Tampereen yliopisto

Pauli Huusari

MITAN DERIVAATTA

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Diplomityö
Tarkastaja: Janne Kauhanen
Tarkastaja: Kerkko Luosto
Joulukuu 2021

TIIVISTELMÄ

Pauli Huusari: Mitan derivaatta
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen DI-ohjelma
Diplomityö
Joulukuu 2021

Ulkomitta on kuvaus, joka liittää perusjoukon jokaiseen osajoukkoon epänegatiivisen luvun. Tällä tavoin joukolle määritetään koko. Mittateoria, joka kehitettiin 1800-luvun lopulla, perustuu joukko-oppiin. Siihen aikaan oli tarve ratkaista integrointiin ja raja-arvoihin liittyviä kysymyksiä. Mittateoria on itsenäinen matematiikan ala, mutta sen soveltuessa erinomaisesti integrointiin ne esitellään lähes poikkeuksetta yhdessä. Matemaatikoista varsinkin Henri Lebesgue edisti mitta- ja integraaliteoriaa.

Tavoitteena on tutkia mitan derivaatan ominaisuuksia ja sovelluskohteita. Diplomityö on luonteeltaan kirjallisuusselvitys ja päälähteeksi on valittu teos *Measure Theory And Fine Properties Of Functions* (Evans & Gariepy, 2015). Aihepiiristä on etsitty sopivia kirjoja alkaen 1960-luvulta. Näin saadaan myös historiallista näkökulmaa. Verkosta löytyvää matemaattista pohdintaa — erityisesti todistusten ideoita — on hyödynnetty runsaasti.

Perusjoukon tietyt osajoukot ovat mitallisia: sellaiset joukot käyttäytyvät loogisesti ulkomitan suhteen. Mitallinen joukko jakaa minkä tahansa osajoukon kahteen osaan, joiden ulkomittojen summa on yhtä suuri kuin jaettavan osajoukon ulkomitta. Nämä mitalliset joukot muodostavat σ-algebran, joka on eräs joukkoperhe. Jos ulkomitan lähtöjoukko rajoitetaan mitallisiin joukkoihin, niin ulkomitan asemesta puhutaan mitasta. Borelin perhe on pienin σ-algebra, joka sisältää perusjoukon avoimet osajoukot. Ulkomitta luokitellaan sen mukaan, miten se suhtautuu Borel-joukkoihin. Eräs luokka on Radon-mitta: jokainen Borel-joukko on mitallinen ja jokaisen kompaktin joukon mitta on äärellinen.

Mittateoreettinen integrointi perustuu mitalliseen kuvaukseen, jonka alkukuva jokaisesta avoimesta joukosta on mitallinen joukko. Rationaaliluvuilla ja numeroituvuudella on erityisasema mitta- ja integraaliteoriassa: maineikkaan tuloksen mukaan rationaalilukujen joukko on nollamittainen Lebesgue-ulkomitan suhteen. Nollamittaisen osajoukon komplementtiin viitataan sanaparilla melkein kaikkialla.

Peitelauseiden avulla tutkitaan mitan derivaattaa, joka määritellään suljetun pallon Radon-mittojen osamäärän raja-arvona. Vitalin ja Besicovitchin peitelauseet pelkistävät tietyt peitteet numeroituviksi n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Osoittautuu, että mitan derivaatta on olemassa äärellisenä melkein kaikkialla. Se on myös mitallinen kuvaus. Kuvauksen derivoinnille käänteinen operaatio on integrointi; vastaavasti mitan derivaatalle se on integraali jälkimmäisen mitan suhteen. Radonin-Nikodymin lause todistaa tämän.

Eräs sovellus mitan derivaatasta on Lebesguen differentioituvuuslause. Sen mukaan lokaalisti integroituvan funktion arvojoukko on lähes vakio, kun lähtöjoukkona on melkein kaikki pisteet pienestä pallosta. Lauseen erikoistapaus johdattelee käsitteeseen tiheyspiste, joka on mittateorian vastine metrisen avaruuden sisäpisteelle. Tiheyspisteen avulla määritelty approksimatiivinen raja-arvo on melkein kaikkialla voimassa oleva raja-arvo.

Avainsanat: Radon-mitta, derivaatta, Lebesguen differentioituvuuslause, Vitalin peitelause, Borel-joukko, approksimatiivinen raja-arvo

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Pauli Huusari: The Derivative of Measure
Tampere University
Master's Programme in Science and Engineering
Master's Thesis
December 2021

Outer measure maps every subset of a given set to a non-negative number. In this way, size is assigned to a set. Measure theory, developed in the end of the 19^{th} century, is based on set theory. At that time, there was a need to solve some open questions regarding integration and limits. Measure theory is an independent field of mathematics, but due to its exceptional applicability to integration, these are introduced together very often. Among mathematicians, it was especially Henri Lebesgue who contributed to the theory of measure and integration.

Objective is to examine the properties and applications of the derivative of measure. Thesis identifies as a literature review, and the main source is *Measure Theory And Fine Properties Of Functions* (Evans & Gariepy, 2015). To conduct review, relevant books were gathered from the beginning of 1960s. Thus, historical viewpoints are acquired. Online mathematical resources — particularly proof-related — have been widely utilized.

Some subsets of a given set are measurable: such sets behave logically with respect to the outer measure. A measurable set divides any other subset to two such parts, that the outer measure of entire subset equals to the sum of outer measures of parts. These measurable sets form a σ-algebra, a certain family of sets. If the domain of outer measure is restricted to the measurable sets, then outer measure is actually a measure. Borel algebra is the smallest σ-algebra containing the open subsets of a given set. An outer measure is categorized according to its relation to the Borel sets. One such class is the Radon measure: every Borel set is measurable and every compact set has a finite measure.

Measure theoretical integration is based on measurable map, whose preimage obtained from any open set is a measurable set. Rational numbers and countability have a special role in measure and integration: a famous result states that the set of rational numbers has Lebesgue outer measure zero. The complement of a measure zero set is referred with the phrase almost every.

Covering theorems provide means to study the derivative of measure, which is defined as the limit of the quotient of Radon measures over a closed ball. Vitali covering lemma and Besicovitch covering theorem reduce certain covers to countable in the n-dimensional Euclidean space. It turns out that the derivative of measure exists finitely almost everywhere. It is a measurable map, too. The inverse operation of differentiating a map is integration; for the derivative of measure it is the integral with respect to the latter measure. Radon-Nikodym theorem proves it.

An application of the derivative of measure is Lebesgue differentiation theorem. It states that a locally integrable function has range close to a constant, when the domain comprises of almost every point in a small ball. The special case of the theorem leads to the concept of density point, which in measure theory corresponds to the interior point of a metric space. Approximate limit, defined through density point, is a limit that holds almost everywhere.

Keywords: Radon measure, derivative, Lebesgue differentiation theorem, Vitali covering lemma, Borel set, approximate limit

ALKUSANAT

Keväällä 2021 osallistuin Measure and Integration -kurssille Tampereen yliopistossa. Aihe oli hyvin kiinnostava. Etsiessäni diplomityöpaikkoja kesän alussa kysyin myös lehtori Janne Kauhaselta mahdollisuutta kirjoittaa diplomityö yliopistolle. Pöydällä oli monenlaisia aiheita, joihin perehtyä: muun muassa vektorimitta, Hausdorff-mitta, muuttujanvaihtokaavat, erilaiset integraalit (Bochner, Lebesgue-Stieltjes, Henstock-Kurzweil ja Pettis), todennäköisyysmitta yhdistettynä konveksisuuteen ja Brunn–Minkowskin lause. Lopulta päädyimme aiheeseen mitan derivaatta. Jo alusta alkaen oli selvää, että integraaliteorian käsittely sivuutettaisiin. Se käsiteltiin yliopiston kurssilla ja lisäksi diplomityön laajuutta piti rajoittaa.

Alkuvaiheessa tarkoitus oli kirjoittaa myös Lipschitz-jatkuvuudesta ja konveksisuudesta. Työn päätavoitteena oli aluksi todistaa Aleksandrovin lause, koska Rademacherin lauseesta on jo kirjoitettu pro gradu -tutkielma vuonna 2008. Ensiksi mainittu osoittautui kuitenkin liian vaikeaksi, joten työn aihe muokkautui syksyn aikana. Olen kuitenkin tyytyväinen lopputulokseen: työssä oli haastetta.

Ensisijaisen lähteen, Evansin ja Gariepyn kirjan, todistukset olivat hyvin niukkoja, joten suurin osa ajasta meni niiden ymmärtämiseen. Hyödynsin paljon verkon keskustelupalstoja, kun en keksinyt itse todistuksia. Sen sijaan Axlerin kirjan todistukset olivat hyvin selkeitä ja niinpä näihin on usein vain viittaus.

Marraskuussa huomasin, että diplomityöstä tulee melko pitkä. On vaikeaa olla kirjoittamatta mielenkiintoisista aiheista, joihin on hieman päässyt sisään. Matemaattinen ymmärrys rakentuu pikkuhiljaa ja kahteen suuntaan: toisaalta pureudutaan lähtökohtiin ja aksioomiin yhä syvemmin ja toisaalta valloitetaan uusia alueita yhä ennakkoluulottomammin.

Kiitos lehtori Janne Kauhaselle diplomityön ohjaamisesta. Koin säännöllisesti toistuvat ohjauspalaverit erittäin tuloksellisina. Kiitos myös ystäville. Teitä ei ole koskaan liikaa. Erityisesti tahdon kiittää kolmea tärkeää kaveria: ystävyys kanssanne muutti elämäni. Kiitos perheväelle. Olette antaneet tukea, turvaa ja huumoria läpi vuosien. Vaikka kondensaattorit ja transistorit ovat mainioita kapistuksia, niin epsilon on kuitenkin suurempaa kuin nolla. Kiitos rakkaalle morsiamelleni. *Sun hymys korvaa auringon.* Suurin kiitos kuuluu Jeesukselle Kristukselle, joka on Herra!

Tampereella, 16. joulukuuta 2021

Pauli Huusari

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$\mathbb{Z}^+$	positiiviset kokonaisluvut
$\overline{A}$	joukon A sulkeuma
$\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$	kokoelma eli joukkojen joukko
$\mathcal{P}(A)$	joukon A kaikkien osajoukkojen kokoelma
$\mathcal{B}_n$	n-ulotteiset Borel-joukot
$\mathrm{Card}(A)$	joukon A kardinaliteetti eli alkioiden lukumäärä
χ_A	joukon A karakteristinen funktio
$\lvert \cdot \rvert$	euklidinen normi joukossa $\mathbb{R}$ eli itseisarvo
$\lVert \cdot \rVert$	euklidinen normi joukossa $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{diam}(A)$	joukon A halkaisija
$\mathrm{dist}(A, B)$	joukkojen A ja B välinen etäisyys
$B(x, r)$	x-keskinen ja r-säteinen avoin pallo
$\overline{B}(x, r)$	x-keskinen ja r-säteinen suljettu pallo
$S(x, r)$	x-keskinen ja r-säteinen pallopinta
μ, ν	ulkomitta
$\mu \llcorner A$	ulkomitan rajoittuma joukossa A
$D_\mu \nu$	ulkomitan ν derivaatta ulkomitan μ suhteen
$\nu << \mu$	absoluuttinen jatkuvuus
$\nu \perp \mu$	singulaarisuus
μ-m.k.	ominaisuus on voimassa joukossa $X \setminus A$ ja $\mu(A) = 0$
$\mathcal{L}^n(A)$	joukon A n-ulotteinen Lebesgue-mitta
$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$	lokaalisti integroituvien funktioiden joukko
$⨍_A f \,\mathrm{d}\mu$	kuvauksen f keskiarvo joukossa A ulkomitan μ suhteen
$\mathrm{ap}\lim\limits_{y \to x} f(y)$	approksimatiivinen raja-arvo
$\mathrm{ap}\limsup\limits_{y \to x} f(y)$	approksimatiivinen yläraja-arvo
$\mathrm{ap}\liminf\limits_{y \to x} f(y)$	approksimatiivinen alaraja-arvo
CC	Creative Commons -lisenssi (lähdeluettelossa)

1. JOHDANTO

Mittateorian kehitys alkoi 1800-luvun lopulla, kun matemaatikot huomasivat, että *Riemann-integraali* on epäsopiva tilanteisiin, jotka sisältävät *raja-arvoja*. Lisäksi *rajoittamaton* funktio ei ole Riemann-integroituva suljetulla ja rajoitetulla reaalilukuvälillä, ja integraalit äärettömillä tai puoliäärettömillä reaalilukuväleillä eivät välttämättä *suppene*. [1, s. 114, 119–120] Muun muassa Camille Jordan, Émile Borel, William Henry Young ja Henri Lebesgue olivat tutkimuksen kärjessä. Viimeiseksi mainitun teoria osoittautui parhaimmaksi. [2, s. 150-151][3, s. 862-864][4, s. 38-39]

Lebesguen integrointi vuodelta 1901 perustuu *mittateoriaan* [2, s. 264-266], jonka avulla joukolle määritetään koko. Hieman aiemmin, 1800-luvun loppupuolella, Georg Cantor oli kehittänyt *joukko-opin* [5, s. 734-735][6, s. 534], jota Lebesgue sovelsi onnistuneesti mittateoriaan. [2, s. 237] Samoin kuin Cantor, Lebesgue sai osakseen kritiikkiä, koska mittateoria poikkesi valtavirran näkemyksistä [3, s. 860-861]. Vaikka joukko-opista löydettiin epäjohdonmukaisuuksia, muun muassa *Russellin paradoksi*, se ei haitannut mittateorian kehitystä. Edellä mainittu paradoksi ratkaistiin *Zermelo-Fraenkelin aksioomajärjestelmällä* vuonna 1930 [5, s. 810-814], joka sisältää myös *valinta-aksiooman*. Sen mukaan mistä tahansa epätyhjien ja erillisten joukkojen kokoelmasta voidaan valita osajoukko, joka sisältää täsmälleen yhden alkion jokaisesta joukosta. [2, s. 168-170, 343–344, 428]

Lebesgue määritteli erityisen *Lebesgue-mitan*, mutta yleisempää mittateoriaa kehitti Constantin Carathéodory. Huomattiin, että tietyt joukot perusjoukosta ovat *mitallisia*, minkä avulla määriteltiin *mitallinen* funktio. Uusi integrointitapa perustuu näihin mitallisiin funktioihin ja funktion *arvojoukon* jaotukseen. Tämä menetelmä on laajennus Riemannin integrointiin [4, s. 28], sillä jokainen Riemann-integroituva funktio on Lebesgue-integroituva [7, s. 93]. [7, s. 9-12][8, s. 5-6][9, s. 115-116, 125]

Tärkein kokoelma mittateoriassa on *Borelin perhe*, joka määritelmän mukaan on pienin σ-algebra, joka sisältää perusjoukon kaikki avoimet joukot. Tavanomaisessa reaalianalyysissä käsitellään yksinomaan Borel-joukkoja. Mitallisuus voidaan määritellä suhteessa Borelin perheeseen. Mittateorian kehittyessä mittoja luokiteltiin niiden ominaisuuksien mukaan ja luotiin myös uusia mittoja. Eräs oleellinen käsite on

Radon-mitta, jolla on useita tärkeitä ominaisuuksia. Tunnetuin Radon-mitoista on n-ulotteinen Lebesgue-mitta. [7, s. 51-55]

Diplomityössä tutkitaan *mitan derivaattaa* toisen mitan suhteen. Tärkein kysymys on, millaisia ominaisuuksia sillä on. Integraaliteoria oletetaan tunnetuksi. Mitan derivaatta määritellään kahdelle Radon-mitalle. Kyseessä on raja-arvo samoin kuin tavallisessa derivaatassa. Sanaa *tiheys* käytetään synonyyminä derivaatalle, sillä *Radonin-Nikodymin lauseen* nojalla mitallisen joukon mitta ensimmäisen mitan suhteen on yhtä suuri kuin integraali tiheydestä toisen mitan suhteen.

