Tampereen yliopisto

Minja Koski

GRAAFIEN SOVITUKSISTA: KAKSIJAKOISET JA YLEISET GRAAFIT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Maaliskuu 2022

Tiivistelmä

Minja Koski: Graafien sovituksista: kaksijakoiset ja yleiset graafit
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Maaliskuu 2022

Tämän tutkielman aiheena on graafien sovitukset. Tutkielmassa todistetaan muutamia sovitusongelmiin liittyviä lauseita koskien kaksijakoisia ja yleisiä graafeja. Tutkielman alussa määritellään graafiteorian yleisiä käsitteitä. Esitiedoissa käydään läpi myös kaksijakoisen graafin käsite, jotta ymmärretään paremmin kaksijakoisten graafien sovituksia.

Tutkielman keskivaiheilla käydään läpi sovituksen käsite ja tutustutaan täydellisen sovituksen, maksimisovituksen ja maksimaalisen sovituksen käsitteisiin. Näiden jälkeen esitellään 1-faktorin käsite, joka on tärkeä osa tulevien lauseiden todistuksia. Tutkielmassa 1-faktorin etsintä samaistetaan täydellisen sovituksen etsintään niiden samanlaisten ominaisuuksien takia.

Kaksijakoisten graafien sovituksia koskeva kappale sisältää määritelmät käsitteille M-vuorotteleva polku ja M-kasvava polku, joita tarvitaan Königin lauseen todistuksessa. Tutkielmassa todistetaan myös Hallin lauseena tunnettu tulos, jonka mukaan kaksijakoinen graafi sisältää täydellisen sovituksen, jos ja vain jos millä tahansa kaksijakoisen graafin solmujen osajoukolla on vähintään yhtä paljon naapurisolmuja kuin osajoukossa itsessään on solmuja. Tulos voidaan todistaa helposti hyödyntämällä Königin lausetta.

Tutkielman lopussa käydään läpi yleisille graafeille keskeisenä tuloksena Tutten lause, jonka mukaan graafilla G on 1-faktori, jos ja vain jos mille tahansa graafin G solmujen osajoukolle S pätee, että graafissa $G-S$ on korkeintaan joukon S suuruuden verran parittomia komponentteja.

Avainsanat: graafiteoria, verkkoteoria, sovitukset, kaksijakoiset graafit

Sisällys

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee graafien sovituksia. Tutkielmassa todistetaan muutamia sovitusongelmiin liittyviä lauseita koskien kaksijakoisia ja yleisiä graafeja. Kappaleessa 2 luodaan pohja graafiteorian syvällisempää ymärrystä varten määrittelemällä tärkeitä käsitteitä, kuten yksinkertainen graafi, solmu- ja särmäjoukko, polku, solmun aste, naapurisolmujen joukko, sekä aligraafi ja komponentti. Kappaleen 2 lopussa tutustutaan kaksijakoisen graafin käsitteeseen, jotta ymmärretään kaksijakoisten graafien sovituksia.

Luvussa 3 siirrytään tarkastelemaan graafien sovituksia ja aloitetaan määrittelemällä sovitus sekä täydellinen-, maksimaalinen- ja maksimisovitus. Näiden jälkeen esitellään 1-faktorin käsite, joka on tärkeä tutkielman oleellisimpien lauseiden todistuksien kannalta.

Aliluku 3.2 sisältää määritelmät käsitteille M-vuorotteleva polku ja M-kasvava polku, joita tarvitaan lauseen 3.1, eli Königin lauseen todistuksessa. Königin lauseen mukaan kaksijakoisen graafin maksimisovituksessa on yhtä monta särmää, kuin sen pienimmässä särmät peittävässä solmupeitteessä on solmuja.

Aliluvussa 3.2 todistetaan Hallin lauseena tunnettu tulos, jonka mukaan kaksijakoinen graafi sisältää täydellisen sovituksen, jos ja vain jos millä tahansa kaksijakoisen graafin solmujen osajoukolla on vähintään yhtä paljon naapurisolmuja kuin osajoukossa itsessään on solmuja. Tulos voidaan todistaa helposti hyödyntämällä edellisessä aliluvussa todistettua tulosta. Lauseesta 3.2 seuraa tulos, jonka mukaan kaksijakoinen graafi sisältää 1-faktorin, jos se on k-säännöllinen ja $k \geq 1$.

Tutkielman lopussa käydään läpi yleisille graafeille keskeisenä tuloksena Tutten lause, jonka mukaan graafilla G on 1-faktori, jos ja vain jos mille tahansa graafin solmujen osajoukolle S pätee, että graafissa $G - S$ on korkeintaan joukon S suuruuden verran parittomia komponentteja.

