Tampereen yliopisto

Veeti Ahvonen

FORMAALIEN KIELTEN VAATIVUUSTEORIAA JA PELILLISTÄMISTÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2022

TIIVISTELMÄ

Veeti Ahvonen: Formaalien kielten vaativuusteoriaa ja pelillistämistä
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2022

Tutkielmassa tarkastellaan säännöllisten, kontekstivapaiden ja konjunktiivisten kielten vaativuusteoriaa sekä semanttisia pelejä. Tutkielman alussa esitellään tarvittavia käsitteitä ja merkintöjä formaaleista kielistä, malliteoriasta sekä loogikoista. Tutkielma etenee tarkastellen kutakin kieliperhettä omassa kappaleessaan.

Säännöllisten kielten kappaleessa määritellään säännöllisten kielten semanttinen peli eli pelin, joka karakterisoi säännölliset kielet, ja osoitetaan pelin korrektius. Tämän jälkeen tarkastellaan säännöllisten kielten Ehrenfeucht–Fraïssé-peliä. Tunnettuun säännöllisten kielten loogiseen krakterisointiin ei tässä tutkielmassa paneuduta, vaan se oletetaan tunnetuksi.

Säännöllisten kielten jälkeen tarkastellaan kontekstivapaita kieliä. Kontekstivapaille kielille määritellään vastaava semanttinen peli, joka osoittautuu huomattavasti monimutkaisemmaksi kuin säännöllisten kielten semanttinen peli. Tämän jälkeen tarkastellaan kontekstivapaiden kielten vaativuusteoriaa ja loogista karakterisointia pinoautomaattien kautta.

Tutkielman lopussa tarkastellaan konjunktiivisten kielten semanttista peliä ja automaatioteoriaa. Tutkielmassa osoitetaan yhteys usean kulun pinoautomaatin ja yksinkertaistetun synkronoidun vuorottelevan pinoautomaatin välillä. Lisäksi annetaan looginen karakterisointi kojunktiivisten kielten aliluokalle $\mathrm{BC}^{+}(\mathrm{CFL})$, joka on kontekstivapaiden kielten sulkeuma yhdisteen ja leikkauksen suhteen.

Avainsanat: formaalit kielet, kuvaileva vaativuusteoria, looginen karakterisointi, semanttinen peli

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Alkusanat

Innostuksen formaaleihin kieliin sain jo opintojeni toisena vuotena kun kävin vanhan Tampereen yliopiston Automaatit I -kurssin. Formaalit kielet ja erilaiset laskennan mallit todella suorastaan koukuttivat, minkä vuoksi kurssin harjoitustyö paisui melkein kandidaatin tutkielman pituiseksi. Jonne Iso-Tuiskun innoittamana päätin lopulta tehdä kandidaatin tutkielman äärellisen automaatin minimoinnista. Maisteriopintojen aikana huomasin logiikan ja malliteorian olevan kiinnostavia, joten täydensin opintojani käymällä niihin liittyviä kursseja.

Tämän tutkielman aihetta pohdittaessa ohjaajani Lauri Hellan kanssa kerroin, että formaalit kielet kiehtovat itseäni, josta syntyi idea tarkastella kontekstivapaiden kielten vaativuusteoriaa sekä semanttisia pelejä. Kontekstivapaiden kielten semanttisiin peliin löytyi yhteys Hintikan ensimmäisen kertaluvun logiikan semanttisista peleistä.

Myöhemmin tutkielmani laajeni säännöllisiin sekä konjunktiivisiin kieliin. Konjunktiivisiin kieliin törmäsin sattumalta etsiessäni tietoa ja mielenkiintoisia artikkeleita tutkielmaani varten. Tämän jälkeen törmäsin edelleen Boolen kielioppiin, mutta niiden semantiikasta en innostunut. Konjunktiivissa kielissä huomasin olevan paljon avoimia ongelmia ja erityisesti niiden vaativuusteoriasta ei tiedetty paljon. Rakastamaani automaatioteoriaa päätin hyödyntää tässä vaiheessa ja onnistuin löytämään yhteyden kahden eli pinoautomaatin variaation välillä. Konjunktiivisille kielille en onnistunut löytämään loogista karakterisointia. Tutkielma herätti myös jatkokysymyksiä, joihin toivon myöhemmin palaavani.

Tahdon kiittää erityisesti tutkielmani ohjaajaa Lauri Hellaa keskusteluista ja ideoista tätä tutkielmaa varten. Kiitän myös perhettäni tuesta ja kannustuksesta opintojeni aikana sekä opiskelutovereitani matemaattisista keskusteluista sekä vapaa-ajalla rentoutumisesta. En olisi uskonut kun lähdin sokeasti matematiikka opiskelemaan, että innostun jostain alasta näin paljon.

Sisällys

1 Johdanto

Formaalien kielien tutkimuksessa on jo pitkä historia niin matematiikan kuin tietojenkäsittelytieteiden tutkimuksessa. Automaattiteoria ja sen myötä kuvaileva vaativuusteoria liittyvät läheisesti formaaleihin kieliin. Tutkimus näillä aloilla on edelleen aktiivista, sillä uusia laskennan malleja sekä erilaisten kieliperheiden ominaisuuksia tutkitaan edelleen. Näillä on usein motivaationa ymmärtää kieliperheiden hierarkiaa tai erilaisten laskennan mallien ominaisuuksia, jotka puolestaan voivat auttaa ymmärtämään erilaisia logiikkoja [8]. Formaaleilla kielillä on myös mielenkiintoisia pelillisiä ominaisuuksia, joita ollaan viime aikoina tutkittu esimerkiksi artikkeleissa [20] ja [22]. Pelien motivaationa on usein antaa erilainen ja mielekäs lähestymistapa vaikeaan ongelmaa.

Tutkielmassa tarkastellaan säännöllisiä, kontekstivapaita sekä konjunktiivisia kieliä tässä järjestyksessä kutakin omassa kappaleessaan. Kukin kappale alkaa perusominaisuuksien esittelyllä, jonka jälkeen tarkastellaan niiden pelejä sekä vaativuusteoriaa.

Semanttisella pelillä tarkoitetaan peliä, joka karakterisoi kieliperheen. Tässä tutkielmassa laaditut semanttiset pelit ovat suhteellisen luonnollisia, mutta niistä ei onnistuttu löytämään mitään jo valmiiksi julkaistua artikkelia. Tutkielmassa yritettiin myös laatia Ehrenfeucht–Fraïssé-peli (EF-peli) kontekstivapaille kielille, mutta tässä ei valitettavasti onnistuttu. EF-peleillä voi tunnetusti todistaa määrittelemättömyystuloksia.

Ensimmäinen merkittävä kuvailevan vaativuusteorian tuloksen todisti Richard Büchi 1960-luvulla. Büchi todisti, että toisen kertaluvun logiikan eli logiikan SO fragmentti MSO karaktrerisoi säännölliset kielet eli kieli on säännöllinen jos ja vain jos se on ilmaistavissa logiikassa MSO. Myöhemmin krakterisointeja ollaan löydetty muille kieliperheille kuten kontekstivapaille kielille [15]. Tämän tutkielman eräs tarkoitus oli löytää looginen karakterisointi vähemmän tutkituille konjunktiivisille kielille, jonka esitteli ensimmäisen kerran Alexander Okhotin vuonna 2000 ja myöhemmin artikkelissa [18]. Valitettavasti tässä tutkielmassa ei onnistuttu löytämään loogista karakterisointia konjunktiivisille kielille, mutta sen sijaan tarkasteltiin tämän kieliperheen alaluokkaa. Tutkielmassa onnistuttiin löytäään yhteys kahden pinoautomaatin [4][1] variaation välille viimeisessä kappaleessa, jonka kautta saatiin alaluokalle looginen karakterisointi.

Lukijalta oletetaan perustiedot logiikasta, malliteoriasta ja formaaleista kielistä, vaikka ne tässä tutkielmassa suppeasti esitelläänkin toisessa kappaleessa. Aiheeseen liittyvään kirjallisuuteen suositellaan teoksia [12] ja [16].

2 Alkuvalmisteluja

Tässä kappaleessa esitellään käsitteitä sekä tarvittavia merkintöjä.

2.1 Formaalit kielet

Suurin osa tämän osion merkinnöistä ja tarvittavista käsitteistä löytyy kirjasta [12]. *Aakkosto* on joukko *merkkejä* eli symboleja joihin ei liitetä tulkintaa. Tässä tutkielmassa aakkosto on aina äärellinen. *Merkkijono* on äärellinen jono merkkejä ja *kieli* on kokoelma merkkijonoja. *Formaalit kielet* ovat kokoelma *merkkijonoja*, jotka noudattavat joitakin tiettyjä sääntöjä. Formaaleissa kielissä ollaan usein rajoitettu miten kielen merkkijonoja voidaan muodostaa. Tässä tutkielmassa tutustaan kolmeen eri tyyppiseen formaaliin kieleen: *säännöllisiin*, *kontekstivapaisiin* ja *konjunktiivisiin*.

Tutkielmassa käytettyjä merkintöjä.

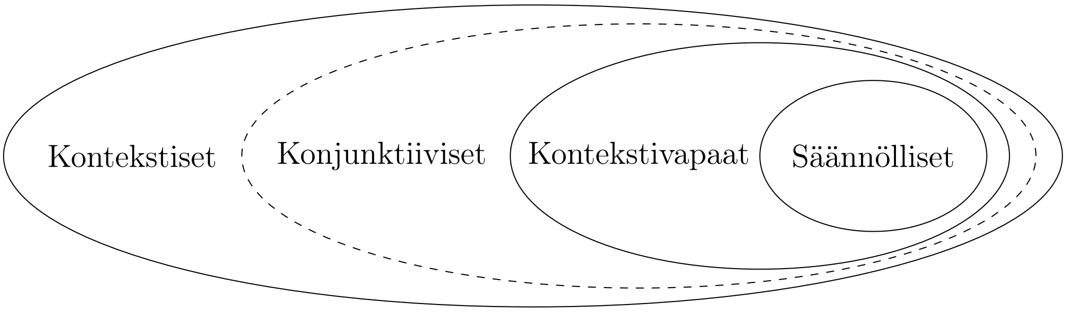
- $[n] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$.
- $\epsilon \coloneqq$ tyhjä merkkijono.
- $|w| \coloneqq$ merkkijonon w pituus.
- $|w|_a \coloneqq$ merkkijonossa w esiintyvien merkkien a lukumäärä.
- $A^+ \coloneqq$ aakkoston A kaikkien *äärellisten* merkkijonojen joukko.
- $A^* \coloneqq A^+ \cup \{\epsilon\}$.
- $A_\epsilon \coloneqq A \cup \{\epsilon\}$.
- Jos L ja K ovat kieliä, niin $L \cdot K \coloneqq \{\, v \cdot u \mid v \in L, u \in K \,\}$.
- Jos L on kieli, niin $L^* \coloneqq \{\, w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in L, n \in \mathbb{Z}_+ \,\} \cup \{\epsilon\}$.

Esimerkki 2.1. Kieli

$$\{\, w \in \{a, b\}^* \mid \text{merkkijonossa } w \text{ esiintyy merkki } a \text{ tasan kerran} \,\}$$

on formaali kieli.

Formaalien kielien hierarkiasta ensimmäinen merkittävän esityksen julkaisi Chomsky [5] 1950-luvulla. Myöhemmin hierarkiaa ollaan täydennetty useilla kieliperheillä. Tämän tutkielman lopussa tarkastellaan kontekstivapaiden kielten laajennusta niin kutsuttua konjunktiivisia kieliä [18], joista ei vielä tiedetä paljon. Konjunktiiviset kielet asettuvat johonkin kontekstivapaiden ja *kontekstisten kielten* väliin. Nimittäin vielä ei olla löydetty kontekstista kieltä, joka ei olisi konjunktiivinen [18]. Alla kuva kieliperheiden hierarkiasta.



2.2 Malliteoriaa ja logiikoita

Suurin osa tämän osion merkinnöistä ja tarvittavista käsitteistä löytyy kirjasta [16]. *Termistö* τ on kokoelma *vakiosymboleja*, *relaatiosymboleja* ja *funktiosymboleja*. Termistön sanotaan olevan *relationaalinen*, jos se sisältää vain relaatiosymboleja. Termistö eroaa aakkostosta siinä mielessä, että jokaiseen symboliin liitetään tulkinta. Termistön τ *malli* (tai τ-malli) on pari $\mathfrak{A} = (A, T)$, missä A on mallin *universumi* ja T on *tulkintafunktio*, joka antaa tulkinnan jokaiselle termistön τ symbolille seuraavasti. Universumia voidaan merkitä myös $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) := A$. Jokaiseen termistön vakiosymboliin liitetään jokin universumin alkio, jokaiseen k-paikkaiseen funktiosymboliin liitetään kuvaus $A^k \to A$ ja jokaiseen k-paikkaiseen relaatioon liitetään k-paikkainen universumin A relaatio. Jos $s \in \tau$, niin tulkintaa mallissa $\mathfrak{A}$ merkitään lyhyesti $s^{\mathfrak{A}}$. Lisäksi mallia voidaan merkitä lyhyesti jonona

$$\mathfrak{A} = (A, s_1^{\mathfrak{A}}, \dots, s_n^{\mathfrak{A}}),$$

missä $\tau = \{s_1, \dots, s_n\}$.

Olkoon $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ aakkosto. *Aakkostoa A vastaava termistö* on

$$\tau_\Sigma := \{<\} \cup \{\, P_\sigma \mid \sigma \in A \,\}.$$

Merkkijonon $w \in A^*$ *sanamalli* on termistön τ_Σ malli

$$\mathfrak{A}_w = (\{0, \dots, |w| - 1\}, P_{\sigma_1}^{\mathfrak{A}_w}, \dots, P_{\sigma_n}^{\mathfrak{A}_w}, \leq^{\mathfrak{A}_w}),$$

missä $\leq^{\mathfrak{A}_w}$ on universumin $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ luonnollinen järjestys ja jokaisella $i \in [n]$ pätee $j \in P_{\sigma_i}^{\mathfrak{A}_w}$ jos ja vain jos merkkijonossa w paikalla j on merkki σ_i. Merkitään lisäksi

$$\mathrm{STR}[\tau] \text{ on kaikkien merkistön } \tau \text{ äärellisten mallien luokka.}$$

Tässä tutkielmassa ei tarkastella kuin äärellisiä malleja.

Esimerkki 2.2. Merkkijonon $abba \in \{a, b\}^*$ sanamalli on

$$\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3\}, P_a^{\mathfrak{A}}, P_b^{\mathfrak{A}}, \leq^{\mathfrak{A}}),$$

missä $P_a^{\mathfrak{A}} = \{0, 3\}$ ja $P_b^{\mathfrak{A}} = \{1, 2\}$.

Määritelmä 2.2.1. Olkoot $\mathfrak{A} = (A, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{A}}, R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_m^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_s^{\mathfrak{A}})$ ja $\mathfrak{B} = (B, c_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{B}}, R_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, R_m^{\mathfrak{B}}, f_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, f_s^{\mathfrak{B}})$ termistön τ malleja. *Isomorfismi* mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä on kuvaus $g\colon A \to B$, joka täyttää seuraavat ehdot.

- Kuvaus g on bijektio.
- Jokaisella vakiosymbolilla c_i, $i \in [n]$ pätee $g(c_i^{\mathfrak{A}}) = c_i^{\mathfrak{B}}$.
- Jokaisella relaatiosymbolilla R_i, $i \in [m]$, jonka paikkaluku on k ja jokaisella jonolla $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ pätee $(a_1, \ldots, a_k) \in R_i^{\mathfrak{A}}$ jos ja vain jos $(g(a_1), \ldots, g(a_k)) \in R_i^{\mathfrak{B}}$.
- Jokaisella funktiosymbolilla f_i, $i \in [s]$, jonka paikkaluku on k ja jokaisella jonolla $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ sekä alkiolla $a \in A$ pätee $f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = a$ jos ja vain jos $f_i^{\mathfrak{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_k)) = g(a)$.

Jos g on isomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä, niin merkitään $g\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Merkitään $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, jos on olemassa isomorfismi mallien välillä, jolloin voidaan sanoa, että mallit ovat *isomorfisia.*

Olkoon $\mathrm{VAR} = \{ v_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ numeroituvasti ääretön joukko *muuttujia.* Tutkielmassa käytetetään myös *metamuuttujia* $\{x, y, z, \ldots\}$ viittaamaan johonkin joukon VAR muuttujaan. Määritellään termistön τ *ensimmäisen kertaluvun logiikan* eli logiikan $\mathrm{FO}[\tau]$ *termit* ja *kaavat* rekursiivisesti.

- Jokainen muuttuja x on termi.
- Jokainen vakiosymboli $c \in \tau$ on termi.
- Jos $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä ja f on funktiosymboli, jonka paikkaluku on k, niin $f(t_1, \ldots, t_k) \in \tau$ on termi.
- Jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin $t_1 = t_2$ on (*atomi*)kaava.
- Jos $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä ja R on relaatiosymboli, jonka paikkaluku on k, niin $R(t_1, \ldots, t_k)$ on (atomi)kaava.
- Jos ϕ_1 ja ϕ_2 ovat kaavoja, niin $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$ ja $\neg\phi_1$ ovat kaavoja.
- Jos ϕ on kaava, niin $\exists x \phi$ ja $\forall x \phi$ ovat kaavoja.

Tutkielmassa oletetaan lyhenteet kaavoille $\forall x \phi$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \to \phi_2)$ ja $(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$ tunnetuiksi. Sulkuja voidaan jättää kirjoittamatta kunhan semantiikka ei kärsi. Jos S on joukko kaavoja, niin *Boolen sulkeuma* $\mathrm{BC}(S)$ on joukon S sulkeuma konnektiivien $\wedge$, $\vee$ ja $\neg$ suhteen. Vastaavasti $\mathrm{BC}^+(S)$ on joukon S sulkeuma konnektiivien $\wedge$ ja $\vee$ suhteen.

Kaavan *vapaat muuttujat* määritellään rekursiivisesti seuraavasti.

- Muuttuja yksinään on vapaa muuttuja ja vakiosymboli ei ole vapaa muuttuja.
- Jos $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä, niin termin $f(t_1, \ldots, t_k)$ vapaat muuttujat ovat termien $t_1, \ldots, t_k$ vapaat muuttujat.

- Jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin kaavan $t_1 = t_2$ vapaat muuttujat ovat termien t_1 ja t_2 vapaat muuttujat.
- Jos $t_1, \dots, t_k$ ovat termejä, niin kaavan $R(t_1, \dots, t_k)$ vapaat muuttujat ovat termien $t_1, \dots, t_k$ vapaat muuttujat.
- Kaavan $\neg\phi$ vapaat muuttujat ovat kaavan ϕ vapaat muuttujat. Kaavan $\phi_1 \wedge \phi_2$ vapaat muuttujat ovat kaavojen ϕ_1 ja ϕ_2 vapaat muuttujat. Vastaavasti $\phi_1 \vee \phi_2$.
- Kaavan $\exists x\phi$ vapaat muuttujat ovat kaavan ϕ vapaat muuttujat lukuunottamatta muuttujaa x. Vastaavsti $\forall x\phi$.

Muuttujia jotka eivät ole vapaita sanotaan *sidotuiksi*. Kaavaa jossa ei ole vapaita muuttujia sanotaan *lauseeksi*.

Olkoon $\mathfrak{A}$ aakkoston τ malli. Merkitään $\vec{x}$ tarkoittamaan jonoa $(x_1, \dots, x_n)$ muuttujia. Jos termin t vapaat muuttujat ovat $\vec{x}$, niin merkitään $t(\vec{x})$. Vastaavasti kaavoilla merkitään $\phi(\vec{x})$. Merkintä sallitaan vaikka kaikki jonon $\vec{x}$ muuttujat eivät esiintyisi vapaana termissä tai kaavassa.

Olkoon $\vec{a} \in A^n$. Määritellään seuraavaksi termin t tulkinta $t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ mallissa $\mathfrak{A}$ sekä annetaan kaavan totuusmääritelmä $\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a})$.

- Jos t on vakiosymobli c, niin silloin termin tulkinta mallissa $\mathfrak{A}$ on $c^{\mathfrak{A}}$.
- Jos t on muuttuja x_i, niin silloin termin $t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ tulkinta mallissa $\mathfrak{A}$ on a_i.
- Jos t on muotoa $f(t_1, \dots, t_k)$, niin termin $t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ tulkinta on $f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))$.
- $\mathfrak{A} \models (t_1 = t_2)(\vec{a})$ jos ja vain jos $t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = t_2^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.
- $\mathfrak{A} \models R(t_1, \dots, t_k)(\vec{a})$ jos ja vain jos $(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathfrak{A}}$.
- $\mathfrak{A} \models \neg\phi(\vec{a})$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \not\models \phi(\vec{a})$.
- $\mathfrak{A} \models \phi_1(\vec{a}) \wedge \phi_2(\vec{a})$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \phi_1(\vec{a})$ ja $\mathfrak{A} \models \phi_2(\vec{a})$.
- $\mathfrak{A} \models \phi_1(\vec{a}) \vee \phi_2(\vec{a})$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \phi_1(\vec{a})$ tai $\mathfrak{A} \models \phi_2(\vec{a})$.
- Jos $\psi(\vec{x}) := \exists y\phi(y, \vec{x})$, niin $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{a})$ jos ja vain jos on olemassa sellainen $a' \in A$, että $\mathfrak{A} \models \phi(a', \vec{a})$
- Jos $\psi(\vec{x}) := \forall y\phi(y, \vec{x})$, niin $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{a})$ jos ja vain jos jokaisella $a' \in A$ pätee, että $\mathfrak{A} \models \phi(a', \vec{a})$

Kaavojen $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ ja $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ totuusmääritelmät menevät luonnollisesti. Mikäli halutaan korostaa mikä symboli tulkitaan milläkin universumin alkiolla, voidaan merkitä $t^{\mathfrak{A}}[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] := t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$. Vastaavaa merkintää voidaan soveltaa kaavoihin $\phi[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] := \phi(\vec{a})$. Tietyt kaavojen lyhennykset oletetaan myös tunnetuksi kuten $t_1 \neq t_2 := \neg(t_1 = t_2)$.

Monadisen toisen kertaluvun logiikan kaavat eli logiikan MSO kaavat saadaan kvantifioimalla toisen kertaluvun muuttujia $\{ X_i \mid i \in \mathbb{N} \}$, joiden paikkaluku on yksi. Tulkinta ja totuusmääritelmä laajennetaan luonnollisesti. Olkoon

$\mathfrak{A}$ malli ja $\vec{B} \in \mathcal{P}(A)^n$. Jos t on toisen kertaluvun muuttuja X_i, niin termin $t^{\mathfrak{A}}(\vec{B})$ tulkinta mallissa $\mathfrak{A}$ on B_i. Jos $\psi(\vec{x}, \vec{X}) := \exists Y \, \phi(\vec{x}, Y, \vec{X})$, niin $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{a}, \vec{B})$ jos ja vain jos on olemassa sellainen $B' \subseteq A$, että $\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a}, B', \vec{B})$. Vastaavalla tavalla annetaan totuusmääritelmä kaavalle $\forall Y \, \phi(\vec{x}, Y, \vec{X})$.

