Tampereen yliopisto

Mikko Kuusisto

KAHDEN PELAAJAN EI-NOLLASUMMAPELIEN RATKAISEMINEN NASHIN TASAPAINON AVULLA

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Mika Mattila
Tammikuu 2022

TIIVISTELMÄ

Mikko Kuusisto: Kahden pelaajan ei-nollasummapelien ratkaiseminen Nashin tasapainon avulla
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Tammikuu 2022

Työssä perehdytään kahden pelaajan ei-nollasummapeleihin ja niiden ratkaisemiseen. Tarkoituksena on löytää optimaalinen ratkaisu molemmille pelaajalle. Työssä pelit ratkaistaan Nashin tasapainon avulla. Tutkielmassa käsitellään Nashin tasapainon ratkaisua eri menetelmin ja valintaa useiden Nashin tasapainojen välillä. Työ pohjautuu valmiisiin teoksiin ja aineistoihin.

Ei-nollasummapeleissä pelaajat voivat tehdä yhteistyötä ja pelissä on myös mahdollista, että molemmat pelaajat joko voittavat tai häviävät. Näitä pelitilanteita ratkaistaan yleisimmin Nashin tasapainon avulla. Nashin tasapainotilassa yksikään pelaaja ei voi parantaa omaa tuottoaan muuttamalla omaa strategiaaansa yksipuolisesti. Pelaajien strategiat muodostavat Nashin tasapainotilan.

Tutkielmassa käsitellään Nashin tasapainotilan ratkaisemista eri menetelmin. Nashin tasapainoja on niin sanottuja puhtaita ja sekoittuneita. Näiden löytämiseen käytetään erilaisia menetelmiä. Työssä etsitään Nashin tasapainoja matriisilaskennan, usean muuttujan funktion analyysin, tuottojen yhtäsuuruuden ja parhaan vastauksen strategian avulla. Mikäli Nashin tasapainoja on useita, on tärkeää valita tilanteeseen paras Nashin tasapaino. Työssä käsitellään valintaa ja tärkeimpiä strategioita Nashin tasapainon valinnalle.

Työn tarkoituksena on antaa lukijalle perusteet toisen pelaajan ei-nollasummapeleistä ja niiden ratkaisusta Nashin tasapainon avulla. Nashin tasapainon teoriaa sovelletaan laajasti ja työ antaa valmiudet teorian soveltamiseen.

Avainsanat: Peliteoria, Ei-nollasummapelit, Nashin tasapaino, Vangin dilemma, Puhdas strategia, Sekastrategia

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$E(X,Y)$	Tuottojen odotusarvo
J	Ykkösmatriisi
$\max(X,Y)$	Funktion suurin arvo
R	Rationaalisen vastauksen joukko
S	Joukko
v	Pelin arvo
X^*	Optimistrategia
BR	Parhaan vastauksen joukko

1. JOHDANTO

Erilaiset pelitilanteet ovat osana jokapäiväistä arkeamme. Teemme jatkuvasti ratkaisuja tilanteissa, joita voi mallintaa matemaattisesti. Erilaisiin tilanteisiin on olemassa optimaalisia ratkaisuja, joita emme aina tule ajatelleeksi tai jotka eivät edes tunnu rationaalisilta. Tässä työssä lähestytään ongelmia matematiikan kautta, jotta ymmärrämme paremmin, että pelitilanteihin on usein paras ratkaisu. Työssä esitetylle teorialle löytyy myös suuri määrä sovelluksia niin politiikassa, ohjelmoinnissa kuin taloudessakin.

Tässä työssä käsitellään kahden pelaajan ei-nollasummapelejä ja niiden ratkaisemista. Työssä perehdytään kyseisiin peleihin ja niiden ratkaisuja käsitellään matemaattisesta näkökulmasta. Ei-nollasummapelit ja peliteoria yleisesti mallintavat sosiaalisia tilanteita, jotka esitetään työssä yksinkertaistettuina matemaattisina tilanteina. Pelaajien välistä kanssakäymistä ei oteta työssä huomioon, vaan pelin optimiratkaisuja pyritään löytämään matematiikan keinoin.

Työ keskittyy Nashin tasapainoon ja menetelmiin, joilla Nashin tasapainon voi löytää. Työssä perehdytään myös siihen, kuinka Nashin tasapaino tulisi valita, mikäli niitä on useita. Nashin tasapainon avulla pelitilanteessa pystytään löytämään tilanne, jossa kaikki pelaajat saavuttavat parhaan mahdollisen tuloksen. Pelaajien ei siis yksittäin kannata pyrkiä parhaaseen mahdolliseen lopputulokseen vaan löytää ratkaisu, jolla kaikki voittavat. Tälläistä tilannetta sanotaan Nashin tasapainoksi.

Ei-nollasummapelien merkitys politiikassa ja taloudessa ovat valtavat ja yksinkertaistetuillakin peleillä pystytään kuvaamaan hyvin esimerkiksi erilaisia neuvottelutilanteita. Yksinkertaisilla malleilla voidaan kuvata esimerkiksi valtioiden välisiä ydinasetilanteita tai yleismaailmaisia pelitilanteita. Näitä pelitilanteita havainnollistetaan esimerkein, jotta teorian ymmärretään olevan sovellettavissa.

2. JOHDANTOA KAHDEN PELAAJAN EI-NOLLASUMMAPELEIHIN

Työssä käsitellään ei-nollasummapelejä ja niiden ratkaisuja. Perehtyäksemme ei-nollasummapeleihin on hyvä tuntea myös nollasummapelit pääpiirteiltään. Ne ovat pelitilanteita, joissa toisen pelaajan voitto on aina toisen pelaajan yhtäsuuruinen tappio. Nollasummapeleillä voidaan kuvata helposti yksinkertaisia pelitilanteita. Toisin kuin nollasummapelit, ei-nollasummapeleissä pelaajat voivat tehdä yhteistyötä ja pelissä on myös mahdollista, että molemmat pelaajat joko voittavat tai häviävät. Tälläiset pelitilanteet kuvaavat hyvin esimerkiksi taloudellisia ja poliittisia tilanteita.

Ei-nollasummapelejä ratkaistaan tunnetuimmin Nashin tasapainon avulla, joka on nimetty taloustieteilijä John Forbes Nashin mukaan. Nashin tasapainolla tarkoitetaan tilannetta, jossa kumpikaan pelaaja ei voi parantaa tulostaan muuttamalla pelkästään omaa valintaansa. Ei-nollasummapelien optimimiratkaisuja voidaan etsiä tutkimalla Nashin tasapainon olemassaoloa ja sen stabiilisuutta [3].