Tutkielman tärkeimpänä lähdeteoksena toimii R. Diestelin *Graph Theory*. Lukijalta odotetaan joukko-opin perusteiden ymmärrystä sekä kykyä ymmärtää matemaattista päättelyä, mutta graafiteorian tuntemusta ei vaadita.

2 Esitietoja

Luvussa 2 käydään lyhyesti läpi graafiteorian eli verkkoteorian peruskäsitteitä ja määritelmiä, joita tarvitaan sovitusongelmien ymmärtämiseen. Määritelmät perustuvat R. Diestelin teokseen [3]. Graafiteorian terminologia on melko intuitiivista, joten määritelmien ymmärtäminen käy hyvin luonnollisesti. Aloitetaan graafin määritelmällä ja siirrytään graafin ominaisuuksiin. Tämän jälkeen tutustutaan kaksijakoisiin graafeihin. Tässä tutkielmassa käsitellään ainoastaan yksinkertaisia graafeja.

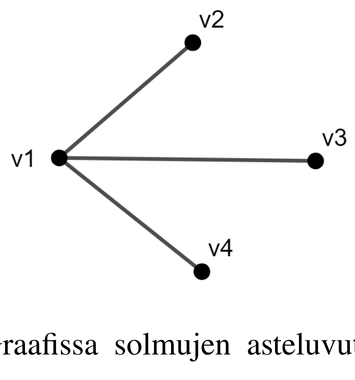
2.1 Graafiteorian peruskäsitteitä

Merkintä $[V]^2$ tarkoittaa joukkoa, jonka alkiot ovat järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u \neq v$ ja $u, v \in V$.

Määritelmä 2.1. Graafi G on pari (V, E), missä $E \subseteq [V]^2$ ja $V \neq \emptyset$. Joukon V alkioita kutsutaan solmuiksi ja joukon E alkioita särmiksi. Jatkossa särmää $e = \{x, y\}$, jonka päätepisteet ovat solmut x ja y, merkitään xy.

Määritelmä 2.2. Graafin G solmujoukkoa merkitään $V(G)$ ja särmäjoukkoa $E(G)$. Graafin G solmujoukon solmujen määrää merkitään $|G|$. Vastaavasti graafin G särmien määrää merkitään $\|G\|$.

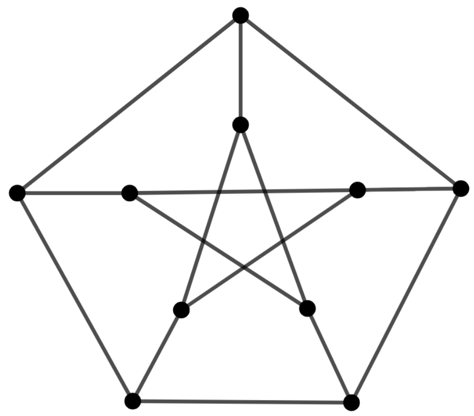
Määritelmä 2.3. Solmun aste $\deg(v)$ kertoo kuinka monen särmän päätesolmuna kyseinen solmu on.



Kuva 2.1. Kuvan Graafissa solmujen asteluvut ovat: $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 1$ ja $\deg(v_4) = 1$.

Määritelmä 2.4. Graafin minimiastetta merkitään $\delta G := \min\{\deg(v) \mid v \in V\}$. Graafin maksimiaste on puolestaan $\Delta G := \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$. Minimiaste kertoo sen solmun asteluvun, jolla on vähiten naapurisolmuja ja maksimiaste kertoo sen solmun asteluvun, jolla on eniten naapurisolmuja.

Määritelmä 2.5. Graafia G kutsutaan k-säännölliseksi (tai säännölliseksi), jos sen jokaisen solmun aste on k. Esimerkiksi Petersenin graafi on 3-säännöllinen. (cubic)

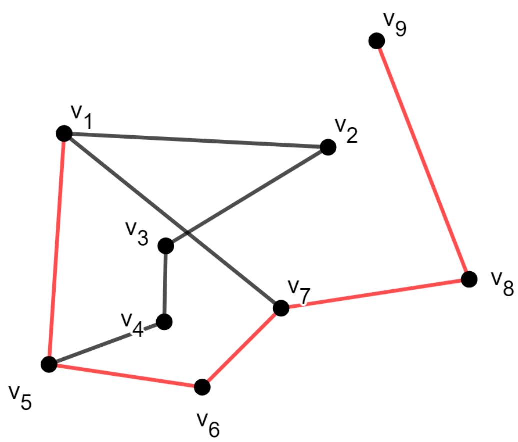


Kuva 2.2. Petersenin graafi on 3-säännöllinen

Määritelmä 2.6. Kaksi graafin G solmua x, y ovat naapureita jos särmä xy kuuluu joukkoon $E(G)$, eli särmä kuuluu graafin G särmäjoukkoon. Kaksi särmää $e \neq f$ ovat vierekkäiset, jos niillä on yhteinen päätesolmu.

