colon S \to B$ joukko, että $p \circ h = \mathrm{id}_S$ ja S on äärellisesti viritetty A:n puhdas aliryhmä. Nythän P toteuttaa lauseen 3.3 ehdon (i) selvästi. Esitetään ja todistetaan apulause, jonka nojalla P toteuttaa lauseen 3.3 ehdon (ii) käyttäen tässä tekstikappaleessa esiteltyjä merkintöjä.

Apulause 7.8. Jos $h \in P$ ja $F \subseteq A$ on äärellinen, niin olemassa sellainen $h' \in P$, että h' laajentaa homomorfismia h ja $F \subseteq \mathrm{dom}(h')$.

Todistus. Olkoon $h \in P$, $F = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$ äärellinen ja $S := \mathrm{dom}(h)$. Nyt S on äärellisesti viritetty eli $S = \langle S_0 \rangle$ jollakin äärellisellä $S_0 = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Asetetaan

$$S' = \{a \in A \mid na \in \langle S_0 \cup F \rangle \text{ jollakin } n \neq 0\}.$$

S' on nyt aliryhmän $\langle S_0 \cup F \rangle$ puhtaana sulkeumana sellainen A:n puhdas aliryhmä, että $S \cup F \subseteq S'$. Lisäksi $|S_0 \cup F| = |\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m\}| \leq m + k$, joten S' on äärellisesti viritetty. Lisäksi S on puhdas A:ssa ja S' on äärellisesti viritetty, joten S'/S on äärellisesti viritetty ja torsioton.

Täten lauseen 4.12 nojalla S'/S on vapaa ja edelleen seurauksen 4.16 nojalla S:n kanta voidaan laajentaa S':n kannaksi. Abelin ryhmän S' kanta on siis muotoa $X \cup Y$, missä X on S:n kanta. Jos $x \in X$, niin asetetaan $h'(x) = h(x)$. Jos $y \in Y$, niin asetetaan $h'(y) = b_y$, missä b_y on sellainen B:n alkio, että $p(b_y) = y$. Tällöin $h \subseteq h'$ ja $F \subseteq \mathrm{dom}(h')$. □

Osoitetaan sitten kahden apulauseen avulla, että P toteuttaa lauseen 3.3 ehdon (iii).

Apulause 7.9. Jos $P' \subseteq P$ on sellainen ylinumeroituva osajoukko, että on olemassa sellainen A:ssa puhdas ja vapaa aliryhmä A', että $\mathrm{dom}(h) \subseteq A'$ jokaisella $h \in P'$, niin on olemassa sellaiset $h_1, h_2 \in P'$ ja $h_3 \in P$, että $h_1 \neq h_2$ ja h_3 on yhteinen laajennus homomorfismeille h_1 ja h_2.

Todistus. Oletetaan, että $P' \subseteq P$ on sellainen ylinumeroituva osajoukko, että on olemassa sellainen A:ssa puhdas ja vapaa aliryhmä A', että $\mathrm{dom}(h) \subseteq A'$ jokaisella $h \in P'$. Olkoon $X := \{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ vapaan aliryhmän A':n kanta. Apulauseen 7.8 nojalla voidaan olettaa, että kun $h \in P'$, niin jokin äärellinen $F \subseteq X$ virittää $\mathrm{dom}(h)$:n. Koska $\mathrm{dom}(h)$ on numeroituva jokaisella $h \in P$ ja numeroituvien joukkojen numeroituva yhdiste on numeroituva, niin voidaan olettaa, että on olemassa sellainen m, että jokaisella $h \in P'$, $\mathrm{dom}(h)$:n virittää täsmälleen m kannan X alkiota. Lisäksi, jotta oletus on pätevä, niin P' voidaan korvata P':n osajoukolla tarvittaessa.