Peliteoriassa käsitellään puhtaita- ja sekastrategioita. Puhtaalla strategialla tarkoitetaan tilanteita, joissa valinta perustuu perustuu täysin tapahtuman eri lopputuloksiin [5]. Esimerkiksi arvuuteltaessa, onko kolikonheiton lopputulos kruuna vai klaava, strategia perustuu lopputulokseen (kruuna tai klaava), mikä on puhdas strategia. Käytettäessä puhdasta strategiaa pelaaja olettaa toisen pelaavan aina parhaan mahdollisen lopputuloksen mukaisesti. Sekastrategialla sen sijaan tarkoitetaan tilannetta, jossa valinta määräytyy jonkin toisen puhtaan strategian avulla. Sekastrategia on siis pelaajan puhtaiden strategioiden joukon todennäköisyysjakauma [6]. Esimerkiksi valitsemalla kolikonheitossa lopputulos heittämällä ensin kolikkoa on sekastrategia. Yleisemmin lopputuloksen a_1 valitsemista todennäköisyydellä x_1 ja tuloksen a_2 valitsemista todennäköisyydellä x_2, toisin sanoen $(x_1 a_1,\ x_2 a_2)$, kutsutaan siis sekastrategiaksi. Näin ollen myös puhdas strategia on sekastartegian erityistapaus, jossa valinnan todennäköisyys on yksi [5]. Sekastartegia on siis tilanne, jossa pelaaja ei tiedä toisen pelaajana valintaa [4].

Vaikka nollasummapelejä ei käsitellä työssä tarkemmin, aloitetaan aiheen tarkastelu ratkaisemalla nollasummapelin arvon kaava ja pelaajien optimistartegiat. Näitä kaavoja käytetään joissain tilanteissa osana ei-nollasummapelien ratkaisemista. Tarkastellaan tilannetta, jossa kahden pelaajan nollasummapelissä molemmilla pelaajilla on käytettävissä kaksi eri strategiaa, jolloin 2×2-pelimatriisiksi saadaan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Lause 2.1 ([1]). *Tarkastellaan* 2×2 *-nollasummapeliä, jonka matriisi on A. Oletetaan, ettei pelillä ole puhdasta optimistartegiaa eli satulapistettä. Merkitään*

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \qquad y^* \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \tag{2.2}$$

Nyt pelaajan I optimaalinen sekastrategia on $X^* = (x^*, 1 - x^*)$ *ja* $Y^* = (y^*, 1 - y^*)$ *on pelaajan II optimaalinen sekastrategia. Pelin arvo on tällöin*

$$v(A) = E(X^*, Y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \tag{2.3}$$

2.1 Nashin tasapaino

Syvennytään seuraavaksi ei-nollasummapeleihin. Kahden pelaajan ei-nollasummapelissä tilannetta on helppo käsitellä tuottomatriisien avulla. Oletetaan, että molemmilla pelaajilla on oma tuottomatriisinsa ja niiden olevan seuraavat:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Jos ajatellaan, että pelaaja I valitsee rivin 1 ja pelaaja II valitsee sarakkeen 2, niin pelaajan I tuotto on a_{12} ja pelaajan II tuotto on b_{12}. Nollasummapelissä on voimassa yhtälö: $a_{ij} + b_{ij} = k$, missä k on jokin vakio. Tarkastellessamme ei-nollasummapelejä näin ei ole, vaan pelaajan I valitessa rivin i ja pelaajan II valitessa sarakkeen j pelin tuotto on pari $(a_{ij},\ b_{ij})$, missä ensimmäinen komponentti on pelaajan I tuotto ja toinen pelaajan II tuotto. Yksittäisiä rivejä ja sarakkeita kutsutaan pelaajien puhtaiksi strategioiksi. [1]

Puhtaat strategiat eivät kuitenkaan riitä, mikäli optimaalinen strategia halutaan määrittää. Optimaalisia strategioita voidaan saavuttaa sekastrategian avulla. Sekastrategia pelaajalla I on vektori (tai matriisi) $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S_n$, kun $x_i \geq 0$. Vektori kuvaa todennäköisyyttä, jonka mukaan pelaaja I valitsee rivin i. Vektorin alkioiden yhteenlaskettu summa on yksi, sillä alkiot kuvaavat todennäköisyyksiä. Samaan tapaan pelaajalle II on todennäköisyysvektori $Y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in S_m$, kun $y_i \geq 0$ ja vektorin alkioiden summa on yksi.[1] Nyt pelaajien tuottojen odotusarvot ovat

$$\begin{aligned} E_I(X, Y) &= XAY^T \quad \text{pelaajalle I,} \\ E_{II}(X, Y) &= XBY^T \quad \text{pelaajalle II.} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Määritetään seuraavaksi Nashin tasapaino tuoton odotusarvo optimaaliselle pelille, joka voidaan redusoida satulapisteeksi, jos $B = -A$.

Määritelmä 2.2 ([1]). Sekastrategioiden pari $(X^* \in S_n, Y^* \in S_m)$ on Nashin tasapaino, jos $E_I(X, Y^*) \leq E_I(X^*, Y^*)$, $\forall X \in S_n$ ja $E_{II}(X^*, Y) \leq E_{II}(X^*, Y^*)$, $\forall Y \in S_m$. Jos (X^*, Y^*) on

Nashin tasapaino, niin $v_A = E_I(X^*, Y^*)$ ja $v_B = E_{II}(X^*, Y^*)$ voidaan määritellä optimaaliseksi tuotoksi kullekin pelaajalle.

$$\begin{aligned} E_I(X^*, Y^*) = X^* A Y^{*T} \geq X A Y^{*T} = E_I(X, Y^*) \qquad &\text{kaikille } X \in S_n, \\ E_{II}(X^*, Y^*) = X^* B Y^{*T} \geq X B Y^{*T} = E_{II}(X^*, Y) \qquad &\text{kaikille } Y \in S_n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nashin tasapainon vastaisesti pelaavan pelaajan tuoton odotusarvo jää siis optimaalista pienemmäksi, mikäli toinen pelaaja pelaa Nashin tasapainon mukaisella optimistrategiallaan. Kuitenkin, mikäli tiedetään, että toinen pelaaja ei pelaa Nashin tasapainon mukaisesti, toisella pelaajalla voi olla mahdollisuus nostaa tuottojaan käyttämällä parhaan vastauksen strategiaa. Nashin tasapainon mukaan jokainen sen mukainen pelistrategia on parhaan vastauksen strategia, mikäli vastustaja pelaa Nashin tasapainon mukaisesti.[1] Alla tarkka määritelmä kahden pelaajan tilanteelle:

Määritelmä 2.3. Strategia $X^0 \in S_n$ on parhaan vastauksen strategia annetulle strategialle $Y^0 \in S_n$ pelaajalle II, jos

$$E_I(X^0, Y^0) = \max_{X \in S_n}(E_I(X, Y^0)). \tag{2.7}$$

Samaan tapaan strategia $Y^0 \in S_n$ on parhaan vastauksen strategia annetulle strategialle $X^0 \in S_n$ pelaajalle I, jos

$$E_{II}(X^0, Y^0) = \max_{Y \in S_n}(E_{II}(X^0, Y)). \tag{2.8}$$

Toinen tapa määritellä Nashin tasapaino (X^*, Y^*) on, että X^* maksimoi odotusarvon $E_I(X, Y^*)$ kaikkilla $X \in S_n$ ja Y^* maksimoi odotusarvon $E_I(X^*, Y)$ kaikkilla $Y \in S_n$. [1]

Huomautus 2.4. On tärkeää huomata, että Nashin tasapaino ei maksimoi yksittäisen pelaajan tuottoja. Jos näin olisi, Nashin tasapaino löytyisi maksimoimalla kahden muuttujan funktio molempien muuttujien mukaan, mikä vaatisi, että yksi piste olisi molempien muuttujien maksimikohta. Se olisi harvinainen sattuma, mutta matemaattisesti triviaali, mikäli sellainen piste edes löytyisi. [1]

Jos $B = -A$, niin kaksoismatriisipeli on kahden pelaajan nollasummapeli ja Nashin tasapaino on sama kuin satulapiste sekastrategioissa. Tämä on helposti nähtävissä, sillä $E_I(X, Y) = XAY^T = -E_{II}(X, Y)$. Huomioitavaa on, että puhtaan strategian Nashin tasapaino pätee jokaiselle riville i^* ja sarakkeelle j^*, eli

$$a_{ij'} \leq a_{i'j'} \quad \text{ja} \quad b_{ij'} \leq b_{i'j'}, \qquad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \tag{2.9}$$

Siispä $a_{i^*j^*}$ on sarakkeen j^* ja $b_{i^*j^*}$ on rivin i^* suurin arvo. [1] Kaksoismatriisipelissä puhtaan strategian Nashin tasapaino on oltava se pari, jonka ensimmäinen alkio on suurin kaikista saman sarakkeen ensimmäisistä alkioista ja parin toinen alkio on suurin kaikista saman rivin toisista alkioista. Kuten nollasummapeleissäkin, puhdas strategia voidaan ajatella sekastrategiana keskittämällä todennäköisyydet niille riveille ja sarakkeille, joita tulisi aina pelata. Mikäli pelaaja I käyttää puhdasta strategiaa ja rivillä i ja pelaaja II sekastrategiaa sarakkeessa $Y \in S_m$, niin odotetut voitot kullekin pelaajalle ovat

$$E_I(i,Y) = A_i Y^T \quad \text{ja} \quad E_{II}(i,Y) = B_i Y^T, \tag{2.10}$$

missä A_i on matriisin A ja B_i on matriisin B i. rivivektori. Samaan tapaan, mikäli pelaaja II käyttää saraketta j ja pelaaja I käyttää sekastrategiaa X, niin

$$E_I(X,j) = XA_j \quad \text{ja} \quad E_{II}(X,j) = XB_j, \tag{2.11}$$

missä A_j on matriisin A ja B_j on matriisin B j. sarakevektori. [1]

Tarkastellaan tarkemmin kaksoismatriisipelejä. Tarkoituksena on on selvittää, onko Nashin tasapainoa olemassa puhtaissa strategioissa, onko Nashin tasapainoa tai useampia sekastrategioissa ja miten ne lasketaan. Tutkitaan tilannetta kuuluisan Vangin dilemman avulla.

Esimerkki 2.5. Vangin dilemma. Kuvitellaan tilanne, jossa on kaksi rikollista, jotka ovat syyllistyneet rikokseen. Todistusaineistoa löytyy riittävästi siihen, että molemmat rikolliset vangitaan vuodeksi, mikäli kumpikaan ei todista toista vastaan. Rikolliset ovat erillään toisistaan eivätkä voi kommunikoida keskenään. Kuitenkin, mikäli toinen vangeista tunnustaa ja todistaa toista vastaan toisen vaietessa, ensimmäinen pääsee vapaaksi ja toinen vangitaan kahdeksikymmeneksi vuodeksi. Sama pätee molempiin suuntiin. Myös mikäli molemmat vangit tunnustavat, molemmat joutuvat vankilaan viideksi vuodeksi. Kuvataan vangin dilemman tilannetta alla olevalla matriisilla, joka esittää mahdolliset voitot, jotka pyritään maksimoimaan, ja siksi arvot ovat negatiivisia.

Vanki 1/2	Tunnustaa	Ei tunnusta
Tunnustaa	$(-5,-5)$	$(0,-20)$
Ei tunnusta	$(-20,0)$	$(-1,-1)$

Erilliset matriisit kullekin pelaajalle ovat seuraavat:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -20 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & -20 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Löytääksemme puhtaiden strategioiden Nashin tasapainon etsimme voittoparin (a,b), jossa a on samaan aikaan sarakkeen suurin luku kun b on rivin suurin luku. Tälläisiä pareja voi olla enemmän kuin yksi. Helpoin tapa löytää kyseinen pari on tarkastella kaksoismatriisia. Systemaattisesti edettäessä laitetaan ensin sarakkeiden ensimmäisten suurimpien arvojen päälle viiva ja sen jälkeen rivien suurimpien toisten arvon päälle viiva. Mikäli jonkin parin molempien lukujen päällä on viiva, se on Nashin tasapaino. [1] Vangin ongelmassa kyseinen matriisi näyttää seuraavalta:

Kuvasta on selvästi nähtävissä, että puhdas Nashin tasapaino löytyy kohdasta (Tunnustaa, Tunnustaa), eli rikollisten tulisi molempien tyytyä viiden vuoden tuomioon ja tunnustaa, sillä jos toinen ei tunnusta, nousee hänen tuomionsa 20 vuoteen. Kuitenkin parempi vaihtoehto voisi olla, ettei kumpikaan tunnusta, jolloin molemmat joutuvat vankilaan vain vuodeksi. Tilanteessa molemmilla

Vanki 1/2	Tunnustaa	Ei tunnusta
Tunnustaa	$(\overline{-5}, \overline{-5})$	$(\overline{0}, -20)$
Ei tunnusta	$(-20, \overline{0})$	$(-1, -1)$

on kannustin tunnustaa, sillä on mahdollisuus ettei tunnustava osapuoli joudu vankilaan ollenkaan. Tästä syystä suurin osa salaliitoista ei toimi, sillä heti kun toinen osapuoli saa etua toisen pettämisestä, näin käy. Näin ollen pari $(-1, -1)$ on epävakaa siltä osin, että pelaaja voi päätyä parempaan lopputulokseen. Sen sijaan pari $(-5, -5)$ on vakaa, sillä kumpikaan pelaajista ei voi parantaa omaa tulostaan, mikäli molemmat pelaavat sitä.[1] Vaikka tässä tapauksessa rikolliset olisivat sopineet, etteivät he tunnusta, on hyvin epätodennäköistä, että he pitävät lupauksensa, sillä Nashin tasapaino on itseään vahvistava.