Diplomityö on kirjallisuustutkielma ja siinä keskitytään määritelmiin ja lauseiden todistuksiin. Ensisijaisena lähteenä on käytetty Evansin ja Gariepyn kirjaa *Measure Theory And Fine Properties Of Functions* [10]. Jos lähdettä ei erikseen mainita, niin voidaan olettaa, että lähteenä on ollut edellä mainittu kirja. Aiheen rajauksen johdosta lähdekirjallisuudesta on sivuutettu muutamia aiheita muun muassa π*-systeemi* ja λ*-systeemi*, joka tunnetaan myös nimellä *Dynkin systeemi*. Lähteisiin on merkitty myös sellaiset verkkolähteet, joista on kopioitu todistusten ideat kokonaan tai lähes kokonaan.

Luvussa 2 rakennetaan pohjaa koko diplomityölle. Tutkittavia aiheita ovat muun muassa numeroituvuus, n-ulotteisen euklidisen avaruuden ominaisuudet, rationaalilukujen ominaisuudet ja Zornin lemma. Viimeiseksi mainittu liittyy *järjestysteoriaan*, joka eroaa huomattavasti muusta diplomityöstä. Se on kuitenkin tarpeellinen, kun tutkitaan *Vitalin peitelausetta*. Luvussa 3 perehdytään ulkomittoihin, mitallisuuteen, σ-algebroihin ja topologisiin avaruuksiin. Eräs tärkeä lause on *Carathéodoryn ehto*, joka liittyy Borel-joukkoihin. Luvussa 4 tutkitaan joukkojen *peitteitä*, erityisesti Vitalin ja *Besicovitchin* peitelauseita. Jälkimmäisen todistus on sangen pitkä, joten diplomityössä esitetään vain kommentteja todistukseen [10, s. 39-45]. Peitelauseiden sovelluksia hyödynnetään välittömästi luvussa 5, jossa käsitellään mitan derivaattaa toisen mitan suhteen. Derivaatan ominaisuuksia tarvitaan, kun tutkitaan *Lebesgue-pistettä* ja *approksimativiisia raja-arvoja*. Luvussa 6 esitetään yhteenveto diplomityön tuloksista ja ehdotetaan aiheita tuleviin opinnäytteisiin.

Diplomityön lukemiseksi olisi hyvä olla perustietämys reaalianalyysistä. Erityisen tärkeää olisi hallita jonot ja $\varepsilon\delta$-todistukset. Diplomityössä käsitellään lähes yksinomaan n-ulotteista euklidista avaruutta.

Kerrottakoon vielä muutama sana merkinnöistä ja termeistä. Vaikka sanat *joukko* ja *kokoelma* ovat synonyymejä, niin sanalla kokoelma tarkoitetaan joukkoa, jonka alkiot ovat joukkoja. Sanoja *kuvaus* ja *funktio* käytetään synonyymeinä. Määritelmien ympärillä on reunaviiva, jotta ne erottuisivat leipätekstistä.

2. POHJATIEDOT

Mittateoriaan liittyy olennaisesti muun muassa numeroituvuus, joukko-oppi ja avoimuus. Tarkastellaan muutamia tarpeellisia tuloksia näistä aihepiireistä. Todistetaan myös Zornin lemma, jota tarvitaan luvussa 4, kun tutkitaan peitteitä.

2.1 Numeroituvuus

Joukko on alkioiden kokoelma. Joukon koko tarkoittaa sen alkioiden lukumäärää ja siihen liittyy seuraava määritelmä.

Määritelmä 2.1. Joukko A on *numeroituva*, jos on olemassa injektiivinen kuvaus

$$f : A \to \mathbb{Z}^+ .$$

Numeroituvassa joukossa on yhtä monta alkiota kuin joukossa $B \subset \mathbb{Z}^+$ eli numeroituvan joukon alkiot voidaan luetella. Tyhjä joukko $\varnothing$ on numeroituva.

Esimerkki 2.2. Jos A on numeroituva, niin jokainen osajoukko $B \subset A$ on numeroituva. Lähtöjoukkoa voidaan rajoittaa asettamalla

$$f|_B : B \to \mathbb{Z}^+ ,$$

joka on injektio. Tällöin B on numeroituva. □

Numeroituvuudesta seuraa hyödyllisiä ominaisuuksia. Tarkastellaan numeroituvien joukkojen yhdistettä ja karteesista tuloa.

Lause 2.3. *Kahden numeroituvan joukon yhdiste on numeroituva.*

Todistus. Todistus on lähteestä [11]. Olkoot A ja B numeroituvia joukkoja. Tällöin on olemassa injektiiviset kuvaukset $f : A \to \mathbb{Z}^+$ ja $g : B \to \mathbb{Z}^+$. Määritellään funktio $h : A \cup B \to \mathbb{Z}^+$ seuraavasti

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) , & \text{jos } x \in A , \\ 2g(x) + 1 , & \text{jos } x \in B . \end{cases}$$

Osoitetaan h injektioksi. Valitaan sellaiset alkiot $a, b \in A \cup B$, että $a \neq b$. Jos $a, b \in A$, niin

$$h(a) = 2f(a) \neq 2f(b) = h(b).$$

Jos $a, b \in B$, niin

$$h(a) = 2g(a) + 1 \neq 2g(b) + 1 = h(b).$$

Oletetaan sitten, että $a \in A$ ja $b \in B$. Tällöin $h(a)$ on parillinen, mutta $h(b)$ pariton eli $h(a) \neq h(b)$. Toisaalta jos $a \in B$ ja $b \in A$, niin tällöin $h(a)$ on pariton, mutta $h(b)$ parillinen eli $h(a) \neq h(b)$. Nyt h on injektio, mistä seuraa, että $A \cup B$ on numeroituva. $\square$

Lausetta 2.3 voi soveltaa induktiivisesti äärellisen monelle joukolle. Vaatisi hieman lisätyötä osoittaa, että numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva [7, s. 26][12]. Seuraava lause tulisi tarpeen siinä todistuksessa.

Lause 2.4. *Kahden numeroituvan joukon karteesinen tulo on numeroituva.*

Todistus. Todistus on lähteestä [13]. Olkoot A ja B numeroituvia joukkoja. Tällöin on olemassa injektiiviset kuvaukset $f : A \to \mathbb{Z}^+$ ja $g : B \to \mathbb{Z}^+$. Tarkastellaan kuvausta $h : A \times B \to (\mathbb{Z}^+)^2$, joka määritellään $h(x, y) = \big(f(x), g(y)\big)$. Valitaan $(x, y) \in A \times B$ ja $(z, w) \in A \times B$. Tällöin

$$\begin{aligned} h(x,y) = h(z,w) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(f(x), g(y)\big) = \big(f(z), g(w)\big) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = f(z) \quad \text{ja} \quad g(y) = g(w) \\ &\Rightarrow \quad x = z \quad \text{ja} \quad y = w \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) = (z, w). \end{aligned}$$

Kuvaus h on siis injektio. Aritmetiikan peruslauseen nojalla jokaisella positiivisella kokonaisluvulla on yksikäsitteinen alkulukuesitys. Tutkitaan seuraavaksi kuvausta $k : (\mathbb{Z}^+)^2 \to \mathbb{Z}^+$, joka määritellään

$$k(n, m) = 2^n 3^m.$$

Jos $(x, y), (z, w) \in (\mathbb{Z}^+)^2$ ovat eri alkiot, niin $k(x, y) = 2^x 3^y \neq 2^z 3^w = k(z, w)$. Kuvaus k on injektio. Koska kahden injektiivisen kuvauksen yhdiste on injektiivinen, kuvaus $k \circ h : A \times B \to \mathbb{Z}^+$ on injektiivinen. $\square$

Myös lausetta 2.4 voi soveltaa useaan kertaan. Koska joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva, myös joukot $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}, \ldots$ ovat numeroituvia. Jatkossa tarvitaan tietoa, että joukko $\mathbb{Q}^n$ on numeroituva jokaista positiivista kokonaislukua n kohti. [4, s. 3-4] Seuraava esimerkki osoittaa, että joukko $\mathbb{Q}$ ei ole merkittävä bijektiivisissä kuvauksissa.

Esimerkki 2.5. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, joka määritellään

$$f(x) = \begin{cases} q + (k+1)\sqrt{2}, & \text{jos } x = q + k\sqrt{2} \text{ eräitä } q \in \mathbb{Q} \text{ ja } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ kohti}, \\ x, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

on bijektio [14]. Tehtävä on Axlerin kirjasta [15, s. 34]. □

Esimerkki 2.5 kuvastaa reaali- ja rationaalilukujen välistä suhdetta. Jollain tavalla ja joissakin tilanteissa jälkimmäinen joukko voidaan jättää huomiotta. Mittateorian klassinen tulos on, että joukon $\mathbb{Q}$ Lebesgue-mitta on nolla [7, s. 15]. Lebesgue-mitta määritellään aliluvussa 3.1.

Lause 2.6 (De Morganin lait). *Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma joukon X osajoukkoja. Tällöin*

$$X \setminus \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E = \bigcap_{E \in \mathcal{A}} (X \setminus E) \qquad \text{ja} \qquad X \setminus \bigcap_{E \in \mathcal{A}} E = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} (X \setminus E).$$

Todistus. [15, s. 31]. □

Augustus De Morgan (1806-1871) oli Lontoon yliopistossa matematiikan professorina lähes 40 vuotta [5, s. 681]. Hänen mukaansa matematiikan tulkinta oli tärkeämpää kuin aukottomat aksioomajärjestelmät. [3, s. 812-813] De Morganin lait ovat erittäin tärkeitä, kun aliluvussa 3.2 tutkitaan eräitä tiettyjä kokoelmia, σ-algebroja.

Lause 2.7. *Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Mikä tahansa avoimien joukkojen yhdiste on avoin.*

(b) *Äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin.*

(c) *Mikä tahansa suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu.*

(d) *Äärellisen monen suljetun joukon yhdiste on suljettu.*

Todistus. [15, s. 28 ja 32] tai [16, s. 30 ja 47]. □

Rationaalilukujen ominaisuuksien nojalla todistetaan seuraavat tulokset, joita tarvitaan aliluvussa 3.1, kun perehdytään ulkomittoihin.

Lause 2.8. *Joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, jos ja vain jos se on numeroituva yhdiste avoimia palloja.*

Todistus. Todistuksen idea on lähteestä [17]. Olkoon U avoin ja $x \in U$. Tällöin on olemassa sellainen avoin pallo $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$, että $B(x, \varepsilon) \subset U$. Koska erisuuruisten reaalilukujen välissä on rationaaliluku [15, s. 18], löydetään sellainen piste $p \in \mathbb{Q}^n$, että

$$0 < \|p - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ja sellainen luku $q \in \mathbb{Q}$, että
$$\frac{\varepsilon}{3} < q < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Muodostetaan sitten avoin pallo $B(p,q) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-p\| < q\}$. Huomataan, että $\|p-x\| = \|x-p\| < \frac{\varepsilon}{3} < q$, joten $x \in B(p,q)$. Osoitetaan, että $B(p,q) \subset B(x,\varepsilon)$. Olkoon $z \in B(p,q)$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla
$$\|z-x\| = \|z-p+p-x\| \leq \|z-p\| + \|p-x\| < q + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$
eli $B(p,q) \subset B(x,\varepsilon)$. Nyt siis jokainen joukon U alkio voidaan peittää avoimella pallolla $B(p,q) \subset U$ eli
$$U \subset \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{Q}^n \cap U \\ q \in \mathbb{Q} \cap (\varepsilon/3, \varepsilon/2)}} B(p,q). \tag{2.9}$$
Lauseen 2.4 nojalla yhtälön (2.9) yhdiste on numeroituva. Toinen suunta seuraa lauseesta 2.7(a). □

Evans ja Gariepy käyttävät suljettuja palloja määritelmissä ja lauseissa. Sen takia muokataan edellinen lause käyttökelpoisempaan muotoon.

Lause 2.10. *Jos joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin se on numeroituva yhdiste suljettuja palloja.*

Todistus. Olkoon U avoin. Lauseen 2.8 nojalla on olemassa numeroituva jono avoimia palloja, joiden yhdiste on joukko U. Lauseen 2.3 jälkeisen pohdinnan nojalla riittää osoittaa, että jokainen avoin pallo on numeroituva yhdiste suljettuja palloja. Olkoon $B(p,q)$ eräs avoimista palloista. Tutkitaan suljettujen pallojen yhdistettä
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}\left(p, \frac{i}{i+1}q\right).$$
Olkoon $0 < \varepsilon < q$. Osoitetaan, että yhdistejoukon säde pääsee hyvin lähelle lukua q, mikä tarkoittaa, että lopputuloksena on avoin joukko. Jos $i \in \mathbb{Z}^+ : i \geq \left\lceil \frac{q-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, niin
$$q - \varepsilon < \frac{i}{i+1}q < q.$$
Koska luku $\frac{i}{i+1}q$ on erään yhdistejoukkoon kuuluvan suljetun pallon säde päätellään, että
$$B(p,q) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}\left(p, \frac{i}{i+1}q\right). \quad \square$$

Päätetään aliluku 2.1 reaalilukujen tärkeään ominaisuuteen, *täydellisyysaksioomaan* [1, s. 4][2, s. 400][15, s. 9]. Eräs tapa konstruoida reaaliluvut on *Dedekindin leikkaukset* [15, s. 12-16], mutta niiden esittely sivuutetaan.

Aksiooma 2.11 (Täydellisyysaksiooma). Jos epätyhjä joukko $A \subset \mathbb{R}$ on ylhäältä rajoitettu, sillä on *supremum* eli pienin yläraja.

Avoimesta reaalilukuvälistä ei löydy *suurinta arvoa*, mutta suljetusta ja rajoitetusta välistä löytyy. Täydellisyysaksiooma on siis erityisen hyödyllinen, kun tutkitaan avoimia joukkoja. Mittateoriassa aksioomaa 2.11 käytetään yhtäpitävässä muodossa, jonka mukaan epätyhjällä, alhaalta rajoitetulla joukolla on *infimum*, suurin alaraja [15, s. 19].

2.2 Zornin lemma

Luku poikkeaa muista muista osista. Se on mukana, jotta saadaan perusteltua maksimaalisen alkion olemassaolo Vitalin peitelauseessa 4.3. Lähteenä on käytetty Jussi Väisälän kirjaa *Topologia II* [18, s.181-184]. Esitys seuraa hyvin tarkasti edellä mainittua kirjaa. Zornin lemma mainitaan myös muissa lähteissä [7, s. 176][9, s. 5]. Aloitetaan seuraavalla määritelmällä, jota jotkut matemaatikot pitävät kiistanalaisena [5, s. 809-810][7, s. 23][18, s. 181].

Määritelmä 2.12 (Valinta-aksiooma). Olkoot J epätyhjä joukko ja joukot A_j epätyhjiä jokaista $j \in J$ kohti. On olemassa sellainen *valintakuvaus* $f : J \to \bigcup_{j\in J} A_j$, että $f(j) \in A_j$ jokaista $j \in J$ kohti.

Valinta-aksiooma tarkoittaa, että jokaisesta joukosta A_j voidaan valita täsmälleen yksi alkio [2, s. 402]. Zornin lemma käsittelee osittain järjestettyjä joukkoja, joka määritellään seuraavasti [2, s. 174].

Määritelmä 2.13. Joukon H relaatio $\leq$ on *osittainen järjestys*, jos jokaista $a, b, c \in H$ kohti on voimassa seuraavat ehdot.

(a) $a \leq a$.

(b) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$.

(c) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$.