Määritelmä 2.7. Olkoon $G = (V, E)$ epätyhjä graafi. Graafin G solmun v naapurisolmujen joukkoa merkitään $N_G(v)$ tai $N(v)$. Yleisemmin solmujoukon $U \subseteq V$ naapurisolmujen joukkoa merkitään $N(U)$.

Määritelmä 2.8. Graafin $G = (V, E)$ polku solmusta v_0 solmuun v_n on jono $v_0, v_1, \dots, v_n$, missä jokainen $v_i \in V$ ja solmujen v_i ja v_{i-1} välillä on aina särmä.



Kuva 2.3. Eräs graafi ja sen polku $p = v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$

Määritelmä 2.9. Polkua kutsutaan piiriksi, jos sen alku- ja loppupisteet ovat samat ja polussa on vähintään yksi särmä. Yksinkertaisessa polussa jokaista särmää käytetään täsmälleen kerran.

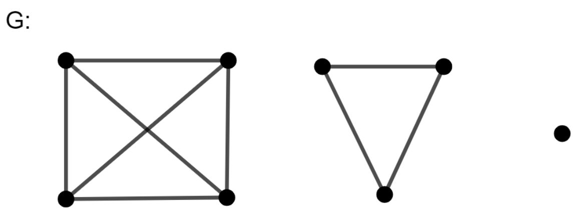
Määritelmä 2.10. Täydellinen graafi K_n sisältää n solmua ja kaikki mahdolliset särmät.

Määritelmä 2.11. Graafi on yhtenäinen, jos mitkä tahansa sen kaksi solmua ovat yhdistetyt. Kaksi solmua ovat yhdistetyt, jos niiden välillä on polku.

2.2 Aligraafit

Määritelmä 2.12. Olkoot G ja H kaksi graafia. Jos $V(H) \subseteq V(G)$ ja $E(H) \subseteq E(G)$, niin H on graafin G aligraafi.

Määritelmä 2.13. Graafin maksimaalinen yhtenäinen aligraafi on graafin komponentti. Tällöin graafin solmut u ja v kuuluvat samaan komponenttiin, jos ja vain jos niiden välillä on polku.



Kuva 2.4. Graafi G koostuu kolmesta komponentista.

Määritelmä 2.14. Graafi H on graafin G virittävä aligraafi, jos H on graafin G aligraafi ja $V(H) = V(G)$, eli graafeilla on täsmälleen sama solmujoukko. Graafeilla ei tarvitse olla samaa särmäjoukkoa.

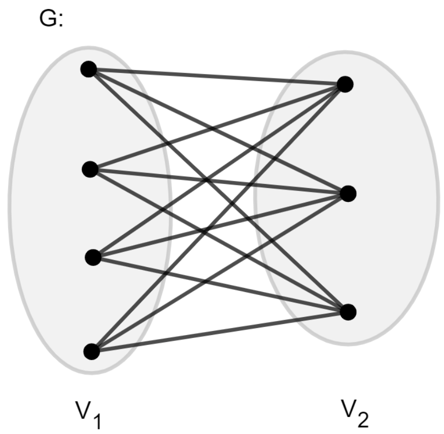
Määritelmä 2.15. Olkoon graafi $G = (V, E)$ ja olkoon $F \subseteq E$ sen epätyhjä särmäjoukko. Nyt graafi $H = (W, F)$, missä $W \subseteq V$ on joukon F särmien päätesolmujen joukko, on joukon F *(särmä)indusoima* graafin G aligraafi. Tätä aligraafia merkitään $H = G[F]$

2.3 Kaksijakoiset graafit

Tässä kappaleessa esitellään kaksijakoisten graafien ominaisuuksia käymällä läpi muutamia määritelmiä.

Määritelmä 2.16. Graafi $G = (V, E)$ on kaksijakoinen, jos sen koko solmujoukko on kahden erillisen solmujoukon yhdiste, eli $V = V_1 \cup V_2$ ja $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ja kaikilla graafin G särmillä on toinen päätesolmu joukossa V_1 ja toinen joukossa V_2.