3 Säännöllisistä kielistä

Aloitetaan formaalien kielien tarkastelu *säännöllisistä kielistä*. Säännöllinen viittaa siihen, että merkkijonojen muodostus kielessä on aina pääteltävissä ja erityisesti säännöt kielille ovat yksinkertaisia. Kappele aloitetaan määrittelemällä säännölliset kielet, jonka jälkeen niiden pelillisiä ominaisuuksia tarkastellaan. Osoittautuu, että säännöllisillä kielillä on hyviä pelillisiä ominaisuuksia. Semanttinen peli on hyvin luonnollinen, mutta siitä ei toistaiseksi löytynyt mitään julkaisua. Erilaisiin peleihin voi tutustua lähteistä [22] ja [20], joista ensimmäistä käsitellään tässä tutkielmassa.

3.1 Säännöllisistä lausekkeista

Määritelmä 3.1.1. Olkoon Σ aakkosto. *Säännöllisten lausekkeiden* joukko $\mathrm{RE}(\Sigma)$ on pienin sellainen joukko, jolle pätee seuraavat ehdot.

1. $\mathbf{0} \in \mathrm{RE}(\Sigma)$.
2. $\mathbf{1} \in \mathrm{RE}(\Sigma)$.
3. $a \in \Sigma \Rightarrow a \in \mathrm{RE}(\Sigma)$.
4. $r, s \in \mathrm{RE}(\Sigma) \Rightarrow r + s \in \mathrm{RE}(\Sigma)$.
5. $r, s \in \mathrm{RE}(\Sigma) \Rightarrow rs \in \mathrm{RE}(\Sigma)$.
6. $r \in \mathrm{RE}(\Sigma) \Rightarrow r^* \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ (*Kleenen tähti*) .

Jos tarkkoja ollaan, niin lausekkeisiin $r + s$ ja rs on sidottu yleensä sulutus (tai muu yksikäsitteinen esitys), kuten $(r + s)$ ja (rs). Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan sulutuksia käytetä, mutta myöhemmin pelejä määriteltäessä on oleellista, että esitys on yksikäsitteinen. Aakkoston merkkiä vastaa suoraan siis säännöllinen lauseke eikä niitä ole tarpeen tässä tutkielmassa erotella.

Määritelmä 3.1.2. *Tulkinta* eli säännöllisten lausekkeiden *tuottama kieli* määritellään rekursiivisesti funktion $L\colon \mathrm{RE}(\Sigma) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ avulla.

1. $L(\mathbf{0}) = \emptyset$.
2. $L(\mathbf{1}) = \{\epsilon\}$.
3. $L(a) = \{a\}$.
4. $L(r \cdot s) = L(r) \cdot L(s) = \{\, u \cdot v \mid u \in L(r), v \in L(s) \,\}$.
5. $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$.
6. $L(r^*) = L(r)^* = \{\, w_1 \cdot w_2 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in L(r), n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\epsilon\}$.

Kieli on *säännöllinen* täsmälleen silloin jos se on säännöllisen lausekkeen tuottama.

Tulkinnasta huomaa, että esitys on lievästi naiivi, sillä merkkijonot samaistetaan säännöllisten lausekkeiden kanssa, mutta tämä on varsin yleistä kirjallisuudessa. Jos ollaan tarkkoja, niin Σ ei saa sisältää säännöllisten lausekkeiden merkkejä $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, ^*\}$. Sen sijaan erottelemme tyhjän merkkijonon ja tyhjän kielen uusilla symboleilla. Tällöin esimerkiksi $r \neq r\mathbf{1}$.

Sännöllisille lausekkeille tunnetaan monia algebrallisia ominaisuuksia, joita ei tässä tutkielmassa niiden laajuuden vuoksi esitellä ja ne voidaan olettaa tunnetuiksi. Luetellaan kuitenkin ominaisuuksia, joiden suhteen säännölliset kielet ovat suljettuja.

Lause 3.1. *Säännölliset kielet ovat suljettuja seuraavien ominaisuuksien suhteen.*

1. *Kahden säännöllisen kielen leikkaus on säännöllinen kieli.*
2. *Kahden säännöllisen kielen yhdiste on säännöllinen kieli.*
3. *Säännöllisen kielen komplementti on säännöllinen kieli.*
4. *Kahden säännöllisen kielen erotus on säännöllinen kieli.*

Edellisen lauseen perusteella saadaan hyvin luonteva ”laajennus” säännöllisille kielille. *Yleistettyjen säännöllisten lausekkeiden* joukko $\mathrm{GRE}(\Sigma)$ on pienin sellainen joukko, jolle pätee seuraavat ehdot määritelmän 3.1.1 ehtojen lisäksi.

1. $r, s \in \mathrm{GRE}(\Sigma) \Rightarrow r \cap s \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$.
2. $r \in \mathrm{GRE}(\Sigma) \Rightarrow \neg r \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$.

Jälleen oletetaan, että Σ on erillinen myös näistä uusista merkeistä $\{\cap, \neg\}$.

Vastaavasti tulkinta näille uusille merkinnöille on.

1. $L(r \cap s) = L(r) \cap L(s)$.
2. $L(\neg r) = \Sigma^* \setminus L(r)$.

Huomaa, että negaation tapauksessa kieli riippuu aakostosta Σ. Lisäki yleistettyjen säännöllisten lausekkeiden ilmaisuvoima pysyy itse asiassa täysin samana kuin säännöllisten lausekkeiden, mutta yleistetyillä säännöllisillä lausekkeilla on huomattavasti tehokkaampaa määritellä kieliä kuin säännöllisillä lausekkeilla.

3.2 Semanttinen peli

Ensimmäisenä esitellään säännöllisten kielten niin kutsuttu semanttinen peli.

Yleistetty säännöllisen lausekkeen peli on kahden pelaajan peli pelaajien I ja II välillä. Pelaajilla on käytössä aakkoston Σ yleistetty säännöllinen lauseke $r \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$ sekä pelattava merkkijono $w \in \Sigma^*$. Pelin idea on kertoa voiko annetulla yleistetyllä säännöllisellä lausekkeella tuottaa kyseisen merkkijonon.

Pelaaja I käytännössä päättää mitä haaraa kyseisessä merkkijonon johdosta tarkastellaan ja pelaaja II käytännössä pilkkoo merkkijonon w oikein. Peliin liitetään myös bitti $b \in \{0,1\}$ kertomaan, mitä roolia kukin pelaaja pelaa. Pelin tilanne on siis kolmikko (r, w, b), missä $r \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$, $w \in \Sigma^*$ ja $b \in \{0,1\}$.

Pelin alku

Pelin alkutilanne on (r_0, w_0, b) ja se on pelin niin sanottu nollatilanne. Pelin alussa on siis valittu jokin yleistetty säännöllinen lauseke $r_0 \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$, merkkijono $w_0 \in \Sigma^*$ sekä bitti $b \in \{0,1\}$, joka kertoo millä rooleilla pelaajat aloittavat (tässä tutkielmassa yleensä $b = 0$). Pelin tilanteen yleistettyä säännöllistä lauseketta ja merkkijonoa voidaan merkitä alaindeksillä tarvittaessa.

Pelin kierros

Olkoon pelin tilanne $(r, w, 0)$. Kierroksen alussa katsotaan yleistettyn säännöllisen lausekkeen r rakennetta. Jolloin saadaan viisi tapausta:

1. Pelaaja I pelaa $+$-*siirron* täsmälleen silloin kun $r = s + t$, jollain $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$.

2. Pelaaja I pelaa $\cap$-*siirron* täsmälleen silloin kun $r = s \cap t$, jollain $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$.

3. Pelaaja I pelaa *vaihtosiirron* täsmälleen silloin kun $r = \neg s$, jollain $s \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$.

4. Pelaaja I pelaa *pilkkomissiirron* täsmälleen silloin kun $r = s \cdot t$, jollain $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$.

5. Pelaaja I pelaa *tähtisiirron* täsmälleen silloin kun $r = s^*$, jollain $s \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$.

Määritellään seuraavaksi itse siirto kun pelin tilanne ennen siirtoa on $(r, w, 0)$.

- $+$-*siirto*: Tällöin r on muotoa $s + t$, jollain $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$. Pelaaja II saa valita yleistetyn säännöllisen lausekkeen joko s tai t, jolloin pelin tilanteeksi päivitettään joko (s, w) tai (t, w) riippuen valinnasta. Tämän jälkeen kierros päättyy.

- $\cap$-*siirto*: Tällöin r on muotoa $s \cap t$, jollain $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$. Pelaaja I valitsee päivitetäänkö pelin tilanteeksi joko (s, w) tai (t, w). Tämän jälkeen kierros päättyy.

- *pilkkomissiirto*: Tällöin r on muotoa $s \cdot t$, jollain $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$. Pelaaja II joutuu pilkkomaan merkkijonon w osiin $u \cdot v = w$. Tämän jälkeen pelaaja I saa valita uudeksi pelin tilanteeksi joko (s, u) tai (t, v). Tämän jälkeen kierros päättyy.

- *Tähtisiirto*: Tällöin r on muotoa s^* jollain $s \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$. Pelaaja II valitsee jonkin $n \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoo merkkijonon w haluamaansa osiin $w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$ tai pelaaja II päättää kierroksen ja uusi tilanne on $(\mathbf{1}, w)$. Jos pelaaja II pelaa kuitenkin ensimmäisen tapauksen mukaan, niin pelaaja I valitsee uudeksi tilanteeksi (s, w_i), jollain $i \leq n$. Tämän jälkeen kierros päättyy.
- *Vaihtosiirto*: Pelin tilanteeksi päivitetään $(s, w, 1)$ ja tämän jälkeen kierros päättyy.

Jos pelin tilanne on $(r, w, 1)$, niin peli menee muuten samalla tavalla paitsi, että pelaajan I ja II roolit on vaihdettu ja bitti vaihtuu vaihtosiirrossa nollaksi. Bitti, joka kertoo mitä roolia pelaajat pelaavat voidaan jättää merkitsemättä, jos se on koko ajan 0.

Pelin päättyminen

Jos $r = a$, $r = \mathbf{0}$ tai $r = \mathbf{1}$, kun $a \in \Sigma$, $v \in \Sigma^*$, niin peli päättyy.

Pelin voittaja

Olkoon pelin lopputilanne (r', w', b). Pelaaja II voittaa pelin, jos $b = 0$ ja jokin seuraavista pätee.

- $r' = a$ ja $w' = a$, $a \in \Sigma$.
- $r' = \mathbf{1}$ ja $w' = \epsilon$.

Muuten pelaaja I voittaa. Vastaavasti jos $b = 1$, niin pelaaja I voittaa jos jokin yllä luetelluista pelaajan II voittotilanteista pätee ja pelaaja II voittaa muuten.

Pelin omainaisuuksia

Käytetään pelistä merkintää $\mathrm{GRG}(r, w, b)$. Pelin nollatilanne on tällöin (r, w, b). *Säännöllisten lausekkeiden peli* on muuten samanlainen, mutta se pelataan säännöllisten lausekkeiden suhteen ja luonnollisesti $\cap$-siirto ja vaihtosiirto jäävät pois. Tästä pelistä käytetään vastaavaa lyhennettä $\mathrm{RG}(r, w)$, koska pelissä ei ole vaihtosiirtoa, niin bittiä ei tässä pelissä tarvita.

Lause 3.2. *Olkoon Σ aakkosto ja $r \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$ ja $w \in \Sigma^*$. Peli $\mathrm{GRG}(r, w, b)$ on aina äärellinen.*

Todistus. Induktiolla yleistetyn säännöllisen lausekkeen r rakenteen suhteen. Jos $r = a$, $r = \mathbf{0}$, $r = \mathbf{1}^*$, $r = a^*$ tai $r = \mathbf{1}$, jollain $a \in \Sigma$, niin peli päättyy suoraan. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee yleistetyille säännöllisille lausekkeille $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$. Osoitetaan, että väite pätee yleistetylle säännölliselle lausekkeelle r. Pelin loppuminen riippuu pelaajan I ensimmäisestä siirrosta.

- Jos $r = s + t$, niin pelaaja I pelaa $+$-siirron. Tällöin pelaaja II valitsee joko säännöllisen lausekkeen s tai t. Tällöin induktio-oletuksen nojalla valitsi hän kumman tahansa, niin peli on äärellinen.

- Jos $r = s^*$, niin pelaaja I pelaa tähtisiirron. Tällöin pelaaja II valitsee jonkin luvun $n \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoo merkkijonon w osiin $w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$. Tällöin valitsi pelaaja I minkä tahansa parin (s, w_i), $i \leq n$, niin induktio-oletuksen nojalla peli on äärellinen.

- Muut siirrot menevät vastaavasti.

□

Todistetaan semanttisen pelin GRG päätulos seuraavaksi.

Lause 3.3. *Olkoot Σ aakkosto, $r \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$ ja $w \in \Sigma^*$. Tällöin $w \in L(r)$ jos ja vain jos pelaajalla* II *on voittostrategia pelissä* $\mathrm{GRG}(r, w, 0)$.

Todistus. Todistetaan induktiolla yleistetyn säännöllisen lausekkeen r rakenteen suhteen. Jos $r = a$ jollain $a \in \Sigma$, niin tällöin $w = a$ jos ja vain jos pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(r, w, 0)$ pelin voittoehdon nojalla. Tapaus $r = \mathbf{1}$, $r = v^*$ ja $r = \mathbf{0}^*$ vastaavasti, missä $v \in \Sigma^*$. Jos $r = \mathbf{0}$, niin pelaajalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(r, w, 0)$ kaikilla $w \in \Sigma^*$ ja $w \notin L(\mathbf{0})$.

Oletetaan sitten, että induktioväite pätee yleistetyille säännöllisille lausekkeille $s, t \in \mathrm{GRE}(\Sigma)$ ja osoitetaan itse väite.

"$\Rightarrow$" Oletetaan siis ensin, että $w \in L(r)$. Osoitetaan, että pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(r, w, 0)$. Pelaajan II voittostrategia riippuu pelaajan I ensimmäisestä siirrosta.

- Jos $r = s + t$, niin pelaaja I pelaa $+$-siirron. $L(r) = L(s) \cup L(t)$, joten $w \in L(s)$ tai $w \in L(t)$. Oletetaan yleispätevyyttä menettämättä, että $w \in L(s)$. Tällöin pelaaja II valitsee säännöllisen lausekkeen s ja induktio-oletuksen nojalla pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 0)$.

- Jos $r = s \cap t$, niin pelaaja I pelaa $\cap$-siirron. Tällöin $L(r) = L(s) \cap L(t)$, jolloin $w \in L(s)$ ja $w \in L(t)$. Toisin sanoen valitsi pelaaja I uudeksi tilanteeksi (s, w) tai (t, w), niin induktio-oletuksen nojalla on pelaajalla II voittostrategia peleissä $\mathrm{GRG}(s, w, b)$ ja $\mathrm{GRG}(t, w, 0)$.

- Jos $r = s \cdot t$, niin pelaaja I pelaa pilkkomissiirron. Tällöin $L(r) = L(s)L(t)$, joten on olemassa $u \in L(s)$ ja $v \in L(t)$ siten, että $w = u \cdot v$. Pelaaja II pilkkoo tällöin merkkijonon w osiin $u \cdot v$, jolloin valitsi pelaaja I kumman tahansa parin $(s, u, 0)$ tai $(t, v, 0)$, niin pelaajalla on induktio-oletuksen nojalla voittostrategia peleissä $\mathrm{GRG}(s, u, 0)$ ja $\mathrm{GRG}(t, v, 0)$.

- Jos $r = s^*$, niin pelaaja I pelaa tähtisiirron. Tällöin $L(r) = L(s)^*$, jolloin merkkijono w on muotoa $w = w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$, jollain $n \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $w_i \in L(s)$, jokaisella $i \leq n$ tai $w = \epsilon$. Jos $w = \epsilon$, niin pelaaja II päättää kierroksen ja voittaa suoraan. Muuten pelaaja II pilkkoo merkkijonon w osiin $w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$. Tällöin valitsi pelaaja I minkä tahansa parin (s, w_i), kun $i \leq n$, niin induktio-oletuksen nojalla pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w_i, 0)$.

- Jos $r = \neg s$, niin pelaaja I pelaa vaihtosiirron. Tällöin $L(r) = \Sigma^* \setminus L(s)$, jolloin $w \notin L(s)$. Induktio-oletuksen mukaan $w \in L(s)$ jos ja vain jos pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 0)$ eli $w \notin L(s)$ jos ja vain jos pelaajalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 0)$. Siis pelaajalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 0)$, joka roolien vaihdon myötä tarkoittaa itse asiassa, että pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 1)$.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(r, w, 0)$ ja osoitetaan, että $w \in L(r)$.

- Jos $r = s + t$, niin pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 0)$ tai $\mathrm{GRG}(t, w, 0)$. Voidaan olettaa yleispätevyyttä menettemättä, että pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 0)$. Induktio-oletuksen nojalla $w \in L(s)$, joten $w \in L(r)$.

- Jos $r = s \cap t$, niin valitsi pelaaja I kumman tahansa $(s, w, 0)$ tai $(t, w, 0)$ on pelaajalla II voittostrategia peleissä $\mathrm{GRG}(s, w, 0)$ ja $\mathrm{GRG}(t, w, 0)$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla $w \in L(s)$ ja $w \in L(t)$, joten $w \in L(s) \cap L(t) = L(r)$.

- Jos $r = s \cdot t$, niin pelaajalla II on olemassa merkkijonon w pilkkominen $u \cdot v$ siten, että pelajaalla II on voittostrategia peleissä $\mathrm{GRG}(s, u, 0)$ ja $\mathrm{GRG}(t, v, 0)$. Induktio-oletuksen nojalla $u \in L(s)$ ja $v \in L(t)$, joten $w \in L(s)L(t)$.

- Jos $r = s^*$, niin pelaaja II pystyy valitsemaan sellaisen $n \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkomaan merkkijonon w osiin $w_1 \cdot w_2 \cdots w_n = w$, että hänellä on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w_i, 0)$, jokaisella $i \leq n$ tai sitten pelaaja II päättää pelin tilanteeseen $(\mathbf{1}, w)$ ja voittaa suoraan. Jos pelaaja II voittaa pelaamalla ensimmäisen tapauksen mukaan, niin induktio-oletuksen nojalla $w_i \in L(s)$, jokaisella $i \leq n$, joten $w \in L(r)$. Jälkimmäisessä ainoa mahdollisuus on, että $w = \epsilon$, joten Kleenin tähden tulkinnan määritelmän nojalla $w \in L(r)$.

- Jos $r = \neg s$, niin pelaajalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{GRG}(s, w, 1)$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla $w \in \Sigma^* \setminus L(s) = L(r)$.

□

Lauseesta luonnollisesti seuraa tulos myös säännöllisille lausekkeille.

Seuraus 3.4. *Olkoot Σ aakkosto, $r \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ ja $w \in \Sigma$. Tällöin $w \in L(r)$ jos ja vain jos pelaajalla* II *on voittostrategia pelissä* $\mathrm{RG}(r, w, 0)$.

Tarkastellaan RG-peliä seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 3.5. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$ aakkosto. Tarkastellaan säännöllistä lausekketta $r = b^* + (b^*ab^*ab^*)^* \in \mathrm{RE}(\Sigma)$. Osoitetaan RG-pelin avulla, että

$$L(r) = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a \in 2\mathbb{N} \,\}$$

eli aakkoston Σ merkkijonot joissa on parillinen määrä merkkiä a.

Oletetaan ensin, että $w \in \Sigma^*$ ja $|w|_a \in 2\mathbb{N}$. Jos $|w| = 0$, niin tällöin $w = \epsilon$. Tällöin pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{RG}(r, w)$.

Olkoon $w \in \Sigma$, jolla $|w| = n$ ja $|w|_a \in 2\mathbb{N}$. Koska $r = b^* + (b^*ab^*ab^*)^*$, niin pelaaja I pelaa +-siirron. Se kumman pelaaja II valitsee riippuu päteekö $|w|_a > 0$. Tapaus $|w|_a = 0$ on helppo joten oletetaan, että $|w|_a > 0$. Tällöin pelin tilanteeksi päivittyy $((b^*ab^*ab^*)^*, w)$ ja pelaajan I on pakko pelata tähtisiirto. Pelaaja II valitsee $m = \frac{|w|_a}{2}$. Koska merkkejä a esiintyy merkkijonossa w parillinen määrä, niin pelaaja II voi jakaa sen osiin siten, että jokaisessa osassa esiintyy merkki a täsmälleen kaksi kertaa eli toisin sanoen $\frac{|w|_a}{2}$ osaan. Pillkomisella ei ole juuri merkitystä, mutta se voidaan kanonisoida, esimerkiksi siten, että jokaisen osan oikeanpuoleisin merkki on a lukuunottamatta (välttämättä) viimeistä osaa. Toisin sanoen merkkijono w pilkotaan osiin $w_1aw_1'a \cdot w_2aw_2'a \cdots w_maw_m'aw_m''$, missä $w_i, w_i', w_m'' \in \{b\}^*$, jokaisella $i \in [m]$. Jolloin selvästi jokainen osa kuuluu kieleen $L(b^*ab^*ab^*)$ ja loppupeli on selvä.

Vastaavasti jos $w \in \Sigma^*$ ja $|w|_a \notin 2\mathbb{N}$, niin pelaaja II ei pysty pilkkomaan merkkijonoa w osiin siten, että jokaisessa osassa on parillinen määrä merkkiä a eli ainakin yhdessä osassa on pariton määrä merkkiä a. Tällöin pelaajalla I on selvästi voittostrategia kun hän valitsee osan, jossa on pariton määrä merkkiä a. Siis $L(r) = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a \in 2\mathbb{N} \,\}$.

3.3 EF-peli säännöllisille kielille

Seuraavaksi esitellään Ehrenfeucht-Fraïssé -pelin (EF) kaltainen peli säännöllisille kielille. Pelin tavoitteena on erotella merkkijonot jollain tietyllä luokalla yleistettyjä säännöllisiä lausekkeita. Artikkelissa [22] pyrittiin tutkimaan *yleistettyjen* säännöllisten lausekkeiden erilaisten luokkien vaativuutta ja tutkimaan *tähtikorkeusongelmaa*. Määritellään peliä varten ensin luokat ja niihin liittyvät käsitteet.

Tämän osan ja säännöllisten lausekkeiden EF-peleissä merkitään poikkeuksellisesti yleistettyjä säännöllisiä lausekkeita kreikkalaisilla kirjaimilla kuten ψ, ϕ, χ jne., jotta voimme erotella ne lausekkeista, jotka seuraavaksi esittelemme. Käytetään lisäksi relaatiota $\models$ kertomaan, että yleistetty säännöllinen lauseke ϕ tuottaa merkkijonon w. Siis $w \models \phi$ jos ja vain jos w on säännöllisen lausekkeen ϕ tunnistama.

Määritelmä 3.3.1. *Pseudolauseke* on aakkoston $\{\odot, \circledast\}$ merkkijono eli säännöllisen lausekkeen $(\odot + \circledast)^*$ tuottama merkkijono. *Pseudolausekkeen p tuottama luokka $\mathcal{C}$* aakkoston Σ suhteen määritellään rekursiivisesti seuraavasti.

- Luokka $\mathcal{C}(\epsilon)$ on joukon $\Sigma \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $\mathbf{0}$ sulkeuma operaattoreiden $\neg$, $+$ ja $\cap$ suhteen. Toisin sanoen, jos $s, t \in \mathcal{C}(\epsilon)$, niin $\neg s \in \mathcal{C}(\epsilon)$, $s + t \in \mathcal{C}(\epsilon)$ ja $s \cap t \in \mathcal{C}(\epsilon)$.