Jos ehtojen (a)-(c) lisäksi on voimassa, että

(d) joko $a \leq b$ tai $b \leq a$,

niin relaatiota $\leq$ kutsutaan *täydeksi järjestykseksi.*

Paria $(H, \leq)$ kutsutaan *osittain järjestetyksi joukoksi.* Jos $a \leq b$ ja $a \neq b$, niin merkitään $a < b$. Osittainen järjestys $\leq$ periytyy jokaiselle osajoukolle $K \subset H$. Jos $\leq$ on täysi järjestys, niin joukkoa K kutsutaan joukon H *ketjuksi.*

Esimerkki 2.14. Olkoon X joukko. Tällöin relaatio $\subset$ on osittainen järjestys joukossa $\mathcal{P}(X)$. Jos joukossa X on enemmän kuin yksi alkio, relaatio $\subset$ ei ole täysi järjestys. Jos nimittäin $a, b \in X$, niin

$$\{a\} \not\subset \{b\} \quad \text{ja} \quad \{b\} \not\subset \{a\}, \qquad \text{vaikka } \{a\}, \{b\} \in \mathcal{P}(X).$$

Jos $X = \mathbb{R}$, niin eräs ketju on $\big\{[-a, a] \,:\, a > 0\big\}$. $\square$

Osittain järjestettyyn joukkoon liittyy useita käsitteitä.

Määritelmä 2.15. Olkoon $(H, \leq)$ osittain järjestetty joukko ja $A \subset H$. Alkio $b \in H$ on joukon A *yläraja*, jos $a \leq b$ jokaista $a \in A$ kohti. Jos lisäksi $b \in A$, niin b on joukon A *suurin* alkio. Alkio $c \in A$ on joukon A *maksimaalinen* alkio, jos ei ole olemassa sellaista $a \in A$, että $c < a$. Käsitteet *alaraja*, *pienin* alkio ja *minimaalinen* alkio määritellään vastaavasti.

Huomataan, että ylärajan ei tarvitse olla osajoukon A alkio. Joukossa A voi olla vain yksi suurin ja yksi pienin alkio. Jos nimittäin $b \in A$ ja $c \in A$ ovat joukon A suurimpia alkioita, niin

$$c \leq b \quad \text{ja} \quad b \leq c \qquad \text{eli} \quad b = c.$$

Sen sijaan maksimaalisia ja minimaalisia alkioita voi olla enemmän kuin yksi. Suurin alkio on aina maksimaalinen ja pienin alkio minimaalinen.

Esimerkki 2.16. Joukon $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ osajoukon $A = \big\{[0, 2], [1, 3]\big\}$ molemmat alkiot ovat sekä maksimaalisia että minimaalisia joukon A alkioita. $\square$

Pienintä ylärajaa merkitään $\sup(A)$, kun taas suurinta alarajaa merkitään $\inf(A)$. Jos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on kokoelma osajoukkoja, niin $\sup(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Yhdistejoukko on todella yläraja kokoelmalle $\mathcal{A}$. Se on myös pienin, sillä yhdisteestä ei voi poistaa mitään. Muuten se ei enää välttämättä olisi yläraja. Vastaavasti $\inf(\mathcal{A}) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Jos leikkausjoukkoon lisäisi jotain, niin lisätty osa ei välttämättä kuuluisi mihinkään joukoista $A \in \mathcal{A}$. Sovitaan erikoistapauksina, että mikäli $\varnothing \in \mathcal{A}$, niin yhdisteissä $\bigcup(\varnothing) = \varnothing$ ja leikkauksissa $\bigcap(\varnothing) = X$.

Lause 2.17 (Zornin lemma). *Olkoon $(H, \leq)$ sellainen osittain järjestetty joukko, että H on epätyhjä ja joukon H jokaisella ketjulla K on pienin yläraja $\sup(K) \in H$. Tällöin joukossa H on ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Todistus. Oletetaan, että joukossa H ei ole maksimaalista alkiota ja johdetaan siitä ristiriita. Määritellään jokaista $x \in H$ kohti

$$S(x) = \{y \in H \,:\, y > x\}.$$

Koska maksimaalista alkiota ei ole olemassa, joukko $S(x)$ on epätyhjä jokaista

$x \in H$ kohti. Lisäksi $S(x) \subset H$. Sovelletaan valinta-aksioomaa joukkoihin $S(x)$ ja indeksijoukkoon H. On olemassa sellainen kuvaus $f : H \to \bigcup_{x \in H} S(x) \subset H$, että $f(x) \in S(x)$ eli $f(x) > x$ jokaista $x \in H$ kohti. Tämä on todistuksen tärkein kohta.

Kiinnitetään alkio $a_0 \in H$ todistuksen ajaksi. *Zornin joukko* on joukko $Z \subset H$, joka toteuttaa seuraavat ehdot.

(a) $a_0 \in Z$.

(b) Jos $x \in Z$, niin $f(x) \in Z$.

(c) Jos K on epätyhjä ketju ja $K \subset Z$, niin $\sup(K) \in Z$.

Esimerkiksi joukko

$$W = \{x \in H \,:\, x \geq a_0\}$$

on Zornin joukko. Määritelmän nojalla $a_0 \geq a_0$, joten $a_0 \in W$. Jos $x \in W \subset H$, niin $f(x) \in S(x) \subset H$. Tällöin $f(x) > x \geq a_0$, joten $f(x) \in W$. Kohdassa (c) huomataan, että olipa $K \subset W \subset H$ mikä tahansa epätyhjä ketju, niin lauseen oletuksen mukaan $\sup(K) \in H$. Koska $\sup(K)$ on joukon K yläraja, niin

$$\sup(K) \geq x, \qquad \text{jokaista } x \in K \text{ kohti}.$$

Koska $K \subset W$, niin on oltava $\sup(K) \geq x \geq a_0$. Tällöin $\sup(K) \in W$.

Olkoon Z_0 kaikkien Zornin joukkojen leikkaus. Tällöin $Z_0 \subset W$. Osoitetaan, että Z_0 on Zornin joukko. Koska a_0 on jokaisen Zornin joukon alkio, $a_0 \in Z_0$. Jos $x \in Z_0$, niin x kuuluu jokaiseen Zornin joukkoon $Z \subset H$. Kohdan (b) nojalla $f(x)$ kuuluu jokaiseen Zornin joukkoon Z eli $f(x) \in Z_0$. Jos K on epätyhjä ketju ja $K \subset Z_0$, niin $K \subset Z$ ja $\sup(K) \in Z$ jokaista Zornin joukkoa Z kohti. Tällöin $\sup(K) \in Z_0$, joten Z_0 on Zornin joukko.

Todistuksen päämääränä on osoittaa joukko Z_0 ketjuksi, sillä silloin muodostuu ristiriita lauseen oletuksen kanssa. Sitä ennen todistetaan kaksi väitettä. Määritellään

$$A = \big\{a \in Z_0 \,:\, \text{jos} \quad x \in Z_0 \quad \text{ja} \quad x < a, \text{ niin} \quad f(x) \leq a\big\}.$$

Jokaista $a \in A$ kohti merkitään

$$B(a) = \big\{x \in Z_0 \,:\, x \leq a \quad \text{tai} \quad x \geq f(a)\big\}.$$

Väite 1. $B(a) = Z_0$ jokaista $a \in A$ kohti.

Olkoon $a \in A$. Koska $B(a) \subset Z_0$, riittää osoittaa, että $B(a)$ on Zornin joukko, sillä tällöin $Z_0 \subset B(a)$.

(a) Aiemmin osoitettiin, että joukko W on Zornin joukko. Koska $a \in A \subset Z_0 \subset W$, niin $a_0 \leq a$. Tällöin $a_0 \in B(a)$. Joukon A ehtoa ei tarvitse tarkastella, sillä se tieto riittää, että joukon A alkiot ovat joukon Z_0 alkioita.

(b) Olkoon $x \in B(a) \subset Z_0$. Tällöin on kolme mahdollisuutta joukon $B(a)$ ehdon mukaisesti.

1. Jos $x < a$, niin joukon A määritelmän nojalla $f(x) \leq a$.
2. Jos $x = a$, niin $f(x) = f(a)$.
3. Jos $x \geq f(a)$, niin valintakuvauksen nojalla $f(x) > x \geq f(a)$.

Koska $x \in Z_0$, niin $f(x) \in Z_0$, joten edellisten kohtien nojalla $f(x) \in B(a)$.

(c) Olkoon K epätyhjä ketju ja $K \subset B(a) \subset Z_0$. Koska Z_0 on Zornin joukko, $\sup(K) \in Z_0$. Tarkastellaan kaksi eri tapausta.

1. Jos a on ketjun K yläraja, niin pienimmän ylärajan määritelmän nojalla $\sup(K) \leq a$. Nyt $\sup(K) \in B(a)$.
2. Jos a ei ole ketjun K yläraja, niin on olemassa sellainen $b \in K$, että $a < b$. Koska $b \in K \subset B(a)$, on oltava $b \geq f(a)$. Tällöin $\sup(K) \geq b \geq f(a)$ eli $\sup(K) \in B(a)$.

Väite 1 on todistettu.

Väite 2. $A = Z_0$.

Samoin perustein kuin väitteen 1 alussa riittää osoittaa, että A on Zornin joukko.

(a) Koska $A \subset Z_0 \subset W$, niin jokainen joukon A ja Z_0 alkio x toteuttaa ehdon $x \geq a_0$. Tiedetään, että $a_0 \in Z_0$. Joukon A ehdosta alkiolle a_0 tulee identtisesti epätosi, sillä samaan aikaan olisi

$$x \geq a_0 \quad \text{ja} \quad x < a_0 .$$

Loogisesti epätodesta voi seurata mitä tahansa, joten jo tämän nojalla $a_0 \in A$. Tarkastellaan kuitenkin joukon A ehdon kontrapositiota alkiolle a_0 eli

$$\text{jos} \quad f(x) > a_0 , \quad \text{niin} \quad x \notin Z_0 \quad \text{tai} \quad x \geq a_0 .$$

Valintakuvauksen nojalla on seuraavat kaksi mahdollisuutta.

1. Jos $f(x) > x \geq a_0$, niin $x \geq a_0$ eli $a_0 \in A$.
2. Jos $f(x) > a_0 > x$, niin $x \notin Z_0$ eli $a_0 \in A$.

Siis $a_0 \in A$.

(b) Olkoon $a \in A \subset Z_0$. Tällöin $f(a) \in Z_0$. Osoitetaan, että $f(a) \in A$. Sitä varten oletetaan, että $x \in Z_0$ ja että $x < f(a)$, joukon A ehdon mukaan. Väitteen 1 nojalla $Z_0 = B(a)$, joten $x \in B(a)$ eli on oltava $x \leq a$. Jos $x < a$, niin joukon A määritelmän nojalla $f(x) \leq a < f(a)$. Jos taas $x = a$, niin $f(x) = f(a)$. Voidaan siis kirjoittaa $f(x) \leq f(a)$, joten oletuksista seuraa, että $f(a) \in A$.

(c) Olkoon K epätyhjä ketju ja $K \subset A \subset Z_0$. Osoitetaan, että $\sup(K) \in A$. Koska Z_0 on Zornin joukko, niin $\sup(K) \in Z_0$. Olkoot $x \in Z_0$ ja $x < \sup(K)$, joukon A ehdon mukaan. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan.

1. Jos on olemassa sellainen $b \in K \subset A$, että $x < b$, niin $f(x) \leq b \leq \sup(K)$. Tällöin $\sup(K) \in A$.
2. Kohdassa 1 esitettyä alkiota b ei ole olemassa. Osoitetaan, että tämä väite johtaa ristiriitaan.

   Väitteen 1 nojalla jokaista $k \in K \subset A$ kohti on voimassa $Z_0 = B(k)$. Tällöin $x \in B(k)$. Koska kohdassa 1 esitettyä alkiota b ei ole olemassa, päätellään, että jokaista $k \in K$ kohti on voimassa

   $$x = k \quad \text{tai} \quad x \geq f(k) > k\,.$$

   Toisin sanoen $k \leq x$ jokaista $k \in K$ kohti eli alkio x on ketjun K yläraja. Mutta tällöin $\sup(K) \leq x$, mikä on vastoin oletusta. Kohdan 2 mukaista tilannetta ei esiinny.

Väite 2 on todistettu.

Väite 3. Z_0 on ketju.

Valitaan $a, b \in Z_0$. Väitteen 2 nojalla $a \in A$, joten väitteen 1 nojalla $B(a)$ on määritelty. Väitteen 1 nojalla $b \in B(a)$. Tällöin

$$\text{joko} \quad b \leq a \qquad \text{tai} \quad b \geq f(a) > a\,.$$

Joukko Z_0 on ketju.

Väite 3 on todistettu.

Johdetaan nyt ristiriita. Zornin joukon ehdosta (c) seuraa, että $\sup(Z_0) \in Z_0 \subset H$, joten ehdon (b) nojalla $f\big(\sup(Z_0)\big) \in Z_0$. Tästä seuraa, että $f\big(\sup(Z_0)\big) \leq \sup(Z_0)$. Mutta se on mahdotonta, koska valintakuvauksen nojalla $f\big(\sup(Z_0)\big) > \sup(Z_0)$. Päätellään, että $\sup(Z_0) \notin H$.

On siis löydetty epätyhjästä joukosta H ketju, jolla ei ole pienintä ylärajaa joukossa H. Tulokseen päädyttiin oletuksesta, että joukossa H ei ole maksimaalista alkiota. Koska vastaväite johti ristiriitaan oletuksien kanssa, alkuperäinen väite on tosi. $\square$

Zornin lemman kanssa yhtäpitäviä väitteitä ovat *Hausdorffin maksimaalisuusperiaate*, valinta-aksiooma, *Tihonovin lause* ja *hyvän järjestyksen lause*. Ensiksi mainittu on hyvin samantyyppinen kuin Zornin lemma käsitellen järjestettyjä joukkoja. Tihonovin lause taas liittyy kompakteihin avaruuksiin, ja hyvän järjestyksen lause luonnollisiin lukuihin. [8, s. 87][18, s. 184-185]

3. MITTATEORIA

Edellisen luvun alussa pohdittiin joukon kokoa sen alkioiden lukumäärän kautta. Mittateoria yleistää pohdinnan joukon koosta, sillä eräs mitta on *lukumäärämitta* (engl. *counting measure*). Luvussa käsitellään sekä abstrakteja perusjoukkoja että n-ulotteista euklidista avaruutta.

3.1 Ulkomitta

Loogisesti ajateltuna joukon koon kuuluisi olla epänegatiivinen. On siis järkevää määritellä ulkomitta seuraavasti.

Määritelmä 3.1 (Ulkomitta). Olkoon X joukko. Kuvaus $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on *ulkomitta* joukossa X, jos

(a) $\mu(\varnothing) = 0, \quad$ ja

(b) jos $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, niin $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Määritelmän 3.1 (b)-kohtaa kutsutaan *subadditiivisuudeksi*. Myöhemmin määritellään myös *mitta* ja aliluvussa 5.2, tarkemmin lauseessa 5.23, osoitetaan, että mitta voidaan laajentaa ulkomitaksi. Erona on se, missä joukossa kuvaus määritellään. Ulkomitta on määritelty jokaiselle joukon X osajoukolle. Joskus on hyödyllistä rajoittua johonkin osajoukkoon.

Määritelmä 3.2. Olkoon μ ulkomitta joukossa X ja $C \subset X$. Tällöin ulkomitan μ *rajoittuma joukossa* C, jota merkitään

$$\mu \llcorner C,$$

on ulkomitta, joka määritellään

$$(\mu \llcorner C)(A) = \mu(A \cap C) \quad \text{jokaista } A \subset X \text{ kohti}.$$

Määritelmässä 3.2 esitelty ulkomitan rajoittuma $\mu \llcorner C$ todella on ulkomitta, koska $C \cap A \subset C \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}(C \cap A_k)$. Vaikka ulkomitta on määritelty jokaista joukon X osajoukkoa kohti, on olemassa erityinen kokoelma näistä osajoukoista. Näitä joukkoja kutsutaan μ-mitallisiksi, joka määritellään joukko-operaatioiden avulla.