Määritelmä 2.17. Kaksijakoinen graafi on täydellinen, jos graafin särmäjoukko sisältää kaikki ne särmät, joiden yksi päätesolmu kuuluu joukkoon V_1 ja toinen joukkoon V_2. Jos $|V_1| = n$ ja $|V_2| = m$, niin täydellistä graafia merkitään $K_{n,m}$ tai $K_{m,n}$.



Kuva 2.5. Graafi G on kaksijakoinen, täydellinen graafi $K_{4,3}$, missä $V = V_1 \cup V_2$, $|V_1| = 4$ ja $|V_2| = 3$.

Lause 2.1. *Graafi on kaksijakoinen, jos ja vain jos se ei sisällä yhtäkään paritonta piiriä.*

Todistus. Ks. [3, s. 18]. □

Määritelmä 2.18. Joukko $U \subseteq V(G)$ on graafin G särmien solmupeite, jos jokainen graafin G särmä on viereinen jollekin solmulle joukossa U. Toisin sanoen jokaisesta särmästä ainakin yksi päätesolmu kuuluu joukkoon U.

3 Graafien sovituksista

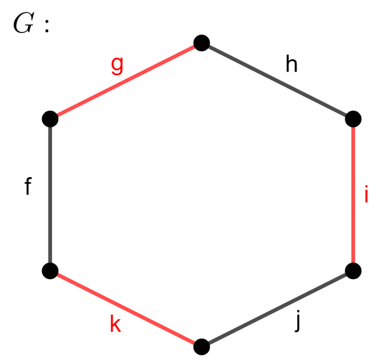
Luvussa 3 siirrytään tutkimaan graafien sovituksia. Graafien sovituksilla on monia sovelluksen kohteita. Erityisesti kaksijakoisten graafien sovituksia tutkitaan ja hyödynnetään paljon, sillä usein on mielekästä sovittaa kaksi toisiinsa yhteydessä olevaa joukkoa keskenään (esimerkiksi työntekijät ja työpaikat, tai ostajat ja myytävät tavarat). Tutustutaan kaksijakoisten graafien kannalta hyödylliseen Hallin lauseeseen, minkä jälkeen laajennetaan sovituksia myös yleisille graafeille Tutten lauseen ja Tutten ehdon avulla.

3.1 Määritelmiä sovituksista

Kappaleen 3 määritelmät pohjautuvat R. Diestelin, teokseen [3], mutta osa määritelmistä perustuu myös teoksiin [1] ja [2].

Määritelmä 3.1. Graafin $G = (V, E)$ *sovitus* M on joukko toisistaan erillisiä särmiä. M on sovitus solmujoukolle $U \subseteq V(G)$, jos jokainen joukon U solmu on päätesolmuna jollekin särmälle, joka kuuluu joukkoon M. Tällöin joukon U solmuja kutsutaan sovitetuiksi.

Määritelmä 3.2. Graafin G *täydellisessä sovituksessa* kaikki solmut ovat sovitettuja, eli jokainen graafin G solmu on päätesolmuna jollekin särmälle, joka kuuluu joukkoon M. Solmujen lukumäärä on välttämättä parillinen, sillä jokaista särmää kohti on aina kaksi päätesolmua.

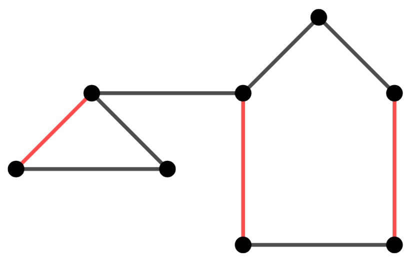


Kuva 3.1. Graafin G täydellinen sovitus M sisältää särmät g, i ja k. Selvästi kaikki graafin solmut on sovitettu.

Määritelmä 3.3. Graafin G sovitus M on *maksimaalinen*, jos siihen ei voida lisätä enää yhtäkään särmää, eli minkä tahansa seuraavan särmän lisääminen sovittaa saman solmun useammalla särmällä, mikä ei ole sovitukselle sallittua.

Määritelmä 3.4. Graafin G sovitus M on *maksimisovitus*, eli suurin mahdollinen, jos mikä tahansa muu sovitus M_1 sisältää korkeintaan yhtä paljon särmiä.

Esimerkki 3.1. Seuraavassa esimerkissä esitetään sellainen maksimaalinen sovitus, joka ei kuitenkaan ole graafin maksimisovitus.



Kuva 3.2. Kuvan graafi on maksimaalinen, sillä sovitettuja särmiä ei voi enää lisätä. Kyseessä ei kuitenkaan ole maksimisovitus, sillä sovitusta voidaan kasvattaa valitsemalla sovitetut särmät toisin.