Mitä tahansa peliä, jossa Nashin tasapaino antaa molemmille pelaajille alemman voiton kuin yhteistyön tekeminen kutsutaan Vangin dilemma -peliksi. Tällaisessa pelissä pelaajat eivät tee yhteistyötä. Kuitenkaan Vangin dilemma -peli ei aina toimi oikeassa elämässä. Jos sama pelitilanne toistuu useita kertoja, on pelaajan otettava vastuuta siitä, jos hän ei tee yhteistyötä. Voidaankin todeta, ettei toistuva peli vastaa ominaisuuksiltaan täysin kertaluontoista peliä. On huomioitavaa myös, että Vangin dilemman matriisin A ensimmäinen rivi dominoi toista riviä, eikä pelaaja 1 koskaan näin ollen pelaa toista riviä. Samoin matriisin B ensimmäinen sarake dominoi toista, jolloin pelaaja 2 ei koskaan pelaa toista saraketta. Lopputulos voidaan ratkaista dominointimenetelmällä.[1] Pelin arvoksi saadaan $E_1(X^*, Y^*) = \frac{5}{24}$ ja $E_2(X^*, Y^*) = \frac{5}{24}$.

2.2 Vähimmäistuotto

Pelitilanteiden huonoimman mahdollisen lopputuloksen käsitteleminen on tärkeää, jotta kaksoismatriisipelejä voidaan ratkaista ja käsitellä pelaajien välistä yhteistyötä. Pelaajan I vähimmäistuotto voidaan määritellä olettamalla pelaajan II pyrkivän minimoimaan pelaajan I tuottoja. Kahden pelaajan kaksoismatriisipeliä, jonka matriisit ovat $(A_{n\times m}, B_{n\times m})$, voidaan ajatella kahtena eri nollasummapelinä. Nyt pelaaja I maksimoi matriisin A rivejä ja pelaaja II minimoi sen sarakkeita. Tällöin matriisin A pelin arvo on pelaajan I vähimmäistuotto. Samoin menetellään pelaajan II kohdalla, mutta matriisi on B^T, sillä maksimoitavat arvot ovat aina rivejä. Näin ollen pelaajan II vähimmäistuotto on matriisin B^T pelin arvo. [1]

Määritelmä 2.6. Käsitellään kaksoismatriisipeliä (A, B). Vähimmäistuotto pelaajalle I on $v(A)$ ja pelaajalle II $v(B^T)$. Jos matriisilla A on satulapiste kohdassa (X^A, Y^A), niin arvoa X^A kutsutaan pelaajan I maximin-strategiaksi. Jos matriisilla B^T on satulapiste kohdassa (X^{B^T}, Y^{B^T}), niin arvo X^{B^T} on pelaajan II maximin-strategia. [1]

Esimerkki 2.7. Otetaan esimerkiksi peli, jonka matriisi on

$$\begin{bmatrix} (2,0) & (1,3) \\ (0,1) & (3,0) \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

jolloin matriisit A ja B ovat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Nyt $v(A) = \frac{3}{2}$ on pelaajan I ja $v(B^T) = \frac{3}{4}$ on pelaajan II vähimmäistuotto. Pelaajan I maximin-strategia on $X = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ja sen käyttö varmistaa vähimmäistuoton saamisen. Toisin sanoen,

$$E_I\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), Y\right) = \frac{3}{2}(y_1 + y_2) = \frac{3}{2}, \qquad \text{kaikille strategioille } Y = (y_1, y_2). \tag{2.15}$$

Maximin-strategia pelaajalle II on $Y = X^{B^T} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, jota käyttämällä pelaaja saa vähintäänkin tuoton $\frac{3}{4}$. [1]

Nyt voidaan huomata, että, mikäli (X^*, Y^*) on Nashin tasapaino kaksoismatriisipelille, niin

$$E_I(X^*, Y^*) = X^* A Y^{*T} \geq v(A) \quad \text{ja} \quad E_{II}(X^*, Y^*) = X^* B Y^{*T} \geq v(B^T). \tag{2.16}$$

Näin ollen, jos pelaaja käyttää Nashin pistettä kaksoismatriisipelissä, on hänen tuottonsa vähintään turvatason verran. Tämä tarkoittaa, että pelaaja on yksilöllisesti rationaalinen. Kaksi strategiaa X, Y ovat yksilöllisesti rationaalisia, jos $E_I(X, Y) \geq v(A)$ ja $E_{II}(X^*, Y^*) = X^* B Y^{*T} \geq v(B^T)$. Näin ollen jokainen Nashin tasapaino on yksilöllisesti rationaalinen. [1]

Todistus. Määritelmän 2.1 nojalla

$$E_I(X^*, Y^*) = X^* A Y^{*T} \geq X A Y^{*T} = E_I(X, Y^*), \qquad \text{jokaiselle } X \in S_n \tag{2.17}$$

ja jos Nashin tasapainon määritelmä on voimassa kaikille sekastrategioille X, niin

$$E_I(X^*, Y^*) = \max_{X \in S_n} (X A Y^{*T}) \geq \min_{Y \in S_m} \max_{X \in S_n} (X A Y^T) = v(A). \tag{2.18}$$

Nashin määritelmän toisen osan nojalla

$$\begin{aligned} E_{II}(X^*, Y^*) = X^* B Y^{*T} &\geq \max_{Y \in S_m} (X B Y^T) \\ = \max_{Y \in S_m} (Y B^T X^{*T}) &\geq \min_{X \in S_n} \max_{Y \in S_m} Y B^T X^T = v(B^T). \end{aligned} \tag{2.19}$$

□

Näin ollen molempien pelaajien tuotto on vähintään yhtä suuri kuin vähimmäistuotto. [1]

3. NASHIN TASAPAINON RATKAISEMINEN

Nashin tasapaino voidaan ratkaista erilaisin menetelmin, joista kukin tulee valita tilannekohtaisesti. Nashin tasapainoa ei ole olemassa kaikissa pelitilanteissa. Esimerkiksi kolikonheitossa, jossa pelaajat yrittävät maksimoida vaan omaa tuottoaan, ei ole Nashin tasapainoa. Pelejä, joissa pelaajien intressit ovat vastakkaiset sanotaan nollasummapeleiksi ja ne ratkaistaan useimmiten maximin-strategialla määritelmän 2.6 mukaisesti [8]. Toisaalta pelissä voi olla useita Nashin tasapainoja. Mikäli on olemassa useampia Nashin tasapainoja, kannattaa molempien pelaajien valita se, mikä antaa suurimman tuoton. Mikäli toinen pelaaja kuitenkin valitsee pienemmän tuoton antavan Nashin tasapainon, ei ole täysin selvää, mikä tasapaino toisen pelaajan kannattaa valita.[1] Tämän tarkasteluun palataan tarkemmin luvussa 5. Nashin tasapainon olemassaoloa on tutkittu laajasti, mutta siihen ei perehdytä tässä työssä tarkemmin.