Määritelmä 3.3 (Mitallinen joukko). Joukko $A \subset X$ on *μ-mitallinen*, jos

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A),$$

jokaista $B \subset X$ kohti. Jos ulkomitta μ on asiayhteydestä selvä, puhutaan *mitallisesta joukosta.*

Mitallinen joukko jakaa minkä tahansa joukon sellaisiin osiin, että jaetun joukon mitta on yhtä suuri kuin osiensa mittojen summa. Joukon mitallisuus määritellään joskus ulkomitan ja *sisämitan* yhtäsuuruudella [4, s. 13]. Sisämitta on niiden joukkojen, jotka *sisältyvät* mitattavaan joukkoon, mittojen supremum [19, s. 70].

Joukoille $A, B \subset X$ on voimassa, että $B \subset (B \cap A) \cup (B \setminus A)$, joten määritelmän 3.1(b) nojalla joukon A mitallisuuden osoittamiseen riittää, että todistetaan epäyhtälö $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ todeksi.

Lause 3.4. *Olkoon μ ulkomitta joukossa X.*

(a) *Jos $A \subset B \subset X$, niin $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(b) *Joukko A on μ-mitallinen, jos ja vain jos $X \setminus A$ on μ-mitallinen.*

(c) *Joukot $\varnothing$ ja X ovat μ-mitallisia. Jos $\mu(A) = 0$, niin A on μ-mitallinen.*

(d) *Jos $C \subset X$, niin jokainen μ-mitallinen joukko on myös $\mu \llcorner C$-mitallinen.*

Todistus. (a) Määritelmän 3.1 mukaan valitaan $A_1 = B$ ja $A_k = \varnothing$, kun $k \geq 2$. Tällöin

$$A \subset B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

joten $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(B)$.

(b) Olkoon A μ-mitallinen ja $B \subset X$. Määritelmän 3.3 nojalla

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu\big(B \setminus (X \setminus A)\big) + \mu\big(B \cap (X \setminus A)\big).$$

Huomataan, että $X \setminus A$ on μ-mitallinen. Toinen suunta seuraa samasta yhtälöstä.

(c) Joukkojen $\varnothing$ ja X μ-mitallisuus seuraa määritelmästä 3.3. Olkoot $\mu(A) = 0$ ja $B \subset X$. Riittää osoittaa, että $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Koska $B \cap A \subset A$, niin kohdan (a) nojalla

$$\mu(B \cap A) \leq \mu(A) = 0,$$

joten $\mu(B \cap A) = 0$. Edelleen (a)-kohdan nojalla

$$\mu(B) \geq \mu(B \setminus A) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Koska $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$, joukko A on μ-mitallinen.

(d) Olkoon A μ-mitallinen ja $B \subset X$. Tällöin

$$\begin{aligned}(\mu \llcorner C)(B) &= \mu(B \cap C) \\ &= \mu\big((B \cap C) \cap A\big) + \mu\big((B \cap C) \setminus A\big) \\ &= \mu\big((B \cap A) \cap C\big) + \mu\big((B \setminus A) \cap C\big) \\ &= (\mu \llcorner C)(B \cap A) + (\mu \llcorner C)(B \setminus A),\end{aligned}$$

joten joukko A on $\mu \llcorner C$-mitallinen. $\square$

Perehdytään hieman tarkemmin ulkomittaan ja mitallisuuteen. Seuraava esimerkki on muokattu lähteestä [20, s. 22].

Esimerkki 3.5. Olkoon μ ulkomitta joukossa X. Jos $A, B \subset X$ ovat sellaisia joukkoja, että

$$A \subset B \qquad \text{ja} \qquad \mu(A) = \mu(B) < \infty,$$

niin $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$ jokaista μ-mitallista joukkoa C kohti.

Todistus. Koska joukkojen A ja B ulkomitta on äärellinen, todistuksessa ei esiinny tilannetta $\infty - \infty$. Olkoon C μ-mitallinen. Tällöin

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) \qquad \text{ja} \\ \mu(B) &= \mu(B \cap C) + \mu(B \setminus C).\end{aligned}$$

Monotonisuuden nojalla saadaan arviot

$$\begin{aligned}&\mu(A \cap C) \le \mu(B \cap C) \qquad \text{ja} \\ &\mu(A \setminus C) - \mu(B \setminus C) \le 0,\end{aligned}$$

joista ensimmäinen todistaa väitteen toiseen suuntaan. Koska $\mu(A) = \mu(B)$, saadaan arvio

$$\mu(B \cap C) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) - \mu(B \setminus C) \le \mu(A \cap C),$$

joten $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$. $\square$

Lauseen 3.4 nojalla huomataan, että ulkomitta on *monotoninen*: osajoukon ulkomitta on korkeintaan alkuperäisen joukon ulkomitta. Tämä vaikuttaa loogiselta. Komplementin μ-mitallisuutta tarvitaan, kun tutkitaan σ-algebroja. Myös numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset ovat silloin avainasemassa.

Lause 3.6. *Olkoon $A_k \subset X$ μ-mitallinen jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti.*

(a) *Joukot $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ja $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ovat μ-mitallisia.*

(b) *Jos joukot A_k ovat erillisiä, niin* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

(c) *Jos* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, *niin* $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

(d) *Jos* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ *ja* $\mu(A_1) < \infty$, *niin* $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

Todistus. (a) Olkoon $B \subset X$. Tutkitaan aluksi äärellistä yhdistettä ja leikkausta. Subadditiivisuuden nojalla riittää osoittaa, että

$$\mu(B) \geq \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right), \qquad \text{jossa } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Huomataan, että $B \cap (A_1 \cup A_2) \subset (B \cap A_1) \cup \big((B \setminus A_1) \cap A_2\big)$. Joukkojen A_1 ja A_2 μ-mitallisuuksien nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1)\\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu\big((B \setminus A_1) \cap A_2\big) + \mu\big((B \setminus A_1) \setminus A_2\big)\\ &\geq \mu\big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) + \mu\big(B \setminus (A_1 \cup A_2)\big).\end{aligned}$$

Viimeisellä rivillä hyödynnettiin De Morganin lakia jälkimmäiseen termiin. Joukko $A_1 \cup A_2$ on siis μ-mitallinen. Matemaattisen induktion nojalla joukko $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, jossa $n \in \mathbb{Z}^+$, on μ-mitallinen. De Morganin lain

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus A_k),$$

lauseen 3.4(b) ja joukon $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ μ-mitallisuuden nojalla myös joukko $X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ on μ-mitallinen. Jälleen lauseen 3.4(b) nojalla joukko $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ on μ-mitallinen. On osoitettu, että äärelliset yhdisteet ja leikkaukset ovat μ-mitallisia. Jatketaan (a) kohdan todistusta myöhemmin.

(b) Olkoon $j \in \mathbb{Z}^+$. Määritellään

$$B_j = \bigcup_{k=1}^{j} A_k.$$

Tällöin joukkojen A_k erillisyyksien ja μ-mitallisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{j} A_k\right) = \mu(B_j) &= \mu(B_j \cap A_j) + \mu(B_j \setminus A_j)\\ &= \mu(A_j) + \mu(B_{j-1})\\ &= \mu(A_j) + \mu(B_{j-1} \cap A_{j-1}) + \mu(B_{j-1} \setminus A_{j-1})\\ &= \mu(A_j) + \mu(A_{j-1}) + \mu(B_{j-2})\\ &\;\vdots\\ &= \sum_{k=1}^{j} \mu(A_k).\end{aligned}$$

Kohdan (b) tulos on siis voimassa, jos erillisiä joukkoja on äärellinen määrä. Koska joukko $\bigcup_{k=1}^{j} A_k$ on μ-mitallinen, saadaan arvio

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{j} A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=j+1}^{\infty} A_k\right) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{j} A_k\right) = \sum_{k=1}^{j} \mu(A_k).$$

Yllä oleva epäyhtälö on voimassa jokaista $j \in \mathbb{Z}^+$ kohti, joten

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Raja-arvo on olemassa joko äärellisenä tai äärettömänä. Mikäli $\mu(A_k) = \infty$ jollakin $k \in \mathbb{Z}^+$, niin epäyhtälö toteutuu muodossa $\infty \geq \infty$. Määritelmän 3.1 nojalla saadaan yhtälö $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

(c) Oletuksen mukaan edellinen joukko sisältyy aina seuraavaan, joten muodostetaan erotusjoukkojono. Silloin sen alkiot ovat erillisiä ja

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \setminus A_{k-1}\right) \\
&= \mu(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu\left(A_k \setminus A_{k-1}\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\mu(A_1) + \sum_{k=2}^{j} \mu\left(A_k \setminus A_{k-1}\right)\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{k=2}^{j} A_k \setminus A_{k-1}\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mu\left(A_j\right).
\end{aligned}$$

(d) Koska seuraava joukko sisältyy aina edelliseen, päätellään, että jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti $A_k = A_1 \cap A_k$. Joukkojen A_k μ-mitallisuuksien nojalla

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k).$$

Nyt kohdan (c) ja De Morganin lain nojalla

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_k)\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_k)\right) \\
&= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\
&\geq \mu(A_1) - \mu\left(A_1 \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\
&= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).
\end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen rivi seuraa subadditiivisuudesta ja oletuksesta $\mu(A_1) < \infty$. Nyt siis $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. Huomataan, että jokaista $j \in \mathbb{Z}^+$ kohti

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset A_j\,,$$

joten $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \mu(A_j)$. Tällöin myös $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$. Kohta (d) on todistettu.

Palataan kohtaan (a). Joukkojonon $\left\{A_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ ei tarvitse olla erillinen, kasvava tai vähenevä. Merkitään $B_j = \bigcup_{k=1}^{j} A_k$, joka on μ-mitallinen jokaista $j \in \mathbb{Z}^+$ kohti. Valitaan sellainen $B \subset X$, jolle $\mu(B) < \infty$. Hyödyntäen lausetta 3.4(d) saadaan

$$\begin{aligned}
\mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\
&= \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) + \mu\left(B \cap \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right) \\
&= (\mu \llcorner B)\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) + (\mu \llcorner B)\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (X \setminus B_k)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} (\mu \llcorner B)(B_k) + \lim_{k\to\infty} (\mu \llcorner B)(X \setminus B_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \big((\mu \llcorner B)(X \cap B_k) + (\mu \llcorner B)(X \setminus B_k)\big) \\
&= \lim_{k\to\infty} (\mu \llcorner B)(X) \\
&= \mu(X \cap B) = \mu(B).
\end{aligned}$$

Jos $\mu(B) = \infty$, niin μ-mitallisuus seuraa siitä, että minkä tahansa joukon ulkomitta on korkeintaan ääretön. Siis

$$\mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \infty = \mu(B),$$

ja toinen suunta subadditiivisuuden ja monotonisuuden nojalla

$$\infty = \mu(B) \leq \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\,(B) = \infty.$$

Joukko $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ on siis μ-mitallinen. De Morganin lain ja lauseen 3.4(b) nojalla myös $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on μ-mitallinen. $\square$

Tietyt osajoukot ovat siis μ-mitallisia. Herääkin kysymys, onko olemassa sellaista joukkoa, joka ei ole μ-mitallinen? Tällainen joukko todella on ja sitä varten esitellään konkreettinen ulkomitta, Lebesgue-ulkomitta.

Määritelmä 3.7 (Halkaisija). Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *halkaisija* määritellään

$$\operatorname{diam}(A) = \sup \big\{ \|x - y\| \,:\, x, y \in A \big\}.$$

Avoimen pallon $B(x,r)$, suljetun pallon $\overline{B}(x,r)$ ja pallopinnan $S(x,r)$ halkaisijat ovat $2r$. Määritelmän 3.7 supremum mahdollistaa seuraavan tuloksen [1, s. 300].

Esimerkki 3.8. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, niin $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

Todistus. Todistus on lähteestä [21]. Tiedetään, että $A \subset \overline{A}$ [7, s. 149]. Tällöin $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$, koska joukkoa laajentamalla supremum voi vain kasvaa.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $x, y \in \overline{A}$. Tällöin on olemassa sellaiset alkiot $a, b \in A$, että

$$\|x - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad \|y - b\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kolmioepäyhtälön nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - a + a - b + b - y\| \leq \|x - a\| + \|a - b\| + \|y - b\| \\ &< \|a - b\| + \varepsilon \leq \operatorname{diam}(A) + \varepsilon, \end{aligned}$$

joten määritelmän 3.7 nojalla $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A) + \varepsilon$. $\square$

Lebesgue-ulkomitan määritelmässä joukko $A \subset \mathbb{R}$ peitetään numeroituvalla määrällä palloja (eli osavälejä) $C_i \subset \mathbb{R}$, minkä jälkeen pallojen halkaisijat summataan. Sitten pallojen läpimittaa pienennetään niin paljon, että joukko A yhä peittyy, mutta palloja ei voi enää pienentää. Yleisempi määritelmä ei aseta rajoituksia joukoille C_i.

Määritelmä 3.9 (Lebesgue-ulkomitta). (a) *Lebesgue-ulkomitta joukossa* $\mathbb{R}$ on

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(C_i) \,:\, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ C_i \subset \mathbb{R} \right\}$$

jokaista $A \subset \mathbb{R}$ kohti.

(b) *Lebesgue-ulkomitta joukossa* $\mathbb{R}^n$ on

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1 \times \cdots \times \mathcal{L}^1.$$

Lebesgue-ulkomitan yksityiskohtiin voi perehtyä tarkemmin seuraavista lähteistä [7, s. 14-17, 116–145][22, s. 2-6]. Aiheen rajauksen vuoksi n-ulotteisen Lebesgue-ulkomitan ominaisuudet oletetaan tunnetuiksi [7, s. 136-141][23, s. 87-89]. Tärkein tieto on, että Lebesgue-ulkomitta todella on ulkomitta määritelmän 3.1 mukaan. Kun hyödynnetään valinta-aksioomaa, päädytään tilanteeseen

$$\mathcal{L}^1(A \cup B) \neq \mathcal{L}^1(A) + \mathcal{L}^1(B),$$

jossa $A, B \subset \mathbb{R}$ ovat erillisiä [7, s. 21-23]. Tämä näyttäisi olevan ristiriita lauseen 3.6(b) kanssa, mutta joukoista A ja B *ei* oletettu, että ne ovat $\mathcal{L}^1$-mitallisia. Tämä huomio johtaa seuraavaan aiheseen.

3.2 Mitallinen avaruus

Eräs mittateorian peruskäsitteistä on σ-algebra, joka on kokoelma perusjoukon X osajoukoista. Sen avulla voidaan siirtyä ulkomitasta *mittaan*.

Määritelmä 3.10 (σ-algebra). Olkoon X joukko ja $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Kokoelma $\mathcal{S}$ on *σ-algebra*, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

(a) $\varnothing \in \mathcal{S}$.

(b) Jos $E \in \mathcal{S}$, niin $X \setminus E \in \mathcal{S}$.

(c) Jos $E_1, E_2, \dots$ on jono kokoelman $\mathcal{S}$ alkioita, niin $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}$.

Määritelmästä 3.10 huomataan, että σ-algebra on aina epätyhjä, se sisältää aina alkioidensa komplementit ja numeroituvat yhdisteet. Ensimmäinen esimerkki perustuu alkeisjoukko-oppiin.

Esimerkki 3.11. Olkoot $\mathcal{S}$ σ-algebra joukossa X ja $A \subset X$. Tällöin kokoelma

$$\mathcal{S}_A = \big\{E \in \mathcal{S} \,:\, A \subset E \text{ tai } A \cap E = \varnothing\big\}$$

on σ-algebra joukossa X.