Olkoon $P' = \{h_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ ja $Y_\alpha \subseteq X$ vapaan aliryhmän $\mathrm{dom}(h_\alpha)$:n kanta. Kun $\alpha < \omega_1$, niin $|Y_\alpha| = m$ jollakin m, niin on olemassa sellainen maksimaalinen osajoukko $T \subseteq X$, että $T \subseteq Y_\alpha$ ylinumeroituvan monella α. Koska $\mathrm{Ker}(p) \cong \mathbb{Z}$ eli $\mathrm{Ker}(p)$ on numeroituva, niin on olemassa numeroituva määrä sellaisia kuvauksia f, että $T \subseteq \mathrm{dom}(f)$ ja $f \in P$. Täten voidaan olettaa yleisyyttä menettämättä, että $h_\beta \restriction T = h_\alpha \restriction T$ aina, kun $T \subseteq Y_\beta$ ja $T \subseteq Y_\alpha$. Uudelleennumeroimalla oletetaan, että $T \subseteq Y_0$. Tällöin T:n maksimaalisuuden nojalla jokaisella $y \in Y_0 \setminus T$ on numeroituva määrä sellaisia ordinaaleja α, että $y \in Y_\alpha$. Täten on olemassa sellainen $\alpha \neq 0$, että $Y_\alpha \cap Y_0 = T$. Koska oletuksen nojalla $h_0 \restriction T = h_\alpha \restriction T$, niin homomorfismeilla on yhteinen laajennus $q\colon \langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle \to B$. Nyt $\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle$ on A':n puhdas aliryhmä, sillä $Y_0 \cup Y_\alpha \subseteq X$ eli $A'/\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle$ on torsioton. Lisäksi A/A' on torsioton, sillä A' on puhdas A:ssa ja koska

$$(A/\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle)/(A'/\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle) \cong A/A',$$

niin $(A/\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle)/(A'/\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle)$ on torsioton, joten lauseen 4.13 nojalla $A/\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle$ on torsioton eli $\langle Y_0 \cup Y_\alpha \rangle$ on A:n äärellisesti viritetty puhdas aliryhmä. Täten $q \in P$ ja q on yhteinen laajennus homomorfismeille h_0 ja h_α. □

Apulause 7.10. Jokaisella ylinumeroituvalla osajoukolla $P' \subseteq P$ on olemassa sellainen A:ssa puhdas ja vapaa aliryhmä A' ja ylinumeroituva P':n osajoukko $P'' \subseteq P'$, että $\mathrm{dom}(h) \subseteq A'$ jokaisella $h \in P''$.

Todistus. Olkoon $P' = \{h_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ joukon P ylinumeroituva osajoukko, missä h_α on homomorfismi $h_\alpha\colon S_\alpha \to B$. Kuten apulauseen 7.9 todistuksessa, oletetaan, tarvittaessa korvaamalla P' sen osajoukolla, että jokaisella $\alpha < \omega_1$ on olemassa sellainen m, että aliryhmällä S_α on kanta, jossa on m alkiota. Lisäksi, koska S_α on puhdas jokaisella $\alpha < \omega_1$, niin on olemassa sellainen A:n puhdas aliryhmä T, että T on maksimaalinen ominaisuuden "T sisältyy ylinumeroituvan moneen aliryhmään S_α" suhteen. Voidaan olettaa, että $T \subseteq S_\alpha$ jokaisella $\alpha < \omega_1$. Nyt lauseen 4.12 ja seurauksen 4.16 nojalla voidaan olettaa, että S_α:lla on äärellinen kanta muotoa $X \cup Y_\alpha$, missä X on T:n kanta.

Määritellään transfiniittisella induktiolla sellainen sileä ketju $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, että jokaisella $\alpha < \omega_1$ Abelin ryhmä A_α on A:n puhdas aliryhmä ja $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ on vapaa.