Huomautus. Jokainen täydellinen sovitus on aina maksimisovitus (suurin mahdollinen), ja jokainen maksimisovitus on aina maksimaalinen. Ks. [2, s. 91]

Määritelmä 3.5. Graafin G k-säännöllinen virittävä aligraafi on nimeltään k*-faktori*. Täten graafin G aligraafi $H \subseteq G$ on 1*-faktori*, jos ja vain jos särmäjoukko $E(H)$ on sovitus solmujoukossa $V(G)$.

Huomautus. Graafin 1-faktorilla ja täydellisellä sovituksella on paljon samoja ominaisuuksia, mutta niillä on eräs ero; täydellinen sovitus on joukko särmiä, kun taas graafin 1-faktori on aligraafi.

3.2 Kaksijakoisten graafien sovituksista

Tässä kappaleessa käsitellään kaksijakoisia graafeja ja niiden sovituksia. Oletetaan kappaleen ajan, että graafi $G = (V, E)$ on kaksijakoinen graafi solmujoukon $V(G)$

jaolla $\{A, B\}$ siten, että $A \subseteq V(G)$ ja $B \subseteq V(G)$. Lisäksi oletetaan, että solmut a, a' kuuluvat joukkoon A ja solmut b, b' joukkoon B.

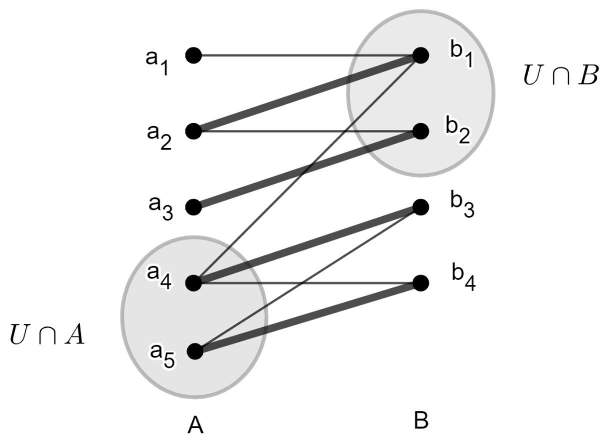
Määritelmä 3.6. Olkoon M graafin G sovitus. Graafin G polkua, joka alkaa joukosta A sovittamattomalla solmulla ja sisältää vuoron perään särmiä joukosta $E \setminus M$ (sovittamattomia särmiä) ja joukosta M (sovitettuja särmiä), kutsutaan *vuorottelevaksi* poluksi, tai *M-vuorottelevaksi* poluksi.

Määritelmä 3.7. M-vuorotteleva polku, joka päättyy sovittamattomaan solmuun, on nimeltään *M-kasvava polku.*

Seuraavaa lausetta kutsutaan myös nimellä *Königin lause* (König 1931).

Lause 3.1. *Kaksijakoisen graafin G maksimisovituksessa on yhtä monta särmää, kuin sen pienimmässä solmupeitteessä on solmuja.*

Todistus (vrt. [3, s. 35]). Olkoon M graafin G maksimisovitus ja $|M| = m$. Jokaisesta särmästä, joka kuuluu joukkoon M valitaan toinen särmän päätesolmuista; päätesolmu joukosta B, jos joku M-vuorotteleva polku päättyy siihen solmuun ja muuten se päätesolmu, joka päättyy joukkoon A. (Katso kuva 3.1)



Kuva 3.3. Särmien solmupeite U.

Todistetaan seuraavaksi, että joukko $U \subseteq V(G)$ peittää särmäjoukon E, ja joukon U koko on m. Koska jokaisen särmien solmupeitteen täytyy peittää joukko M, solmujen lukumäärä ei voi olla pienempi kuin m, ja koska jokaisesta särmästä valittiin aina toinen sen päätesolmuista, solmujen lukumäärä ei voi olla suurempi kuin m, joten väite pätee.

Olkoon $ab \in E(G)$ eräs särmä. Osoitetaan, että toinen solmuista, eli a tai b kuuluu joukkoon U. Jos $ab \in M$, niin joko a, tai b kuuluu joukkoon U tämän joukon määritelmän mukaan. Oletetaan siis, että $ab \notin M$. Sovituksen M maksimaalisuuden seurauksena se sisältää erään särmän $a'b'$, jolle $a = a'$ tai $b = b'$. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $a = a'$, sillä jos a on sovittamaton ja $b = b'$, niin särmä ab on vuorotteleva polku. Niinpä särmän $a'b' \in M$ päätesolmu, joka valittiin joukkoon U, oli solmu $b' = b$. Nyt, mikäli $a' = a$ ei kuulu joukkoon U, niin $b' \in U$ ja jokin M-vuorotteleva polku p päättyy solmuun b'. Toisaalta tämä tarkoittaa sitä, että olisi olemassa myös toinen M-vuorotteleva polku p', joka päättyy solmuun b. Nyt joko $p' := pb$ (jos $b \in p$), tai $p' := pb'a'b$. Koska M oli maksimisovitus, p' ei voi olla kasvava polku, eli solmun b täytyy olla sovitettu ja valittu joukkoon U joukon M särmästä, joka sisältää sen. Olemme siis todistaneet lauseen 3.1.