- Luokka $\mathcal{C}(\odot q)$ on joukon $\mathcal{C}(q) \cup \{\, r \cdot s \mid r, s \in \mathcal{C}(q) \,\}$, sulkeuma operaattoreiden $\neg$, $+$ ja $\cap$ suhteen.

- Luokka $\mathcal{C}(\circledast q)$ on joukon $\mathcal{C}(q) \cup \{\, r^* \mid r \in \mathcal{C}(q) \,\}$ sulkeuma operaattoreiden $\neg$, $+$ ja $\cap$ suhteen.

Koska luokat ovat negaation suhteen suljettuja on jokaisella aakkoston Σ merkkijonolla ainakin yksi yleistetty säännöllinen lauseke, joka tunnistaa merkkijonon. Nimittäin jo $\neg\mathbf{0}$ tunnistaa kielen Σ^*. Merkitään $\mathcal{L}(\mathcal{C}(p))$ tarkoittamaan luokan $\mathcal{C}(p)$ säännöllisten lausekkeiden tuottamia kieli.

Apulause 3.6. *Joukko $\mathcal{L}(\mathcal{C}(p))$ on äärellinen, jokaisella pseudolausekkeella p.*

Todistus. Sivuutetaan vrt. [22]. □

Määritellään peli pseudolausekkeen ja aakkoston Σ suhteen. *Säännöllisten lausekkeiden Ehrenfeucht-Fraïssé -peli* on kahden pelaajan peli pelaajien I ja II välillä. Pelissä on käytössä pseudolauseke p sekä merkkijonot $u, v \in \Sigma$. Pelin tavoitteena on erotella merkkijonot toisista pseudolausekkeen p luokan $\mathcal{C}(p)$ säännöllisillä lausekkeilla.

Pelin alku

Pelin alkutilanne on (p_0, u_0, v_0).

Pelin kierros

Kierroksen alussa tarkastellaan aina pseudolausekkeen ensimmäistä merkkiä, mikäli se ei ole tyhjä merkkijono. Oletetaan siis, että $p = aq$, missä $a \in \{\odot, \circledast\}$ ja että pelin tilanne on (p, u, v). Saadaan siis kaksi tapausta.

1. Jos $p = \odot q$, niin pelaaja I pelaa joko *tyhjän siirron* eli ϵ-siirron, *vasemmanpuoleisen pilkkomissiirron* eli v$\odot$*-siirron* tai *oikeanpuoleisen pilkkomissiirron* eli o$\odot$*-siirron.* Yleisesti voidaan puhua myös pelkästään *pilkkomissiirrosta* eli $\odot$-siirrosta kun ei kiinnitetä puolta.

2. Jos $p = \circledast q$, niin pelaaja I pelaa joko *tyhjän siirron* eli ϵ-siirron, *vasemmanpuoleisen tähtisiirron* eli v$\circledast$*-siirron* tai *oikeanpuoleisen tähtisiirron* eli o$\circledast$*-siirron.* Yleisesti voidaan puhua myös pelkästään *tähtisiirrosta* eli $\circledast$-siirrosta kun ei kiinnitetä puolta.

Huomaa, että pelaajan I on siis pakko pelata jotain kun peliä on jäljellä. Pelaaja I saa päättää kummalla merkkijonolla hän aina kierroksen alussa pelaa. Määritellään tätä varten siirrot kertomaan kumpaa merkkijonoa pelaaja I pelaa.

- ϵ-siirto: Tällöin alkaa uusi kierros, joka jatkuu tilanteesta (q, u, v).

- v$\odot$-siirto: Tällöin pelaaja I pilkkoo merkkijonon u osiin $u_1 \cdot u_2$. Tämän jälkeen pelaaja II pilkkoo merkkijonon v osiin $v_1 \cdot v_2$. Tämän jälkeen pelaaja I valitsee joko tilanteen (q, u_1, v_1) tai (q, u_2, v_2), millä alkaa uusi kierros. Vastaavasti jos pelaaja I pelaa merkkijonolla v.

- o$\odot$-siirto: Vastaavasti kuin v$\odot$-siirto, mutta pelaaja I pilkkoo merkkijonon v ja pelaaja II merkkijonon u.

- v$\circledast$-siirto: Tällöin pelaaja I valitsee jonkin luvun $n \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoo merkkijonon u osiin $u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$. Tämän jälkeen pelaaja II valitsee jonkin luvun $m \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoo merkkijonon v osiin $v_1 \cdot v_2 \cdots v_m$. Tämän jälkeen pelaaja I valitsee jonkin luvun $i \leq m$ ja pelaaja II valitsee jonkin luvun $j \leq n$, jonka jälkeen uusi kierros alkaa tilanteella (q, u_j, v_i). Vastaavasti jos pelaaja I pelaa merkkijonolla v.
- o$\circledast$-siirto: Vastaavasti kuin v$\circledast$-siirto, mutta pelaaja I pelaa merkkijonolla v ja pelaaja II merkkijonolla u.

Pelin päättyminen

Peli päättyy kun $p = \epsilon$. Pelin lopputulos on tällöin pari (u', v'), missä (p, u', v') oli pelin viimeinen tilanne.

Pelin voittaja

Pelaaja II voittaa pelin jos $|u'|, |v'| \geq 2$ tai $u' = v'$. Muuten pelaaja I voittaa.

Pelin ominaisuuksia

Merkitään Säännöllisten lausekkeiden Ehrenfeucht-Fraïssé -peliä $\mathrm{REF}_p(u, v)$, missä pelin alkutilanne on (p, u, v). Huomaa, että peli on täydellisen tiedon äärellinen peli, joten tasan yhdellä pelaajalla on voittostrategia. Pelissä siis oleellisesti päivitetään tilanteessa aina merkkijonoja sekä pseudolausekketta. Myöhemmin huomataan, ettei ole tarpeen laajentaa peliä operaatioille $+$, $\cap$ ja $\neg$.

On oleellista kun puhutaan EF-peleistä, että ne määrittelevät jonkin mielekkään ekvivalenssin. Sanotaan, että merkkijonot $u, v \in \Sigma$ ovat aakkoston Σ pseudolausekkeen p suhteen *pseudoekvivalentteja*, mikäli jokaisella $\psi \in \mathcal{C}(p)$ pätee $u \models \psi$ jos ja vain jos $v \models \psi$. Tällöin merkitään $u \equiv_p v$. Relaatio on selvästi ekvivalenssirelaatio.

Määritellään tärkeä yleistetty säännöllinen lauseke tämän kappaleen päälauseen todistuksen kannalta. Olkoon Σ aakkoston, p sen pseudolauseke ja $u \in \Sigma^*$. Tarkastellaan kieltä

$$L_u^p := \bigcap_{\substack{\psi \in \mathcal{C}(p) \\ u \models \psi}} L(\psi).$$

Huomaa, että leikkauksen voisi itse asiassa kirjoittaa myös äärellisenä lemman 3.6 nojalla ja koska luokat ovat komplementin suhteen suljettuja, leikkaus ei ole tyhjä. Säännölliset kielet ja luokka $\mathcal{C}(p)$ ovat suljettuja leikkauksen suhteen, joten on olemassa säännöllinen lauseke luokassa $\mathcal{C}(p)$, joka tuottaa yllä olevan kielen, nimittäin

$$\chi_u^p := \bigcap_{\substack{\psi \in \mathcal{C}(p) \\ u \models \psi}} \psi.$$

Selvästi pätee $u \models \chi_u^p$.

Apulause 3.7. *Olkoon Σ aakkoston, p sen pseudolauseke ja $u, v \in \Sigma^*$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä*

- $u \equiv_p v$,
- $u \models \chi_v^p$,
- $L_u^p = L_v^p$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $u \equiv_p v$. Tiedetään, että $v \models \chi_v^p$, joten $u \models \chi_v^p$.

Oletetaan sitten, että $u \models \chi_v^p$. Tällöin saadaan suoraan, että $L_u^p \subseteq L_v^p$. Oletetaan, että $w \notin L_u^p$ eli $w \not\models \chi_u^p$. On siis olemassa sellainen $\phi \in \mathcal{C}(p)$, että $w \not\models \phi$ ja $u \models \phi$. Koska $\mathcal{C}(p)$ on komplementin suhteen suljettu, niin on olemassa sellainen $\phi' \in \mathcal{C}(p)$, että $w \models \phi'$ ja $u \not\models \phi'$. Tällöin $v \not\models \phi'$, sillä $u \models \chi_v^p$. Siis $w \not\models \chi_v^p$ eli $w \notin L_v^p$.

Oletetaan sitten, että $L_u^p = L_v^p$. Olkoon $u \models \phi$, missä $\phi \in \mathcal{C}(p)$. Siis $L_v^p = L_u^p \subseteq L(\phi)$, joten $v \models \phi$. Vastaavasti tapaus $v \models \phi$, missä $\phi \in \mathcal{C}(p)$. □

Apulause kertoo siis, että χ_u^p määrittelee ekvivalenssin $\equiv_p$ merkkijonon u ekvivalenssiluokan.

Lause 3.8. *Olkoot Σ aakkosto, p sen pseudolauseke ja $u, v \in \Sigma^*$. Tällöin $u \equiv_p v$ jos ja vain jos pelaajalla* II *on voittostrategia pelissä* $\mathrm{REF}_p(u, v)$.

Todistus. Todistetaan induktiolla pseudolausekkeen p rakenteen suhteen. Jos $p = \epsilon$, niin väite on selvä sillä tällöin $u = v$. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaikille pseudolausekkeen p loppusegmenteille. Tällöin p on muotoa aq, missä $a \in \{\odot, \circledast\}$ ja q on pseudolauseke.

Oletetaan ensin, että $u \equiv_p v$. Pelaajan II strategia riippuu pelajaan I ensimmäisestä siirrosta.

- Tyhjäsiirto: Pseudoekvivalenssin määritelmällä tiedetään, että oletuksesta $u \equiv_p v$ seuraa $u \equiv_q v$, joten pelaajalla II on induktio-oletuksen nojalla voittostrategia pelissä $\mathrm{REF}_q(u, v)$.
- Pilkkomissiirto: Tällöin $p = \odot q$, jollain pseudolausekkeella q. Oletetaan, että pelaaja I pelaa v$\odot$-siirron ja pilkkoo merkkijonon u osiin $u_1 \cdot u_2$. Tarkastellaan säännöllistä lauseketta $\chi_{u_1}^q \cdot \chi_{u_2}^q \in \mathcal{C}(\odot q)$. Selvästi $u \models \chi_{u_1}^q \cdot \chi_{u_2}^q$, joten oletuksen nojalla $v \models \chi_{u_1}^q \cdot \chi_{u_2}^q$. Tällöin pelaaja II voi pilkkoa merkkijonon v sellaisiin osiin $v_1 \cdot v_2$, että $v_1 \models \chi_{u_1}^q$ ja $v_2 \models \chi_{u_2}^q$. Tällöin apulauseen 3.7 nojalla $u_i \equiv_q v_i$, kun $i \in \{1, 2\}$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla pelajaalla II on voittostrategia loppupelin valitsi pelaaja I kumman tahansa parin (u_1, v_1) tai (u_2, v_2). Vastaavasti jos pelaaja I pelaa o$\odot$-siirron.
- Tähtisiirto: Tällöin $p = \circledast q$, jollain pseudolausekkeella q. Oletetaan, että pelaaja I pelaa v$\circledast$-siirron. Oletetaan lisäksi, että pelaaja I valitsee luvun $n \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoo merkkijonon u osiin $u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$. Tarkastellaan säännöllistä lauseketta

$$\phi \coloneqq \chi_{u_1}^q + \chi_{u_2}^q + \cdots + \chi_{u_n}^q \in \mathcal{C}(\circledast q).$$

Selvästi $u \models \phi^*$, joten oletuksen nojalla $v \models \phi^*$. Tällöin pelaaja II voi valita sellaisen luvun $m \in Z_+$ ja pilkkoa merkkijonon v sellaisiin osiin $v_1 \cdot v_2 \cdots v_m$, että $v_j \models \phi$, jokaisella $j \leq m$. Valitsi pelaaja I minkä tahansa $j \leq m$, pätee $v_j \models \chi^q_{u_i}$, jollain $i \leq n$. Pelaaja II vastaa pelaaja I siirtoon valitsemalla kyseisen luvun i. Tällöin $v_j \equiv_q u_i$, jolloin induktio-oletuksen perusteella pelaajalla II on voittostrategia loppupelin ajan. Vastaavasti jos pelaaja I pelaa o$\circledast$-siirron.

Oletetaan sitten, että pelaajalla II on voittostrategia pelissä $\mathrm{REF}_p(u, v)$ eli pelaaja II voittaa riippumatta pelaajan I strategiasta. Tavoite on osoittaa, että $u \models \phi$ jos ja vain jos $v \models \phi$, jokaisella $\phi \in \mathcal{C}(p)$. Olkoon $\phi \in \mathcal{C}(p)$ ja p on muotoa tq, missä $t \in \{\odot, \circledast\}$. Voidaan olettaa, että $\phi \in \mathcal{C}(p) \setminus \mathcal{C}(q)$, sillä muuten todistus olisi triviaali induktio-oletuksen nojalla. Lisäksi voidaan olettaa, että ϕ ei ole muotoa $\phi_1 + \phi_2$ tai $\phi_1 \cap \phi_2$, sillä ainakin toinen lausekkeista hyväksyisi merkkijonon u tai v. Vastaavasti voidaan olettaa, että ϕ ei ole muotoa $\neg\phi_1$, sillä ϕ tunnistaa ainakin toisen merkkijonon u tai v.

Oletetaan ensin, että $u \models \phi$. Pelaajan II strategia riippuu säännöllisen lausekkeen ϕ rakenteesta. Todistus perustuu pelin simulointiin ja pelaajien mahdollisiin siirtoihin.

- Jos $\phi = \phi_1 \cdot \phi_2$, niin $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}(q)$ ja $p = \odot q$. Oletetaan, että pelajaa I pelaa v$\odot$-siirron ja pilkkoo merkkijonon u osiin $u_1 \cdot u_2$ siten, että $u_1 \models \phi_1$ ja $u_2 \models \phi_2$. Koska pelaajalla II on voittostrategia, niin pelaaja II voi pilkkoa merkkijonon v osiin $v_1 \cdot v_2$ siten, että pelaaja II voittaa pelin. Tällöin induktio-oletuksen nojalla $u_1 \equiv_q v_1$ ja $u_2 \equiv_q v_2$, joten $v_1 \models \phi_1$ ja $v_2 \models \phi_2$ eli $v \models \phi$.

- Jos $\phi = \psi^*$, niin $\psi \in \mathcal{C}(q)$ ja $p = \circledast q$. Oletetaan, että pelaaja I pelaa v$\circledast$-siirron, valitsee luvun $n \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoo merkkijonon u osiin $u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$, jolla $u_i \models \psi$ kun $i \leq n$. Koska pelaajalla II on voittostrategia, niin hän voi valita luvun $m \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoa merkkijonon v osiin $v_1 \cdot v_2 \cdots v_m$ siten, että valitsi pelaaaja I minkä tahansa luvun $j \leq m$, niin pelaaja II löytää aina luvun $i \leq n$, jolla pelaaja II voittaa pelin $\mathrm{REF}_q(u_i, v_j)$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla jokaisella $j \leq m$ on olemassa sellainen $i \leq n$, että pätee $u_i \equiv_q v_j$. Siis $v_j \models \psi$ jokaisella $j \leq m$ eli $v \models \phi$.

Tapaus $v \models \phi$ menee vastaavasti, mutta oletetaan, että pelaaja I pelaa oikeanpuoleisia siirtoja. □

Lause 3.9. *Olkoot Σ aakkosto, p sen pseudolauseke ja $L \subseteq \Sigma^*$ kieli. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä*

a) On olemassa $\psi \in \mathcal{C}(p)$, jolla pätee $L(\psi) = L$.

b) Jokaisella $u \in L$ ja $v \in \Sigma^* \setminus L$ pelaajalla I *on voittostrategia pelissä* $\mathrm{REF}_p(u, v)$.

Todistus. Oletetaan ensin, että on olemassa $\psi \in \mathcal{C}(p)$, jolla $L(\psi) = L$. Olkoon $u \in L(\psi)$ ja $v \in \Sigma^* \setminus L(\psi)$ eli $u \models \psi$ ja $v \not\models \psi$. Tällöin $u \not\equiv_p v$, jolloin lauseen 3.8 nojalla pelaajalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{REF}_p(u, v)$.

Oletetaan sitten, että jokaisella $u \in L$ ja $v \in \Sigma^* \setminus L$ pelaajalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{REF}_p(u, v)$. Tällöin lauseen 3.8 nojalla jokaisella $u \in L$ ja $v \in \Sigma^* \setminus L$ pätee $u \not\equiv_p v$. Tarkastellaan yleistettyä säännöllistä lauseketta

$$\phi := \sum_{w \in L} \chi^p_w.$$

Selvästi $L \subseteq L(\phi)$. Jos taas $w \in L(\phi)$, niin tällöin jollain $w' \in L$ pätee $w \models \chi^p_{w'}$, joten lauseen 3.7 nojalla $w \equiv_p w'$. Siis oletuksen nojalla $w \in L$, joten saadaan $L = L(\phi)$. □

Tarkastellaan REF-peliä seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan kieltä

$$L = \{\, (ab)^n \mid a, b \in \Sigma, n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Toisin sanoen aakkoston $\{a, b\}$ kieltä jossa joka toinen merkki on b ja ensimmäinen merkki on a ja viimeinen merkki on b. Pelajaalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{REF}_{\circledast\odot}(u, v)$ jokaisella $u \in L$ ja $v \in \Sigma^* \setminus L$. Pelaaja I pelaa ensimmäisellä kierroksella v$\circledast$-siirron ja pilkkoo merkkijonon u osiin $u_1 \cdot u_2 \cdots u_n = (ab)^n$. Voidaan olettaa, että $u \neq \epsilon$ ja $|v| \geq 2$, sillä muuten pelaaja I voittaisi pelaamalla vain tyhjiä siirtoja. Koska $v \in \Sigma^* \setminus L$, niin merkkijonossa v esiintyy joko aa tai bb merkkijono jossain kohdassa tai sitten merkkijono alkaa merkillä b tai loppuu merkkiin a.

Jälkimmäinen tapaus on helppo, sillä pelaajan II pilkkomisessa osa, jossa esiintyy ensimmäinen tai viimeinen merkkijonon merkki erottaa merkkijonot. Tarkastellaan ensimmäistä tapausta tarkemmin. Voidaan olettaa yleispätevyyttä menettämättä että osa aa esiintyy merkkijonossa v. Tällöin valitsi pelaaja II minkä tahansa luvun $m \in \mathbb{Z}_+$ ja pilkkoi merkkijonon v osiin $v_1 \cdot v_2 \cdots v_m$, niin jossain osassa esiintyy viimeisenä merkkinä a tai merkkijono aa jossain kohtaa, sanotaan osassa v_i. Pelaaja I valitsee tämän osan ja pelaaja II mielivaltaisen osan $u_j = ab$. Mikäli $|v_i| = 1$ pelaaja I voi pelata seuraavaksi tyhjän siirron ja voittaa pelin. Jos taas $|v_i| > 1$, niin pelaaja I pelaa pilkkomissiirron ja pilkkoo merkkijonon ab osiin $a \cdot b$. Olkoon $v_{i,1} \cdot v_{i,2}$ pelaaja II merkkijonon v_i pilkkominen. Jos $|v_{i,k}| > 1$, missä $k \in \{1, 2\}$, niin pelaaja I voittaa valitsemalla osan $v_{i,k}$. Jos taas $|v_{i_1,}| = |v_{i,2}| = 1$, niin tällöin on oltava $v_{i,2} = a$, jolloin pelaaja I voittaa valitsemalla tämän osan.

Toisaalta säännöllinen lauseke $\phi = (ab)^*$ tuottaa kielen L ja $\phi \in \mathcal{C}(\circledast\odot)$. Tällöin jokaisella $u \in L$ ja $v \in \Sigma^* \setminus L$ pätee $u \not\equiv_{\circledast\odot} v$ eli pelaajalla I on voittostrategia pelissä $\mathrm{REF}_{\circledast\odot}(u, v)$ jokaisella $u \in L$ ja $v \in \Sigma^* \setminus L$.

Peli osoittautuu siis hyvinkin monimutkaiseksi ja sen soveltaminen voi tämän takia olla epämielekästä tietyissä tapauksissa.

4 Kontekstivapaista kielistä

Tässä kappaleessa käsitellään kontekstivapaiden kielten erilaisia pelejä sekä vaativuusteoriaa. Aikaisemmassa kappaleessa tarkasteltiin säännöllisten kielten pelillisiä karakterisointeja [22]. Joitakin pelejä ollaan aikaisemmin kehitelty myös kontekstivapaille kielille [17], mutta ei kuitenkaan täydellisiä. Säännöllisten kielten semanttiset pelit muotoutuivat hyvin luonnollisesti säännöllisten ilmausten kautta. Kontekstivapailla kielillä asia ei kuitenkaan ole näin suoraviivainen. Tässä tutkielmassa ei onnistuttu kehittämään Ehrenfeucht-Fraïssé-peliä kontekstivapaille kielille. Pelin kuitenkin uskotaan olevan mahdollista määritellä, mutta jo säännöllisten kielten EF-pelin monimutkaisuuden takia sen soveltaminen erilaisiin ongelmiin voi olla hankalaa.

Vaativuusteoriaa tutkivassa osuudessa tarkastellaan erilaisia pinoautomaatteja. Kontekstivapaiden kielten looginen karakterisointi tulee myös hyvin luonnollisena jatkona säännöllisille kielille, jotka tunnesti ovat ilmaistavissa MSO-logiikassa.

4.1 Kontekstivapaat kieliopit

Määritelmä 4.1.1. *Kontekstivapaa kielioppi* on nelikko $G = (V, T, P, S)$, missä

- V on äärellinen joukko *muuttujasymboleita*,
- T on äärellinen joukko *terminaaleja* siten, että $V \cap T = \emptyset$,
- P on äärellinen joukko kieliopin *sääntöjä*, jotka ovat muotoa $A \to \alpha$, missä $A \in V$ ja $\alpha \in (V \cup T)^*$, ja
- $S \in V$ on *aloitussymboli.*

Yleensä muuttujasymbolit kuvataan isoilla kirjaimilla, terminaalit pienillä kirjaimilla ja symbolijonot $\alpha \in (V \cup T)^*$ kreikkailaisilla aakkosilla. Lyhennetään kontekstivapaa kielioppi CFG (*context free grammar*). Sanotaan sääntöä $X \to \alpha$ *terminaalisäännöksi*, jos $\alpha \in T^+$ ja *ei-terminaalisäännöksi* muuten. Saman muuttujasymbolin säännöt voidaan erotella pystyviivalla $|$ eli säännöt $X \to \gamma_0$, $X \to \gamma_1$, $\ldots$, $X \to \gamma_n$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$X \to \gamma_0 \mid \gamma_1 \mid \cdots \mid \gamma_n.$$

Määritellään myös tavalliseen tapaan kontekstivapaan kieliopin derivaatio ja sen tuottama kieli. Kontekstivapaan kieliopin G *derivaatio* eli johto $\Longrightarrow_G$ on relaatio, joka määritellään seuraavasti. Olkoon $\alpha A \beta \in (V \cup T)^*$, missä $A \in V$ ja $A \to \gamma$ joukon P sääntö. Tällöin $\alpha A \beta \Longrightarrow_G \alpha\gamma\beta$ tai lyheymmin $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$, jos kielioppi on selvä. *Laajennettu derivaatio* määritellään rekursiivisesti:

1. Jokaiselle $\alpha \in (V \cup T)^*$ pätee $\alpha \overset{*}{\Longrightarrow}_G \alpha$.

2. Jos $\alpha \stackrel{*}{\Longrightarrow}_G \beta$ ja $\beta \Longrightarrow_G \gamma$, niin $\alpha \stackrel{*}{\Longrightarrow}_G \gamma$.