Olkoon $A_0 = T$. Oletetaan, että yllä esitelty sileä ketju $\{A_\beta \mid \beta < \alpha\}$ on jo määritelty ja olkoon $(\gamma_{\beta+1})_{\beta<\alpha}$ sellainen aidosti kasvava jono ordinaaleja, että $Y_{\gamma_{\beta+1}} \subseteq A_{\beta+1}$. Jos α on rajaordinaali, niin asetetaan $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\alpha$. Jos α on seuraajaordinaali $\alpha = \delta + 1$, niin olkoon C_δ Chasen kriteerin takaama numeroituva $\aleph_1$-puhdas A:n aliryhmä, joka sisältää A_δ:n. Nyt jokaisella $\beta < \alpha$ on olemassa sellainen $\gamma_\alpha > \gamma_{\beta+1}$, että $\langle Y_{\gamma_\alpha} \rangle \cap C_\delta = \{0\}$. Jos olisikin, että jokaisella $\gamma_\alpha > \gamma_{\beta+1}$ leikkaus $\langle Y_{\gamma_\alpha} \rangle \cap C_\delta$ olisi epätriviaali, niin olisi olemassa sellainen $c \in C_\delta$ ja ylinumeroituvan monta $\epsilon < \omega_1$, että $c \in \langle Y_\epsilon \rangle$. Tällöin $T + \langle c \rangle$:n puhdas sulkeuma olisi ristiriidassa T:n maksimaalisuuden kanssa. Olkoon A_α Abelin ryhmän $A_\delta + \langle Y_{\gamma_\alpha} \rangle$ puhdas sulkeuma. Koska $\langle Y_{\gamma_\alpha} \rangle \cap C_\delta = \{0\}$, niin $A_\alpha \cap C_\delta = A_\delta$. Täten A_α/A_δ on isomorfinen A/C_δ:n numeroituvan aliryhmän kanssa, joka on vapaa, koska C_δ on $\aleph_1$-puhdas A:ssa, joten A_α/A_δ on vapaa. Nyt määritellyn sileän ketjun yhdiste $A' := \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ on A:n puhtaiden aliryhmien yhdisteenä A:n puhdas aliryhmä ja lauseen 4.18 nojalla vapaa. Asetetaan $P'' := \{h_{\gamma_{\beta+1}} \mid \beta < \omega_1\}$. Nyt $P'' \subseteq P'$ on ylinumeroituva sekä $\mathrm{dom}(h) \subseteq A'$ jokaisella $h \in P''$. □

Kootaan nyt edelliset apulauseet yhteen. Ennen apulauseita esitetyt merkinnät saavat hieman toistoa seuraavan lauseen myötä, sillä osoitetaan seuraavaksi systeemissä ZFC + MA + ¬ CH, että edellisissä apulauseissa esiintynyt Abelin ryhmä A on W-ryhmä. Tässä käytetään viimein Martinin aksioomaa ja lopulta osoitetaankin, että systeemissä ZFC + MA + ¬ CH on W-ryhmiä, jotka eivät ole vapaita.

Lause 7.11. *Oletetaan* MA +¬ CH. *Olkoon A sellainen Abelin ryhmä, että $|A| = \aleph_1$ ja A toteuttaa Chasen kriteerin. Tällöin A on W-ryhmä.*

Todistus. Olkoon $p \colon B \to A$ sellainen Abelin ryhmien välinen surjektiivinen homomorfismi, että $\mathrm{Ker}(p) \cong \mathbb{Z}$. Asetetaan, että P on kaikkien niiden homomorfismien $h \colon S \to B$ joukko, että $p \circ h = \mathrm{id}_S$ ja S on äärellisesti viritetty A:n puhdas aliryhmä. Osoitetaan, että P toteuttaa lauseen 3.3 ehdot (i)–(iii). Kohta (i) seuraa suoraan P:n määritelmästä. Kohta (ii) pätee myös, sillä olkoon $a \in A$ ja $h \in P$ jolloin apulauseen 7.8 nojalla on olemassa sellainen $h' \in P$, että $h \subseteq h'$ ja $\{a\} \subseteq \mathrm{dom}(h')$ eli $a \in \mathrm{dom}(h')$. Kohtaa (iii) varten olkoon $P' \subseteq P$ ylinumeroituva. Tällöin apulauseen 7.10 nojalla on olemassa sellainen A:ssa puhdas ja vapaa aliryhmä A' ja ylinumeroituva P':n osajoukko $P'' \subseteq P'$, että $\mathrm{dom}(h) \subseteq A'$ jokaisella $h \in P''$. Tällöin apulauseen 7.9 nojalla on olemassa sellaiset $h_1, h_2 \in P'' \subseteq P'$ ja $h_3 \in P$, että $h_1 \neq h_2$ ja h_3 on yhteinen laajennus homomorfismeille h_1 ja h_2. Ehdot (i)–(iii) siis toteutuvat.