Todistus. Tiedoista $\varnothing \in \mathcal{S}$ ja $A \cap \varnothing = \varnothing$ seuraa, että $\varnothing \in \mathcal{S}_A$. Olkoon $E \in \mathcal{S}_A$. Jos $A \subset E$, niin $A \cap (X \setminus E) = \varnothing$, joten $X \setminus E \in \mathcal{S}_A$. Jos taas $A \cap E = \varnothing$, niin $A \subset (X \setminus E)$, joten myös tällöin $X \setminus E \in \mathcal{S}_A$.

Olkoon $E_1, E_2, \dots$ jono kokoelman $\mathcal{S}_A$ alkioita. Jos $A \cap E_n = \varnothing$ jokaista $n \in \mathbb{Z}^+$ kohti, niin

$$A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) = \varnothing,$$

joten $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}_A$. Jos $A \subset E_k$ jollain $k \in \mathbb{Z}^+$, niin

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

mistä seuraa, että $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}_A$. Kaikki kolme ehtoa määritelmästä 3.10 täyttyvät, joten $\mathcal{S}_A$ on σ-algebra. $\square$

Seuraava lause esittelee σ-algebran hyödyllisiä ominaisuuksia. Todistukset seuraavat määritelmästä 3.10 ja De Morganin laeista.

Lause 3.12. *Olkoon $\mathcal{S}$ joukon X σ-algebra.*

(a) $X \in \mathcal{S}$.

(b) *Jos $D, E \in \mathcal{S}$, niin $D \cup E \in \mathcal{S}$, $D \cap E \in \mathcal{S}$ ja $D \setminus E \in \mathcal{S}$.*

(c) *Jos $E_1, E_2, \ldots$ on jono kokoelman $\mathcal{S}$ alkioita, niin $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$.*

Todistus. [7, s. 27]. □

Aiemmin ollaan määritelty joukon μ-mitallisuus. Sanaa *mitallisuus* käytetään myös σ-algebran alkioista, sillä ne tarkoittavat oikeastaan samaa asiaa. Tämä huomataan lauseessa 3.14.

Määritelmä 3.13 (Mitallinen avaruus). Järjestetty pari $(X, \mathcal{S})$, jossa X on joukko ja $\mathcal{S}$ sen σ-algebra, on *mitallinen avaruus*. Kokoelman $\mathcal{S}$ alkiota kutsutaan *$\mathcal{S}$-mitalliseksi* tai lyhyemmin *mitalliseksi joukoksi*.

Seuraava lause on hyvin tärkeä, sillä se yhdistää ulkomitan μ ja σ-algebran.

Lause 3.14. *Jos μ on ulkomitta epätyhjässä joukossa X, kokoelma μ-mitallisista joukoista $A \subset X$ on σ-algebra.*

Todistus. Tulos seuraa lauseista 3.4 ja 3.6. □

Lauseen 3.14 mukaan joukosta X voidaan valita osajoukkojen kokoelma, jonka alkiot ovat μ-mitallisia ja joka on σ-algebra. Jos rajoitutaan σ-algebraan, ulkomitta muuttuu *mitaksi*. Ulkomitta on siis eräänlainen laajennus mitalle.

Määritelmä 3.15 (Mitta). Olkoon $(X, \mathcal{S})$ mitallinen avaruus. Tällöin kuvaus $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ on *mitta* järjestetylle parille $(X, \mathcal{S})$, jos $\nu(\varnothing) = 0$ ja

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k),$$

jossa $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ on mikä tahansa jono erillisiä kokoelman $\mathcal{S}$ alkioita. Kolmikkoa $(X, \mathcal{S}, \nu)$ kutsutaan *mitta-avaruudeksi*.

Mitan lähtöjoukko on σ-algebra $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, kun taas ulkomitan lähtöjoukko on potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$. Mitta on *σ-additiivinen* eli erillisten joukkojen yhdisteen mitta on summa joukkojen mitoista. Pohdittaessa σ-algebroja huomataan, että niissä on alkioita todella paljon. Miten niistä voisi karsia ikään kuin ylimääräiset alkiot pois ja keskittyä eräänlaiseen ydinjoukkoon? Seuraava lause johdattelee *Borel-joukkoihin*.

Lause 3.16 (Pienin σ-algebra). *Olkoon X joukko ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Tällöin*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \text{ on } \sigma\text{-algebra joukossa } X, \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{S}}} \mathcal{S}$$

on σ-algebra joukossa X.

Todistus. Todistus perustuu Axlerin kirjaan [7, s. 28]. Leikkausjoukko on epätyhjä, koska jokainen σ-algebra sisältää tyhjän joukon. Tämä osoittaa, että $\varnothing \in \mathcal{S}_\mathcal{A}$. Olkoon $E \in \mathcal{S}_\mathcal{A}$. Tällöin E on jokaisessa joukon X σ-algebrassa $\mathcal{S}$, joille $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$. Määritelmän 3.10(b) nojalla joukko $X \setminus E$ on jokaisessa joukon X σ-algebrassa $\mathcal{S}$, joille $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$. Siispä $X \setminus E \in \mathcal{S}_\mathcal{A}$.

Numeroituva yhdiste kuuluu kokoelmaan $\mathcal{S}_\mathcal{A}$ samanlaisen päättelyn nojalla kuin komplementin tapauksessa. □

Lauseen 3.16 kokoelmaa $\mathcal{S}_\mathcal{A}$ kutsutaan *pienimmäksi σ-algebraksi*, joka sisältää kokoelman $\mathcal{A}$. Toisinaan puhutaan myös kokoelman $\mathcal{A}$ *virittämästä* σ-algebrasta. Seuraava esimerkki yhdistää numeroituvuuden ja pienimmän σ-algebran. Siihen tarvitaan apulausetta.

Apulause 3.17. *Olkoon X joukko. Tällöin kokoelma*

$$\mathcal{T} = \big\{E \subset X \,:\, E \text{ on numeroituva tai } X \setminus E \text{ on numeroituva}\big\}$$

on σ-algebra joukossa X.

Todistus. Todistus perustuu kurssin Measure and Integration -muistiinpanoihin. Koska $\varnothing$ on numeroituva, $\varnothing \in \mathcal{T}$. Olkoon $E \in \mathcal{T}$. Jos $X \setminus E$ on numeroituva, niin $X \setminus E \in \mathcal{T}$. Jos taas E on numeroituva, niin

$$X \setminus (X \setminus E) = E$$

on numeroituva eli tällöinkin $X \setminus E \in \mathcal{T}$. Olkoon $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ jono kokoelman $\mathcal{T}$ alkioita. Jos E_k on numeroituva jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti, niin

$$\bigcup_{k=1}^\infty E_k = \lim_{n\to\infty} \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right)$$

on numeroituva lauseen 2.3 nojalla eli $\bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{T}$. Toisaalta jos joukko $X \setminus E_n$ on numeroituva jollakin $n \in \mathbb{Z}^+$, niin $\bigcap_{k=1}^\infty (X \setminus E_k)$ on numeroituva, sillä

$$\bigcap_{k=1}^\infty (X \setminus E_k) \subset X \setminus E_n .$$

Tällöin $\bigcap_{k=1}^\infty (X \setminus E_k) \in \mathcal{T}$. Komplementin ja De Morganin lain nojalla

$$\bigcup_{k=1}^\infty E_k = X \setminus \left(\bigcap_{k=1}^\infty (X \setminus E_k) \right) \in \mathcal{T}.$$

Kokoelma $\mathcal{T}$ on σ-algebra. □

Edellisen todistuksen viimeisessä kohdassa hyödynnettiin todistuksen aiempaa kohtaa. Oleellista onkin, missä järjestyksessä todistus kirjoitetaan. Numeroituvan yhdisteen kuuluminen kokoelmaan $\mathcal{T}$ vaati siis tiedon, että jokaisen alkion $E \in \mathcal{T}$ komplementti kuuluu kokoelmaan $\mathcal{T}$. Jatketaan nyt varsinaiseen esimerkkiin.

Esimerkki 3.18. Olkoot X joukko ja

$$\mathcal{A} = \big\{\{x\} \,:\, x \in X\big\}$$

eli $\mathcal{A}$ on joukon X yksialkioisten osajoukkojen kokoelma. Tällöin pienin σ-algebra joukossa X, joka sisältää kokoelman $\mathcal{A}$, on

$$\mathcal{T} = \big\{E \subset X \,:\, E \text{ on numeroituva tai } X \setminus E \text{ on numeroituva}\big\}.$$

Todistus. Todistus on lähteestä [24]. Kokoelma $\mathcal{T}$ on σ-algebra joukossa X apulauseen 3.17 nojalla. Merkitään

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \text{ on } \sigma\text{-algebra joukossa } X, \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{S}}} \mathcal{S}. \tag{3.19}$$

Osoitetaan, että $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}$, mistä väite seuraa.

Koska jokainen yksiö on numeroituva, päätellään, että $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Tällöin yhtälön (3.19) nojalla $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}$.

Valitaan $B \in \mathcal{T}$. Jos B on numeroituva, niin sille on esitys $B = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$, missä $\{x_k\} \in \mathcal{A}$ jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti. Koska $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ on leikkaus niistä σ-algebroista, jotka sisältävät kokoelman $\mathcal{A}$, ja koska B on numeroituva yhdiste, päätellään, että $B \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Jos taas $X \setminus B$ on numeroituva, niin vastaavasti päätellään, että $X \setminus B \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Tällöin σ-algebran ominaisuuksien nojalla $B \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. On siis voimassa $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. $\square$

Joukossa $\mathbb{R}^n$ on eräs σ-algebra, jolla on erityisasema ja myös erityinen nimi.

Määritelmä 3.20 (Borel-joukko). (a) Pienintä σ-algebraa joukossa $\mathbb{R}^n$, joka sisältää joukon $\mathbb{R}^n$ avoimet joukot, kutsutaan *Borelin perheeksi.* Sen alkiota kutsutaan *Borel-joukoksi.*

(b) Joukon $\mathbb{R}^n$ ulkomittaa μ kutsutaan *Borel-mitaksi*, jos jokainen Borel-joukko on μ-mitallinen.

Borelin perhettä merkitään $\mathcal{B}_n$. Se voitaisiin määritellä myös suljettujen joukkojen kautta, koska suljettu joukko on avoimen joukon komplementti ja σ-algebran alkion komplementti kuuluu σ-algebraan [7, s. 29]. Ulkomitta voidaan osoittaa Borel-mitaksi Carathéodoryn ehdolla 3.23. Määritellään ensin, mitä tarkoittaa kahden joukon välinen etäisyys.

Määritelmä 3.21 (Etäisyys). Joukkojen A ja B välinen *etäisyys*

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\big\{\|x-y\| \,:\, x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Etäisyyden määritelmässä on käytetty suurinta alarajaa, infimumia, ja epänegatiivisten lukujen infimum on aina epänegatiivinen. Etäisyys on siis epänegatiivinen. Jos joukoilla A ja B on ainakin yksi yhteinen piste, niin $\operatorname{dist}(A,B)=0$. Käänteinen tulos ei ole voimassa, minkä todistaa esimerkiksi joukot $[0,1) \subset \mathbb{R}$ ja $[1,2] \subset \mathbb{R}$. Etäisyys pisteestä $a \in \mathbb{R}^n$ määritellään $\operatorname{dist}(a,B) = \operatorname{dist}\big(\{a\},B\big)$. [16, s. 24][20, s. 7]

Apulause 3.22. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$\operatorname{dist}(x,A) = 0, \ \textit{jos ja vain jos} \ \ x \in \overline{A}.$$

Todistus. Todistus perustuu lähteeseen [25]. Jos $\operatorname{dist}(x,A)=0$, niin jokaista positiivista kokonaislukua $n \in \mathbb{Z}^+$ kohti on olemassa sellainen alkio $y_n \in A$, että

$$\|x-y_n\| < \frac{1}{n}.$$

Tämä tarkoittaa, että on olemassa sellainen jono $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, että $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Tällöin $x \in \overline{A}$. [7, s. 149] Toisaalta, jos $x \in \overline{A}$, niin on olemassa sellainen jono $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, että $\lim_{n\to\infty} z_n = x$. Nyt jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $N \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\|x-z_n\| < \varepsilon, \ \text{kun } n \geq N.$$

Koska $z_n \in A$ jokaista $n \in \mathbb{Z}^+$ kohti, saadaan tulos

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf\big\{\|x-y\| \,:\, y \in A\big\} = 0. \qquad \square$$

Edellinen lause on tärkeä, sillä suljettu joukko C on yhtenevä sulkeumansa kanssa eli $C = \overline{C}$ [7, s. 149]. Apulause 3.22 esiintyy Axlerin kirjassa [7, s. 224] ja hieman erilaisena Trenchin kirjassa [1, s. 301]. Seuraavan lauseen todistus Evansin ja Gariepyn kirjasta on hyvin samanlainen kuin Bogachevin kirjassa [19, s. 47].

Lause 3.23 (Carathéodoryn ehto). *Olkoon μ ulkomitta joukossa $\mathbb{R}^n$. Jos jokaisia joukkoja $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kohti*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \textit{aina kun } \operatorname{dist}(A,B) > 0,$$

niin μ on Borel-mitta.

Todistus. Lauseen 3.14 nojalla μ-mitallisten joukkojen kokoelma on σ-algebra. Tavoitteena on osoittaa, että jokainen suljettu joukko on μ-mitallinen eli että σ-algebra

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R}^n \,:\, A \text{ on } \mu\text{-mitallinen}\}$$

sisältää kaikki suljetut joukot. Koska jokainen Borel-joukko kuuluu joukon $\mathbb{R}^n$ *pie-*

nimpään σ-algebraan, joka sisältää suljetut joukot, väite seuraa eli $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{T}$.

Olkoot $A, C \subset \mathbb{R}^n$ ja lisäksi C on suljettu. Subadditiivisuuden nojalla riittää osoittaa, että

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C). \tag{3.24}$$

Jos $\mu(A) = \infty$, yhtälö (3.24) toteutuu. Oletetaan, että $\mu(A) < \infty$. Määritellään

$$C_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}, \qquad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Joukot C_n muodostavat ikään kuin kiristyvän silmukan joukon C ympärille. Osoitetaan, että C_n on suljettu. Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{R}^n \setminus C_n$. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n \setminus C_n$. Tavoitteena on osoittaa, että on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus C_n$. Valitaan

$$r = \frac{\operatorname{dist}(a, C) - \frac{1}{n}}{2} > 0.$$

Olkoon $z \in B(a, r)$ ja $y \in C$. Tällöin käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\|z - y\| &= \|a - y + z - a\| \geq \big| \|a - y\| - \|z - a\| \big| \geq \|a - y\| - \|z - a\| \\
&\geq \operatorname{dist}(a, C) - \|z - a\| > \operatorname{dist}(a, C) + \frac{2}{n} - \frac{\operatorname{dist}(a, C)}{2} \\
&= \frac{2}{n} + \frac{\operatorname{dist}(a, C)}{2} \geq \frac{2}{n},
\end{aligned}$$

joten $\operatorname{dist}(z, C) \geq \frac{2}{n} > \frac{1}{n}$. Tällöin $z \in \mathbb{R}^n \setminus C_n$ eli $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus C_n$. Koska $\mathbb{R}^n \setminus C_n$ on avoin, C_n on suljettu. Huomataan, että $C \subset C_n$ jokaista $n \in \mathbb{Z}^+$ kohti, joten $\operatorname{dist}(A \setminus C_n, A \cap C) > \frac{1}{n} > 0$. Oletuksen ja monotonisuuden nojalla

$$\mu(A \setminus C_n) + \mu(A \cap C) = \mu\big((A \setminus C_n) \cup (A \cap C)\big) \leq \mu(A). \tag{3.25}$$

Väite 1. $\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) = \mu(A \setminus C)$.