3.1 2x2 matriisien käsittelyä

Analysoidaan seuraavaksi kahden pelaajan 2×2 -ei-nollasummapelejä hieman tarkemmin. Tähän mennessä työssä on käsitelty, miten Nashin tasapaino löydetään niin puhtaan kuin sekastrategian kaksoismatriisipelille. Olkoon $X = (x, x - 1), Y = (y, y - 1), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ sekastrategiat pelaajille I ja II. Kuten nollasummapeleissäkin, X on rivien yhdistelmä, joita pelaaja I pelaa. Erityisesti tässä tapauksessa riviä 1 todennäköisyydellä x ja riviä 2 todennäköisyydellä $x - 1$. Samaan tapaan Y kuvaa pelaajan II rivien yhdistelmiä. [1] Lasketaan pelin tuoton odotusarvot kummallekin pelaajalle.

$$
\begin{aligned}
E_I(X, Y) = XAY^T &= (x, x-1)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}, \\
E_{II}(X, Y) = XBY^T &= (x, x-1)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Pelaajien on tarkoitus maksimoida omat tuottonsa sillä oletuksella, että myös toinen pelaaja pyrkii maksimoimaan omia tuottojaan.

Määritelmä 3.1. Olkoon $X = (x, 1 - x), Y = (y, 1 - y)$ strategioita ja muodostetaan funktiot $f(x, y) = E_I(X, Y)$ ja $g(x, y) = E_{II}(X, Y)$ Pelaajan I rationaalisten vastausten joukko on

$$
R_I = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1, \max_{0 \leq z \leq 1} f(z, y) = f(x, y)\}. \tag{3.2}
$$

Vastaavasti pelaajan II rationaalisten vastausten joukko on

$$R_{II} = \{(x,y)|0 \le x, y \le 1, \max_{0 \le w \le 1} g(x,w) = g(x,y)\}. \tag{3.3}$$

Piste (x^*, y) tarkoittaa sitä, että x^* on piste välillä $[0,1]$, jossa funktio $x \mapsto f(x,y)$ saa maksimiarvonsa muuttujan y ollessa vakio. Samoin piste (x, y^*) maksimoi funktion $y \mapsto g(x,y)$, kun x on vakio. Nyt huomataan, että piste (x^*, y^*) on paras vastaus molemmissa joukoissa R_I ja R_{II} ja on näin ollen Nashin tasapaino. [1]

3.2 Parhaan vastauksen valinta

Parhaalla vastauksella tarkoitetaan sitä, miten pelaajan tulee optimaalisesti reagoida toisen pelaajan ratkaisuun. Tässä luvussa esitetään, kuinka paras mahdollinen tilanne saavutetaan. Parhaalle vastaukselle voidaan johtaa kaava

$$x^* = BR_I(y) = \begin{cases} 1, & \text{jos} \quad y > \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}, \\ 0, & \text{jos} \quad y < \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}, \\ [0,1], & \text{jos} \quad y = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Kaava johdetaan lähteessä [1] sivuilla 127-129. Samaan tapaan voidaan johtaa kaava toisen pelaajan parhaalle vastaukselle, jolloin saadaan

$$y^* = BR_{II}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos} \quad x > \frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}}, \\ 0, & \text{jos} \quad x < \frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}}, \\ [0,1], & \text{jos} \quad x = \frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Esimerkki 3.2. Käsitellään kaksoismatriisipeliä, jonka matriisit ovat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

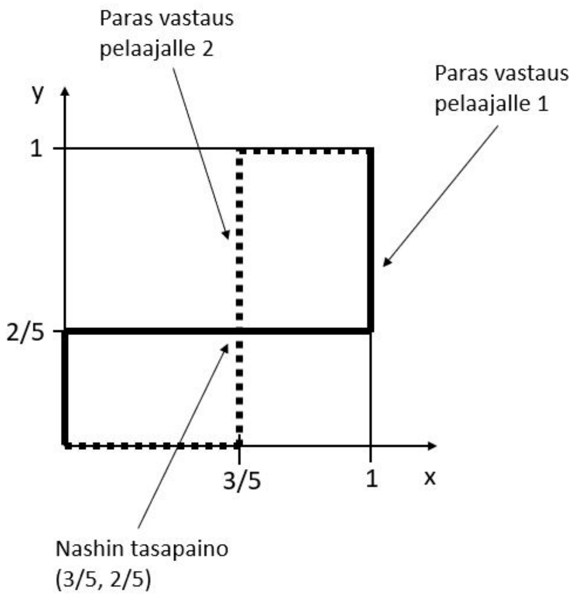
Pelaajan I parhaaksi vastaukseksi saadaan kaavan (3.2) nojalla

$$x^* = BR_I(y) = \begin{cases} 1, & \text{jos} \quad y > \frac{2}{5}, \\ 0, & \text{jos} \quad y < \frac{2}{5}, \\ [0,1], & \text{jos} \quad y = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Samaan tapaan pelaajalle II voidaan laskea paras vastaus

$$y^* = BR_{II}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos} \quad x > \frac{3}{5}, \\ 0, & \text{jos} \quad x < \frac{3}{5}, \\ [0,1], & \text{jos} \quad x = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Tilannetta voidaan mallintaa yksinkertaisen kuvaajan avulla.



Kuva 3.1. *Parhaan vastauksen valinta pelaajille I ja II.*

Kuvaajasta huomataan, että Nashin tasapaino on $X^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ ja $Y^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$. Kuitenkin on huomioitava, ettei risteyskohta ole Nashin tasapaino, vaan se antaa ensimmäiset komponentit kahdelle strategialle, joiden mukaan Nashin taspaino määritetään. Tuottojen odotusarvot ovat seuraavat:

$$E_I(X^*, Y^*) = \frac{1}{5} \qquad \text{ja} \qquad E_{II}(X^*, Y^*) = \frac{1}{5}$$

Huomion arvoista on myös, että odotetut tuotot ovat alhaisemmat kuin mitä muista Nashin tasapainoista olisi saanut. [1]

3.3 Tuottojen yhtäsuuruus

Nashin tasapaino voidaan löytää kaikista kahden pelaajan kaksoismatriisipeleistä tuottojen yhtäsuuruuden teoreeman avulla.