Nyt lauseen 3.3 nojalla on olemassa sellainen kuvaus $g: A \longrightarrow B$, että jokaisella äärellisellä $F \subseteq A$ on olemassa sellainen $f \in P$, että $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$ ja $g \restriction F = f \restriction F$. Siis kun $a, b \in A$, niin äärellisellä $\{a+b, a, b\} \subseteq A$ on olemassa sellainen $f \in P$, että $g \restriction \{a+b, a, b\} = f \restriction \{a+b, a, b\}$. Täten $g(a+b) = f(a+b) = f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$ eli g on homomorfismi ja $p(g(a)) = p(f(a)) = a$ eli $p \circ g = id_A$. Surjektiivinen homomorfismi p siis halkeaa eli A on W-ryhmä. □

Seuraavan lauseen myötä on osoitettu luvun ja tutkielman päätulos, että systeemissä ZFC + MA + ¬ CH on W-ryhmiä, jotka eivät ole vapaita. Tämä lause tosin voidaan todistaa systeemissä ZFC ja Martinin aksioomaa sekä kontinuumihypoteesin negaatiota tarvittiin lauseen 7.11 todistamisessa.

Lause 7.12. *On olemassa sellainen Abelin ryhmä A, että $|A| = \aleph_1$ ja A toteuttaa Chasen kriteerin mutta A ei ole vapaa.*

Todistus. Määritellään transfiniittisella induktiolla sellainen sileä ketju numeroituvia Abelin ryhmiä $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, että

(i) A_α on vapaa jokaisella $\alpha < \omega_1$,

(ii) $A_\alpha / A_{\beta+1}$ on vapaa jokaisella $\beta < \alpha < \omega_1$ ja

(iii) $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ ei ole vapaa jokaisella rajaordinaalilla $\lambda < \omega_1$.

Asetetaan $A_0 = \{0\}$ ja oletetaan, että $\{A_\alpha \mid \alpha < \beta\}$, missä $\beta < \omega_1$, on sileä ketju numeroituvia Abelin ryhmiä, joka toteuttaa ehdot (i)–(iii). Määritellään A_β ja osoitetaan, että ketju $\{A_\alpha \mid \alpha < \beta+1\}$ toteuttaa ehdot (i)–(iii). Tätä varten käsitellään kolme tapausta.

Ensimmäisessä tapauksessa $\beta = \gamma + 1$ ja γ ei ole rajaordinaali eli β on seuraajaordinaalin seuraajaordinaali. Asetetaan $A_\beta = A_\gamma \oplus \mathbb{Z}$. Ehto (iii) pätee oletuksen nojalla. Koska A_γ ja $\mathbb{Z}$ ovat vapaita, niin A_β on vapaa eli ehto (i) toteutuu. Lisäksi, koska $A_\gamma / A_{\delta+1}$ on $A_\beta / A_{\delta+1}$:n vapaa aliryhmä, kun $\delta < \gamma < \beta$ ja $(A_\beta / A_{\delta+1}) / (A_\gamma / A_{\delta+1}) \cong A_\beta / A_\gamma$ eli $(A_\beta / A_{\delta+1}) / (A_\gamma / A_{\delta+1})$ on vapaa, niin seurauksen 4.16 nojalla $A_\beta / A_{\delta+1}$ on vapaa joten ehto (ii) toteutuu.