Asetetaan

$$R_k = \left\{ x \in A \,:\, \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}, \qquad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Joukot R_k ovat joukon A alkioista muodostettuja renkaita, jotka ovat joukon C ympärillä. Huomataan, että $\bigcup_{k=n}^{\infty} R_k = \left\{ x \in A \,:\, 0 < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}$. Koska C on suljettu, apulauseen 3.22 nojalla $A \setminus C = \left\{ x \in A \,:\, 0 < \operatorname{dist}(x, C) \right\}$. Koska myös C_n on suljettu,

$$(A \setminus C_n) = \left\{ x \in A \,:\, 0 < \operatorname{dist}(x, C_n) \right\} = \left\{ x \in A \,:\, \frac{1}{n} < \operatorname{dist}(x, C) \right\},$$

jolloin $A \setminus C = (A \setminus C_n) \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} R_k$. Monotonisuuden nojalla saadaan arvio

$$\mu(A \setminus C_n) \leq \mu(A \setminus C) \leq \mu(A \setminus C_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(R_k).$$

Jos voidaan osoittaa, että $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) < \infty$, niin sarjan suppenevuudesta seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(R_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \mu(R_k) \right) = 0.$$

Tällöin olisi $\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) = \mu(A \setminus C)$.

Todistetaan, että sarja on rajoitettu. Huomataan, että $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$, jos $j \geq i+2$, sillä renkaiden väliin jää ainakin rengas R_{i+1}. Infimum ei voi siis mennä nollaan. Nyt lauseen oletuksen mukaan parillisille indekseille

$$\mu(R_2 \cup R_4) = \mu(R_2) + \mu(R_4).$$

Induktio-oletus on, että $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} R_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \mu(R_{2k})$, kun $m \in \mathbb{Z}^+$. Koska yhdistejoukon etäisyys joukosta R_{2m} on positiivinen, lauseen oletuksesta seuraa, että $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k})$. Joukkojen R_k määrittelyn ja monotonisuuden nojalla päätellään, että

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}\right) \leq \mu(A).$$

Parittomat indeksit käsitellään vastaavasti. Nyt

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_k) \leq 2\mu(A) < \infty, \qquad \text{jokaista } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ kohti},$$

joten $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(R_k) \leq \lim_{m\to\infty} 2\mu(A) = 2\mu(A) < \infty$.

Palataan yhtälöön (3.24). Yhtälön (3.25) ja väitteen 1 nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C) &= \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) + \mu(A \cap C) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A \setminus C_n) + \mu(A \cap C)\right] \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A) = \mu(A). \end{aligned}$$

Suljettu joukko C on siis μ-mitallinen, mikä todistaa väitteen. $\square$

Caratheodoryn ehto eli lause 3.23 on oikeastaan tyyppiä *jos ja vain jos* [9, s. 57-59] [20, s. 10][22, s. 33]. Jos siis μ on Borel-mitta, niin jokainen avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ on μ-mitallinen. Oletetaan, että joukoille $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on voimassa $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että

$$0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(A, B).$$

Peitetään joukko A sellaisilla avoimilla palloilla, että joukkoa B ei leikata eli asetetaan

$$V = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Vastaavasti voitaisiin peittää joukko B. Nyt joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin lauseen 2.7(a) nojalla ja μ-mitallisuuden nojalla

$$\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap V\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus V\big) = \mu(A) + \mu(B).$$

Eräs mittateorian tekniikoista on joukkojen arviointi toisilla joukoilla joko sisä- tai ulkopuolelta. Jos erotusjoukko on mitaltaan hyvin pieni, niin voidaan sanoa, että joukot ovat samat. Tätä varten määritellään erityisiä ulkomittoja.

Määritelmä 3.26. (a) Ulkomitta μ joukossa X on *säännöllinen*, jos jokaista joukkoa $A \subset X$ kohti on olemassa sellainen μ-mitallinen joukko B, että

$$A \subset B \qquad \text{ja} \qquad \mu(A) = \mu(B).$$

(b) Ulkomitta μ joukossa $\mathbb{R}^n$ on *Borel-säännöllinen*, jos μ on Borel-mitta ja jos jokaista joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti on olemassa sellainen Borel-joukko B, että

$$A \subset B \qquad \text{ja} \qquad \mu(A) = \mu(B).$$

(c) Ulkomitta μ joukossa $\mathbb{R}^n$ on *Radon-mitta*, jos μ on Borel-säännöllinen ja jos

$$\mu(K) < \infty$$

jokaista kompaktia joukkoa $K \subset \mathbb{R}^n$ kohti.

Borel-mitalle ja sen myötä myös Borel-säännöllisyydelle on olemassa erilaisia määritelmiä. Esimerkiksi käsitteet Radon-mitta ja Borel-säännöllinen tarkoittavat eri lähteissä samaa asiaa. Määritelmässä 3.26 on seurattu Evansia ja Gariepyta [10, s. 25]. [20, s. 9][22, s. 20][26] *Kompaktius* tarkoittaa, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu [8, s. 36][16, s. 99]. Kompaktius voidaan määritellä myös *peitteiden* avulla [2, s. 203]. Peitteisiin tutustutaan luvussa 4.

Lause 3.27. *Olkoon μ säännöllinen ulkomitta joukossa X. Jos $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, niin*

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Todistus. Koska μ on säännöllinen, on olemassa sellainen μ-mitallinen jono $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$, että $A_k \subset C_k$ ja $\mu(A_k) = \mu(C_k)$ jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti. Lisäksi huomataan, että $A_k \subset C_j$, kun $j \geq k$, koska jono $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ on kasvava. Asetetaan kasvava jono

$$B_k = \bigcap_{j \geq k} C_j \,.$$

Tällöin joukot B_k ovat μ-mitallisia ja $A_k \subset B_k \subset C_k$, joten

$$\mu(A_k) \leq \mu(B_k) \leq \mu(C_k)\,.$$

Koska $\mu(A_k) = \mu(C_k)$, saadaan yhtälö $\mu(A_k) = \mu(B_k)$, joten lauseen 3.6(c) nojalla

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

koska $A_k \subset B_k$. Toinen suunta seuraa monotonisuudesta. $\square$

Lauseessa 3.27 joukkojen A_k ei tarvitse olla μ-mitallisia. Seuraavan lauseen avulla Borel-säännöllisestä ulkomitasta voidaan muodostaa Radon-mitta.

Lause 3.28. *Olkoot μ Borel-säännöllinen ulkomitta joukossa $\mathbb{R}^n$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$ sellainen μ-mitallinen joukko, että $\mu(A) < \infty$. Tällöin $\mu \llcorner A$ on Radon-mitta.*

Todistus. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko. Huomataan, että ulkomitan rajoittumalle $(\mu \llcorner A)(K) = \mu(K \cap A) \leq \mu(A) < \infty$. Lauseen 3.4(d) nojalla jokainen μ-mitallinen joukko on myös $\mu \llcorner A$-mitallinen, jolloin myös $\mu \llcorner A$ on Borel-mitta.

Osoitetaan, että joukon A voidaan olettaa olevan Borel-joukko. Koska μ on Borel-säännöllinen, määritelmän 3.26(b) nojalla on olemassa sellainen Borel-joukko B, että $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Joukon A μ-mitallisuuden nojalla

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = 0\,.$$

Olkoon $C \subset \mathbb{R}^n$. Koska $(C \cap B) \setminus A \subset B \setminus A$, saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}
(\mu \llcorner B)(C) &= \mu(C \cap B) \\
&= \mu(C \cap B \cap A) + \mu\big((C \cap B) \setminus A\big) \\
&\leq \mu(C \cap A) + \mu(B \setminus A) \\
&= (\mu \llcorner A)(C)\,.
\end{aligned}$$

Toinen suunta seuraa monotonisuudesta. Nyt $\mu \llcorner B = \mu \llcorner A$, joten voidaan olettaa, että A on Borel-joukko.

Osoitetaan, että $\mu \llcorner A$ on Borel-säännöllinen. Olkoon $C \subset \mathbb{R}^n$. Koska μ on Borel-säännöllinen, on sellainen Borel-joukko E, että $A \cap C \subset E$ ja $\mu(E) = \mu(A \cap C)$.

Olkoon $D = E \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Koska joukot A ja E ovat Borel-joukkoja, myös joukko D on Borel-joukko. Lisäksi huomataan, että

$$C \subset (A \cap C) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \subset D \qquad \text{ja} \qquad D \cap A = E \cap A.$$

Tutkittaessa joukkoja C ja D saadaan yhtälö

$$(\mu \llcorner A)(D) = \mu(D \cap A) = \mu(E \cap A) \leq \mu(E) = \mu(C \cap A) = (\mu \llcorner A)(C).$$

Toinen suunta seuraa monotonisuudesta. Ulkomitta $\mu \llcorner A$ on siis Radon-mitta. □

Jos lauseessa 3.28 joukko A on Borel-joukko, niin ulkomitta $\mu \llcorner A$ on ainoastaan Borel-säännöllinen. Tämä tulos on voimassa myös, jos $\mu(A) = \infty$. Tämä huomataan, kun yllä olevasta todistuksesta poistetaan kompaktiuteen liittyvä osa ja joukon A osoittaminen Borel-joukoksi.

Apulause 3.29. *Olkoot $A_i, C_j \subset \mathbb{R}^n$, joissa $i, j \in \mathbb{Z}^+$.*

(a) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_j \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$.

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus C_i)$.

Todistus. Merkitään $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

$$\text{(a)} \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_j \right) \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_j \text{ jokaista } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ kohti}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j.$$

$$\text{(b)} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \quad \Rightarrow \quad x \in A_i \text{ ja } x \notin C_j \text{ jollain } i \text{ ja jokaista } j \text{ kohti}$$
$$\Rightarrow \quad x \in A_i \text{ ja } x \notin C_i \text{ jollain } i$$
$$\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus C_i). \quad \square$$

Siirrytään sitten arvioimaan Borel-joukkoja. Kun Borel-joukkoja osataan arvioida, voidaan siirtyä myös muihin joukkoihin.

Apulause 3.30. *Olkoot μ Borel-mitta joukossa $\mathbb{R}^n$ ja B Borel-joukko.*

(a) *Jos $\mu(B) < \infty$, niin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen suljettu joukko C, että*

$$C \subset B \qquad \text{ja} \qquad \mu(B \setminus C) < \varepsilon.$$

(b) *Jos μ on Radon-mitta, niin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin* *joukko U, että*

$$B \subset U \qquad ja \qquad \mu(U \setminus B) < \varepsilon .$$

Todistus. Olkoon $\nu = \mu \llcorner B$. Koska μ on Borel-mitta ja $\mu(B) < \infty$, ulkomitta ν on äärellinen Borel-mitta. Määritellään kokoelma

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \big\{ & A \subset \mathbb{R}^n \, : \, A \text{ on } \mu\text{-mitallinen ja jokaista } \varepsilon > 0 \\ & \qquad \text{kohti on olemassa sellainen suljettu joukko } C \subset A, \text{ että } \nu(A \setminus C) < \varepsilon \big\}.\end{aligned}$$

Kokoelma $\mathcal{F}$ sisältää kaikki suljetut joukot, koska μ on Borel-mitta ja kaikki suljetut joukot ovat Borel-joukkoja, ja koska joukko C voidaan valita joukoksi A, jolloin $\nu(A \setminus C) = 0 < \varepsilon$.

Väite 1 : Jos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, niin $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $i \in \mathbb{Z}^+$. Koska $A_i \in \mathcal{F}$, on olemassa sellainen suljettu joukko $C_i \subset A_i$, että $\nu(A_i \setminus C_i) < \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon$. Leikkausjoukko A on μ-mitallinen lauseen 3.6(a) nojalla. Olkoon $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Tällöin $C \subset A$ ja C on suljettu lauseen 2.7(c) nojalla, joten

$$\begin{aligned}\nu(A \setminus C) &= \nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\ &= \nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \cap \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus C_i)\right]\right) \\ &= \nu\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \cap (\mathbb{R}^n \setminus C_i)\right)\right] \\ &\le \nu\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus C_i)\right] \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i \setminus C_i) \\ &< \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon .\end{aligned}$$

Siis $A \in \mathcal{F}$. Kokoelma $\mathcal{F}$ on suljettu numeroituvien leikkauksien suhteen.

Väite 2 : Jos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, niin $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Olkoot $\varepsilon > 0$ ja C_i kuten väitteessä 1. Yhdistejoukko on μ-mitallinen lauseen 3.6(a) nojalla. Koska $\nu(A) < \infty$, lauseen 3.6(d) ja apulauseen 3.29 nojalla saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_j\right) &= \nu\left[\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_j\right)\right] \\
&= \nu\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right] \\
&\leq \nu\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus C_i)\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i \setminus C_i) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Näin ollen on olemassa sellainen luku $K \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{K} C_j\right) < \varepsilon.$$

Koska joukko $\bigcup_{j=1}^{K} C_j$ on suljettu lauseen 2.7(d) nojalla ja $\bigcup_{j=1}^{K} C_j \subset A$, $A \in \mathcal{F}$.

Lauseen 2.10 nojalla kokoelma $\mathcal{F}$ sisältää kaikki avoimet joukot, koska se sisältää kaikki suljetut joukot — erityisesti suljetut pallot — ja numeroituvat yhdisteet. Tarkastellaan seuraavaksi kokoelmaa

$$\mathcal{G} = \big\{A \in \mathcal{F} \,:\, \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{F}\big\}.$$

Huomataan, että jos $A \in \mathcal{G}$, niin $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{G}$. Kokoelma $\mathcal{G}$ sisältää kaikki avoimet ja suljetut joukot. Myös $\varnothing$ sisältyy kokoelmaan $\mathcal{G}$.

Väite 3 : Jos $\big\{A_i\big\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$, niin $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$.

Koska $A_i \in \mathcal{F}$, niin väitteen 2 mukaan $A \in \mathcal{F}$. Kokoelman $\mathcal{G}$ määritelmän mukaan jono $\{\mathbb{R}^n \setminus A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, joten väitteen 1 ja De Morganin lain nojalla

$$\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus A_i) \in \mathcal{F}.$$

On osoitettu, että $\mathcal{G}$ on σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot, minkä johdosta se sisältää myös Borel-joukot. Erityisesti Borel-joukko $B \in \mathcal{G}$. Koska $B \in \mathcal{F}$, jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen suljettu joukko $C \subset B$, että

$$\mu(B \setminus C) = \mu\big((B \setminus C) \cap B\big) = \nu(B \setminus C) < \varepsilon.$$

Väite (a) on todistettu.

Oletetaan nyt, että μ on Radon-mitta. Olkoon $U_j = B(0, j)$ eli avoin pallo, jonka keskus on origo ja jonka säde on $j \in \mathbb{Z}^+$. Tällöin $U_j \setminus B$ on sellainen Borel-joukko, että $\mu(U_j \setminus B) < \infty$, koska pallo U_j sisältyy suljettuun palloon $\overline{B}(0, j+1)$ ja $\mu\big(\overline{B}(0, j+1)\big) < \infty$. Tämän lauseen (a)-kohdan nojalla on olemassa sellainen suljettu joukko $C_j : C_j \subset U_j \setminus B \subset U_j$, että

$$\mu\big((U_j \setminus C_j) \setminus B\big) = \mu\big((U_j \setminus B) \setminus C_j\big) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Olkoon $U = \bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \setminus C_j)$. Tällöin U on avoin lauseen 2.7, kohtien (a) ja (b) nojalla. Huomataan, että $B \subset \mathbb{R}^n \setminus C_j$, joten $U_j \cap B \subset U_j \cap (\mathbb{R}^n \setminus C_j) = U_j \setminus C_j$. Tästä seuraa, että

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \cap B) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \setminus C_j) = U,$$

ja

$$\begin{aligned}\mu(U \setminus B) &= \mu\left(\left[\bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \setminus C_j)\right] \setminus B\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\big((U_j \setminus C_j) \setminus B\big)\right) \le \sum_{j=1}^{\infty}\mu\big((U_j \setminus C_j) \setminus B\big) < \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Edellisessä lauseessa käytettiin tekniikkaa, jossa joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ pilkottiin osiin origokeskisten pallojen avulla ja sitten se esitettiin numeroituvana yhdisteenä. Kun käsitellään Radon-mittoja, niin suljettujen pallojen ulkomitta on aina äärellinen. Jos siis joukko A on jonkun suljetun pallon sisällä, niin sen ulkomitta $\mu(A)$ on äärellinen. Myös rengasjoukoille eli kahden origokeskisen pallon erotukselle on sovelluksia.