□

3.3 Hallin lause

Lause 3.2. *Kaksijakoinen graafi G sisältää täydellisen sovituksen M, jossa kaikki joukon A solmut on sovitettu, jos ja vain jos $|N(S)| \geq |S|$ kaikille joukoille $S \subseteq A$.*

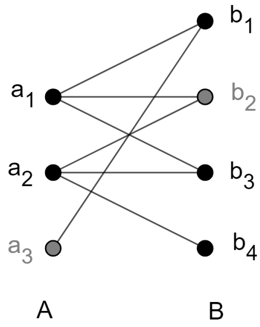
Toisin sanoen kaksijakoisella graafilla on täydellinen sovitus, jos ja vain jos jokaisella osajoukolla $S \subseteq A$ on vähintään yhtä monta naapurisolmuja osajoukossa $N(S) \subseteq B$ kuin joukossa S on solmuja. Lausetta 3.2 kutsutaan yleisemmin *Hallin lauseeksi* (P. Hall 1935) ja ekvivalenssin jälkimmäistä puolta *Hallin ehdoksi*.

Todistus. Oletetaan ensin, että graafilla G on täydellinen sovitus M, joka sovittaa kaikki joukon A solmut. Tällöin on olemassa injektio f joukosta $S \subseteq A$ joukkoon $N(S)$, jolle $f(u) = v$, missä uv on särmä, joka kuuluu sovitukseen M ja $u \in S$ ja $v \in N(S)$. Koska jokaiselle joukon S alkiolle on olemassa kuva sen naapurijoukosta, ja kaikki joukon S alkiot kuvautuvat eri alkioille joukkoon $N(S)$, on naapurijoukon $N(S)$ koko ainakin joukon S kokoinen, eli $|N(S)| \geq |S|$.

Todistetaan väite toiseen suuntaan lauseeseen 3.1 nojaten. Olkoon graafi G kaksijakoinen graafi kuten kappaleen alussa määriteltiin. Näytetään, että minkä tahansa solmupeitteen koko on ainakin $|A|$, mikä lauseen 3.1 mukaan antaa meille sovituksen, jonka koko on $|A|$. Tämä tietenkin peittää joukon A.

Todistetaan väite ristiriidan kautta olettamalla, että on olemassa jokin solmupeite S, jolle pätee:

1. Joukolla S on k solmua joukosta A
2. ja joukolla S on vähemmän kuin $|A| - k$ solmua joukosta B.



$S : \{b_2, a_3\}$

Kuva 3.4. Koska solmu b_4 ei kuulu solmupeitteeseen, sitä voidaan jatkaa särmäksi b_4a_2, joka ei siis kuulu peitteeseen. Täten solmupeitteen koon on oltava aina ainakin $|A|$.

Tällöin joukon $A \backslash S$ koko on $|A| - k$ ja se toteuttaa Hallin ehdon $|N(A \backslash S)| \geq |A| - k$. Tällöin on olemassa solmu naapurisolmujen joukossa $N(A \backslash S)$, joka ei kuulu joukkoon $S \cap B$, joten S ei voi olla solmupeite. Löysimme siis särmän, jota joukko S ei peitä. □

Seuraus 3.1. *Jos kaksijakoinen graafi G on k-säännöllinen ja $k \geq 1$, niin graafilla G on 1-faktori.*

Todistus (vrt. [3, s. 38]). Koska G on kaksijakoinen graafi ja se on k-säännöllinen, on voimassa $|A| = |B|$; Joukosta A lähtee $k|A|$ verran särmiä joukkoon B, ja koska graafi G on k-säännöllinen, joukosta B lähtee $k|B|$ verran särmiä joukkoon A. Koska graafi on kaksijakoinen, on näiden särmien määrän oltava sama, eli $k|A| = k|B|$, mistä tietenkin seuraa, että $|A| = |B|$. Riittää siis osoittaa, että G sisältää joukon A sovituksen nojaten lauseeseen 3.2. Koska graafi on k-säännöllinen, mikä tahansa joukko $S \subseteq A$ on yhdistettynä sen naapurijoukkoon $N(S)$ särmillä, joiden lukumäärä on tasan $k|S|$. Vastaavasti naapurijoukko $N(S)$ on yhdistetty joukkoon S särmillä, joiden lukumäärä on $k|N(S)|$. Selvästi siis joukosta S lähtevät särmät sisältyvät sen naapurijoukosta $N(S)$ lähteviin särmiin ja nyt $k|S| \leq k|N(S)|$, jolloin G toteuttaa Hallin ehdon. □