Toisessa tapauksessa $\beta = \lambda$ on rajaordinaali. Asetetaan $A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ ja olkoon $(\gamma_n)_{n<\omega}$ sellainen aidosti kasvava jono ordinaaleja, että se suppenee λ:an ja γ_n on seuraajaordinaali jokaisella n. Tällöin $A_\lambda = \bigcup_{n<\omega} A_{\gamma_n}$ ja ehdon (ii) nojalla $A_{\gamma_{n+1}} / A_{\gamma_n}$ on vapaa jokaisella $n < \omega$. Tällöin lauseen 4.18 nojalla A_λ on vapaa ja A_λ / A_{γ_n} on vapaa jokaisella $n < \omega$ eli ehto (i) pätee. Lisäksi, jos $\delta < \lambda$, niin $A_{\delta+1} \subseteq A_{\gamma_n}$ jollakin $n < \omega$ joten $A_\lambda / A_{\delta+1}$ on A_λ / A_{γ_n}:n aliryhmänä vapaa. siis ehto (ii) pätee. Kuten ensimmäisessä tapauksessa, ehto (iii) pätee jälleen oletuksen nojalla.

Kolmannessa tapauksessa $\beta = \lambda + 1$, missä λ on rajaordinaali. Olkoon $(\gamma_n)_{n<\omega}$ sellainen aidosti kasvava jono ordinaaleja, että se suppenee λ:an, γ_n on seuraajaordinaali jokaisella n ja $\gamma_0 = 0$. Lauseen 4.18 todistuksen nojalla on olemassa sellainen sileä ketju joukkoja $\{X_n \mid n < \omega\}$, että X_n on A_{γ_n}:n kanta. Jokaisella $n > 1$ valitaan $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$ ja asetetaan $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$. Olkoon vielä B se A_λ:n aliryhmä, jonka $\bigcup_{n<\omega} Y_n$ virittää ja $P = \prod_{n<\omega} \langle x_n \rangle$. Kun $(k_n x_n)_{n<\omega} \in P$, niin merkitään $\sum_{n<\omega} k_n x_n$. Määritellään sitten, että $A_{\lambda+1}$ on se $B \oplus P$:n aliryhmä, jonka A_λ ja

$\{z_m \mid 1 \leq m < \omega\} \subseteq P$ virittävät. Edellisessä P:n osajoukossa z_m on sellainen P:n alkio, että

$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n.$$

Näytetään, että $\bigcup_{n<\omega} Y_n \cup \{z_m \mid 1 \leq m < \omega\}$ on $A_{\lambda+1}$:n kanta. Koska $\bigcup_{n<\omega} Y_n = \bigcup_{n<\omega}(X_n \setminus \{x_n\}) = (\bigcup_{n<\omega} X_n) \setminus \{x_n \mid n < \omega\}$ ja jokaisella $1 \leq n < \omega$ pätee, että

$$x_n = x_n + \sum_{k \geq n+1} \frac{k!}{n!} x_k - \sum_{k \geq n+1} \frac{k!}{n!} x_k = \sum_{k \geq n} \frac{k!}{n!} x_k - (n+1) \sum_{k \geq n+1} \frac{k!}{(n+1)!} x_k = z_n - (n+1) z_{n+1},$$

niin $\bigcup_{n<\omega} Y_n \cup \{z_m \mid 1 \leq m < \omega\}$ virittää $A_{\lambda+1}$:n. Lisäksi, koska mikään $\sum_{k=1}^{m} a_k z_{n_k} \notin \bigcup_{n<\omega} Y_n \setminus \{0\}$, niin osoitetaan, että jos $\sum_{k=1}^{m} a_k z_{n_k} = 0_P$, niin $a_1 = \cdots = a_m = 0$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellaiset indeksit $n_1 < \cdots < n_k$ ja nollasta poikkeavat kertoimet $a_1, \ldots, a_m$, että $\sum_{k=1}^{m} a_k z_{n_k} = 0_P$. Nyt