Lause 3.3. *Ajatellaan, että on kaksi sekastrategiaa $X^* = (x_1, ..., x_n)$ ja $Y^* = (y_1, ..., y_m)$ kaikille riveille $k = 1, 2, ..., n$, joilla on positiivinen todennäköisyys tulla käytetyksi. Pelaajan I keskimääräisten tuottojen tulee olla yhtä suuret valitseepa hän minkä tahansa rivin. Eli $E_I(r, Y^*) = E_I(s, Y^*) = E(X^*, Y^*)$. Näiden yhtälöiden avulla voidaan ratkaista pelaajan II optimistrategia Y^*.*

Samoin pelaaja II voi valita minkä tahansa sarakkeen, jolla on positiivinen todennäköisyys tulla valituksi. Nyt siis $E_{II}(X^*, r) = E_{II}(X^*, s) = E_{II}(X^*, Y^*)$. Näiden yhtälöiden avulla taas voidaan ratkaista optimistrategia X^* pelaajalle I.[1]

Todistus. Tiedetään, että Nashin tasapainossa $E_I(X^*, Y^*) = v(A) \geq E_I(i, Y^*)$ jokaiselle riville i. Ajatellaan, että rivillä k on positiivinen todennäköisyys, että sitä pelataan strategiaa Y^* vastaan ja se antaa pelaajalle I pienemmän odotetun tuoton $v(A) > E_I(k, Y^*)$. Silloin $v(A) \geq E_I(i, Y^*)$ jokaisella rivillä $i = 1, 2, \ldots, n, i \neq k$ ja $v(A) > E_I(k, Y^*)$ seuraa, että

$$x_i v(A) \geq x_i E_I(i, Y^*), i \neq k \quad \text{ja} \quad x_k v(A) \geq x_i E_I(k, Y^*) \tag{3.6}$$

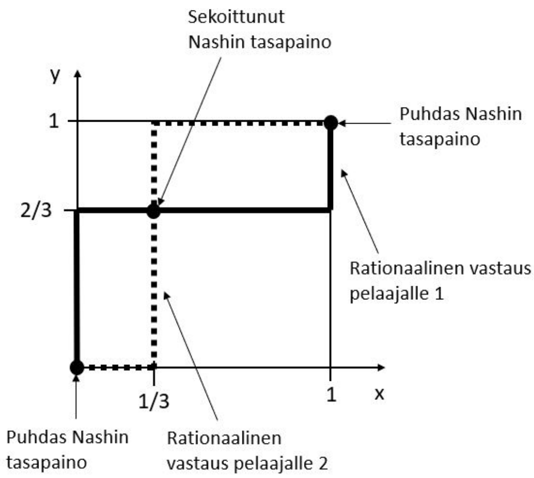
Laskemalla yhteen nämä epäyhtäsuuruudet saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v(A) = v(A) > \sum_{i=1}^{n} x_i E_I(k, Y^*) = E_I(X^*, Y^*) = v(A) \tag{3.7}$$

Tämän ristiriidan perusteella voidaan todeta, että $v(A) = E_I(k, Y^*)$.[1] □

3.4 Usean muuttujan funktioiden analyysi

Minimi- ja maksimikohtia ratkotaan yleisesti matematiikassa derivoimalla funktioita ja etsimällä derivaatana nollakohdat. Koska funktiot ovat muotoa $f(x, y) = XAY^T$, voidaan soveltaa usean muuttujan funktioiden analyysiä Nashin tasapainopisteiden löytämiseksi. Analyysiä ei voida käyttää puhtaan strategian Nashin tasapainojen löytämiseen, sillä ne sijaitsevat funktion päätepisteissä, kuten 3.2 voi päätellä.[1] Kuitenkin analyysin avulla pystytään ratkaisemaan sekoittuneita Nashin tasapainoja. Alla on kuva hahmottamaan eroa puhtaan ja sekoittuneen nashin tasapainon välillä.



Kuva 3.2. *Rationaaliset vastaukset pelaajille I ja II.*

Kaavan (2.5) mukaan odotetut tuotot pelaajille I ja II ovat $E_I(X, Y) = XAY^T$ ja $E_{II}(X, Y) = XBY^T$.

Nyt koska muuttujien x_n summan on oltava yksi samoin kuin muuttujien y_n summan, niin

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad y_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i. \tag{3.8}$$

Näin ollen jokainen odotettu tuotto on funktio muuttujista $x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ...y_{n-1}$, joten voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} E_I(x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ...y_{n-1}) &= E_I(X, Y), \\ E_{II}(x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ...y_{n-1}) &= E_{II}(X, Y) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nyt odotetun tuoton funktio voidaan osittaisderivoida ja ratkaista osittaisderivaattojen nollakohdat $\frac{\partial E_I}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial E_{II}}{\partial y_i} = 0$, kun $i = 1, ..., n-1$ ja $j = 1, ..., m-1$.

Mikäli osittaisderivoidulle systeemille löytyy ratkaisu, joka täyttää ehdot $x_i \geq 0, \; y_j \geq 0$ ja $\sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1, \; \sum_{j=1}^{n-1} y_j \leq 1$, niin se ratkaisu on Nashin tasapaino.

3.5 Yhtälöryhmä

Nashin tasapaino voidaan siis löytää ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} y_i[a_{kj} - a_{nj}] = 0, \quad k = 1, 2, ..., n-1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i[b_{si} - a_{mi}] = 0, \quad s = 1, 1, ..., m-1, \\ x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad y_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_i. \end{cases} \tag{3.10}$$

Kun ryhmä on ratkaistu, tarkistetaan, toteuttaako ratkaisu ehdon $x_1 \geq 0, y_i \geq 0$. Jos näin on, ratkaisu on Nashin tasapaino. On huomioitava, että yhtälöt ovoidaan ryhmitellä kahdeksi erilliseksi ryhmäksi ja se voidaan ratkaista, koska muuttujat x_i ja y_i esiintyvät vain omissa ryhmissään. Yhtälöt eivät välttämättä päde puhtaalle Nashin tasapainolle tai sellaiselle ryhmälle, jolla jokin x_i tai y_i saa arvon nolla. [1] Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä, jonka sisäiset Nashin tasapainot ratkaistaan kaavan (3.10) avulla.