Lause 3.31. *Olkoon μ Radon-mitta joukossa $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti*

$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) \,:\, A \subset U,\, U \text{ on avoin}\big\}.$$

(b) *Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on μ-mitallinen, niin*

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(K) \,:\, K \subset A,\, K \text{ on kompakti}\big\}.$$

Todistus. (a) Jos $\mu(A) = \infty$, niin monotonisuuden nojalla $\mu(U) = \infty$ jokaista $A \subset U$ kohti. Tällöin väite on tosi. Oletetaan, että $\mu(A) < \infty$ ja että A on Borel-joukko. Olkoon $\varepsilon > 0$. Apulauseen 3.30(b) nojalla on olemassa sellainen avoin joukko U, että $A \subset U$ ja $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$. Joukon A μ-mitallisuuden nojalla

$$\mu(U) = \mu(U \cap A) + \mu(U \setminus A) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Tämä on infimumin ε-karakterisointi, joten kohta (a) on tosi, jos A on Borel-joukko. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on mikä tahansa joukko, niin ulkomitan μ Borel-säännöllisyys takaa, että on olemassa sellainen Borel-joukko B, että $A \subset B$ ja että $\mu(A) = \mu(B)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mu(B) &= \inf\big\{\mu(U) \,:\, B \subset U,\, U \text{ on avoin}\big\} \\ &\geq \inf\big\{\mu(U) \,:\, A \subset U,\, U \text{ on avoin}\big\},\end{aligned}$$

koska infimum voi ainoastaan vähetä, kun reaalilukujoukkoon lisätään alkioita. Toisaalta koska $\mu(A) \leq \mu(U)$ jokaista $A \subset U$ kohti, päätellään, että

$$\mu(A) \leq \inf\big\{\mu(U) \,:\, A \subset U,\, U \text{ on avoin}\big\}.$$

Siirrytään kohtaan (b). Olkoon A μ-mitallinen ja $\mu(A) < \infty$. Määritellään ulkomitta $\nu = \mu \llcorner A$. Lauseen 3.28 nojalla ν on Radon-mitta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Soveltaen kohtaa (a) ulkomittaan ν ja joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus A$ löydetään sellainen avoin joukko U, että $\mathbb{R}^n \setminus A \subset U$ ja että

$$\nu(U) \leq \underbrace{\nu(\mathbb{R}^n \setminus A)}_{=0} + \varepsilon = \varepsilon.$$

Olkoon $C = \mathbb{R}^n \setminus U$, joka on suljettu joukko ja lisäksi $C \subset A$. Huomataan, että

$$\mu(A \setminus C) = \mu\big((\mathbb{R}^n \setminus C) \cap A\big) = \nu(\mathbb{R}^n \setminus C) = \nu(U) \leq \varepsilon.$$

Määritelmän 3.1 nojalla $\mu(A) \leq \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C)$. Monotonisuus huomioiden saadaan epäyhtälöt

$$0 \leq \mu(A) - \mu(C) \leq \mu(A \setminus C) \leq \varepsilon,$$

joten supremumin ε-karakterisoinnin perusteella kirjoitetaan

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(C) \,:\, C \subset A,\, C \text{ on suljettu}\big\}. \tag{3.32}$$

Oletetaan seuraavaksi, että $\mu(A) = \infty$. Määritellään joukot $D_k \subset \mathbb{R}^n$:

$$D_k = \big\{x \,:\, k-1 \leq \|x\| < k\big\}, \qquad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Ne ovat ikään kuin rengasjoukkoja origon ympärillä. Ne ovat myös Borel-joukkoja. Koska ne ovat erillisiä ja niiden yhdiste peittää koko joukon $\mathbb{R}^n$, päätellään, että $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(D_k \cap A)$ ja lauseen 3.6(b) nojalla $\infty = \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k \cap A)$. Koska μ on Radon-mitta ja koska joukko $D_k \cap A$ sisältyy suljettuun palloon $\overline{B}(0, k+1)$, $\mu(D_k \cap A) < \infty$ jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti. Yhtälön (3.32) nojalla on olemassa sellainen suljettu joukko $C_k : C_k \subset D_k \cap A$, että $\mu(C_k) \geq \mu(D_k \cap A) - \frac{1}{2^k}$. Huomataan, että

$\bigcup_{k=1}^{n} C_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \subset A$. Lauseen 3.6 kohdista (c) ja (b) seuraa, että

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu(D_k \cap A) - \frac{1}{2^k}\right) \\
&= \infty - 1 = \infty .
\end{aligned}$$

Koska $\bigcup_{k=1}^{n} C_k$ on suljettu (tarkemmin, kompakti) joukko jokaista $n \in \mathbb{Z}^+$ kohti, väite (3.32) on voimassa myös silloin, kun $\mu(A) = \infty$.

Osoitetaan lopuksi, että arviointi kompakteilla joukoilla riittää. Olkoon $\overline{B}(0, m)$ suljettu pallo, joka on origokeskinen ja jonka säde on $m \in \mathbb{Z}^+$. Oletetaan lisäksi, että A on μ-mitallinen joukko, $\mu(A) < \infty$, ja $\varepsilon > 0$. Tällöin yhtälön (3.32) nojalla on olemassa sellainen suljettu joukko $C \subset A$, että $\mu(C) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Määritellään

$$C_m = C \cap \overline{B}(0, m) .$$

Jokainen joukko C_m on kompakti ja lauseen 3.27 nojalla

$$\lim_{m\to\infty} \mu(C_m) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) = \mu(C) ,$$

joten on olemassa sellainen luku $M \in \mathbb{Z}^+$, että $\mu(C_M) > \mu(C) - \frac{\varepsilon}{2}$. Osasummien jono on kasvava, koska ulkomitta on aina epänegatiivinen. Tällöin

$$\mu(C_M) > \mu(A) - \varepsilon .$$

Tästä seuraa, että $\mu(A) = \sup\left\{\mu(K) \ : \ K \subset A, K \text{ on kompakti}\right\}$. Tapauksessa $\mu(A) = \infty$ aiempi päättely joukoista $C_k \subset D_k \cap A$ riittää, koska ne ovat kompakteja joukkoja. $\square$

Äsken todistettua lausetta 3.31 tarvitaan sekä peitteiden tarkastelussa luvussa 4 ja derivoinnin yhteydessä luvussa 5.

3.3 Mitallinen funktio

Tähän asti on tutkittu *joukkojen* mitallisuutta. Laajennetaan mitallisuuden käsite myös *funktioille*. Sitä varten tutkitaan hieman topologisia avaruuksia [2, s. 387].

Määritelmä 3.33. Olkoot $f : X \to Y$ ja $A \subset Y$. Joukon A *alkukuva*

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \,:\, f(x) \in A\}.$$

Alkukuvan määritelmästä seuraa tärkeä tulos, jota hyödynnetään, kun osoitetaan eräitä kokoelmia σ-algebroiksi.

Lause 3.34. *Olkoon* $f : X \to Y$.

(a) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ *jokaista joukkoa* $A \subset Y$ *kohti.*

(b) $f^{-1}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$ *jokaista kokoelmaa* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ *kohti.*

(c) $f^{-1}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$ *jokaista kokoelmaa* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ *kohti.*

Todistus. [7, s. 30] $\square$

Mitallisen funktion määritelmässä 3.37 esiintyy käsite *topologinen avaruus*. Metrisen avaruuden avointen joukkojen kokoelma määrittelee erään topologian [16, s. 30]. Metriikkojen käsittely sivuutetaan, mutta niistä on olemassa erinomainen esityksiä [1, s. 518-549][7, s. 146-166][16, s. 21-28]. Erityisesti jokainen normiavaruus ja sen osajoukko on metrinen avaruus [1, s. 520][16, s. 22]. Tällöin $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ on metrinen avaruus.

Määritelmä 3.35 (Topologia). *Topologinen avaruus* on järjestetty pari $(X, \mathcal{T})$, jossa X on joukko ja $\mathcal{T}$ on sellainen kokoelma joukon X osajoukkoja, että

- $\varnothing \in \mathcal{T}$ ja $X \in \mathcal{T}$,
- jos $E_1, E_2, \ldots$ on jono kokoelman $\mathcal{T}$ alkioita, niin $\bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$,
- jos $E_1, E_2, \ldots, E_N$ on jono kokoelman $\mathcal{T}$ alkioita, niin $\bigcap_{n=1}^{N} \in \mathcal{T}$.

Määritelmän 3.35 kokoelmaa $\mathcal{T}$ kutsutaan *topologiaksi*. Topologisen avaruuden alkioita kutsutaan *avoimiksi joukoiksi*. Nimitystä voi perustella lauseen 2.7 kohdilla (a) ja (b). Yleisesti ottaen joukon avoimuus on riippuvainen joukon X metriikasta. [8, s. 8-9][16, s. 29]

Esimerkki 3.36. (a) Eräs joukon $\mathbb{R}$ topologia on

$$\mathcal{T} = \{U \,:\, U \subset \mathbb{R} \text{ on avoin metriikan } |\cdot| \text{ suhteen}\}.$$

Tulos seuraa lauseista 2.7(a) ja 2.7(b). Tätä topologiaa, joka oikeastaan on joukon $\mathbb{R}$ *metriikan* $|\cdot|$ *määräämä topologia*, käytetään, mikäli muuta ei mainita.

(b) Eräs joukon $[-\infty, \infty] = \{-\infty\} \cup \{\infty\} \cup \mathbb{R}$ topologia on

$$\begin{aligned}\mathcal{T} = \{&U,\, \{-\infty\} \cup U,\; U \cup \{\infty\},\; \{-\infty\} \cup U \cup \{\infty\},\\ &\{-\infty\},\; \{\infty\},\; \{-\infty, \infty\} \,:\, U \subset \mathbb{R} \text{ on avoin metriikan } |\cdot| \text{ suhteen}\}.\end{aligned}$$

Tulos seuraa lauseista 2.7(a) ja 2.7(b). Äärettömyydet ovat myös yksiöinä mukana, sillä jokaista $a \in \mathbb{R}$ kohti

$$\big(\{-\infty\} \cup (a, a+1)\big) \cap \big(\{-\infty\} \cup (a+2, a+3)\big) = \{-\infty\}\,.$$

Tätä topologiaa käytetään, mikäli muuta ei mainita. $\square$

Laajennetussa reaalilukujen joukossa joukko $A \subset [-\infty, \infty]$ on avoin, jos ja vain jos $A \setminus \{-\infty, \infty\} \subset \mathbb{R}$ on avoin. Avoimuus on siis topologisessa mielessä, koska laajennetun reaalilukujoukon metriikka on poikkeuksellinen. [1, s. 7-9][27][28] Seuraavassa määritelmässä yhdistetään μ-mitallisuus ja alkukuva.

Määritelmä 3.37 (Mitallinen funktio). Olkoot X joukko, Y topologinen avaruus ja μ ulkomitta joukossa X.

(a) Kuvaus $f : X \to Y$ on *μ-mitallinen*, jos

$$f^{-1}(U)$$

on μ-mitallinen jokaista avointa joukkoa $U \subset Y$ kohti.

(b) Jos X on topologinen avaruus, niin kuvaus $f : X \to Y$ on *Borel-mitallinen*, jos

$$f^{-1}(U)$$

on Borel-joukko jokaista avointa joukkoa $U \subset Y$ kohti.

Mitallisuus siis tarkoittaa, että avoimen joukon alkukuva kuuluu σ-algebraan. Määritelmän 3.37 topologinen avaruus on usein $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, vaikka määritelmissä ja lauseissa käytetään yleistä topologista avaruutta. Seuraava esimerkki on yleistys Axlerin kirjan tuloksesta [7, s. 33].

Esimerkki 3.38. Jos $f : \mathbb{R}^n \to Y$ on jatkuva, niin f on Borel-mitallinen.

Todistus. Todistus perustuu kurssin Measure and Integration -muistiinpanoihin. Olkoon $U \subset Y$ avoin. Jos $f^{-1}(U) = \varnothing$, niin $f^{-1}(U)$ on Borel-joukko. Muulloin, valitaan $x \in f^{-1}(U)$. Tällöin $f(x) \in U$ ja koska U on avoin, on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että

$$B\big(f(x), \varepsilon\big) \subset U\,.$$

Koska f on jatkuva jokaisessa joukon $\mathbb{R}^n$ pisteessä, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f\big(B(x,\delta)\big) \subset B\big(f(x), \varepsilon\big) \subset U\,.$$

Tällöin $B(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$ eli jokainen joukon $f^{-1}(U)$ piste on sisäpiste. Tällöin $f^{-1}(U)$ on avoin ja sitä myötä myös Borel-joukko. $\square$

Mitallisuuden määritelmässä käytetään avoimia joukkoja. Koska Borel-joukot kuuluvat pienimpään σ-algebraan, joka sisältää avoimet joukot, mitallisuuden osoittamisessa käsitellään σ-algebroja.

Lause 3.39. (a) *Kuvaus $f : X \to Y$ on μ-mitallinen, jos ja vain jos $f^{-1}(B)$ on μ-mitallinen jokaista Borel-joukkoa $B \subset Y$ kohti.*

(b) *Kuvaus $f : X \to [-\infty, \infty]$ on μ-mitallinen, jos ja vain jos $f^{-1}\big([-\infty, a)\big)$ on μ-mitallinen jokaista $a \in \mathbb{R}$ kohti.*

Todistus. (a) Lauseiden 3.4(b), 3.6(a) ja 3.34(a), 3.34(b) nojalla kokoelma

$$\big\{A \subset Y \,:\, f^{-1}(A) \text{ on } \mu\text{-mitallinen}\big\}$$

on σ-algebra, jossa on kaikki avoimet joukot. Tällöin myös Borel-joukot kuuluvat siihen.

Toisaalta, jos $f^{-1}(B)$ on μ-mitallinen jokaista Borel-joukkoa $B \subset Y$ kohti, niin $f^{-1}(U)$ on μ-mitallinen jokaista avointa joukkoa $U \subset Y$ kohti, koska jokainen avoin joukko on Borel-joukko.

(b) Vastaavasti kuin (a)-kohdassa todetaan, että kokoelma

$$\mathcal{S} = \big\{A \subset [-\infty, \infty] \,:\, f^{-1}(A) \text{ on } \mu\text{-mitallinen}\big\}$$

on σ-algebra.

”$\Leftarrow$” : Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Koska $[-\infty, a) \in \mathcal{S}$, σ-algebran ominaisuuksien nojalla myös $[a, b) \in \mathcal{S}$, missä $b > a$. Huomataan, että

$$(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{k+1}, b\right) \,,$$

joten kokoelma $\mathcal{S}$ sisältää avoimet *välit* joukosta $\mathbb{R}$ ja sitä kautta avoimet *joukot* reaalilukujen joukosta [15, s. 30]. Tällöin $\{-\infty\} \in \mathcal{S}$, koska $\{-\infty\} = [-\infty, a) \setminus \mathbb{R}$ ja edelleen $\{\infty\} \in \mathcal{S}$. Nyt kaikki avoimet joukot joukosta $[-\infty, \infty]$ kuuluvat kokoelmaan $\mathcal{S}$ eli f on μ-mitallinen.