Jos $\alpha \stackrel{*}{\Longrightarrow}_G \beta$, niin sanotaan että β on *derivoitavissa eli johdettavissa* symbolijonosta α. Tässäkin alaindeksi voidaan jättää pois $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$, mikäli kielioppi on selvä. Lisäksi on helppo todistaa, että jos $\alpha \stackrel{*}{\Longrightarrow} \beta$ ja $\beta \stackrel{*}{\Longrightarrow} \gamma$, niin $\alpha \stackrel{*}{\Longrightarrow} \gamma$. Relaatio $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ on siis relaation $\Rightarrow$ refleksiivinen ja transitiivnen sulkeuma.

Kontekstivapaan kieliopin G tuottama *kieli* on

$$L(G) = \left\{ w \in T^* \mid S \stackrel{*}{\Longrightarrow}_G w \right\}.$$

Esimerkki 4.1. Tarkastellaan kontekstivapaata kielioppia $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$, missä P on joukko sääntöjä

$$S \to\mid 1S1 \mid 0S0 \mid \epsilon.$$

Kielioppi G tuottaa kielen $L(G) = \{\epsilon, 00, 11, 0000, 1111, 0110, 1001, \ldots\}$ eli kaikkien $w \in \{0, 1\}^*$ parillisten mittaisten palindromien joukon. Huomaa, että kieliopissa ei ole yhtään terminaalisääntöä.

Kielen *merkeiksi* mielletään siis terminaalit. Sanotaan, että CFG on *ϵ-vapaa*, jos se ei sisällä sääntöjä, jotka ovat muotoa $A \to \epsilon$.

Lause 4.2. *Jokaisella kontekstivapaalla kieliopilla G on olemassa kielioppi G', joka on ϵ-vapaa ja $L(G) \setminus \{\epsilon\} = L(G')$.*

Todistus. Sivuutetaan. Kts. [12]. □

Sanotaan, että kontekstivapaan kieliopin $G = (V, T, P, S)$ symboli X on *hyödyllinen*, jos on olemassa laajennettu derivaatio $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha X \beta \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$, missä $w \in T^*$ ja X on muuttujasymboli tai terminaali. Toisin sanoen muuttujasymbolia X ”käyttämällä” saadaan tuotettua jokin sana. Jos X ei ole hyödyllinen niin se on *turha*. Sanotaan, että CFG on *hyödyllinen*, jos se ei sisällä turhia symboleita ja *puhdas* jos se on lisäksi ϵ-vapaa.

Lause 4.3. *Olkoon $G = (V, T, P, S)$ kontekstivapaa kielioppi ja oletetaan, että $L(G) \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa kielioppi G', joka on hyödyllinen ja $L(G) = L(G')$.*

Todistus. Sivuutetaan. Kts. [12]. □

Seuraus 4.4. *Olkoon $G = (T, V, P, S)$ kontekstivapaa kielioppi ja oletetaan, että $L(G) \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa kontekstivapaa kielioppi G', joka on puhdas ja $L(G) \setminus \{\epsilon\} = L(G')$.*

Kontekstivapaiden kielioppien derivaatiot voidaan jakaa myös kahteen eri luokkaan. Derivaatio on *vasemmanpuoleisin* jos sääntöä sovelletaan aina vasemmanpuoleisimpaan muuttujasymboliin. Vastaavasti määritellään *oikeanpuoleisin* derivaatio. Merkitään vasemmanpuoleisinta derivaatio $\Longrightarrow_{\mathrm{lm}}$ ja oikeanpuoleisinta $\Longrightarrow_{\mathrm{rm}}$ ja näille saadaan vastaavat laajennetut derivaatiot $\stackrel{*}{\Longrightarrow}_{\mathrm{lm}}$ ja $\stackrel{*}{\Longrightarrow}_{\mathrm{rm}}$.

Oletetaan *puihin* liittyviä käsitteitä tutuiksi. Puu $T = (V, E)$ on *yhteinäinen silmukaton (suuntamaton) graafi*. Muita tuttuja käsitteitä puista joita tulemme käyttämään ovat: *(solmun) lapsi*, *(solmun) vanhempi*, *juuri*, *lehti*, *esivanhempi* ja *jälkeläinen*. Mikäli käsitteet eivät ole tuttuja ne löytyvät graafiteoriaa koskevasta kirjallisuudesta kuten [6]. Puut voivat myös olla järjestettyjä jolloin jokaisella solmun lapsella on järjestys vasemmalta oikealle eli lapset voidaan indeksöidä. Tällöin kun puu piirretään, niin solmut ovat oikeassa järjestyksessä vasemmalta oikealle. Järjestetyn puun tai solmun virittämän alipuun *tuotos* tarkoittaa puun lehtien muodostamaa jonoa (puun järjestyksessä).

Olkoon $G = (V, T, P, S)$ kontekstivapaa kielioppi. Kontekstivapaan kieliopin G *derivaatiopuut* ovat järjestettyjä puita, jotka toteuttavat seuraavat ehdot.

1. Jokainen sisäsolmu on merkitty muuttujasymbolilla.
2. Jokainen lehti on merkitty terminaalilla tai tyhjällä merkkijonolla ϵ. Jos kuitenkin lehti on ϵ se on sen vanhemman ainoa lapsi.
3. Jos sisäsolmu on merkitty symbolilla A ja sen lapset on merkitty symboleilla $X_1, X_2, \ldots, X_k$ vasemmalta oikealle, niin silloin $A \to X_1 X_2 \cdots X_k$ on sääntö joukossa P.

Derivaatiolla ja derivaatiopuilla on luonnollinen yhteys.

Lause 4.5. *Olkoon $G = (V, T, P, S)$ kontekstivapaa kielioppi ja $A \in V$. Seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

1. $A \overset{*}{\Longrightarrow} w$.
2. $A \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathrm{lm}} w$.
3. $A \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathrm{rm}} w$.
4. *On olemassa derivaatiopuu, jonka juuri on A ja tuotto w.*

Todistus. Sivuutetaan kts. [12]. □

Vasemman- tai oikeanpuoleisin derivaatiot ovat siis aina olemassa kun jokin derivaatio on olemassa. Lisäksi derivaatiopuut nimensä mukaisesti määrittelevät hyvin onko derivaatio olemassa.

Kontekstivapailla kieliopeilla on myöskin erilaisia aliluokkia. Sanotaan, että kontekstivapaa kielioppi on *yksiselitteinen*, jos kaikilla sanoilla $w \in T^*$ on yksikäsitteinen derivaatiopuu, jonka juuri on S ja tuotto w. Muuten sanotaan, että kielioppi on *moniselitteinen*.

Lause 4.6. *Olkoon $G = (V, T, P, S)$ kontekstivapaa kielioppi ja $w \in T^*$. Tällöin merkkijonolla w on kaksi eri derivaatiopuuta jos ja vain jos sillä on kaksi eri vasemmanpuoleista derivaatiota.*

Todistus. Sivuutetaan kts. [12] □

Normaalimuodoista

Esitellään muutamia yleisempiä normaalimuotoja joita tässä tutkielmassa tarvitaan.

Jokaisella epätyhjällä kontekstivapaalla kielellä $L \subseteq T^+$, joka ei sisällä tyhjää merkkijonoa, on olemassa kielioppi $G = (V, T, P, S)$, jonka säännöt P ovat muotoa

1. $A \to BC$, missä A, B ja C ovat muuttujasymboleja,
2. $A \to a$, missä A on muuttujasymboli ja a on terminaali.

Tälläisen kieliopin sanotaan olevan *Chomskyn normaalimuodossa.*

Lause 4.7. *Jos kielioppi on Chomskyn normaalimuodossa se on puhdas.*

Todistus. Sivuutetaan. Kts. [12]. □

Chomskyn normaalimuodossa oleva kielioppi on käytännöllinen, sillä se kertoo, että kun sovelletaan ei-terminaalisääntöä niin tuotettavaan sanaan tulee vähintään yksi merkki lisää.

Seuraavasta normaalimuodosta löytyy lähteistä [15][10]. Jokaisella epätyhjällä kontekstivapaalla kielellä $L \subseteq T^+$ on olemassa kielioppi $G = (V, T, P, S)$, missä säännöt P ovat muotoa

1. $S \to a$, missä $a \in T$,
2. $A \to a\gamma b$, missä A on muuttujasymboli, $a, b \in T$ terminaaleja ja $\gamma \in (V \cup T)^*$.

Käytetään kieliopista nimeä *kaksois-Greibach normaalimuoto* tai lyhyemmin KG-normaalimuoto.

4.2 Semanttinen peli

Kontekstivapaat kieliopit voidaan niin ikään mieltää tietynlaisten kaavojen muodostamiseksi, joten onkin luontevaa miettiä niille semanttisia pelejä logiikan semanttisten pelien kautta kts. [11]. Hintikka mielsi semanttiset pelit "yhden pelaajan peleiksi", jossa pelaaja *minä itse* (myself) pelaa *luontoa* (nature) vastaan, koska oikeastaan toinen pelaaja lähinnä koittaa vakuuttaa itsensä kaavaan totuudesta. Käytetään tätä lähestymistapaa kontekstivapaille kieliopeille.

Kontekstivapaan kieliopin peli on kahden pelaajan peli *luonnon* (L) ja *(minun) itseni* (M). Pelaajilla on käytössään puhdas kontekstivapaa kielioppi $G = (V, T, P, S)$ ja pelaaja M yrittää vakuuttaa pelaajan L siitä, että kieliopilla G voidaan muodostaa jokin merkkijono $w \in T^+$.

Pelin alku

Pelin alussa *johde* on S ja *tavoitemerkkijono* on w. Pelaajat etenevät kieliopin mukaan muodostaen derivaatiota lähtien aloitussymbolista, joka on pelin ns. nollas johde. Pelin ensimmäisellä kierroksella pelaaja M valitsee jonkin säännön $S \to \gamma$ joukon P säännöistä ja pelin johteeksi päivitetään γ ja tavoitemerkkijonona pysyy w.

Pelin kierros

Pelin kierroksen tilannetta voidaan merkitä parilla (γ, v), missä γ on johde ja v on tavoitemerkkijono. Kierroksen alussa tapahtuu pilkkominen. Pelaaja L pilkkoo sen hetken pelin johteen $\gamma \in (V \cup T)^+ \setminus (T)^*$ seuraavasti: johde pilkotaan yhtä moneen osaan kuin kentässä on muuttujasymboleja siten, että jokainen osa sisältää täsmälleen yhden muuttujasymbolin ja muuten vapaasti terminaaleja. Toisin sanoen jos $\gamma = \gamma_0 X_0 \gamma_1 X_1 \cdots \gamma_n X_n \gamma_{n+1}$, missä $\gamma_i \in (T)^*$ jokaisella $i = 0, 1, \ldots, n+1$, niin pelaajan L pilkkominen on

$$\gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \mid \gamma_{1_2} X_1 \gamma_{2_1} \mid \cdots \mid \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1},$$

missä $\gamma_{i_j} \in (T)^*$ jokaisella $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 1, 2$ ja $\mid$ kertoo pilkkomiskohdan. Huomaa, että $\gamma_{0_2} = \gamma_0$ ja $\gamma_{n_1} = \gamma_n$, mutta merkintä on jatkon kannalta kätevämpi.

Kun pelaaja L on tehnyt pilkkomisen pelaaja M tekee vastaavan pilkkomisen sen hetken tavoitemerkkijonolle v. Pelaaja M joutuu siis pilkkomaan tavoitemerkkijonon osiin $v = v_0 \cdot v_1 \cdots v_n$, missä $\cdot$ luonnollisesti kertoo pilkkomiskohdan.

Pelaajan M pilkkomisen jälkeen pelaaja L valitsee jonkin indeksin $i \in [n]$. Seuraavaksi pelaaja M valitsee jonkin säännön $X_i \to \alpha$ joukosta P. Pelin tilanteeksi päivitetään $(\gamma_{i_2} \alpha \gamma_{i+1_1}, v_i)$.

Pelin loppu

Pelaajat jatkavat peliä kunnes pelaaja M soveltaa terminaalisääntöä tai johde on pidempi kuin tavoitemerkkijono. Pelin lopputulos on tällöin pelin viimeinen tilanne (u, v), missä $u, v \in T^+$.

Pelin voittaja

- Jos johde on pidempi kuin tavoite merkkijono pelaaja L voittaa pelin.
- Pelaaja M voittaa pelin siinä tapauksessa jos pelin viimeinen tilanne on (v, v).
- Muuten pelaaja L voittaa.

Pelin ominaisuuksista

Käytetään pelistä merkintää CFGG(G, w) (context free grammar game) ja lopputulosta voidaan merkitä CFGG$(G, w) \stackrel{t}{=} (u, v)$, missä t kertoo pelin tilanteet[1]. Jos pelaaja M voittaa pelin, niin $u = v$ ja voidaan lyhyesti merkitä CFGG$(G, w) \stackrel{t}{=} v$. Lisäksi määritellään peli CFGG(α, G, w) *kentästä* $\alpha \in (V \cup T)^*$, missä $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha$. Toisin sanoen kyseessä on peli, joka alkaa tilanteesta (α, w). Tällöin pätee CFGG$(S, G, w) =$ CFGG(G, w). Huomaa, että jos $\alpha \in T^*$ ja $\alpha \neq w$, niin silloin pelaaja L on voittanut pelin.

Idea on, että pelaaja M pystyy vakuuttamaan pelaajan L siitä, että kieliopilla voi muodostaa merkkijonon. Huomaa, että jos pelin lopputilanne on (u, v), niin pelin loputtua ollaan itse asiassa saatu derivaatio $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha u \beta$, missä $\alpha, \beta \in (V \cup T)^+$. Toisin sanoen pelaajalla L on valta valita mitä derivaation haaraa edetään, joten hän voi yrittää johtaa pelaajan M haaraan, jossa pelaaja M ei pystyisikään muodostamaan mielekkäästi merkkijonon w osaa. Ennen päälauseen todistus esitellään hyödyllinen apulause.

Apulause 4.8. *Olkoot $G = (V, T, P, S)$ puhdas kontekstivapaa kielioppi ja $w \in T^*$. Oletetaan, että pelaajalla* M *on voittostrategia pelissä* CFGG(γ_0, G, w), *$S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \gamma_0$ ja jonka voittostrategian tilanteet joillakin pelaajan* L *valinnoilla ovat järjestyksessä*

$$((\gamma_0, w_0), (\gamma_1, w_1), \ldots, (\gamma_n, w_n)),$$

missä $\gamma_n = w_n$. Tällöin jokaisella $i \leq n$ on olemassa derivaatio $\gamma_i \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_i w_n \beta_i$, jollain $\alpha_i, \beta_i \in (V \cup T)^*$.

Todistus. Todistetaan induktiolla luvun $0 \leq i \leq n$ suhteen, että on olemassa derivaatio $\gamma_{n-i} \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_{n-i} w_n \beta_{n-i}$. Jos $i = 0$ tilanne on triviaali sillä kaikilla merkkijonoilla pätee $w_n \stackrel{*}{\Longrightarrow} w_n$, jolloin $\alpha_n = \beta_n = \epsilon$ kelpaavat. Tehdään sitten induktio-oletus, että väite pätee luvulle $0 < i < n$ ja osoitetaan väite luvulle $i + 1$. Pitää siis osoittaa, että on olemassa derivaatio

$$\gamma_{n-i-1} \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_{n-i-1} w_n \beta_{n-i-1}.$$

Tiedetään, että tilanteesta $(\gamma_{n-i-1}, w_{n-i-1})$ on pelaajalla M voittostrategia loppupelin ajan. Tällöin on olemassa johteen γ_{n-i-1} sellainen osa $\alpha X \beta$, missä $\alpha, \beta \in T^*$ ja sellainen derivaatio, että $\alpha X \beta \Longrightarrow_G \gamma_{n-i}$. Toisin sanoen on olemassa derivaatio $\gamma_{n-i-1} \Longrightarrow_G \alpha' \gamma_{n-i} \beta'$, jollain $\alpha', \beta' \in (V \cup T)^*$. Äskeisen ja induktio-oletuksen nojalla saadaan derivaatio

$$\gamma_{n-i-1} \Longrightarrow_G \alpha' \gamma_{n-i} \beta' \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha' \alpha_{n-i} w_n \beta_{n-i-1} \beta',$$

jolloin $\alpha_{n-i-1} = \alpha' \alpha_{n-i}$ ja $\beta_{n-i-1} = \beta_{n-i} \beta'$ kelpaavat. □

Oli siis kyseessä mikä tahansa pelaajan M voittostrategia, niin saadaan aina kyseinen derivaatio. Apulause antaa jo hyvän osviitan pelin korrektiudesta, sillä apulause kertoo, että on erityisesti olemassa derivaatio $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_0 w_n \beta_0$, mikäli $\gamma_0 = S$. Merkitään apulauseen voittostrategian derivaation oikean puoleista

[1] Pelin tilanteet voidaan ajatella järjestettynä jonona pelitilanteita

symbolijonoa $\eta_t \coloneqq \alpha_0 w_n \beta_0$, missä t on pelin tilanteet. Voidaan myös merkitä η_{w_n}, missä w_n on pelin tilanteiden t lopputulos, mikäli on selvää mihin peliin viitataan. Apulauseen todistuksen aikana huomataan myös, että itse asiassa pelaajan M voittostrategian jokaisella johteella γ_i, $i < n$ on olemassa $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i' \in (V \cup T)^*$ siten, että $\gamma_i = \alpha_i'\gamma_i'\beta_i'$ ja $\eta_v = \alpha_0' \cdots \alpha_{n-1}' w_n \beta_{n-1}' \cdots \beta_0'$. Saadaankin uusi lause.

Apulause 4.9. *Olkoot $G = (V, T, P, S)$ puhdas kontekstivapaa kielioppi ja $w \in T^*$. Jos pelaajalla* M *on voittostrategia pelissä* CFGG(α_0, G, w)*, $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha_0$ ja v on tämän pelin lopputulos, niin pelaajalla* M *on voittostrategia pelissä* CFGG(η_v, G, w)*.*

Todistus. Olkoon pelaajan M voittostrategian tilanteet järjestyksessä

$$((\alpha_0, w), (\alpha_1, w_1), (\alpha_2, w_2), \ldots, (\alpha_{n-1}, w_{n-1}), (v, v)).$$

Oletetaan lisäksi, että $v \neq w$ ja että η_v on muotoa

$$\gamma_0 X_0 \gamma_1 X_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{j-1} X_{j-1} \gamma_j X_j \gamma_{j+1} \cdots \gamma_n X_n \gamma_{n+1},$$

missä $\gamma_j = xvy$, $\gamma_i, \gamma_{n+1} \in T^*$ ja $X_i \in V$, jokaisella $0 \leq i \leq n$. Olkoon pelaajan L pilkkominen

$$\gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \mid \cdots \mid \gamma_{j-1_2} X_{j-1} \gamma_{j_1} \mid \gamma_{j_2} X_j \gamma_{j+1_1} \mid \cdots \mid \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1}.$$

Symbolijonon η_v ja edellisen apulauseen nojalla tiedetään, että η_v on itse asiassa saatu pelin CFGG(G, w) voittostrategian eri tilanteiden kentistä. Koska jokaisella näistä eri tilanteista on pelaajalla M voittostrategia pelissä CFGG(G, w), niin jää vain selvitettäväksi miten pelaaja saa pilkottua oikein kohdan $\gamma_j = xvy$ suhteen, koska sitä ei esiinny pelissä CFGG(G, w) millään kierroksella, koska v on pelin lopputulos. Koska kyseessä oli voittostrategia, niin on olemassa jokin jonon α_{n-1} osa $x'Xy'$, missä $X \in V$ ja $x', y' \in T^*$ ja jolla $x'Xy' \Longrightarrow_G v$. Tarkastellaan pilkkomista

$$\gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \mid \cdots \mid \gamma_{j-1_2} X_{j-1} x \mid x'Xy' \mid y X_j \gamma_{j+1_1} \mid \cdots \mid \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1}.$$

Äskeisen havainnon perusteella pelaajalla M on tälle pilkkomiselle jokin voittostrategia eli on olemassa pilkkominen $w = w_0 \cdot w_1 \cdots w_{j-1} x \cdot v \cdot y w_{j+1} \cdots w_n$. Tällöin pelaajalla M voittostragia loppupelin pilkkomisella $w = w_0 \cdot w_1 \cdots w_{j-1} \gamma_{j_1} \cdot \gamma_{j_2} w_{j+1} \cdots w_n$. Huomaa, että aikaisemmin oletettiin $\gamma_j = xvy$. □

Todistetaan seuraavaksi tämän luvun päälause.

Lause 4.10. *Olkoon $G = (V, T, P, S)$ puhdas kontekstivapaa kielioppi ja $w \in T^+$. Tällöin $w \in L(G)$ jos ja vain jos pelaajalla* M *on voittostrategia pelissä* CFGG(G, w)*.*

Todistus. "⇒" Todistetaan väite induktiolla merkkijonon w lyhimmän derivaation pituuden suhteen. Jos merkkijonon w lyhin derivaatio on yhden mittainen kieliopissa $K = (V, T, P, S)$, niin silloin $S \Longrightarrow_K w$ eli on olemassa sääntö $S \to w$. Pelaaja M voittaa valitsemalla ensimmäisellä kierroksella tämän säännön. Tehdään sitten induktio-oletus, että pelaajalla M on voittostrategia pelissä CFGG(K, w) kaikilla kieliopeilla K, jossa merkkijonon w lyhimmän derivaation pituus on $1 \leq k$. Osoitetaan, että väite pätee kieliopissa K, jossa merkkijonon w lyhimmän derivaation pituus on $k+1$.

Rakennetaan pelaajan M voittostrategia seuraavasti: Ensimmäisellä kierroksella ei tapahdu pilkkomista ja pelaaja M valitsee merkkijonon w lyhimmän derivaation $S \Longrightarrow_K \gamma \overset{*}{\Longrightarrow} w$, mukaan säännön $S \to \gamma$. Pelaajan M voittostrategia riippuu pelaaja L toisen kierroksen siirrosta.

Olkoon pelin tilanne siis (γ, w), missä $\gamma \notin T^+$ ja lisäksi pätee $S \Longrightarrow_K \gamma \overset{*}{\Longrightarrow} w$. Olkoon pelaajan L johteen γ pilkkominen

$$\gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \mid \gamma_{1_2} X_1 \gamma_{2_1} \mid \cdots \mid \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1},$$

jollain $n \geq 0$. Selvitettäväksi jää miten pelaajan M tulee pilkkoa merkkijono ja miten hän valitsee säännön. Merkkijonon w derivaation ja $\gamma \overset{*}{\Longrightarrow} w$ nojalla jokaisella $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ jonolla $\gamma_{j_2} X_j \gamma_{j+1_1}$ on olemassa (lyhin) derivaatio

$$\begin{aligned} S &\overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \cdots \gamma_{j_2} X_j \gamma_{j+1_1} \cdots \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1} \\ &\overset{*}{\Longrightarrow} \alpha_i \gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \cdots u_j \cdots \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1} \rho_i, \end{aligned}$$

joka on saatu merkkijonon w derivaation avulla. Näiden derivaatioiden avulla pelaaja M saa jokaista $\gamma_{j_2} X_j \gamma_{j+1_1}$ vastaavan osan u_j. Jokaisella indeksillä j on olemassa merkkijonon u_j derivaatiossa ensimmäinen sääntö jota sovelletaan, sanotaan säännön $X_j \to \alpha_j$.