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan peliä, jonka matriisit ovat seuraavat:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kaavan (3.10) avulla ratkaistut sisäiset Nashin tasapainot ovat muotoa

$$-2y_1 + 6y_2 - 2 = 0, \qquad -5y_1 + y_2 = 0$$

ja

$$-12x_1 - 11x_2 + 4 = 0, \qquad -8x_1 - 5x_2 + 2 = 0.$$

Nashin tasapainopisteeksi saadaan

$$X^* = \left(\frac{1}{14}, \frac{4}{14}, \frac{9}{14}\right) \quad \text{ja} \quad Y^* = \left(\frac{1}{14}, \frac{5}{14}, \frac{8}{14}\right).$$

Tuoton odotusarvo kullekin pelaajalle on $E_I(X^*, Y^*) = X^*AY^{*T} = \frac{31}{14}$ ja $E_{II}(X^*, Y^*) = X^*BY^{*T} = \frac{11}{14}$. Huomataan siis, että pelaaja I pärjäsi tässä pelissä paljon paremmin. Vaikka siis Nashin tasapainossa pyritään saavuttamaan molemmille optimaalinen tilanne, voi toinen pelaaja pärjätä toista paremmin. Esimerkkipelissä on kuitenkin myös puhtaita Nashin tasapainoja pisteissä $X^* = (0, 0, 1)$, $Y^* = (1, 0, 0)$ tuotoilla $(2, 3)$ ja $X^* = (0, 1, 0)$, $Y^* = (0, 0, 1)$ tuotoilla $(3, 4)$. [1] Peli voi siis päättyä useisiin lopputuloksiin Nashin tasapainon valinnasta riippuen.

3.6 Kääntyvän 2x2 matriisin odotettu tuotto

Tarkastellaan 2×2 ei-nollasummapeliä, jonka matriisit $(A_{n\times n}, B_{n\times n})$ ovat kääntyviä. Näille matriiseille voidaan helposti määrittää odotetun tuoton lauseke. Valitaan optimistrategioiksi

$$X^* = \frac{J_n B^{-1}}{J_n B^{-1} J_n^T}, \quad Y^{*T} = \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T}, \tag{3.11}$$

missä J on ykkösmatriisi. Todistetaan, että $X^*AY^{*T} = XAY^{*T} = v(A)$.

$$\begin{aligned} X^*AY^{*T} &= \frac{J_n B^{-1}}{J_n B^{-1} J_n^T} A \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T} = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T}, \quad \text{ja edelleen} \\ XAY^{*T} &= XA \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T} = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} = v(A). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Optimistrategia Y^{*T} voidaan osoittaa todeksi samaan tapaan. Nyt 2×2 -ei-nollasummapelille, jonka matriisit ovat kääntyviä, voidaan käyttää ylläolevia kaavojan optimistartegialle ja optimaaliselle tuotolle todistuksesta saatua kaavaa

$$v(A) = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T}, \quad v(B) = \frac{1}{J_n B^{-1} J_n^T}. \tag{3.13}$$

Esitetyt kaavat kuitenkin edellyttävät, että $J_n A^{-1} J_n^T \neq 0$ ja $J_n B^{-1} J_n^T \neq 0$.

2×2 -matriisien Nashin tasapainot voidaan laskea myös luvussa 3.2 esitettyjen parhaan vastauksen strategioiden avulla. Tämä menetelmä antaa sekä puhtaat että sekastrategiat. [1]

4. NASHIN TASAPAINON VALINTA

Mikäli Nashin tasapainoja on useita, tulee tasapainoista valita tilanteeseen sopivin tai yksinkertaisesti paras. Jotta pelin lopputulosta voidaan ennustaa, tulee tietää, mikä Nashin tasapainotilanne kannattaa valita. [1] Nashin tasapaino voidaan kuitenkin valita usealla erilaisella tavalla. Näistä esitellään seuraavaksi tärkeimmät.

4.1 Vakaat Nashin tasapainot

Ensimmäiseksi käsitellään tilanteiden vakauteen liittyvää stategiaa. Missä tahansa pelissä, jossa on useita Nashin tasapainoja, pelaajat pyrkivät usein ensin maksimoimaan omat tuottonsa. Tilanteessa, jossa tuotto toiselle pelaajalle on suurempi kuin toiselle jossain tasapainossa, toinen pelaaja tietenkin saavuttaa pienemmän tuoton. Pelaajat pyrkivät valitsemaan sen Nashin tasapainon, jossa heillä on suurin tuotto, mutta tämä ei ole ehkä paras tilanne. Ajatellaan pelissä olevan useita pelaajia, jotka pelaavat vuorotellen. Kun peli toistetaan riittävän monta kertaa, päädytään Nashin tasapainoon, jossa pelaajat eivät välttämättä saavuta korkeinta tuottoa, vaan peli saavuttaa pisteen, jossa toisen pelaajan valitessa tietty piste ei toinen pelaaja voi saavuttaa suurempaa tuottoa valitsemalla muuta kuin kyseisen Nashin tasapainon. Tälläistä tilannetta sanotaan vakaaksi Nashin tasapainoksi. [1]

4.2 Riskidominantti Nashin taspaino

Nashin tasapaino voidaan valita myös riskidominanttisuuden perusteella. Riskidominantti Nashin tasapaino on se tasapaino, jolla Nashin tulo on suurin. Nashin tulolla tässä yhteydessä tarkoitetaan molempien pelaajien tappioiden poikkeamien tuloa. Esimerkiksi 2×2 -matriisin kohdalla pisteen (A_1, B_1) sanotaa olevan riskidominantti suhteessa pisteeseen (A_2, B_2), mikäli

$$(a_{11} - a_{21})(b_{11} - b_{12}) > (a_{22} - a_{12})(b_{22} - b_{21}). \text{ [9]} \tag{4.1}$$

4.3 Pareto-tehokkuus ja tuottodominanttius

Pareto-tehokkuus tarkoittaa tilannetta, jossa kukaan pelaajista ei voi saada parempaa tuottoa ilman, että muiden pelaajien tuotto laskee. [7] Pareto-tehokkuus on tärkeä käsite taloustieteessä. Sitä pystytään kuitenkin hyödyntämään myös vertaillessa Nashin tasapainoja. Esimerkiksi aiemmin esitellyssä vangin dilemmassa kohta $(-5, -5)$ on Nashin tasapaino, mutta ei Pareto-tehokas. Pareto-tehokkuuteen liittyy läheisesti tuottodominanttiuus, joka on määritelty alla. [1]

Määritelmä 4.1. Nashin tasapaino on tuottodominantti, mikäli se on Pareto-tehokas verrattuna kaikkiin muihin Nashin tasapainoihin. [1]

On tärkeää erottaa riskidominantti ja tuottodominantti toisistaan. Tuottodominantti Nashin tasapaino siis pyrkii etsimään Nashin tasapainon, joka on Pareto-tehokas kaikkiin muihin tasapainoihin nähden. Riskidominantti Nashin tasapaino on sen sijaan se, jonka pelaajat todennäköisimmin valitsevat, mikäli on epävarmaa, mitä vastapelaaja pelaa. [2] Näin ollen riskidominantti tasapaino valitaan silloin, kun epävarmuuden riski kasvaa.