3.4 Sovituksista yleisillä graafeilla

Merkitään graafin G komponenttien joukkoa C_G ja graafin G parittomien komponenttien määrää $q(G)$. Parittomat komponentit ovat siis niitä komponentteja, joiden solmujen lukumäärä on pariton.

3.5 Tutten lause

Lause 3.3. *Graafilla G on 1-faktori, jos ja vain jos $q(G-S) \leq |S|$ aina kun $S \subseteq V(G)$*

Todistus (vrt. [1, s. 107]). Todistus vasemmalta oikealle on melko suoraviivainen. Oletetaan, että graafi G sisältää 1-faktorin, eli jokainen sen solmu on sovitettu särmällä. Nyt mikä tahansa graafin $G-S$ parittomista komponenteista tulee olla sovitettuna särmällä joukkoon S, jotta graafiin saadaan 1-faktori. Täten triviaalisti joukon S solmujen lukumäärä $|S|$ on ainakin yhtä suuri, kuin parittomien komponenttien lukumäärä graafissa $G-S$, eli pätee $q(G-S) \leq |S|$.

Todistetaan seuraavaksi vastakkaisen suunta. Oletetaan siis, että seuraava ehto on voimassa:

$$q(G-S) \leq |S| \tag{3.1}$$

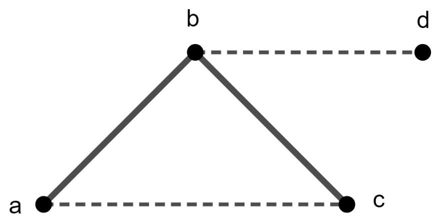
aina, kun $S \subseteq V(G)$.
Jos graafilla G ei ole 1-faktoria, lisätään graafiin särmiä, kunnes seuraavan särmän e lisääminen tuottaa graafiin 1-faktorin. Olkoon G' tällainen särmämaksimaalinen graafi, joka ei vielä sisällä 1-faktoria. Tällöin siis graafissa $G'+e$ on 1-faktori. Koska graafi G' on yhdiste graafin G komponenteista, on siinä komponentteja, ja erityisesti parittomia komponentteja, korkeintaan yhtä paljon kuin alkuperäisessä graafissa G. Nyt siis pätee seuraava epäyhtälö:

$$q(G'-S) \leq q(G-S) \tag{3.2}$$

Nyt, jos $S = \emptyset$, niin yhtälön 3.1 mukaan $q(G) = 0$. Koska kaikki komponentit ovat parillisia, ja parillisten komponenttien solmujen lukumäärä on myös aina parillinen, pätee, että $|G'| = |G| = n$, missä n on parillinen kokonaisluku.

Olkoon K sellaisten graafin G' solmujen joukko, joiden asteluku on $(n-1)$, eli solmuista lähtee särmä kaikkiin muihin solmuihin. Lisäksi $K \neq V(G')$, sillä jos $K = V(G')$, niin G' olisi täydellinen graafi K_n, jolla on 1-faktori. Väitetään nyt, että jokainen graafin $G' - K$ komponentti on täydellinen, eli kaikki komponentin solmut ovat keskenään yhdistettynä toisiinsa särmällä. Todistetaan väite vastaoletuksen kautta.

Oletetaan, että jokin graafin $G' - K$ komponentti G_1 ei ole täydellinen. Täten komponentissa G_1 on eräät solmut a, b ja c siten, että $ab \in E(G')$ ja $bc \in E(G')$, mutta $ac \notin E(G')$. Lisäksi, koska $b \in V(G_1)$, $\deg(b) < n - 1$, on olemassa jokin solmu d graafissa G' siten, että $bd \notin E(G')$. Tällöin joukon K valinnan perusteella, solmu d ei kuulu joukkoon K.



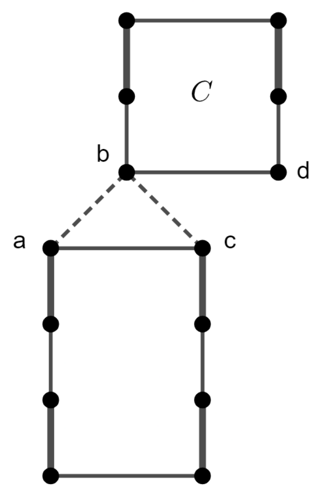
Kuva 3.5. Kuvassa olevat katkoviivat eivät kuulu graafiin G', ja vahvistetut viivat kuuluvat graafiin G'.