Saadaan siis $\gamma' = \gamma_{j_2} \alpha_j \gamma_{j+1_1}$, jolla pätee

$$S \Longrightarrow_K \gamma \Longrightarrow_K \alpha' \gamma' \beta' \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha' u_j \beta' \overset{*}{\Longrightarrow} w,$$

missä $\alpha' = \gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \cdots \gamma_{j-2_2} X_{j-1} \gamma_{j_1}$ ja $\beta' = \gamma_{j+1_2} X_{j+1} \gamma_{j+2_1} \cdots \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1}$. Tarkastellaan kielioppia $K' = (V \cup \{S'\}, T, P \cup \{S' \to \alpha' \gamma' \beta'\}, S')$, missä $S' \notin V$. Kieliopissa K' merkkijonolle w on olemassa derivaatio mikä on ainakin yhden lyhyempi kuin kieliopin K, sillä $S \Longrightarrow_K \gamma \Longrightarrow_K \alpha' \gamma' \beta' \overset{*}{\Longrightarrow}_K w$ ja $S \Longrightarrow_{K'} \alpha' \gamma' \beta' \overset{*}{\Longrightarrow}_K w$. Tällöin induktio-oletuksella saadaan, että pelaajalla M on voittostrategia pelissä CFGG(K', w) ja vastaava kielioppi saadaan konstruoitua jokaisella indeksillä j. Kieliopin K' ja K ainoat erot ovat uusi symboli S', sääntö $S' \to \alpha' \gamma' \beta'$ ja aloitussymboli. Voidaan olettaa, että pelaaja M valitsee ensimmäisellä kierroksella kyseisen säännön ja voittaa, vaikka pelaaja L pilkkoisi johteen miten tahansa. Toisella kierroksella saadaan siis johteen $\alpha' \gamma' \beta'$ pilkkominen

$$\gamma_{0_2} X_0 \gamma_{1_1} \mid \cdots \mid \gamma_{j-1_2} X_{j-1} \gamma_{j_1} \mid \gamma'_1 \mid \cdots \mid \gamma'_m \mid \gamma_{j+1_2} X_{j+1} \gamma_{j+2_1} \mid \cdots \mid \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1},$$

missä γ' pilkkominen on $\gamma'_1 \mid \cdots \mid \gamma'_m$. Tällöin pelaajalla M on jokin merkkijonon w pilkkominen

$$v_0 \cdot v_1 \cdots v_{j-1} \cdot v'_1 \cdots v'_m \cdot v_{j+1} \cdots v_n.$$

Tällöin pelaaja M voi valita alkuperäisessä pelissä CFGG(K, w) pilkkomiseksi $v_0 \cdot v_1 \cdots v_{j-1} \cdot v_j \cdot v_{j+1} \cdots v_n$, missä $v_j = v'_1 \cdots v'_m$. Jos pelaaja L valitsee indeksin $j \neq i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ pelissä CFGG(K, w), niin pelaajalla M on pelin CFGG(K', w) voittostregian nojalla voittostrategia loppupelin ajan. Jos pelaaja L taas valitsee indeksin $i = j$, niin pelaaja M valitsee luonnollisesti säännön $X_j \to \alpha_j$, jolloin pelin johteeksi päivitettään (γ', v_j). Tällöin pelin CFGG(K', w) voittostrategian nojalla pelaajalla M on jälleen voittostrategia (strategia saadaan γ' ja v_j pilkkomisesta yltä). Siis pelaajalla M on voittostrategia pelissä CFGG(G, w).

"$\Leftarrow$" Pelaaja M voittaa siis riippumatta pelaajan L strategiasta. Derivaation olemassaolo saadaan todettua seuraavasti. Jos pelin CFGG(γ_0, G, w), $S \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_0$ lopputulos on w_0 ja t_0 on jono kyseisen pelin tilanteita, niin apulauseen 4.8 avulla saadaan, että on olemassa derivaatio $S \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_0 \overset{*}{\Longrightarrow} \eta_{w_0}$. Jälleen lauseen 4.9 avulla saadaan, että pelaajalla M on jälleen voittostrategia pelissä CFGG$(\eta_{w_0}, G, w) \overset{t_1}{=} w_1$, missä t_1 on tämän pelin tilanteet. Apulauseen ja edellisen havainnon nojalla on jälleen olemassa derivaatio $S \overset{*}{\Longrightarrow} \eta_{w_0} \overset{*}{\Longrightarrow} \eta_{w_1}$. Tällöin voidaan rekursiivisesti kirjoittaa

1. CFGG$(\gamma_0, G, w) \overset{t_0}{=} w_0$,

2. CFGG$(\eta_{w_i}, G, w) \overset{t_{i+1}}{=} w_{i+1}$,

missä t_i on (voittostrategian) pelin tilanteet. Koska kielioppi G on puhdas, niin pelaaja M ei voi pilkkoa missään kohdassa merkkijonoaan osiin, jossa jokin osa on tyhjä merkkijono. Tällöin koska jokaisella CFGG(η_{w_i}, G, w) on pelaajalla M voittostrategia päädytään väistämättä tilanteeseen, että jollain $j \leq |w|$ pätee CFGG$(\eta_{w_j}, G, w) \overset{t_{j+1}}{=} w$. Asettamalla $\gamma_0 = S$ saadaan derivaatio $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$.

□

Lauseen todistuksen viimeisessä suunnassa todistettiin itse asiassa, että pelaaja M voittaa riippumatta mistä derivaation kohdasta aloitetaan. Hyödyntäen tätä ja aiempia apulauseita saadaan seuraus.

Seuraus 4.11. *Olkoon $G = (V, T, P, S)$ puhdas kontekstivapaa kielioppi ja $w \in T^+$. Tällöin seuraavat väitteet pätevät.*

- *Jos $w \in L(G)$ ja merkkijonon w derivaatio kieliopissa G on jono järjestyksessä $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, missä $\gamma_1 = S$ ja $\gamma_n = w$, niin pelaajalla* M *on voittostrategia pelissä* CFGG(γ_i, G, w), *jokaisella $i \in [n]$.*
- *Jos $S \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma$ ja pelaajalla* M *on voittostrategia pelissä* CFGG(γ, G, w), *niin $w \in L(G)$.*

Todistus. Jälkimmäinen väite todistettiin edellisen lauseen jälkimmäisen suunnan yhteydessä. Ensimmäinen väite seuraa myös suoraan edellisen lauseen ensimmäisen suunnan induktiotodistuksesta. Nimittäin induktioaskeleessa voidaan konstruoida kielioppi, jossa merkkijonon w derivaatio on lyhyempi kuin kieliopissa G: Jokaisella derivaation vaiheella γ_i, $2 < i$ saadaan konstruoitua kielioppi $G' = (V \cup \{S'\}, T, P \cup \{S' \to \gamma_i\}, S')$, jossa merkkijonon w derivaatio on vähintään yhden lyhyempi kuin kieliopin G. Tapaus $i = 1, 2$ käsiteltiin aiemmassa lauseessa. □

Seuraava esimerkki havainnollistaa, miksi on luonnollista sopia, että pelaaja L voittaa, jos pelin aikana johde on pidempi kuin tavoitemerkkijono. Tämä sääntö estää, ettei peli voi jatkua ikuisesti.

Esimerkki 4.12. Tarkastellaan kielioppia $G = (\{A, S\}, \{a\}, P, S)$, missä P on joukko sääntöjä

$$S \to Aa$$
$$A \to Aa \mid a.$$

Tällöin yhdelläkään kierroksella ei tapahtuisi pilkkomista ja pelaaja M voisi valita aina säännön $A \to Aa$ ensimmäisen kierroksen jälkeen. Tällöin jos johde olisi pidempi kuin tavoitemerkkijono, niin kieliopin puhtauden takia johteen tuottama merkkijono olisi väistämättä pidempi kuin tavoitemerkkijono. Onkin siis luonnollista tällöin sanoa, että pelaaja M on hävinnyt pelin.

Esimerkki 4.13. Olkoon $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ kontekstivapaa kielioppi, missä P on joukko sääntöjä

$$S \to aSbS \mid bSaS \mid abS \mid aSb \mid baS \mid bSa \mid ab \mid ba.$$

Osoitetaan, että kaikilla $w \in \{a, b\}^+$ joissa on yhtä paljon merkkejä a ja b pelaajalla M voittostrategia pelissä CFGG(G, w). Induktiolla merkkijonon w pituuden l suhteen: Jos $|w| = 2$, niin silloin $w = ab$ tai $w = ba$, jolloin pelaaja M voittaa valitsemalla säännön $S \to ab$ tai $S \to ba$ riippuen tilanteesta. Oletetaan, että pelaajalla M on voittostrategia kaikilla merkkijonoilla $w \in \{a, b\}^+$ joissa on yhtä paljon merkkejä a, b ja ovat korkeintaa $2 \leq i < l$ mittaisia. Osoitetaan, että korkeintaan l pituisille merkkijonoille väite pätee. Tarkastellaan neljää eri tilannetta

1. $w = avb$, jollakin $v \in \{a, b\}^+$. Tällöin pelaaja M valitsee ensimmäisellä kierroksella säännön $S \to aSb$ ja hänellä on induktio-oletuksen nojalla voittostrategia loppupelin ajan, sillä merkkijonon v täytyy sisältää yhtä paljon merkkejä a ja b, jolloin pelaajalla M voittostrategia pelissä CFGG(G, v).

2. $w = bva$, jollakin $v \in \{a, b\}^+$. Vastaavasti kuten ensimmäinen.

3. $w = ava$, jollakin $v \in \{a, b\}^+$. Koska vasemmanpuoleisin ja oikeanpuoleisin merkki on a, niin tällöin pelaajalla M on kaksi vaihtoehtoa ensimmäisellä kierroksella: $S \to aSbS$ tai $S \to abS$. Mikäli $w = abv'a$ jollakin $v' \in \{a, b\}^+$, niin pelaaja M valitsee säännön $S \to abS$, jolloin hänellä on voittostrategia loppupelin ajan. Jos taas $w = aav'a$, niin pelaaja M valitsee säännön $S \to aSbS$. Huomaa, että tässä tapauksessa $|w| \geq 6$. Pelaaja L voi pilkkoa johteen $aSbS$ kahdella tavalla $aS \mid bS$ tai $aSb \mid S$. Jälkimmäisessä pelaaja M pilkkoo merkkijonon osiin $w = aub \cdot u'a$, siten että merkkijonoissa aub ja $u'a$ on sama määrä merkkejä a ja b. Tälläinen kohta on mahdollista löytää, sillä merkkijonon w ensimmäinen merkki on a. Induktio-oletuksen mukaan pelaajalla M on voittostrategia valitsi pelaaja L kumman muuttujasymbolin tahansa.

   Jos pelaaja L olisi pilkkonutkin johteen osiin $aS \mid bS$, niin pelaaja M löytää pilkkomiskohdan vastaavasti, mutta huolehtii luonnollisesti että vasemman puoleisessa merkkijonosas on merkkejä a tasan yksi enemmän ja oikean puoleisessa vastaavasti merkkiä b.

4. $w = bvb$. Vastaavasti kuten edellinen kohta.

Osoitetaan seuraavaksi, että jos $w \in \{a, b\}^+$ on merkkijono, jossa on eri määrä merkkejä a ja b, niin pelaajalla L on voittostrategia pelissä CFGG(G, w). Osoitetaan väite induktiolla merkkijonon w pituuden $|w|$ suhteen. Perusaskel: $|w| = 1$. Tällöin ensimmäisellä kierroksella valitsi pelaaja M minkä tahansa säännön, niin jokainen sääntö lisää täsmälleen kaksi terminaalia (merkkiä), joten pelasi pelaaja L miten tahansa loppupelin hän voittaa. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaikille merkkijonoille $w \in \{a, b\}^+$, $1 \leq |w| < n$ ja merkkijonossa w on eri määrä merkkejä a ja b. Todistetaan väite vastaaville merkkijonoille joiden pituus on n. Pelaajan L strategia riippuu pelaajan M ensimmäisen kierroksen valitsemasta säännöstä.

1. Jos pelaaja M valitsee säännön $S \to ab$ tai $S \to ba$, niin pelaaja L voittaa välittömästi.

2. Oletetaan, että pelaaja M valitsee säännön $S \to abS$, $S \to baS$, $S \to aSb$ tai $S \to bSa$. Voidaan olettaa, että pelaaja M valitsee säännön $S \to aSb$, muut säännöt perustellaan samaan tapaa. Jos pelaaja M ei valinnut sääntöä tyhmästi eli $w = avb$, niin pelaaja L voittaa pelin CFGG(G, v) induktio-oletuksen perusteella.

3. Oletetaan, että pelaaja M valitsee säännön $S \to aSbS$ ja $S \to bSaS$. Voidaan olettaa, että pelaaja M valitsee säännön $S \to aSbS$, toinen perustellaan samaan tapaan. Tällöin pelaaja L pilkkoo $aSbS$ osiin $aSb \mid S$. Tällöin pelaajan M pilkkomisen $w_1 \cdot w_2$ jälkeen, joko w_1 tai w_2 sisältää eri määrän merkkejä a ja b. Pelaaja L valitsee sen osan, jossa on eri määrä merkkejä a ja b, jolloin hän induktio-oletuksen nojalla voittaa tämän osan peliä.

Toki alunperin oltaisiin voitu osoittaa, että koska jokainen sääntö lisää saman verran merkkejä a ja b, niin kieliopin tuottama merkkijono ei voi sisältää merkkejä eri määrää, mutta tässä havainnollistettiin pelin ideaa.

Kielioppi G tuottaa siis täsmälleen ne merkkijonot $w \neq \epsilon$ joissa on saman verran merkkejä a ja b.

4.3 Vaativuusteoriaa

Richard Büchi todisti 1960-luvulla, että monadinen toisen kertaluvun logiikka karakterisoi säännölliset kielet, joka onkin yksi kuvailevan vaativuusteorian ensimmäisiä tuloksia. Vähemmän tunnettu kontekstivapaiden kielten looginen karakterisointi todistettiin artikkelissa [15] ja myöhemmin on löytynyt muita karakterisointeja [14]. Seuraavassa osiossa käsitellään kyseisen artikkelin loogisen karakterisoinnin todistus pinoautomaattien kautta, tuoden erilaista näkökulmaa aiheeseen. Vaikutteita tähän lähestymiseen on otettu artikkelista [7], missä käsiteltiin ω-kontekstivapaita kieliä. Myöhemmin samaa lähestymistä hyödynnetään seuraavassa kappaleessa konjunktiivisille kieliopeille.

Olkoon Γ aakkosto. Merkitään $\mathcal{S}(\Gamma) := \{\#\} \cup (\{\downarrow, \uparrow\} \times \Gamma)$.

Määritelmä 4.3.1. *Pinoautomaatti (Pushdown automata)* (epädeterministinen) on kuusikko $P = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, F)$, missä

- Q on äärellinen *tilojen joukko*,
- T on äärellinen aakkosto (terminaalit),
- Γ on *pinon aakkosto*,
- $\delta \subseteq Q \times T \times Q \times \mathcal{S}(\Gamma)$ on *siitymärelaatio*,
- $q_0 \in Q$ on *aloitustila*,
- $F \subseteq Q$ on *hyväksymistilojen joukko.*

Huomaa, että pinoautomaatti ei salli tyhjiä siirtymisiä. *Laskennan tilanne* on tällöin kolmikko $(q, w, \gamma) \in Q \times T^* \times \Gamma^*$. Olkoon $t \in \delta$. Määritellään laskennan tilojen välille relaatio *laskenta* $\vdash_P^t$ ja merkitään vain $\vdash$, $\vdash^t$ tai $\vdash_P$, mikäli pinoautomaatti tai *tilasiirtymä* on kontekstista selvä.

- Jos $(q, a, p, (\uparrow, X)) \in \delta$, niin $(q, aw, X\gamma) \vdash (p, w, \gamma)$ (poisto).
- Jos $(q, a, p, (\downarrow, X)) \in \delta$, niin $(q, aw, \gamma) \vdash (p, w, X\gamma)$ (lisäys).
- Jos $(q, a, p, \#) \in \delta$, niin $(q, aw, \gamma) \vdash (p, w, \gamma)$ (neutraali).

Toisin sanoen nuoli kertoo lisätäänkö pinoon symboli vai poistetaan ja # taas kertoo, että siirtymällä pinoon ei tehdä muutoksia. Tavalliseen tapaan $\vdash^*$ on relaation $\vdash$ refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma ja sitä nimitetään *laskennaksi.* Tällöin pinoautomaatin P *tunnistama* kieli on

$$L(P) = \{\, w \in T^* \mid (q_0, w, \epsilon) \vdash_P^* (p, \epsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in \Gamma^* \,\} .$$

Sanotaan lisäksi, että automaatti P *hyväksyy* merkkijonon w, mikäli on olemassa laskenta $(q_0, w, \epsilon) \vdash^* (p, \epsilon, \gamma)$, missä $p \in F$. Jos $(q, aw, \gamma) \vdash (p, w, \gamma')$, niin sanotaan, että automaatti *lukee* merkin a.

Pinoautomaateista löytyy valtavasti muunnelmia erilaisiin laskennan tarkoituksiin. Eräs tapa on kontrolloida koodaamalla aakkostoon milloin pinoon voidaan lisätä ja poistaa merkkejä [2]. Olkoon Σ aakkosto. Merkitään $\Sigma^{\uparrow} = \{\uparrow\} \times \Sigma$, $\Sigma^{\downarrow} = \{\downarrow\} \times \Sigma$, $\Sigma^{\#} = \{\#\} \times \Sigma$ ja $\tilde{\Sigma} = (\Sigma^{\downarrow}, \Sigma^{\uparrow}, \Sigma^{\#})$, jota sanotaan *julkiseksi aakkostoksi.* Lisäksi merkitään $\hat{\Sigma} = \Sigma^{\downarrow} \cup \Sigma^{\uparrow} \cup \Sigma^{\#}$.

Määritelmä 4.3.2. *Julkinen pinoautomaatti (Visibly pushdown automata)* on kuusikko $V = (Q, \tilde{T}, \Gamma, \delta, q_0, F)$, missä

- Q on äärellinen tilojen joukko,
- $\tilde{T}$ on äärellinen julkinen aakkosto,
- Γ on pinoaakkosto,
- $\delta = \delta^{\downarrow} \cup \delta^{\uparrow} \cup \delta^{\#}$, missä

– $\delta^{\downarrow} \subseteq Q \times T^{\downarrow} \times Q \times \Gamma^{\downarrow}$,
– $\delta^{\uparrow} \subseteq Q \times T^{\uparrow} \times Q \times \Gamma^{\uparrow}$,
– $\delta^{\#} \subseteq Q \times T^{\#} \times Q \times \Gamma^{\#}$,

- $q_0 \in Q$ on aloitustila,
- $F \subseteq Q$ on hyväksymistilojen joukko.

Julkisen pinoautomaatin $V = (Q, \tilde{T}, \Gamma, \delta, q_0, F)$ *laskenta* määritellään seuraavasti. *Laskennan tilanne* on kolmikko $(q, w, \gamma) \in Q \times \hat{T}^* \times \Gamma^*$. Määritellään luonnollisella tavalla relaatio *laskenta* $\vdash_V^t$ kuten aiemmin. Vastaavasti laskennasta voidaan jättää t ja V merkitsemättä, mikäli ne ovat selviä kontekstista.

- Jos $(q, (\downarrow, a), p, (\downarrow, X)) \in \delta$, niin $(q, (\downarrow, a)w, \gamma) \vdash (p, w, X\gamma)$.
- Jos $(q, (\uparrow, a), p, (\uparrow, X)) \in \delta$, niin $(q, (\uparrow, a)w, X\gamma) \vdash (p, w, \gamma)$.
- Jos $(q, (\#, a), p, \#) \in \delta$, niin $(q, (\#, a)w, \gamma) \vdash (p, w, \gamma)$.

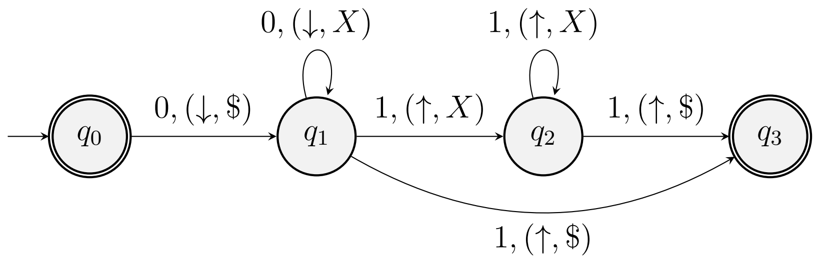
Tavalliseen tapaan $\vdash_V^*$ on refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma. Samaan tapaan kuin aiemmin määritellään julkisen automaatin määrittelemä kieli. Julkisen pinoautomaatin määrittämää kieltä sanotaan *julkiseksi kontekstivapaaksi kieleksi.*

Automaatit voidaan piirtää soveltaen esimerkiksi lähteen [12] tapaa.

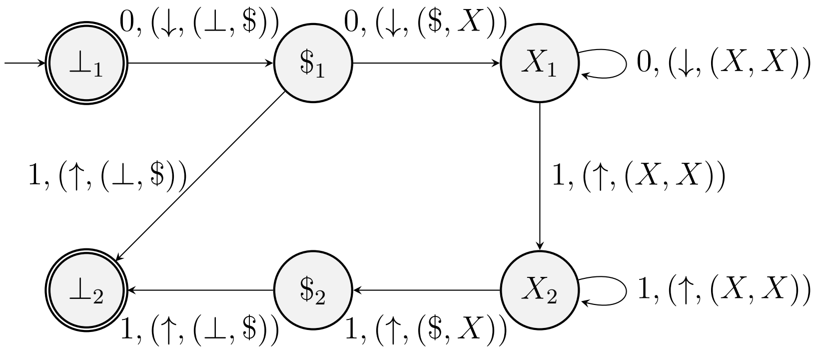
Esimerkki 4.14. Alla on pinoautomaatti

$$(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{X, \$\}, \delta, q_0, \{q_0, q_3\}),$$

missä δ voidaan päätellä kuvasta. Automaatti tunnistaa kielen $\{\, 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.



Huomautus. Julkinen pinoautomaatti ei pysty suoraan pitämään kirjaa sen pinon päällimmäisestä merkistä. Tämä ei kuitenkaan ole ongelma, sillä sen pystyy kiertämään seuraavasti. Laajennetaan pinoaakkosto Γ uudella merkillä $\perp \notin \Gamma$, joka kertoo onko pino tyhjä ja edelleen pinoaakkostoksi $\Gamma' = (\Gamma \cup \{\perp\}) \times (\Gamma \cup \{\perp\})$. Lisäksi tiloihin merkitään sen hetken pinon päällimmäinen symboli. Mikäli samoja päällimmäisiä symboleja on useammassa tilassa ne voidaan numeroida esimerkiksi alaindeksillä. Alla muutettu edellisen esimerkin pinoautomaatti sellaikseksi, että tiedetään pinon päällimäinen merkki.