$$\sum_{k=1}^{m} a_k z_{n_k} = \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{n \geq n_k} \frac{n!}{n_k!} x_n = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n \geq n_k} a_k \frac{n!}{n_k!} x_n = 0_P$$

jolloin muodon $\sum_{k=1}^{m} \sum_{n \geq n_k} a_k \frac{n!}{n_k!} x_n$ indeksi n_1 on $a_1 b_{n_1}$ eli $a_1 = 0$, mikä on ristiriita. Täten $\bigcup_{n<\omega} Y_n \cup \{z_m \mid 1 \leq m < \omega\}$ on $A_{\lambda+1}$:n kanta eli ehto (i) toteutuu. Ehtoa (ii) varten, koska $(\gamma_n)_{n<\omega}$ suppenee λ:an, niin on olemassa sellainen $n < \omega$, että $\gamma_n > \alpha + 1$, kun $\alpha < \lambda$. Täten $A_{\gamma_n}/A_{\alpha+1}$ on vapaa oletuksen nojalla ja $A_{\lambda+1}/A_{\gamma_n} \cong (A_{\lambda+1}/A_{\alpha+1})/(A_{\gamma_n}/A_{\alpha+1})$, joten seurauksen 4.16 nojalla riittää näyttää, että $A_{\lambda+1}/A_{\gamma_n}$ on vapaa. Nyt $\bigcup_{n>k}\{Y_n \setminus Y_k\} \cup \{z_m + A_{\gamma_n} \mid k+1 \leq m < \omega\}$ virittää $A_{\lambda+1}/A_{\gamma_n}$:n jokaisella $k < \omega$, joten $h \colon \langle \bigcup_{n>k}(Y_n \setminus Y_k) \cup \{z_m \mid k+1 \leq m < \omega\}\rangle \to A_{\lambda+1}/A_{\gamma_n}$, $h(z) = z + A_{\gamma_n}$ on isomorfismi eli $A_{\lambda+1}/A_{\gamma_n}$ on vapaa, sillä $\langle \bigcup_{n>k}(Y_n \setminus Y_k) \cup \{z_m \mid k+1 \leq m < \omega\}\rangle$ on $A_{\lambda+1}$:n aliryhmänä vapaa. Ehto (ii) siis pätee. Ehtoa (iii) varten huomataan, että $m!z_m - z_1 \in A_\lambda$ jokaisella $m \geq 1$, joten tällöin $z_1 + m!z_m - z_1 = m!z_m = \sum_{n \geq m} n! x_n$ eli $z_1 + A_\lambda$ on nollasta poikkeava alkio $A_{\lambda+1}/A_\lambda$:ssa ja jaollinen luvulla n jokaisella $n > 0$. Vapaa Abelin ryhmä ei voi sisältää tällaisia alkioita, joten ehto (iii) toteutuu.

Nyt kun A on sellaisen sileän ketjun numeroituvia Abelin ryhmiä $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ yhdiste, että ehdot (i)–(iii) pätevät, niin ensinnäkin $|A| = \aleph_1$, sillä A on yhdiste ω_1:n monesta numeroituvasta Abelin ryhmästä. Jokaisella $\beta < \omega_1$ pätee, että $A_{\beta+1}$ on A:n $\aleph_1$-puhdas aliryhmä, sillä jokainen $A/A_{\beta+1}$:n numeroituva aliryhmä sisältyy tekijäryhmään $A_\alpha/A_{\beta+1}$ jollakin tarpeeksi suurella $\alpha < \omega_1$ ja $A_\alpha/A_{\beta+1}$ on ehdon (ii) nojalla vapaa ja vapaan Abelin ryhmän aliryhmä on vapaa. Vielä ehdon (i) ja apulauseen 7.3 nojalla A toteuttaa Chasen kriteerin. Ehdon (iii) nojalla

$$E_A = \{\lambda < \omega_1 \mid A_\lambda \text{ ei ole } \aleph_1\text{-puhdas } A\text{:ssa}\} = \{\lambda < \omega_1 \mid \lambda \text{ on rajaordinaali}\}$$

eli E_A on esimerkin 7.6 kiinteä ω_1:n osajoukko, jolloin lauseen 7.7 nojalla A ei ole vapaa. $\square$