Nyt graafin G' valinnan perusteella kummallakin graafilla, $G' + ac$ ja $G' + bd$, on 1-faktori. Merkitään faktoreita vastaavia sovituksia vastaavassa järjestyksessä M_1 ja M_2. Nyt on siis välttämätöntä, että särmä $ac \in M_1$ ja särmä $bd \in M_2$. Valitaan seuraavaksi graafin $G' + \{ac, bd\}$ aligraafi H, joka on joukon $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ särmäindusoima graafi. (Poistettiin siis kaikki joukkojen M_1 ja M_2 yhteiset särmät) Koska M_1 ja M_2 ovat molemmat 1-faktoreita, jokainen graafin G' solmu on sovitettu niin joukossa M_1 kuin myös joukossa M_2, ja aligraafi H on erillinen yhdiste parillisia syklejä, joka sisältää särmiä vuorotellen joukosta M_1 ja M_2. Nyt meillä on kaksi vaihtoehtoista tapausta:

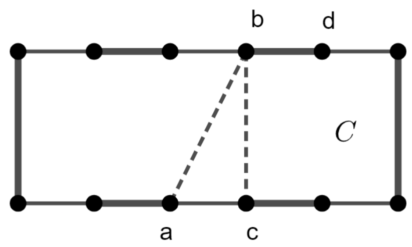
1. Särmät ac ja bd kuuluvat eri komponentteihin graafissa H. Jos bd kuuluu parilliseen sykliin C, niin joukon M_1 särmät syklissä C ja joukon M_2 särmät muualla kuin syklissä C yhdessä muodostavat 1-faktorin graafissa G'. Tämä puolestaan on ristiriidassa sen kanssa, että G' valittiin alun perin siten, että se ei sisällä 1-faktoria. Ks. esimerkkikuva 3.6.

2. Särmät ac ja bd kuuluvat samaan komponenttiin C graafissa H. Koska jokainen graafin H komponenteista on sykli, myös C on sykli. Solmujen a ja c symmetrisyyden vuoksi voidaan olettaa, että solmut a, b, d ja c esiintyvät annetussa järjestyksessä syklissä C. Täten joukon M_1 särmät, jotka kuuluvat komponentin C osioon $ba \dots c$ yhdessä särmän bc ja joukon M_2 niiden särmien kanssa, jotka eivät kuulu osioon $bd \dots c$, muodostavat 1-faktorin graafissa G'. Jälleen, tämä on ristiriidassa graafin G' valinnan kanssa, joten graafin $G' - K$ komponenttien täytyy olla täydellisiä. Ks. esimerkkikuva 3.7.

Nyt ehdon 3.2 perusteella, $q(G' - K) \leq |K|$. Täten, solmu jokaisesta graafin $G' - K$ parittomasta komponentista on sovitettu johonkin solmuun joukossa K. Lisäksi jäljelle jääneet solmut jokaisessa graafin $G' - K$ komponentissa (niin parittomassa kuin parillisessakin komponentissa) voidaan sovittaa keskenään. Sovitettujen solmujen kokonaismäärä on siis parillinen. Koska graafin G' solmujen lukumäärä $|V(G')|$ on parillinen, jäljelle jäävät solmut joukossa K (jos niitä on), voidaan sovittaa keskenään. Tämä antaa graafin G' 1-faktorin. Erityisesti jos $K = \emptyset$, niin $q(G') = 0$ ja 1-faktorin olemassaolo on triviaalia. Kuitenkin valinnan perusteella graafilla G' ei ollut 1-faktoria. Ristiriidan seurauksena olemme todistaneet, että graafilla G on 1-faktori. □



Kuva 3.6. Graafi H, jossa särmät ac ja bd kuuluvat eri komponentteihin



Kuva 3.7. Graafi H, jossa särmät ac ja bd kuuluvat samaan komponenttiin C.

Lähteet

[1] Balakrishnan, R., and Ranganathan, K. *A textbook of Graph Theory*. 2nd edition. New York, NY: Springer New York, 2012.

[2] Chartrand, G., and Zhang, P. *Chromatic Graph Theory*. Second edition. Milton: CRC Press LLC, 2019.

[3] Diestel, R. *Graph Theory*. 3rd edition, New York: Springer-Verlag Heidelberg, 2005.