Julkisen aakkostolle $\tilde{\Sigma}$ aakkostolle voidaan muodostaa projektio.

Määritelmä 4.3.3. Olkoon $\tilde{\Sigma}$ julkinen aakkosto. *Kanoninen projektio* julkiselle aakkostolle on funktio $\pi \colon \hat{\Sigma} \to \Sigma$, $(s, a) \mapsto a$, jokaisella $(s, a) \in \hat{\Sigma}$. Projektio voidaan edelleen laajentaa merkkijonoille $w \in \hat{\Sigma}^*$, missä $w = w_0 w_1 \cdots w_n$ seuraavasti. Merkitään $\pi(w_0 w_1 \cdots w_n) = \pi(w_0)\pi(w_1) \cdots \pi(w_n)$ ja edelleen kielille $L \subseteq \hat{\Sigma}$ asettamalla $\pi(L) = \{\, \pi(w) \mid w \in L \,\}$.

Julkisilla pinoautomaateilla on paljon mielekkäitä ominaisuuksia [2]. Julkiset kontekstivapaat kielet ovat suljettuja leikkauksen, yhdisteen, komplementin, liitoksen ja Kleenin tähden suhteen. Lisäksi jokaista julkista pinoautomaattia vastaa deterministinen julkinen pinoautomaatti, joka tunnistaa saman kielen. Esitellään myös artikkelien [3], [7] ja [2] mukaiset lauseet.

Apulause 4.15. *Olkoon $L \subseteq T^*$ kontekstivapaa kieli. Tällöin on olemassa aakkoston $\tilde{T}$ julkinen pinoautomaatti V, jolla $\pi(L(V)) = L$.*

Tietyssä mielessä julkiset pinoautomaatit tunnistavat siis kontekstivapaat kielet ja seuraava apulause kertoo, että pinoautomaatit tunnistavat julkisten kielten projektion.

Apulause 4.16. *Olkoon $\tilde{T}$ julkinen aakkosto ja kieli $L \subseteq \hat{T}$ julkisen pinoautomaatin tunnistama. Tällöin on olemassa pinoautomaatti, joka tunnistaa kielen $\pi(L) \subseteq T$.*

Todistus. Olkoon $V = (Q, \hat{T}, \Gamma, \delta, q_0, F)$ julkinen pinoautomaatti, joka tunnistaa kielen L. Tarkastellaan pinoautomaattia $P = (Q, T, \Gamma, \delta', q_0, F)$, missä $\delta' = \{\, (q, \pi(a), p, s) \mid (q, a, p, s) \in \delta \,\}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\pi(L) &= \pi(L(V)) \\
&= \pi\left(\left\{ w \in \hat{T}^* \mid (q_0, w, \epsilon) \vdash_V^* (p, \epsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in \Gamma^* \right\}\right) \\
&= \left\{ \pi(w) \in T^* \mid w \in \hat{T}^*, (q_0, w, \epsilon) \vdash_V^* (p, \epsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in \Gamma^* \right\} \\
&= \left\{ \pi(w) \in T^* \mid w \in \hat{T}^*, (q_0, \pi(w), \epsilon) \vdash_P^* (p, \epsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in \Gamma^* \right\} \\
&= \{\, v \in T^* \mid (q_0, v, \epsilon) \vdash_P^* (p, \epsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in \Gamma^* \,\} \\
&= L(P),
\end{aligned}$$

joten automaatti P tunnistaa kielen $\pi(L)$. $\square$

Vielä pitää todeta, että jokaista pinoautomaattia vastaa kontekstivapaa kieli. Pinoautomaatin määritelmä on suhteellisen poikkeuksellinen siihen mitä tavallisesti kirjallisuudessa esiintyy. Tarkastellaan seuraavaksi, miten tämän tutkielman pinoautomaatin voi muuntaa lähteen [19] pinoautomaatin malliksi. On kuitenkin suhteellisen selvää, että relaatio δ voitaisiin korvata funktiolla $\delta' : Q \times T_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$ ja laskennan tilojen relaatio $\vdash$ seuraavasti: Jos $(p, Y) \in \delta'(q, a, X)$, niin $(q, aw, X\gamma) \vdash (p, w, Y\gamma)$. Relaation kääntäminen funktioksi tapahtuisi seuraavasti.

Jos $(q, a, p, (\uparrow, X)) \in \delta$, niin vastaava siirtyminen fuktiolla δ' on $\delta'(q, a, X) = (p, \epsilon)$. Tapaus $\downarrow$ ja $\#$ menevät vastaavasti. Luonnollisesti jos jollain tilalla $q \in Q$ ja merkillä $a \in T$ ei esiinny millään $p \in Q$ alkiota relaatiossa $(q, a, p, s) \in \delta$, niin tällöin funktiossa δ' asetettaisiin sen kuvaksi tyhjä juokko. Pinoautomaatin tunnistama kieli on siis näin ollen aina kontekstivapaa.

Saadaan näin ollen lause, että pinoautomaatin malli on hyvin määritelty.

Lause 4.17. *Olkoon $L \subseteq T^*$ kieli. Tällöin kieli L on kontekstivapaa täsmälleen silloin jos on olemassa pinoautomaatti P, joka tunnistaa kielen L.*

Edetetään seuraavaksi itse logiikan määrittelyyn, joka karakterisoi kontekstivapaat kielet.

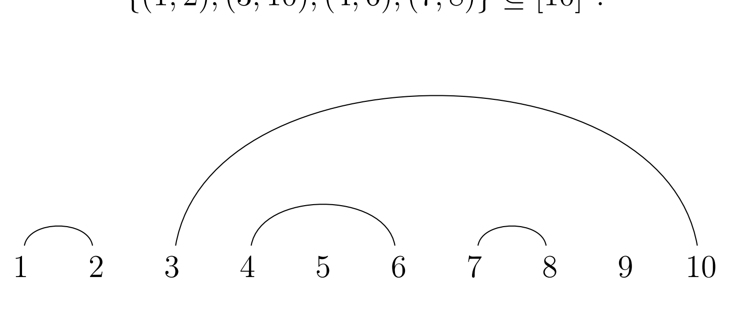
Määritelmä 4.3.4. Määritellään seuraavaksi artikkelin [15] mukainen relaatio. Sanotaan, että relaatio $M \subseteq [n]^2$ on *paritus* jos jokaisella $i, j, k, l \in [n]$ pätee

1. jos $(i, j) \in M$, niin $i < j$; (kunnioittaa järjestystä)
2. jos $(i, j) \in M$ ja $k \notin \{i, j\}$, niin (i, k), (k, i), (k, j), $(j, k) \notin M$; (alkiot kuuluvat korkeintaan yhteen pariin)
3. jos (i, j), $(k, l) \in M$ ja $i < k < j$ niin $i < l < j$. (parit eivät mene ristiin)

Parituksen voi mieltää myös sulutuksena.

Esimerkki 4.18. Kuvalla havainnollistettu paritus

$$\{(1, 2), (3, 10), (4, 6), (7, 8)\} \subseteq [10]^2.$$



Näin ollen voidaan määritellä seuraavat logiikat. Olkoon $\{ M_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ kaksi paikkaisia toisen kertaluvun muuttujia. Logiikan $\exists^{Match}$FO-lauseet ovat muotoa

$$\exists^{Match} M_1 \cdots \exists^{Match} M_n \phi,$$

missä $n \in \mathbb{Z}_+$ ja ϕ on ensimmäisen kertaluvun kaava. Tulkinta on luonnollinen. Olkoon $\mathfrak{A}$ malli. Jos $\psi := \exists^{Match} M\phi(M)$, niin $\mathfrak{A} \models \psi$ jos ja vain jos on olemassa joukon A paritusrelaatio m, jolla $\mathfrak{A} \models \phi(m)$. Logiikan $\exists_1^{Match}$FO saadaan kvantifioimalla yhtä paritusrelaatiota. Samaan tapaan määritellään logiikan $\exists^{Match}$MSO ja $\exists_1^{Match}$MSO lauseet.

Artikkelissa [15] todistettiin seuraava tulos derivaatiopuiden avulla. Paritusrelaatiolla on mahdollista simuloida KG-normaalimuotoa. Tässä tutkielmassa todistetaan sama tulos pinoautomaattien avulla. Huomataan, että paritusrelaatiolla on mahdollista simuloida pinoa.

Lause 4.19. *Kieli on kontekstivapaa jos ja vain jos se voidaan määritellä logiikassa* $\exists_1^{Match}$MSO.

Todistus. Olkoot T aakkosto ja $L \subseteq T^*$.

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että kieli L on kontekstivapaa. Tällöin on olemassa pinoautomaatti $P = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, F)$, joka tunnistaa sen. Tarkastellaan mielivaltaista kielen merkkijonoa $w \in L$ ja sen sanamallia $\mathfrak{A}_w$. Täytyy siis muodostaa $\exists_1^{Match}$MSO$[\tau_T]$ kaava χ_P, joka simuloi tätä pinoautomaattia eli jolla pätee

$$\{\, \mathfrak{B} \in \mathrm{STR}[\tau_T] \mid \exists w \in L : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}_w \,\} = \{\, \mathfrak{A} \in \mathrm{STR}[\tau_T] \mid \mathfrak{A} \models \chi_P \,\}.$$

Oletetaan joukko toisen kertaluvun muuttujia $\{\, X_t \mid t \in \delta \,\}$. Määritellään ensin muutama hyödyllinen termistön τ_T kaava

$$\phi_{next}(x, y) := x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y),$$

$$\psi_{start} := \forall x(\forall y(x \leq y) \to \bigvee_{\substack{t \in \delta,\\ t(1) = q_0}} X_t(x))$$

ja

$$\psi_{accept} := \forall x(\forall y(y \leq x) \to \bigvee_{\substack{t \in \delta,\\ t(3) \in F}} X_t(x)).$$

Edellisessä $t(i)$ tarkoittaa tilasiirtymän t paikan i arvoa. Huomaa, että disjunktiot ovat äärellisiä sillä tilasiirtymiä on vain äärellinen määrä. Kaava $\phi_{next}(x, y)$ kertoo selvästi että alkio y on alkion x välitön seuraaja järjestyksen $<$ suhteen. Kaava $\phi_{start}(x)$ kertoo, että laskenta on aloitettu aloitustilasta. Vastaavasti kaava ϕ_{accept} taas kertoo, että laskenta päättyy hyvksymistilaan.

Kaava

$$\psi_{part} := \forall x \left(\bigvee_{t \in \delta} \left(X_t(x) \wedge \bigwedge_{\substack{t' \in \delta,\\ t \neq t'}} \neg X_{t'}(x) \right) \right),$$

kertoo selvästi, että $\{\, X_t \mid t \in \delta \,\} \setminus \{\emptyset\}$ muodostaa joukon $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}_w)$ osituksen, joka takaa, että kyseinen laskenta on yksiselitteinen. Tarkastellaan seuraavaa kaavaa

$$\psi_{trans} := \forall x \left(\bigwedge_{t \in \delta} (X_t(x) \to \phi_{1,t}(x) \wedge \phi_{2,t}(x) \wedge \phi_{3,t}(x)) \right),$$

missä

$$\phi_{1,(q,a,p,s)}(x) := P_a(x),$$

$$\phi_{2,(q,a,p,s)}(x) \coloneqq \forall y \left(\phi_{next}(x,y) \to \bigvee_{\substack{t' \in \delta, \\ t'(1)=p}} X_{t'}(y) \right),$$

$$\phi_{3,(q,a,p,s)}(x) \coloneqq \begin{cases} \exists y \left(\bigvee_{\substack{t' \in \delta, \\ t'(4)=(\downarrow,A)}} X_{t'}(y) \wedge M(y,x) \right), & \text{jos } s = (\uparrow, A) \\ x = x, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Kaava ψ_{trans} simuloi pinoautomaatin P liikkumista tilojen välillä eli laskentaa. Kaava $\phi_{1,(q,a,p,s)}(x)$ kertoo, jos $x \in X_{(q,a,p,s)}$, niin alkion x paikalla on merkki a. Kaava $\phi_{2,(q,a,p,s)}(x)$ kertoo, että alkion x välittömän seuraajan täytyy kuulua sellaiseen joukkoon $X_{t'}$, missä $t'(1) = p$ eli ollaan kunnioitettu siirtymistä tilojen välillä. Kaava $\phi_{3,(q,a,p,s)}$ kertoo, että jos pinosta poistetaan päällimmäinen alkio, niin on se täytynyt myös jossain kohtaa se aikaisemmin lisätä pinoon merkkijonoa luettaessa.

Yllä olevan perusteella on selvää, että lause

$$\chi_P \coloneqq \exists^{Match} M \exists X_{t_0} \cdots \exists X_{t_{s-1}} \left(\psi_{part} \wedge \psi_{start} \wedge \psi_{trans} \wedge \psi_{accept} \right),$$

missä $s = |\delta|$ ja $\delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_{s-1}\}$ määrittelee kielen L. Nimittäin sanamallin $\mathfrak{A}_w$, missä $w \in L$ on laskennasta pinoautomaatissa P helppo löytää joukot sekä paritusrelaatio. Vastaavasti, jos jossain mallissa on totta lause χ_P, niin vastaava laskenta mallissa löytyy tarkastelemalla mikä tulkinta muuttujille annetaan.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että L on määriteltävissä logiikassa $\exists_1^{Match}$MSO. Tällöin on olemassa lause $\psi \in \exists_1^{Match}\mathrm{MSO}[\tau_T]$ siten, että $L(\psi) = L$. Voidaan olettaa lisäksi, että $\psi \notin \mathrm{MSO}[\tau_T]$ ja että jokainen kaavan ψ muuttuja on kvantifioitu korkeintaan kerran, jolloin ψ on muotoa $\exists^{Match} M \phi(M)$ jollain $\phi \in \mathrm{MSO}[\tau_T]$.

Tarkastellaan seuraavaa luokkaa

$$K = \left\{ \mathfrak{A}_w \mid w \in L(\psi), \mathfrak{A}_w \models \phi(m), m \subseteq \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}_w)^2 \text{ on paritus} \right\}.$$

Jokaista mallin $\mathfrak{A}_w \in K$ paritusta m vastaa seuraavanlainen aakkoston $\tau' \coloneqq \tau_T \cup \{P\}$ malli $\langle \mathfrak{A}_{\tilde{w}}, m \rangle$, missä $\mathfrak{A}_{\tilde{w}}$ on merkkijonon $\tilde{w}$ sanamalli,

$$\tilde{w} = (s_0, w_0)(s_1, w_1) \cdots (s_n, w_n),$$

symbolin P tulkinta mallisa on m, $s \in \{\downarrow, \uparrow, \#\}$ ja

- $(\downarrow, w_i)$ jos on olemassa $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}_w)$ siten, että $(i,j) \in m$,
- $(\uparrow, w_i)$ jos on olemassa $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}_w)$ siten, että $(j,i) \in m$,
- $(\#, w_i)$ muuten.

Toisin sanoen merkkeihin koodataan paritus ja $\tilde{w} \in \hat{T}$, missä $\tilde{T}$ on julkinen aakkosto. Muuten malli $\langle \mathfrak{A}_{\tilde{w}}, m \rangle$ on identtinen mallin $\mathfrak{A}_w$ kanssa ja tällöin $\langle \mathfrak{A}_{\tilde{w}}, m \rangle \models \phi'$, missä kaava ϕ' on saatu kaavasta ϕ korvaamalla sanamallin yksipaikkaisten relaatioiden P_a symbolit vastaavilla symboleilla $P_{\tilde{a}}$. Merkitään malleista $\mathfrak{A}_w \in K$ tällä proseduurilla saatujen mallien luokkaa $\tilde{K}$.

Kaava ϕ' voi toisaalta sisältää myös muita sidottuja ensimmäisen tai toisen kertaluvun muuttujia. Jotta väite voidaan todistaa itse tälle kaavalle, niin täytyy tarkastella kaavoja joissa on vapaita ensimmäisen ja toisen kertaluvun muuttujia. Olkoon $Z = \{x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_k\}$ ja

$$\chi(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_k) \in \mathrm{MSO}[\tau'_T]$$

mielivaltainen kaava, jonka vapaat muuttujat ovat Z siten, että x_i, $i \in [n]$ ovat ensimmäisen kertaluvun ja X_j, $j \in [k]$ toisen kertaluvun muuttujia.

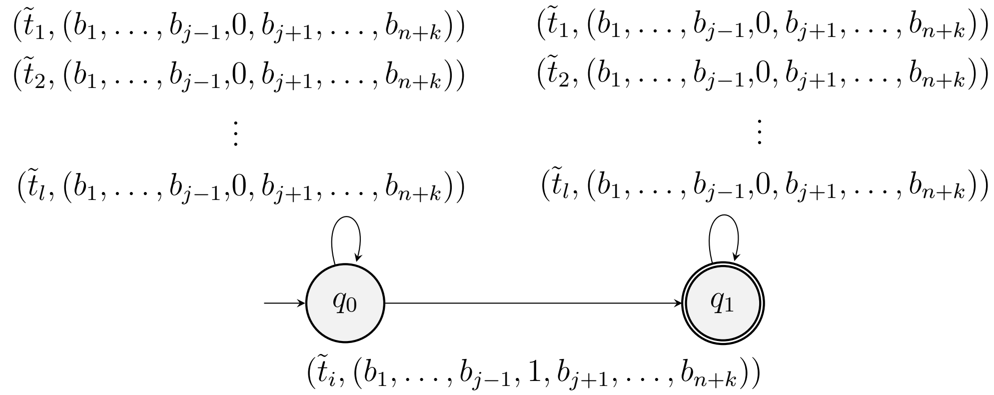
Mallien $\mathfrak{A}_{\tilde{w}} \in \tilde{K}$ tulkinnat muuttujille Z voidaan koodata aakkoston $\dot{T} \coloneqq \tilde{T} \times \{0,1\}^{n+k}$ merkkijonoihin seuraavasti. Olkoot $\tilde{w} = \tilde{w}_1\tilde{w}_2 \cdots \tilde{w}_p \in \hat{T}^*$ ja $\langle \mathfrak{A}_{\tilde{w}}, m\rangle \in \tilde{K}$. Tällöin merkkijono $\dot{w} = (\tilde{w}_1, \mathbf{b}_1)(\tilde{w}_2, \mathbf{b}_2) \cdots (\tilde{w}_p, \mathbf{b}_p) \in \dot{T}^*$ kertoo mallin $\langle \mathfrak{A}_{\tilde{w}}, m\rangle$ tulkinnat muuttujille Z seuraavasti.

- Jos $j \in \{1, \dots, n\}$, niin $\mathbf{b}_i(j) = 1$ jos ja vain jos $x_j^{\mathfrak{A}^*_{\dot{w}}} = i$.
- Jos $j \in \{1, \dots, k\}$, niin $\mathbf{b}_i(j) = 1$ jos ja vain jos $i \in X^{\mathfrak{A}^*_{\dot{w}}}$.

Huomaa, että tämä sallii vain merkkijonot $\dot{w}$, joissa jokainen ensimmäisen kertaluvun muuttuja symboli vastaa tasan yhtä merkkijonon paikkaa. Merkitään lisäksi $L(\chi)$, niitä merkkijonoja $\dot{w}$, joiden tulkinnalla muuttujille Z kaava χ on totta mallissa $\langle \mathfrak{A}_{\tilde{w}}, m\rangle$. Osoitetaan kaavan χ rakenteen suhteen, että $L(\chi)$ on julkinen kontekstivapaa kieli.

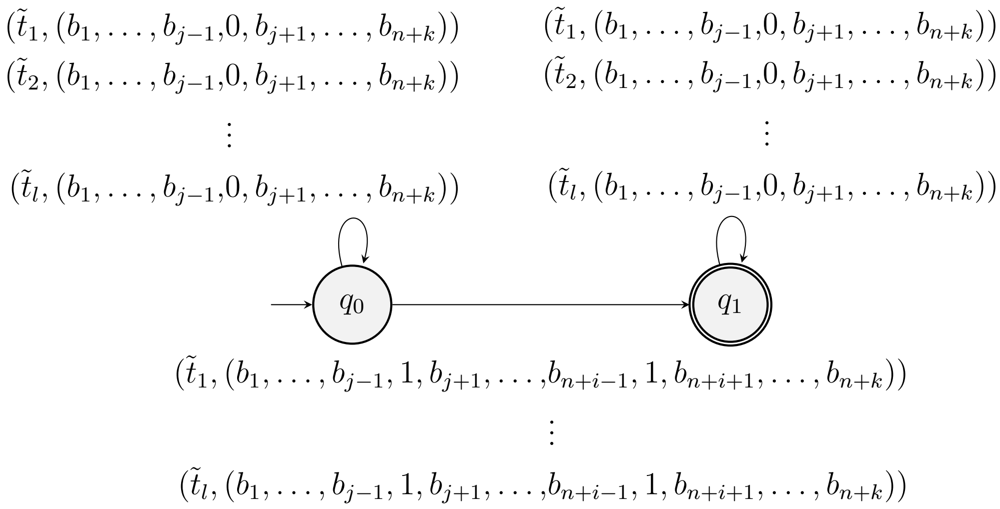
Ensimmäisenä on käsiteltävä atomikaavat. Merkitään $T = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$. Atomikaavoja ovat $x \leq y$, $P_{\dot{t}_i}(x)$, $X(x)$ ja $P(x, y)$. Huomaa, että atomikaavaa $x = y$ ei tarvitse käsitellä, sillä $x \leq y \wedge y \leq x$ on loogisesti ekvivalentti kaavan $x = y$ kanssa. Tarkastellaan viimeisenä paritusrelaatio, sillä muut atomikaavat eivät hyödynnä pinoa ja näin ollen pino-operaatiot voidaan jättää näiden automaateissa merkitsemättä. Seuraavat julkiset pinoautomaatit tunnistavat atomikaavat.

Kaavan $P_{\dot{t}_i}(x_j)$, $\dot{t}_i \in \hat{T}$ tunnistava julkinen pinoautomaatti on alla olevaa muotoa.



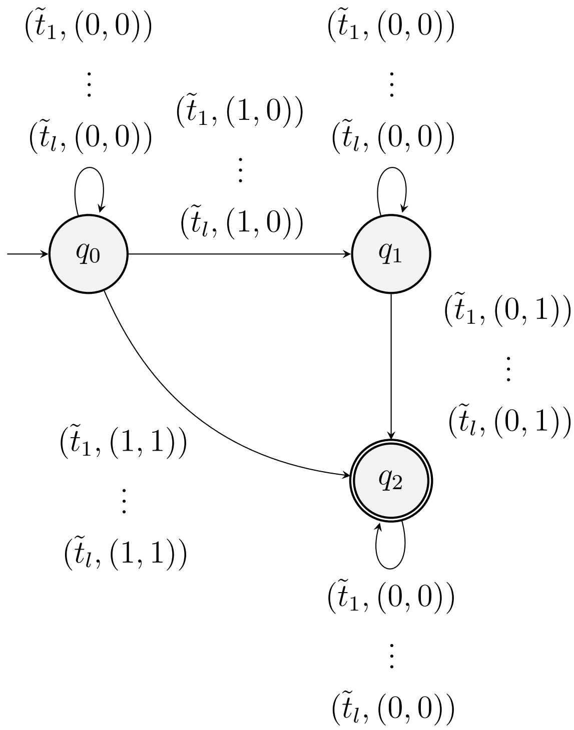
Julkinen pinoautomaatti hyväksyy siis atomikaavan, jos alkion x_j paikalla on merkki $\dot{t}_i$.