8 Loppukommentteja ja yleistyksiä

Tässä tutkielmassa tyydyttiin osoittamaan, että systeemissä $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$ löydetään epävapaita W-ryhmiä. Saharon Shelah osoitti kuitenkin alkuperäisessä julkaisussaan [7] myös, että systeemissä $\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ kaikki W-ryhmät, joiden mahtavuus on $\aleph_1$, ovat vapaita. Shelah yleisti tuloksen myöhemmin osoittaessaan, että systeemissä $\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ kaikki W-ryhmät ovat vapaita [8]. Aksiooma $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ tunnetaan konstruoituvuusaksioomana, missä V on kaikkien joukkojen luokka ja L konstruoitavien joukkojen luokka. Kuten tiedetään, systeemi $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$ on ristiriidaton, jos systeemi ZFC on ristiriidaton. Samoin tiedetään, että systeemi $\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ on ristiriidaton, jos systeemi ZFC on ristiriidaton. Konstruoituvuusaksiooma $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ tosittaa, että kaikki joukot ovat konstruoitavissa.

Myös tutkielman päälähteessä [1] osoitettiin, että systeemissä $\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ kaikki W-ryhmät, joiden mahtavuus on $\aleph_1$, ovat vapaita. Lopputuloksena tästä saadaan, että Whiteheadin ongelma on riippumaton systeemistä ZFC.

Mainitaan vielä yksi mahdollinen vahvistus ja osoitetaan yksi mahdollinen yleistys kahdelle tutkielmassa esitetylle tulokselle.

Lause 7.12 voitaisiin vahvistaa muotoon, että on olemassa $2^{\aleph_1}$ pareittain eiisomorfista Abelin ryhmää, joiden mahtavuus on $\aleph_1$ ja jotka toteuttavat Chasen kriteerin ja eivät ole vapaita [1].

Yleisesti pätee, että

$$\mathrm{Ext}\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, C\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}(A_i, C)$$

Abelin ryhmille A_i $(i \in I)$ ja C. Edellisessä luvussa osoitettiin, että systeemissä $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$ löydetään epävapaita W-ryhmiä, joiden mahtavuus on $\aleph_1$. Tällöin, kun A on sellainen epävapaa W-ryhmä, että $|A| = \aleph_1$ ja κ ylinumeroituva kardinaali, niin κ:n W-ryhmän A suora summa on W-ryhmä, sillä edellä esitetyn nojalla

$$\mathrm{Ext}\left(\bigoplus_{\alpha\in\kappa} A, \mathbb{Z}\right) \cong \prod_{\alpha\in\kappa} \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbf{0}.$$

Siis jokaisella ylinumeroituvalla kardinaalilla κ on olemassa epävapaa W-ryhmä, jonka mahtavuus on κ.

Lähteet

[1] Eklof, P. C.: Whitehead's Problem is Undecidable, *The American Mathematical Monthly*, **10**, 775-788 (1976).

[2] Ferreiros, J. *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, 2007.

[3] Fuchs, L. *Abelian Groups*. Springer, 2015.

[4] Jech, T. *Set Theory*. Springer, 2002.

[5] Kunen, K. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Elsevier, 1980.

[6] Lang, S. *Algebra*. Springer, 2002.

[7] Shelah, S.: Infinite abelian groups - Whitehead problem and some constructions, *Israel Journal of Mathematics*, **18**, 243-256 (1974).

[8] Shelah, S.: A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals, *Israel Journal of Mathematics*, **21**, 319-349 (1975).