Esimerkki 4.2. Metsästyspeli. Selvennetään tuotto- ja riskidominantin eroa Metsästyspeli-esimerkillä (eng. Stag-Hunt game). Mikäli molemmat pelaajat metsästävät, on heidän molempien tuotto korkea. Jos molemmat marjastavat, jakavat he saaliin keskenään. Kuitenkin, jos toinen metsästää ja toinen marjastaa, saa marjastaja koko saaliin, mutta metsästäjä ei voi jahdata saalista yksin. Alla oleva kaksoismatriisi kuvaa tilannetta. [1]

	Hunt	Gather
Hunt	$(5, 5)$	$(0, 4)$
Gather	$(4, 0)$	$(2, 2)$

Pelillä on selvästi kaksi puhdasta Nashin tasapainoa, mutta myös yksi sisäinen nashin tasapaino pisteessä $X_I = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), Y_I = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Seuraavaan taulukkoon on merkitty Nashin tasapainopisteet ja niiden tuotot.

$X_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = Y_1$	$E_I = \frac{10}{3}$	$E_{II} = \frac{10}{3}$
$X_2 = (0, 1) = Y_2$	$E_I = 2$	$E_{II} = 2$
$X_3 = (1, 0) = Y_3$	$E_I = 5$	$E_{II} = 5$

Kuten taulukosta voidaan huomata, piste (X_3, Y_3) on tuottodominantti, sillä pelaajat eivät voi saada sitä suurempaa tuottoa. Kuitenkin piste (X_2, Y_2) on riskidominantti. Tämä johtuu siitä, etteivät pelaajat voi olla täysin varmoja siitä, tuleeko toinen pelaaja mukaan metsästämään ja metsästämään lähtevä voi joutua sinne yksin. Mikäli pelaajat minimoivat riskiä, päätyvät he molemmat marjastamaan, vaikka suuremman tuoton saisi metsästämällä. [1] Tilanteessa nähdään, että metsästämällä kuitenkin saadaan suurin tuotto kuin marjastamalla yksin, joten pelaajilla ei ole syytä mennä marjastamaan, mutta se riski on kuitenkin olemassa. Voidaan huomata, että Vangin dilemman esimerkissä pelaajat valitsivat riskidominantin Nashin tasapainon ja päätyivät tunnustamaan.

5. YHTEENVETO

Työssä käsiteltiin kahden pelaajan ei-nollasummapelejä ja niiden ratkaisemista Nashin tasapainon avulla. Työn ensimmäisessä luku käsittelee ei-nollasummapelejä, Nashin tasapainoa ja pelin vähimmäistuottoa. Aiheita käsiteltiin matriisinäkökulmasta ja esiteltiin teoriaa esimerkin avulla. Ei-nollasummapelit ovat pelitilanteita, joissa pelaajat voivat tehdä yhteistyötä eikä toisen pelaajan voitto ole toisen pelaajan tappio. Nashin tasapainolla tarkoitetaan tilannetta, jossa päädytään molempien pelaajien kannalta optimaaliseen ratkaisuun.

Työn toisessa kappaleessa perehdyttiin erilaisiin menetelmiin määrittää pelin Nashin puhtaat ja sekoittuneet tasapainot. Nashin tasapainoja voi olla siis useita ja niiden määrittämiseen käytetään useita eri tapoja ja työ esittelee niistä tärkeimmät. Menetelmät soveltavat usean muuttujan funktioiden analyysiä ja matriisimenetelmiä.

Lopuksi työssä käsitellään, miten Nashin tasapaino kannattaa valita, mikäli niitä on useita. Erilaisissa tilanteissa Nashin tasapaino kannattaa valita eri tavoin esimerkiksi sen mukaan, suosiiko pelaaja suurta tuottoa vai riskin minimoimista. Nashin tasapaino on mullistanut esimerkiksi talousajattelun ja työn teoriaa soveltamalla voidaan ratkaista erilaisia tilanteita, jolloin kaikkien pelaajien tuotto saadaan maksimoitua.

LÄHTEET

[1] E. N. Barron. *Game theory: an introduction*. Second edition. Wiley series in operations research and management science. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2013. ISBN: 978-1-118-53389-5 978-1-118-21693-4.

[2] V. Buskens ja C. Snijders. Effects of Network Characteristics on Reaching the Payoff-Dominant Equilibrium in Coordination Games: A Simulation study. en. *Dynamic Games and Applications* 6.4 (joulukuu 2016), 477–494. ISSN: 2153-0793. DOI: 10.1007/s13235-015-0144-4. URL: https://doi.org/10.1007/s13235-015-0144-4 (viitattu 02. 04. 2021).

[3] G. Carmona. *Existence and stability of Nash equilibrium*. English. OCLC: 830085773. Singapore; Hackensack, NJ: World Scientific, 2013. ISBN: 978-981-4390-65-1 978-1-299-28121-9 978-981-4390-66-8. URL: http://site.ebrary.com/id/10674359 (viitattu 31. 03. 2021).

[4] R. Gibbons. *A primer in game theory*. eng. Nachdr. Harlow Munich: Prentice Hall. ISBN: 978-0-7450-1159-2.

[5] R. D. Luce ja H. Raiffa. *Games and decisions: introduction and critical survey*. New York: Dover Publications, 1989. ISBN: 978-0-486-65943-5.

[6] G. Owen. *Game theory*. English. OCLC: 986862034. 2013. ISBN: 978-1-78190-508-1. URL: http://proxy.cegepat.qc.ca/login?url=http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&AN=525603 (viitattu 09. 01. 2022).

[7] P. M. Pardalos, L. Pitsoulis, A. Migdalas ja A. Migdalas. *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria*. New York, NY, UNITED STATES: Springer New York, 2008. ISBN: 978-0-387-77247-9. URL: http://ebookcentral.proquest.com/lib/tampere/detail.action?docID=367473 (viitattu 02. 04. 2021).

[8] T. Sirkka. *Peliteoriaa*. fin. Tampere, 2013.

[9] B. Zhang ja J. Hofbauer. Equilibrium selection via replicator dynamics in ... coordination games. English. *International Journal of Game Theory* 44.2 (toukokuu 2015). Num Pages: 433-448 Place: Heidelberg, Netherlands Publisher: Springer Nature B.V., 433–448. ISSN: 00207276. DOI: http://dx.doi.org.libproxy.tuni.fi/10.1007/s00182-014-0437-7. URL: http://www.proquest.com/docview/1866272361/abstract/ED46AD7E4E484FBDPQ/1 (viitattu 02. 04. 2021).