Kaavan $X_i(x_j)$, $i \in [k]$, $j \in [n]$ tunnistava julkinen pinoautomaatti on alla olevaa muotoa.



Julkinen pinoautomaatti hyväksyy siis atomikaavan, jos alkio x_j kuuluu joukkoon X_i, oli alkion x_j paikalla merkki mikä tahansa.

Kaavan $x_i \leq x_j$, $i, j \in [n]$ tunnistava julkinen pinoautomaatti on alla olevaa muotoa. Tilan säästämiseksi on koodia $\mathbf{b}$ merkitty tässä vain parilla (b_1, b_2), missä $b_1, b_2 \in \{0, 1\}$ ja b_1 viittaa alkion x_i arvoo ja b_2 alkion x_j arvoon. Muut alkiot koodista voidaan tulkita miten vain.



Julkinen pinoautomaatti hyväksyy siis atomikaavan, jos alkio x_i luetaan ennen alkiota x_j eli $x_i \leq x_j$.

Paritusrelaatio $P(x_i, x_j)$, $i, j \in [n]$ voidaan tunnistaa seuraavalla julkisella pinoautomaatilla. Jos $\dot{t}_h = (\tilde{t}_h, \mathbf{b}) = ((\downarrow, t_h), \mathbf{b})$, $0 < h \leq l$, niin automaatin pino-operaatio on $(\downarrow, \dot{t}_h)$. Jos taas $\dot{t}_h = ((\uparrow, t_h), \mathbf{b})$, $0 < h \leq l$, niin pino-operaatio poistaa *päällimmäisen* pinon alkion. Tämä on mahdollista edellä mainitun huomautuksen johdosta. Jos taas $\dot{t}_h = ((\#, t_h), \mathbf{b})$, niin operaatio on #. Tällöin julkinen pinoautomaatti hyväksyy merkkijonon täsmälleen silloin, jos merkkiä $(\tilde{t}_h, \mathbf{b})$ luettaessa, joka vastaa paikkaa x_j eli $\mathbf{b}(j) = 1$, niin automaatti poistaa pinosta päällimäisen merkin $(\tilde{t}_{h'}, \mathbf{b}')$, joka vastaa paikkaa x_i eli $\mathbf{b}(i) = 1$.

Väite on näin todistettu atomikaavoille. Induktio-askeleessa konjunktio ja negaatio voidaan sivuutta, sillä julkiset pinoautomaatit ovat suljettuja komplementin ja leikkauksen suhteen. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle χ', jossa esiintyy muuttujat $\{x_1, \ldots, x_{n'}, X_1, \ldots, X_{k'}\}$ vapaina.

Todistetaan väite ensin kaavalle $\exists x_i \chi'(x_i)$. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa julkinen pinoautomaatti V, joka tunnistaa kaavan $\chi'(x_i)$. Käytännössä automaatin tarvitsee arvata oikea tulkinta alkiolle x_i. Kaavan $\exists x_i \chi'(x_i)$ tunnistava julkinen pinoautomaatti V' saadaan seuraavasti. Muutetaan aakkosto projisoimalla jokainen merkki $(\tilde{t}_j, \mathbf{b})$ seuraavasti

$$(\tilde{t}_j, (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{n'+k'})) \mapsto (\tilde{t}_j, (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_{n'+k'})).$$

Pidetään automaatti muuten identtisenä automaatin V kanssa. Uusi julkinen pinoautomaatti V' voi siis näin ollen "arvata" x_i tulkinnan ja automaatti ei ole siitä enää riippuvainen. Esimerkiksi kaavan $\exists x_i(X_j(x_i))$ tapauksessa automaatti V' hyväksyy merkkijonon jos ja vain jos joku merkkijonon paikka kuuluu joukkoon X_j eli riittää, että alkion X_j paikalla on koodattu 1 jonossa $\mathbf{b}$ (eli kyseinen merkkijonon paikka kuuluu alkion X_j tulkintaan) riippumatta mikä x_i paikalla on. Vastaavasti menetellään kaavan $\exists X_i(\chi(X_i))$ kanssa.

Induktioperiaatteen mukaan väite siis pätee. Väite pätee näin ollen myös lauseille, joten kieli $L(\phi') = \left\{ \tilde{w} \in \hat{T} \mid \mathfrak{A}_w \in K, \langle \mathfrak{A}_{\tilde{w}}, m \rangle \models \phi' \right\}$ on myös julkisen pinoautomaatin tunnistama kieli. Tällöin kuitenkin apulauseen 4.16 nojalla on olemassa pinoautomaatti, joka tunnistaa kielen $\pi(L(\phi'))$, mutta tämähän on sama asia kuin alkuperäinen kieli L. $\square$

5 Konjunktiivisista kielistä

5.1 Konjunktiivisista kieliopeista

Seuraavaksi tutkitaan yhtä kontekstivapaiden kielten laajennusta. Suurimman osan merkinnöistä ja tuloksista löytyy artikkelista [18].

Konjunktiivinen kielioppi[1] $C = (V, T, P, S)$ on kontekstivapaan kieliopin laajennus. Konjunktiivinen kielioppi on muuten täysin sama kuin kontekstivapaa kielioppi, mutta kieliopin säännöt voivat myös olla *konjunktiivista* muotoa

$$A \to \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n,$$

missä $A \in V$, $n \geq 1$ ja $\gamma_i \in (V \cup T)^*$ jokaisella $1 \leq i \leq n$. Konjunktio voidaan myös lyhentää $A \to \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \gamma_i$. Derivaatio määritellään samaan tapaan kuin kontekstivapailla kieliopeilla ja lisäämällä konjunktiivisten sääntöjen johto.

Merkkijono $w \in T^*$ on *derivoitavissa eli johdettavissa* säännöstä $A \to \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \gamma_i$, täsmälleen silloin jos se on johdettavissa jokaisesta γ_i, $i \in [n]$. Toisin sanoen $A \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$ jos ja vain jos $\gamma_i \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$ jokaisella $i \in [n]$. Lyhennetään konjunktiivinen kielioppi merkinnällä CG (conjunctive grammar). *Konjunktiivinen kieli* määritellään vastaavasti kuin kontekstivapaat kielet.

Esimerkki 5.1. Tarkastellaan kieltä $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$, joka tunnetusti ei ole kontekstivapaa. Konjunktiivinen kielioppi $C = (V, T, P, S)$, missä $V = \{S, A, B, E, F\}$, $T = \{a, b, c\}$ ja P on joukko sääntöjä

$$\begin{aligned}
S &\to A \wedge E \\
A &\to aA \mid B \\
B &\to bBc \mid \epsilon \\
E &\to aFbG \\
F &\to aFb \mid \epsilon \\
G &\to Gc \mid \epsilon
\end{aligned}$$

määrittelee kielen L. Idea on, että konjunktion vasen puoli pitää kirjaa, että merkkejä b ja c on yhtä paljon ja toinen puoli, että merkkejä a ja b on yhtä paljon.

Olkoon $C = (V, T, P, S)$ konjunktiivinen kielioppi. Sanotaan, että $A \in V$ on *$\epsilon\wedge$-sääntö*, jos se on muotoa

$$A \to \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_{k-1} \wedge \epsilon \wedge \gamma_{k+1} \wedge \cdots \wedge \gamma_n,$$

missä $\gamma_i \in (V \cup T)^+$, $n \geq 1$ ja $i \in [n]$. Sanotaan, että konjunktiivinen kielioppi on *$\epsilon\wedge$-vapaa*, jos se ei sisällä yhtään $\epsilon\wedge$-sääntöjä.

Huomaa, että $\epsilon\wedge$-vapaan määritelmän mukaan edellisen lauseen antama kielioppi on myös ϵ-vapaa.

[1] Konjunktiivista kielioppia merkitään yleensä kirjaimella C kun taas kontekstivapaalle käytetään merkkiä G.

Lause 5.2. *Jokaisella konjunktiivisella kieliopilla C on olemassa $\epsilon\wedge$-vapaa kielioppi C', jolla $L(C) \setminus \{\epsilon\} = L(C')$.*

Todistus. Samaan tapaan kuin kontekstivapaan kieliopin tapaus. $\square$

Samaan tapaan kuin konktekstivapailla sanotaan, että CG on *hyödyllinen*, jos se ei sisällä turhia symboleja.

Lause 5.3. *Olkoon C konjunktiivinen kielioppi ja $L(C) \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa hyödyllinen kielioppi C', jolla $L(C) = L(C')$.*

Todistus. Samaan tapaan kuin kontekstivapaan kieliopin tapaus. $\square$

Konjunktiivinen kielioppi on *puhdas*, jos se on $\epsilon\wedge$-vapaa ja hyödyllinen.

Seuraus 5.4. *Olkoon C konjunktiivinen kielioppi ja $L(C) \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa puhdas kielioppi C', jolla $L(C) \setminus \{\epsilon\} = L(C')$.*

5.2 Semanttinen peli

Kontekstivapaan kieliopin pelin CFGG voi helposti laajentaa *konjunktiivisen kieliopin peliksi* lisäämällä peliin $\wedge$-säännön: Jos pelaaja M on viimeksi soveltanut sääntöä, joka on muotoa $X \to \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$, niin pelaaja L saa valita mistä γ_i, $i \in [n]$ peli jatkuu ja johde päivitetään γ_i mukaan. Pelin konjunktiiviselta kieliopilta oletamme luonnollisesti sen olevan myös puhdas kuten kontekstivapaan kielen tapauksessa. Merkitään tätä peliä $\mathrm{CGG}(C, w)$ ja vastaavasti peliä johteesta $\alpha \in (V \cup T)^*$ merkitään $\mathrm{CGG}(\alpha, C, w)$.

Lause 5.5. *Olkoon $C = (V, T, P, S)$ puhdas konjunktiivinen kielioppi. Tällöin $w \in L(C)$ jos ja vain jos pelaajalla* M *on voittostrategia pelissä* $\mathrm{CGG}(C, w)$.

Todistus. Kontekstivapaiden kielten semanttinen pelin korrektiuden todistus 4.10 ja sen todistuksessa hyödynnetyt apulauseet 4.8 ja 4.9 voidaan helposti täydentään konjunktiivisten kielten semanttiselle pelille. Selitetään täydennyksen idea tässä tarttumatta liikaa yksityiskohtiin. Lukija voi todentaa tämän idean vertailemalla näitä edellä mainittuja lauseita ja alla selitettäviä ideoita.

(Idea)"$\Rightarrow$" Osoitetaan, että samaan tapaan kuin kontekstivapaiden kielten semanttisen pelin induktiotodistuksessa voidaan löytää kielioppi, jossa derivaatio on vähintään yhden lyhyempi kuin kieliopissa C. Oletetaan, että pelin tilanne ensimmäisen kierroksen jälkeen[2] on (γ, w), $\gamma = \gamma_0 X_0 \gamma_1 \cdots \gamma_n X_n \gamma_{n+1}$ ja pelaajan L johteen γ pilkkominen on

$$\gamma_{0_1} X_0 \gamma_{1_2} \mid \cdots \mid \gamma_{n_2} X_n \gamma_{n+1_1},$$

missä $\gamma_{i_j}, \gamma_{n+1_1} \in T^*$ ja $X_i \in V$ jokaisella $i \in \{0, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$ ja pelaajan M vastaava merkkijonon w pilkkominen on $w_0 \cdot w_1 \cdots w_n$. Oletetaan lisäksi, että

[2]Se, että onko ensimmäisellä kierroksella sovellettu konjunktiivista sääntöä voidaan perustella derivaatiolla eikä sillä lopputuloksen kannalta merkitystä

pelaaja L valitsee indeksin $j \in \{0, \ldots, n\}$. Jos pelaaja M valitsee konjunktiivisen säännön

$$X_j \to \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m,$$

joka noudattaa merkkijonon w derivaatiota, niin tällöin merkkijonon w derivaation määritelmän nojalla on olemassa derivaatio $\alpha_i \overset{*}{\Longrightarrow} w_j$, jokaisella $i \in [m]$. Tämän perusteella valitsi pelaaja L minkä tahansa konjunktiivisen säännön osan α_i, $i \in [m]$, niin samalla periaatteella kuin kontekstivapaan kielen semanttisen pelin induktiotodistuksessa voidaan muodostaa kielioppi $C' = (V \cup \{S'\}, T, P \cup \{S' \to \alpha'\gamma'\beta'\})$, missä $\gamma' = \gamma_{j_2}\alpha_i\gamma_{j+1_1}$, $\alpha' = \gamma_0 X_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{j-1} X_{j-1} \gamma_{j_1}$, $\beta' = \gamma_{j+1_1} X_{j+1} \gamma_{j+2} \cdots \gamma_n X_n \gamma_{n+1}$, jossa derivaatio on vähintään yhden lyhyempi kuin kieliopissa C.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että pelaajalla M on voittostrategia pelissä $\mathrm{CGG}(C, w)$. Tämän vastaavan suunnan todistuksessa kontekstivapaille kielille hyödynnettiin oleellisesti apulauseita 4.8 ja 4.9, eikä itse todistuksessa ole tarpeen viitata kieliopin konjunktiivisiin sääntöihin. Kyseisissä apulauseissa viitattiin pelaajan L joihinkin tiettyihin valintoihin. Jos pelin aikana sovellettiin konjunktiivista sääntöä

$$X \to \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n,$$

niin pelaajalla M on voittostrategia huolimatta minkä γ_i, $i \in [n]$ pelaaja L valitsi. Tällöin derivaatio saadaa yhtälailla muodostettua riippumatta siitä minkä pelaaja L valitsee, joka on vaadittu konjunktiivisen säännön derivaation määritelmässä. □

5.3 Vaativuusteoriaa $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL})$ kielille

Tässä osiossa käsitellään erityisesti konjunktiivisia kieliä, jotka ovat äärellinen leikkaus kontekstivapaista kielistä. Tässä tutkielmassa ei onnistuttu löytämään loogista karakterisointia konjunktiivisille kielille. Tarkastelua supistettiin kieliperheelle joka asettuu kontekstivapaiden ja konjunktiivisten kielten väliin.

Boolean sulkeumia kontekstivapaille kielille ollaan tutkittu erityisesti artikkelissa [4]. Olkoon $\mathrm{CFL}[T]$ aakkoston T kontekstivapaiden kielten luokka. Voidaan myös merkitä CFL, jos aakkostoa ei ole kiinnitetty. Samaan tapaan kuin kaavojen tapauksessa $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL}[T])$ on joukon $\mathrm{CFL}[T]$ sulkeuma yhdisteen ja leikkauksen suhteen. Vastaavasti määritellään $\mathrm{BC}(\mathrm{CFL}[T])$ lisäämällä komplementti. Huomaa, että tällöin komplementti riippuu aakkostosta. Luokan $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL}[T])$ kielet ovat tunnistettavissa pinoautomaateilla, joissa on mahdollista lukea syöte useamman kerran läpi tai ns. automaatin läpi "kuljetaan" useamman kerran syötteellä. Myöhemmin huomataan, että automaatti joka lukee merkkijonon synkronoidusti tunnistaa saman luokan. Tämän seurauksena seuraavassa kappaleessa saadaan ilmeinen looginen karakterisointi luokalle $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL}[T])$.

Esitellään ensin artikkelin [4] mukainen luokan $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL})$ määrittelevä automaatin malli.

Määritelmä 5.3.1. Niin sanottu *k-kulun pinoautomaatti (k-pass pushdown* *automata)* (epädeterministinen) on jono $U = ([k], Q, T, \Gamma, \star, \delta, q_0, H_a, H_n)$, missä

- $[k]$ on *kulkujen lukumäärä* ja $k \in \mathbb{Z}_+$,
- Q on äärellinen tilojen joukko,
- T on äärellinen aakkosto,
- Γ on äärellinen pinoaakkosto,
- $\star \notin T$ on uusi *välimerkki*, joka kertoo milloin merkkijono päättyy,
- $$\begin{aligned}\delta \subseteq [k] \times Q \times T_\epsilon \times Q \times \mathcal{S}(\Gamma) \cup \\ [k-1] \times Q \times \{\star\} \times Q \cup \\ \{k\} \times Q \times \{\star\} \times \{H_a, H_n\},\end{aligned}$$
- q_0 on aloitustila,
- $H_a \notin Q$ on *hyväksymistila*,
- $H_n \notin Q$ on *hylkäämistila.*

Yleisesti voidaan puhua vain *usean kulun pinoautomaateista (multipass pushdown automata)*, jos kulkujen määrää ei kiinnitetä.

Olkoon $U = ([k], Q, T, \Gamma, \star, \delta, q_0, H_a, H_n)$ k-kulun pinoautomaatti. *Laskennan tila* on nelikko (j, q, w, γ), missä $j \in [k]$, $q \in Q$, $w \in T^*$ ja $\gamma \in \Gamma^*$. Määritellään seuraavaksi usean kulun automaatin *laskenta* syötteellä $w_0 \in T^*$. Kaikilla $j \in [k]$, merkkijonon w_0 alkusegmenteillä $w \in T^*$, $\gamma \in \Gamma^*$ ja $q \in Q$ pätee seuraavat ehdot.

- Jos $(j, q, a, p, (\uparrow, X)) \in \delta$, niin $(j, q, aw\star, X\gamma) \vdash_{U,w_0} (j, p, w\star, \gamma)$.
- Jos $(j, q, a, p, (\downarrow, X)) \in \delta$, niin $(j, q, aw\star, \gamma) \vdash_{U,w_0} (j, p, w\star, X\gamma)$.
- Jos $(j, q, a, p, \#) \in \delta$, niin $(j, q, aw\star, \gamma) \vdash_{U,w_0} (j, p, w\star, \gamma)$.
- Jos $(j, q, \star, p) \in \delta$ ja $j < k$, niin $(j, q, \star, \gamma) \vdash_{U,w_0} (j+1, p, w_0\star, \epsilon)$.
- Jos $(k, q, \star, H_a) \in \delta$, niin $(k, q, \star, \gamma) \vdash_{U,w_0} (k, H_a, \epsilon, \gamma)$.
- Jos $(k, q, \star, H_n) \in \delta$, niin $(k, q, \star, \gamma) \vdash_{U,w_0} (k, H_n, \epsilon, \gamma)$.

Vastaavasti määritellään laskennan transitiviinen ja refleksiivinen sulkeuma $\vdash^*_{U,w_0}$. Alaindeksi voidaan jättää merkitsemättä, jos automaatti ja syöte ovat selviä kontekstista. Toisin sanoen kun kulku on suoritettu ja se ei ole viimeinen, niin luetaan merkkijono uudestaan, ja pino tyhjennetään. Jos taas kyseessä on viimeinen kulku, niin päädytään joko hyväksyvään tai hylkäävään tilaan. Usean kulun automaatin määrittelemä kieli onkin

$$L(U) = \left\{ w \in T^* \mid (1, q_0, w\star, \epsilon) \vdash^*_{U,w} (k, H_a, \epsilon, \gamma), \gamma \in \Gamma^* \right\}$$

Koska yhden merkin lukeminen kerrallaan ei vaikuta ilmaisuvoimaan, niin tällöin saadaan artikkelin [4] mukainen lause.

Lause 5.6. *Olkoon T aakkosto ja $L \subseteq T^*$. Kieli L on määriteltävissä usean kulun pinoautomaatilla jos ja vain jos $L \in \mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL}[T])$.*

Artikkelissa [1] on esitelty konjunktiivisten kielten tunnistava pinoautomaatin variaatio. Tässä tutkielmassa mallia on yksinkertaistettu siten, että automaatti lukee vain yhden merkin korkeintaan kerrallaan.

Määritelmä 5.3.2. *Synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti (synchronized alternating pushdown automata)* on jono $S = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, F)$, missä

- Q on äärellinen tilojen joukko,
- T on äärellinen aakkosto,
- Γ on äärellinen pinoaakkosto,
- $\delta \subseteq Q \times T_\epsilon \times \bigwedge(Q, \Gamma)$ on äärellinen siirtymärelaatio, missä

$$\bigwedge(Q,\Gamma) = \left\{ \bigwedge_{1 \le i \le n} (q_i, s_i) \mid s_i \in \mathcal{S}(\Gamma), q_i \in Q, n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

- q_0 on aloitustila,
- $F \subseteq Q$ on hyväksymistilojen joukko,

Mikäli $t \in \delta \setminus \{ (q, a, p, s) \mid q, p \in Q, a \in T, s \in \mathcal{S}(\Gamma) \}$, niin puhutaan *konjunktiivisesta tilasiirytmästä.*

Synkronoidun vuorottelevan pinoautomaatin *laskennan tila* on puu, jossa ei ole solmuja, joiden aste on yksi, jokainen sisäsolmu on merkitty symbolilla $\alpha \in \Gamma^*$ ja jokainen lehti on merkkitty kolmikolla $(q, w, \gamma) \in Q \times T^* \times \Gamma^*$, missä

- q on lehden tila,
- w on lehden jäljellä oleva merkkijono,
- γ on lehden jäljellä oleva pino.

Jokainen sisäsolmu on ikään kuin pinon haara ja lehdet toimivat "aktiivisina" pinon haaroina. Puille voidaan määritellä *kaavamainen esitys*. Olkoon T synkronoidun vuorottelevan pinoautomaatin laskennan tila. Tällöin sen kaavamainen esitys $r(T)$ määritellään seuraavasti.

- Jos T on yksittäinen solmu (toisin sanoen lehti) (q, w, γ), niin $r(T) = (q, w, \gamma)$.
- Jos puulla T on juuri α, jolla on n alipuuta $T_1, T_2, \ldots, T_n$, niin $r(T) = ((r(T_1) \wedge \cdots \wedge r(T_n))\alpha)$.

Määritellään seuraavaksi itse *laskenta*. Olkoon $S = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, F)$ synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti ja $t \in \delta$. Laskentarelaatio $\vdash_S$ (voidaan myös korostaa minkä tilasiirtymän $t \in \delta$ laskenta on kyseessä yläindeksillä $\vdash_S^t$) laskennan tilojen kaavamaisten esitysten välillä määritellään seuraavasti. Kaikilla $w \in T^*$, $\gamma \in \Gamma^*$ ja $q \in Q$ pätee seuraavat ehdot.

- Jos $t = (q, a, p, (\uparrow, X)) \in \delta$, niin $s_1(q, aw, \gamma)s_2 \vdash_S^t s_1(q, w, X\gamma)s_2$.
- Jos $t = (q, a, p, (\downarrow, X)) \in \delta$, niin $s_1(q, aw, X\gamma)s_2 \vdash_S^t s_1(q, w, \gamma)s_2$.
- Jos $t = (q, a, p, \#) \in \delta$, niin $s_1(q, aw, \gamma)s_2 \vdash_S^t s_1(q, w, \gamma)s_2$.
- Jos $t = (q, a, ((q_1, s_1) \wedge \cdots \wedge (q_n, s_n))) \in \delta$, niin $s_1(q, aw, X\gamma)s_2 \vdash_S^t s_1(((q_1, w, \gamma_1) \wedge \cdots \wedge (q_n, w, \gamma_n))\gamma)s_2$, missä $\gamma_i \in \Gamma_\epsilon \cdot \{X\} \cup \{\epsilon\}$, jokaisella $1 \leq i \leq n$.
- $s_1(((q, w, \gamma_i) \wedge \cdots \wedge (q, w, \gamma_n))\gamma)s_2 \vdash_S s_1(q, w, \gamma)s_2$, missä $q \in F$.

Huomaa, että viimeisessä ehdossa ei vaadita mitään tilasiirtymää. Edeltävissä ehdoissa $s_1, s_2 \in (\Gamma^* \cup (Q^* \times T^* \times \Gamma^*) \cup \{\wedge, (,)\})^*$. Tällöin synkronoidun vuorottelevan pinoautomaatin S *tunnistama* kieli on

$$L(S) = \{\, w \in T^* \mid (q_0, w, \epsilon) \vdash_S^* (p, \epsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in \Gamma^* \,\}.$$

Sanotaan, että synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti

$$S = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

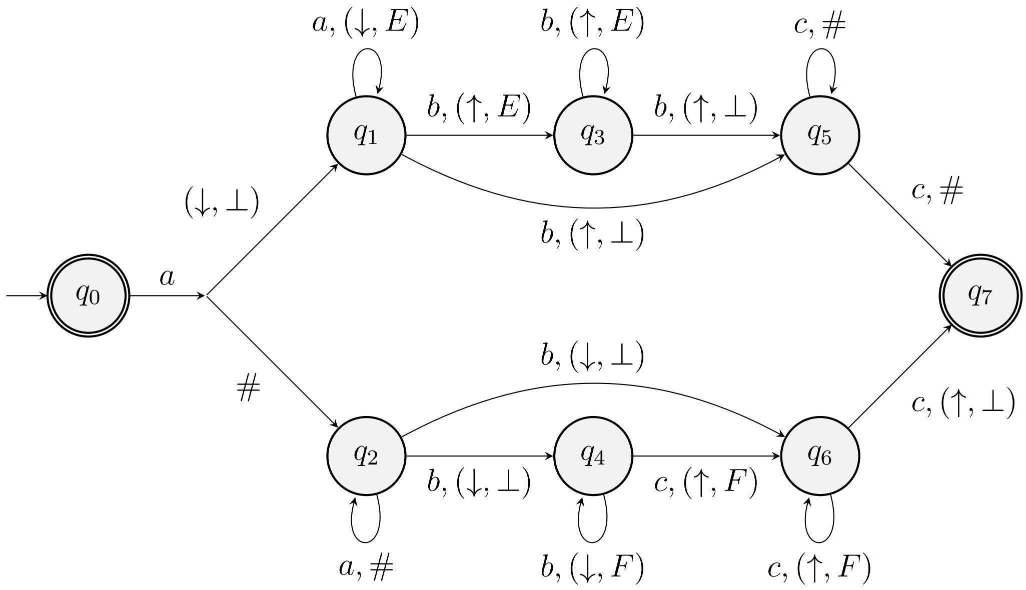
on *yksinkertainen*, jos se sisältää vain yhden konjunktiivisen tilasiirtymän, joka on aloitustilassa eli tilasiirtymän (q_0, a, s), missä $a \in T_\epsilon$, $s \in \bigwedge(Q, \Gamma)$, $n \in Z_+$ ja jokaisella $p \in Q$, $a \in T$ ja $s' \in \bigwedge(Q, \Gamma)$ pätee $(p, a, q_0, s') \notin \delta$. Toisin sanoen automaatti ei voi kun konjunktoida kuin korkeintaan kerran.

Yksinkertaiset synkronoidut vuorottelevat pinoautomaatit voidaan myös piirtää. Havainnollistetaan tätä piirtämällä aiemman esimerkin 5.1 konjunktiivinen kieli ja tarkastelmalla minkä tyyppisiä kieliä yksinkertaiset vuorottelevat pinoautomaatit tunnistavat.

Esimerkki 5.7. Olkoon $S = (\{q_0, \ldots, q_7\}, \{a, b, c, \perp\}, \{E, F\}, \delta, q_0, \{q_0, q_7\})$ yksinkertainen synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti, missä

$$\begin{aligned}\delta =& \{(q_0, a, (q_1, (\downarrow, \perp)) \wedge (q_2, \#))\} \cup \\ & \{(q_1, a, q_1, (\downarrow, E)), (q_1, b, q_3, (\uparrow, E)), (q_1, b, q_5, (\uparrow, \perp))\} \cup \\ & \{(q_3, b, q_3, (\uparrow, E)), (q_3, b, q_5, (\uparrow, \perp))\} \cup \\ & \{(q_5, c, q_5, \#), (q_5, c, q_7, \#)\} \cup \\ & \{(q_2, a, q_2, \#), (q_2, b, q_4, (\downarrow, \perp)), (q_2, b, q_6, (\downarrow, \perp))\} \cup \\ & \{(q_4, b, q_4, (\downarrow, F), (q_4, c, q_6, (\uparrow, F)))\} \cup \\ & \{(q_6, c, q_6, (\uparrow, F)), (q_6, c, q_7, (\uparrow, \perp))\}.\end{aligned}$$

Automaatti S on piirretty alla.



Piirtäminen tapahtuu muuten samaan tapaan kuin tavallisen pinoautomaatin, mutta lisänä ovat konjunktiiviset säännöt, jotka piirretään haarautuvana nuolena. Tilasta q_0 pääsee siis konjunktiivisella säännöllä tilaan q_1 ja q_2 siten, että tilaan q_1 siirryttäessä pinoon lisätään alin symboli $\perp$. Kuvasta nähdään, että automaatin S yläpuoli pitää kirjaa, että merkkejä a ja b on yhtä paljon, kun taas alapuoli, että merkkejä b ja c on yhtä paljon.

Merkitään $\delta_Y = \{(q_0, a, q_1, (\downarrow, \perp))\} \cup (\delta \cap \{q_1, q_3, q_5\} \times T \times Q \times \mathcal{S}(\Gamma))$ ja $\delta_A = \{(q_0, a, q_2, \#)\} \cup (\delta \cap \{q_2, q_4, q_6\} \times T \times Q \times \mathcal{S}(\Gamma))$. Edellisen esimerkin automaatista S voi muodostaa kaksi tavallista pinoautomaattia

$$Y = (\{q_0, q_1, q_3, q_5, q_7\}, \{a, b, c\}, \{E, F\}, \delta_Y, q_0, F)$$

ja

$$A = (\{q_0, q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{a, b, c\}, \{E, F\}, \delta_A, q_0, F).$$

Toisin sanoen automaatti S on jaettu haarasta ylä- ja alapuoleen. Koska automaatit A ja Y ovat pinoautomaatteja, niin on olemassa $\exists_1^{Match}$MSO lauseet χ_A ja χ_Y, jolla $L(A) = L(\chi_A)$ ja $L(Y) = L(\chi_Y)$. Tällöin lause $\chi_A \wedge \chi_Y$ määrittelee kielen $L(S)$. Tämä lause riittää jo yksinään, mikä johtuu siitä, että automaatissa S ensimmäisen haaran jälkeen seuraava yhteinen tila onkin vasta tila q_7, joka on hyväksymistila. Lisäksi mistään tilasta ei pysty palaamaan takaisin konjunktiiviseen sääntöön. Kieli on siis äärellinen leikkaus kontekstivapaista kielistä.

Apulause 5.8. *Jos kieli on tunnistettavissa yksinkertaisella synkroinoidulla vuorottelevalla pinoautomaatilla, niin se on tunnistettavissa usean kulun pinoautomaatilla.*

Todistus. Olkoon $S = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, F)$ yksinkertainen synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti, joka tunnistaa kielen $L = L(S)$. Voidaan olettaa, että automaatti S ei ole tavallinen pinoautomaatti. Voidaan lisäksi olettaa, että automaatin S konjunktiivinen tilasiirtymä on muotoa

$$t = (q_0, \epsilon, (p_1, \#) \wedge \cdots \wedge (p_n, \#)) \in \delta.$$

Konstruoidaan automaatista S n-kulun pinoautomaatti

$$U = ([n], Q', T, \Gamma, \star, \delta', p_1, H_a, H_n),$$

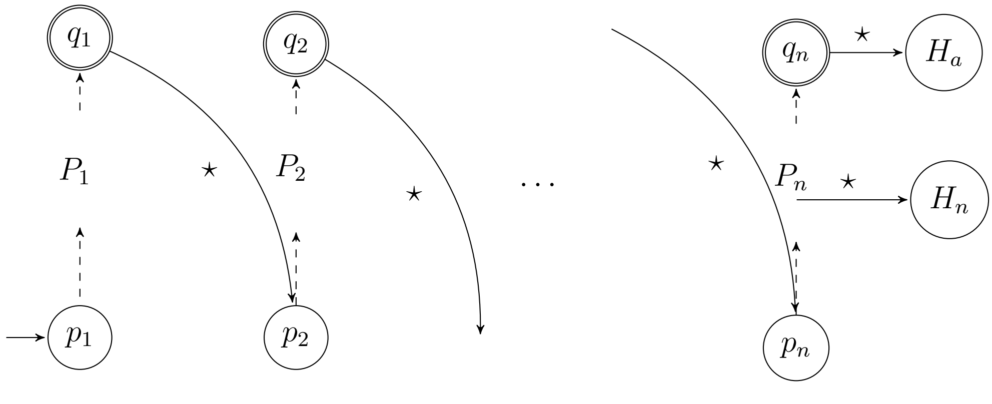
missä

- $Q' = \bigcup_{i \in [n]} Q_i$ erillinen yhdiste, Q_i on kopio tiloista Q jokaisella $i \in [n]$ ja vastaavia kopioituja tiloja $q \in Q$ merkitään ala-indeksillä q_i,
- $\star \notin T$,
- $H_a, H_n \notin Q$ ovat uusia tiloja.

Relaatio δ' on määritelty seuraavasti.

- Jos $(q, a, q', s) \in \delta \setminus \{t\}$, niin $(j, q_j, a, q'_j, s) \in \delta'$, jokaisella $j \in [n]$.
- Jos $q \in F$, niin $(j, q_j, \star, p_{j+1}) \in \delta'$, jokaisella $j \in [n-1]$.
- Jos $q \in F$, niin $(n, q_n, \star, H_a) \in \delta'$.
- Jos $q \notin F$, niin $(n, q_n, \star, H_n) \in \delta'$.

Tavallaan muodostetaan n kappaletta pinoautomaatteja P_i, $i \in [n]$, joilla jokaisella luetaan merkkijono w läpi. Määritelmästä on selvää, että automaatti hyväksyy saman kielen. Nimittäin jokaisella $w \in L$ ja p_i, $i \in [n]$ on olemassa laskenta $s_1(p_i, w, X)s_2 \vdash_S^* s_1(q, \epsilon, \gamma)s_2$, missä $q \in F$, $X \in \Gamma_\epsilon$ ja $s_1, s_2 \in (\Gamma^* \cup Q^* \times T^* \times \Gamma^* \cup \{\wedge, (,)\})^*$, joten on olemassa myös laskenta $(i, p_i, w\star, \epsilon) \vdash_U^* (i, q_i, \star, \gamma)$, jokaisella $i \in [n]$. Tällöin erityisesti $(k, p_k, w\star, \epsilon) \vdash_U^* (k, q_k, \star, \gamma) \vdash_U (k, H_a, \star, \gamma)$, missä $q \in F$. Vastaavasti jos $w \notin L$, niin laskenta päättyy hylkäävään tilaan jolloin n-kulun automaatti päättyy H_n tilaan. Alla havainnollistettu kuvalla konstruoitu n-kulun pinoautomaatti. Kuvaa yksinkertaistettu, sillä oletuksella että alkuperäisessä automaatissa on vain yksi hyväksyvä tila.



□

Lause 5.9. *Kieli on äärellinen leikkaus kontekstivapaista kielistä jos ja vain jos on olemassa yksinkertainen synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti, joka tunnistaa sen.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Olkoon T aakkosto ja $L \in \mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL}[T])$. Tällöin on olemassa $L_1, L_2, \ldots, L_n \subseteq T^*$ kontekstivapaata kieltä siten, että

$$L = \bigcap_{i \in [n]} L_i.$$

Jokaista kontekstivapaata kieltä L_i, $i \in [n]$, vastaa tavallinen pinoautomaatti $A_i = (Q_i, T, \Gamma_i, \delta_i, q_{0,i}, F_i)$ ja voidaan olettaa jokaisen automaatin tilojen sekä pinoaakkoston olevan erillisiä. Muodostetaan uusi yksinkertainen synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti $S = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, F)$, missä

- $Q = \{q_0, p\} \bigcup_{i \in [n]} Q_i$ (erillinen yhdiste kopiosta kuten aiemmin),
- $\Gamma = \bigcup_{i \in [n]} \Gamma_i$ (erillinen yhdiste kopista),
- $$\begin{aligned}\delta = \{\, (q, \epsilon, p, \#) \mid q \in F_i, i \in [n] \,\} \cup \\ \{(q_0, \epsilon, (q_{0,1}, \#) \wedge \cdots \wedge (q_{0,n}, \#))\} \cup \\ \bigcup_{i \in [n]} \delta_i,\end{aligned}$$
- $F = \{p\}$ on uusi hyväksymistila,
- $q_0 \notin Q$ on uusi tila.

Automaatin S konstruktiosta on selvää, että automaatti tunnistaa kielen L.

"$\Leftarrow$" Seuraus edellisestä apulausesta. □

Apulause 5.10. *Jos konjunktiivinen kieli on äärellinen leikkaus kontekstivapaista kielistä, niin on olemassa* $\mathrm{BC}^+(\exists_1^{Match}\mathrm{MSO})$*-lause, joka määrittelee sen.*

Todistus. Otetaan konjunktio kontekstivapaiden kielten määrittelevistä logiikan $\exists_1^{Match}\mathrm{MSO}$-lauseista. □

Apulause 5.11. *Jos kieli on määriteltävissä logiikassa* $\mathrm{BC}^+(\exists_1^{Match}\mathrm{MSO})$*, niin se on äärellinen leikkaus kontekstivapaista kielistä.*

Todistus. Olkoot T aakkosto ja $L \subseteq T^*$ kieli. Oletetaan, että $L = L(\psi)$, jollain $\psi \in \mathrm{BC}^+(\exists_1^{Match}\mathrm{MSO})[\tau_T]$. Voidaan olettaa että ψ on muotoa $\bigwedge_{i=1}^n \exists^{Match} M_i \phi_i$, jollain $n \in \mathbb{Z}_+$ sillä $\mathrm{BC}^+(\exists_1^{Match}\mathrm{MSO})$ on suljettu konjunktion ja disjunktion suhteen. Jokaisella $w \in L$ on siis olemassa $m_1, m_2, \ldots, m_n \subseteq \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}_w)^2$ paritusta siten, että $\mathfrak{A}_w \models \psi(\vec{m})$. Samaan tapaan kuin kontekstivapailla kielillä, voidaan jokaiseen paritukseen $m \subseteq \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}_w)^2$ liittää koodaus merkkijonoihin symbolien $\{\downarrow, \uparrow, \#\}$ avulla. Saadaan siis n kappaletta pinoautomaatteja, joille jokaiselle on olemassa vastaava 1-kulun pinoautomaatti (tai tavallinen pinoautomaatti) P_i, $i \in [n]$. Tunnetusti usean kulun pinoautomaatit ovat suljettuja leikkauksen suhteen. Vastaavasti voitaisiin automaateista P_i, $i \in [n]$ muodostaa yksinkertainen synkronoitu vuorotteleva pinoautomaatti. □

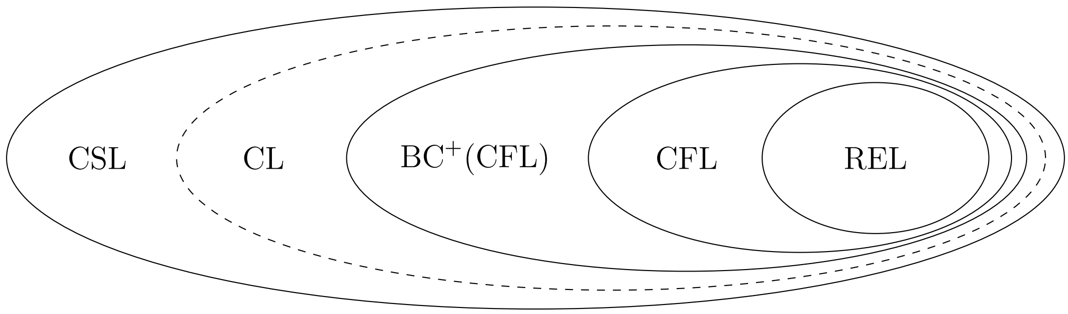
Edellisistä apulauseista saadaan nidottua looginen karakterisointi luokan $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL})$ kielille.

Lause 5.12. *Olkoon T aakkosto ja $L \subseteq T^*$. Tällöin $L \in \mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL}[T])$ jos ja vain jos kieli L on määriteltävissä logiikassa* $\mathrm{BC}^+(\exists_1^{Match}\mathrm{MSO})[\tau_T]$.

On kuitenkin olemassa konjunktiivisia kieliä, jotka eivät ole äärellisiä leikkauksia kontekstivapaista kielistä [21]. Nimittäin kieli $L = \{\, w\$w \mid w \in \{a,b\}^* \,\}$ on ei kontekstivapaa konjunktiivinen kieli [1], joka ei ole äärellinen leikkaus kontekstivapaista kielistä. Saadaan seuraava tulos artikkelista [21].

Lause 5.13. *Luokka* $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL})$ *ei ole suljettu komplementin suhteen.*

Näin ollen logiikka $\mathrm{BC}^+(\exists_1^{Match}\mathrm{MSO})$ ei ole suljettu negaation suhteen. Kieliperheiden hierarkiaa saadaan myös täydennettyä. Olkoon REL säännöllisten kielten luokka, CL konjunktiivisten kielten luokka ja CSL kontekstisten kielten luokka (aakkostoa ei ole kiinnitetty, mutta kuvassa oletetaan sen olevan kaikilla sama).



6 Yhteenveto

Uusina tuloksina tutkielmassa onnistuttiin määrittelemään semanttiset pelit säännöllisille ja kontekstivapaille kielille. Lisäksi onnistuttiin myös löytämään yhteys usean kulun sekä yksinkertaisen vuorottelevan pinoautomaatin välillä, jolloin saatiin helposti esitettyä looginen karakterisointi luokalle $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL})$. Tutkielmassa tarkasteltiin lisäksi säännöllisten kielten EF-pelejä [22] sekä kontekstivapaiden kielten looginen karakterisointi pinoautomaattien kautta [15][7]. Tutkielman kirjoittamisen aikana heräsi myös mahdollisia jatkokysymyksiä.

Ensimmäinen kysymys, jota voidaan pohtia on EF-peli kontekstivapaille kielille. Ensinnäkin olisiko sille mitään motivaatiota eli pystyisikö sitä soveltamaan olemassa olevaan avoimeen ongelmaan tai pystyisikö, sillä esittämään tehokkaasti jo valmiiksi todettuja tuloksia. Hypoteettinen peli voisi olla muunnelma REF-pelistä μ-ilmausten kautta [9]. Ongelmaksi pelin määrittelylle osoittautui ilmaista μ-operaattori, mikä voisi olla mahdollista ilmaista lisäämällä pelin muistiin tietoa aikaisemmista siirroista. Lisäksi kontekstivapailla kielillä on huonoja pelillisiä ominaisuuksia, sillä ne eivät ole suljettu yhdisteen ja komplementin suhteen. Tämän vuoksi voisi olla mielekkäämpää tarkastella alkuun esimerkiksi julkisia kontekstivapaita kieliä, joilla on paljon mielekkäitä ominaisuuksia [2].

Toinen kysymys, mitä voidaan pohtia on looginen karakterisointi luokan CL kielille. Tämän tutkielman loogisen karakterisoinnin luokan $\mathrm{BC}^+(\mathrm{CFL})$ kielille toivotaan auttavan saavuttamaan tämä tulevaisuudessa. Looginen karakterisointi voisi auttaa mahdollisesti vastaamaan konjunktiivisten kielten avoimiin ongelmiin, kuten ovatko konjunktiiviset kielet suljettuja komplementin suhteen [18]. Toinen mahdollinen lähestymistapa määritellä logiikka konjunktiivisille kielille olisi tarkastella jonkin Turingin täydellisen logiikan fragmentteja [13].

Lähteet

[1] Tamar Aizikowitz and Michael Kaminski. Conjunctive grammars and alternating pushdown automata. *Proceedings of the 15th International Workshop on Logic, Language, Information and Computation*, 50(3):44–55, 2008.

[2] Rajeev Alur and Parthasarathy Madhusudan. Visibly pushdown languages. *Proceedings of the Thirty-Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '04)*, pages 202–211, 2004.

[3] Andreas Blass and Yuri Gurevich. A note on nested words. Technical Report MSR-TR-2006-139, Microsoft Research, October 2006.

[4] Tullio Ceccherini-Silberstein, Michel Coornaert, Francesca Fiorenzi, and Paul Schupp. Multipass automata and group word problems. *Theoretical Computer Science*, 600:19–33, 2014.

[5] Noam Chomsky. Tree models for description of language. *IRE Transactions on Information Theory*, 2(3):113–124, 1956.

[6] Reinhard. Diestel. *Graph theory.* Graduate texts in mathematics, 173. Springer, 3rd ed. edition, 2006.

[7] Manfred Droste, Sven Dziadek, and Werner Kuich. Logic for ω-pushdown automata. *Information and Computation*, 282, 2018.

[8] Théo Grente and Étienne Grandjean. Conjunctive Grammars, Cellular Automata and Logic. In *27th IFIP WG 1.5 International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems (AUTOMATA 2021)*, volume 90 of *Open Access Series in Informatics (OASIcs)*, pages 1–19, Dagstuhl, Germany, 2021. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik.

[9] Bart Gruppen. *From μ-regular expressions to context-free grammars and back.* Bachelor's thesis, Radboud University, 2018.

[10] Yassine Hachaïchi. Logic for unambiguous context-free languages. *International Journal of Computer Science Theory and Applicatio*, 5(1):12–19, 2016.

[11] Jaakko Hintikka. Game-theoretical semantics and logical form. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 23(2):219–241, 1982.

[12] John E. Hoproft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages and computation.* Addison Wesley, second edition, 2001.

[13] Antti Kuusisto. Some turing-complete extensions of first-order logic. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 161:4–17, 2014.

[14] Clemens Lautemann, Pierre McKenzie, Thomas Schwentick, and Heribert Vollmer. The descriptive complexity approach to logcfl. *Journal of Computer and System Sciences*, 62(4):629–652, 2001.

[15] Clemens Lautemann, Thomas Schwentick, and Denis Thérien. Logics for context-free languages. *Computer Science Logic*, 933:205–2016, 1994.

[16] Leonid Libkin. *Elements of Finite Model Theory.* Springer, first edition, 2004.

[17] Anca Muscholl, Thomas Schewentick, and Luc Segoufin. Active context-free games. *Theory of Computing Systems*, 39(1):237–276, 2006.

[18] Alexander Okhotin. Conjunctive grammar. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 6(4):519–535, 2001.

[19] Michael. Sipser. *Introduction to the theory of computation.* Thomson Course Technology, 2nd ed., international ed. edition, 2006.

[20] Miikka Vilander. Games for succinctness of regular expressions. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 346:258–272, 2021.

[21] Detle Wotschke. Nondeterminism and boolean operation in pda's. *Journal of computer and system sciences*, 16(3):456–461, 1978.

[22] Qiqi Yan. Classifying ragular languages by a split game. *Theoretical Computer Science*, 374(1-3):181–190, 2006.