”$\Rightarrow$” : Kokoelma $\mathcal{S}$ sisältää kaikki avoimet joukot $U \subset [-\infty, \infty]$. Tällöin jokaista $a \in \mathbb{R}$ kohti $[-\infty, a) \in \mathcal{S}$. $\square$

Lauseen 3.39(b) kohdan mukaan jos $f : X \to [-\infty, \infty]$ on μ-mitallinen, niin sekä $f^{-1}\big(\{-\infty\}\big)$ että $f^{-1}\big(\{\infty\}\big)$ ovat μ-mitallisia. Lauseen 3.39 tulokset ovat voimassa, jos μ-mitallisuus korvataan Borel-mitallisuudella. [19, s. 107]

Esimerkki 3.40 (Jatkoa esimerkkiin 3.11). Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$. Tällöin f on $\mathcal{S}_A$-mitallinen, jos ja vain jos f on $\mathcal{S}$-mitallinen ja f on vakio joukossa A.

Todistus. Olkoon f ensin $\mathcal{S}_A$-mitallinen. Tällöin f on $\mathcal{S}$-mitallinen joukon $\mathcal{S}_A$ määritelmän nojalla. Oletetaan vastaväitteenä, että kuvaus f ei ole vakio joukossa A. Tällöin on olemassa erisuuruiset reaaliluvut $f(a)$ ja $f(b)$, kun $a, b \in A \subset X$. Voidaan olettaa, että $f(a) < f(b)$. Valitaan $\varepsilon = \frac{f(b)-f(a)}{2} > 0$ ja muodostetaan Borel-joukko $B = \big(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\big) \subset \mathbb{R}$. Huomataan, että kumpikaan ehdoista

$$A \subset f^{-1}(B) \quad \text{tai} \quad A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$$

ei ole voimassa, jolloin $f^{-1}(B) \notin \mathcal{S}_A$. Tämä on ristiriita $\mathcal{S}_A$-mitallisuuden kanssa, joten f on vakio joukossa A.

Olkoon f sitten $\mathcal{S}$-mitallinen ja $f(A) = c \in \mathbb{R}$. Jos c kuuluu Borel-joukkoon $B \subset \mathbb{R}$, niin $f^{-1}(B) \supset A$. Kun tiedetään, että $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$, niin joukon $\mathcal{S}_A$ määritelmän mukaan f on $\mathcal{S}_A$-mitallinen. Toisaalta jos $c \notin B$, niin $A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$. Tällöinkin f on $\mathcal{S}_A$-mitallinen. □

Analyysin peruskursseilta tiedetään, että lukujonolla ei välttämättä ole raja-arvoa. Seuraava määritelmä takaa, että jokaisella reaalilukujonolla on olemassa ainakin jonkinlainen raja-arvo.

Määritelmä 3.41. Olkoon $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono alkiota joukosta $[-\infty, \infty]$. Tällöin *yläraja-arvo* määritellään

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right)$$

ja *alaraja-arvo* vastaavasti

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} x_m\right).$$

Yläraja-arvon tapauksessa huomataan, että lukujono $\{\sup_{m\geq n} x_m\}_{n=1}^{\infty}$ on *vähenevä*. Tällöin yläraja-arvo on *aina olemassa*: se on ∞, jos jokainen osajono $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ sisältää alkion ∞; $-\infty$, jos jono $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ on *alhaalta rajoittamaton* ja muulloin äärellinen [15, s. 36]. Alaraja-arvo tutkitaan vastaavasti. Jokaista jonoa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [-\infty, \infty]$ ja $n \in \mathbb{Z}^+$ kohti on voimassa

$$\inf_{m\geq n} x_m \leq \sup_{m\geq n} x_m,$$

joten $\liminf_{n\to\infty}(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n)$. Seuraava tulos antaa määritelmälle 3.41 vaihtoehtoisen esityksen.

Apulause 3.42. *Olkoon $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono alkiota joukosta $[-\infty, \infty]$. Tällöin*

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n) = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{m\geq k} x_m\right)$$

ja

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n) = \sup_{k\geq 1}\left(\inf_{m\geq k} x_m\right).$$

Todistus. Todistuksen idea on lähteestä [29]. Tarkastellaan vain yläraja-arvoa, sillä väite alaraja-arvosta todistetaan vastaavasti. Huomataan, että

$$\sup_{m\geq k+1} x_m \leq \sup_{m\geq k} x_m \quad \text{jokaista } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ kohti}.$$

Olkoon $k \geq 1$ kiinnitetty ja merkitään $a_k = \sup_{m\geq k} x_m$. Oletetaan aluksi, että vähenevä jono $\{a_k\}$ on rajoitettu. Tällöin on olemassa jonon $\{a_k\}$ suurin alaraja, $S = \inf_{k\geq 1} a_k$. Osoitetaan, että $S = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin jonon vähenevyyden nojalla on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N, että

$$S \leq a_n < S + \varepsilon, \qquad \text{jokaista } n \geq N \text{ kohti}.$$

Tällöin $|a_n - S| < \varepsilon$, kun $n \geq N$, joten $S = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tämä tarkoittaa, että

$$\inf_{k\geq 1}\left(\sup_{m\geq k} x_m\right) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right) = \limsup_{n\to\infty} x_n\,.$$

Jos jono $\{a_k\}$ on rajoittamaton, niin jonon alkua täytyy tarkastella tarkemmin, koska alkiot x_n ovat joukosta $[-\infty, \infty]$. Vähenevyys on avainasemassa. Jos $a_k = \infty$ jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti, niin lauseen väite toteutuu muodossa $\infty = \infty$. Vähenevyydestä seuraa, että muut mahdollisuudet ovat: $a_k = \infty$, kun $k \leq K \in \mathbb{Z}^+$, tai $a_1 < \infty$. Tällöin vähenevyyden nojalla $a_{K+1} < \infty$ ja jonon $\{a_k\}_{K+1}^{\infty}$ täytyy olla *alhaalta* rajoittamaton, koska a_{K+1} on vähenevän jonon $\{a_k\}_{K+1}^{\infty}$ yläraja. Tällöin on oltava $\inf_{k\geq 1} a_k = -\infty$. Jos $y \in \mathbb{R}$, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N, että

$$a_n < y, \qquad \text{jokaista } n \geq N \text{ kohti}.$$

Raja-arvon määritelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty = \inf_{k\geq 1} a_k$.

Alaraja-arvoa varten huomataan, että infimumilla on ominaisuus

$$\inf_{m\geq k+1} x_m \geq \inf_{m\geq k} x_m \quad \text{jokaista } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ kohti}. \qquad \square$$

Mittateorian pohjalta määritellään integraaliteoria, joka on toimivampi ja yleisempi kuin Riemannin integraaliteoria. Eräs vaatimus integroinnille on, että käsitellään vain μ-mitallisia funktioita tai yleisemmin $\mathcal{S}$-mitallisia funktioita, jossa $\mathcal{S}$ on jokin σ-algebra. Mitallisia funktioita voidaan yhdistellä esimerkiksi summaamalla, kertomalla tai valitsemalla äärellisestä määrästä suurin. Näin muodostettu funktio on yhä mitallinen.

Lause 3.43. (a) *Jos $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ ovat μ-mitallisia, niin tällöin*

$$f+g,\ \ fg,\ \ |f|,\ \ \min(f,g)\quad \textit{ja}\quad \max(f,g)$$

ovat μ-mitallisia. Jos $g \neq 0$ joukossa X, niin $\frac{f}{g}$ on μ-mitallinen.

(b) *Jos kuvaukset $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ ovat μ-mitallisia jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti, niin*

$$\inf_{k\geq 1} f_k,\ \ \sup_{k\geq 1} f_k,\ \ \liminf_{k\to\infty} f_k \quad \textit{ja} \quad \limsup_{k\to\infty} f_k$$

ovat μ-mitallisia.

Todistus. Lauseen 3.39 ja σ-algebran ominaisuuksien nojalla seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:

$$\begin{aligned} & f : X \to [-\infty, \infty] \text{ on } \mu\text{-mitallinen.} \\ \Leftrightarrow\quad & f^{-1}\big([-\infty, a)\big) \text{ on } \mu\text{-mitallinen jokaista } a \in \mathbb{R} \text{ kohti.} \\ \Leftrightarrow\quad & f^{-1}\big([-\infty, a]\big) \text{ on } \mu\text{-mitallinen jokaista } a \in \mathbb{R} \text{ kohti.} \end{aligned}$$

Tarkastellaan useimpien kohtien todistuksia. Funktioiden mitallisuustodistuksia on useissa lähteissä [4, s. 23-25][7, s. 35-37][10, s. 17-18][22, s. 56-61, 68–69].

(a) Kun tarkastellaan summafunktiota ja joukon $\{-\infty\}$ alkukuvaa, vähintään toinen funktioista saa arvon $-\infty$, mutta kumpikaan funktio ei voi saada arvoa ∞, koska $f+g=-\infty$. Näin vältytään tilanteilta $\infty - \infty$ ja $-\infty + \infty$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} &(f+g)^{-1}\big([-\infty, a)\big) \\ &\qquad = (f+g)^{-1}\big(\{-\infty\} \cup (-\infty, a)\big) \\ &\qquad = \big\{x \in X \,:\, f(x)+g(x) = -\infty \quad \text{tai} \quad f(x)+g(x) < a\big\} \\ &\qquad = \big\{x \,:\, f(x) = -\infty\big\} \cup \big\{x \,:\, g(x) = -\infty\big\} \cup \big\{x \,:\, f(x) < a - g(x)\big\} \\ &\qquad = f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cup g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cup \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \,:\, f(x) < r \text{ ja } r < a - g(x)\} \\ &\qquad = f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cup g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cup \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r+s<a}} \{x \,:\, f(x) < r \text{ ja } g(x) < s\} \\ &\qquad = f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cup g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cup \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r+s<a}} \Big[f^{-1}\big((-\infty, r)\big) \cap g^{-1}\big((-\infty, s)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Kyseessä on numeroituva yhdiste μ-mitallisia joukkoja, joten $(f+g)^{-1}\big([-\infty, a)\big)$ on μ-mitallinen jokaista $a \in \mathbb{R}$ kohti eli $f+g$ on μ-mitallinen. Vastaavasti päätellään, että cf on μ-mitallinen jokaista $c \in \mathbb{R}$ kohti. Tapaukset $c < 0, c = 0$ ja $c > 0$ käsitellään erikseen. Erityisesti, $-f$ ja $\frac{1}{2}f$ ovat μ-mitallisia.

Olkoon $a \geq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(f^2)^{-1}\big([-\infty, a]\big) &= \big\{x \in X \,:\, f^2(x) = -\infty \quad \text{tai} \quad f^2(x) \leq a\big\} \\
&= \big\{x \,:\, f^2(x) = -\infty\big\} \cup \big\{x \,:\, f^2(x) < 0\big\} \cup \big\{x \,:\, 0 \leq f^2(x) \leq a\big\} \\
&= \varnothing \cup \varnothing \cup \big\{x \,:\, -\sqrt{a} \leq f(x) \leq \sqrt{a}\big\} \\
&= f^{-1}\big((-\infty, \sqrt{a}]\big) \setminus f^{-1}\big((-\infty, -\sqrt{a})\big),
\end{aligned}$$

joten f^2 on μ-mitallinen, koska tapauksessa $a < 0$ päädytään tyhjään joukkoon, joka on μ-mitallinen. Tähänastisen tarkastelun nojalla kuvaus

$$fg = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)$$

on μ-mitallinen. Jos $g \neq 0$, niin funktioiden osamäärän μ-mitallisuus seuraa tulofunktiosta, sillä $\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}\big(\{-\infty\}\big) = \varnothing$. [10, s. 18]

Merkitään $f^+ = \max(f, 0)$ ja $f^- = \max(-f, 0)$. Tällöin $f^+ \geq 0$ ja $f^- \geq 0$. Seuraavan todistuksen idea perustuu lähteeseen [30]. Jos $a \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned}
(f^+)^{-1}\big([-\infty, a)\big) &= \big\{x \in X \,:\, f^+(x) = -\infty\big\} \cup \big\{x \in X \,:\, f^+(x) < a\big\} \\
&= \varnothing \cup \big\{x \in X \,:\, f(x) < a \quad \text{ja} \quad 0 < a\big\} \\
&= f^{-1}\big((-\infty, a)\big) \cap \{x \in X \,:\, 0 < a\}.
\end{aligned}$$

Jos $a \leq 0$, niin leikkausjoukko on $\varnothing$, mutta jos $a > 0$, niin leikkausjoukko on $f^{-1}\big((-\infty, a)\big)$. Kummassakin tapauksessa kyse on μ-mitallisesta joukosta, joten f^+ on μ-mitallinen. Vastaavasti f^- on μ-mitallinen. Tällöin

$$|f| = f^+ + f^-$$

on μ-mitallinen. Tutkitaan seuraavaksi max-funktiota. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&(f-g)^+ + g \geq f - g + g = f \qquad \text{ja} \\
&(f-g)^+ + g \geq 0 + g = g,
\end{aligned}$$

joten $(f-g)^+ + g \geq \max\{f, g\}$. Toisaalta

$$\begin{aligned}
&(f-g)^+ + g = f - g + g = f \leq \max\{f, g\}, \quad && \text{jos } f \geq g, \\
&(f-g)^+ + g = 0 + g = g \leq \max\{f, g\}, && \text{jos } f < g.
\end{aligned}$$

Tällöin $(f-g)^+ + g = \max\{f, g\}$ eli $\max\{f, g\}$ on μ-mitallinen. Funktio min käsitellään vastaavasti.

Tarkastellaan lopuksi μ-mitallisia funktioita f_k, jossa $k \in \mathbb{Z}^+$. Jos $a \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned}
\left(\inf_{k\geq 1} f_k\right)^{-1} & \big([-\infty, a]\big) \\
&= \Big\{x \in X \ : \ \inf_{k\geq 1} f_k(x) = -\infty \quad \text{tai} \quad \inf_{k\geq 1} f_k(x) \leq a\Big\} \\
&= \Big\{x \in X \ : \ \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : f_{k_1}(x) = -\infty \quad \text{tai} \quad \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : f_{k_2}(x) \leq a\Big\} \\
&= \Big\{x \in X \ : \ x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big([-\infty, a]\big)\Big\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big([-\infty, a]\big).
\end{aligned}$$

Kun tarkastellaan funktiota $\sup_{k\geq 1} f_k$ lopputuloksessa on leikkaus, koska jokainen funktio f_k on korkeintaan a eli

$$\left(\sup_{k\geq 1} f_k\right)^{-1} \big([-\infty, a]\big) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cup \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big((-\infty, a]\big).$$

Funktiot $\inf_{k\geq 1} f_k$ ja $\sup_{k\geq 1} f_k$ ovat μ-mitallisia. Apulauseen 3.42 nojalla kuvaukset $\liminf$ ja $\limsup$ ovat μ-mitallisia. □

Lauseen 3.43 tulokset ovat voimassa myös silloin, kun μ-mitallisuus korvataan Borel-mitallisuudella. Kun diplomityön aiheena on *derivaatta*, osoitetaan derivoituvuuteen liittyvä tulos [7, s. 39][22, s. 69]. Siinä tarvitaan myös analyysin peruskurssien tietoja.

Esimerkki 3.44. Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, niin f' on Borel-mitallinen.

Todistus. Todistus on lähteestä [31]. Koska f on derivoituva, se on jatkuva reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ [1, s. 76]. Määritellään jokaista $n \in \mathbb{Z}^+$ ja $x \in \mathbb{R}$ kohti

$$f_n(x) = \frac{f\big(x + (1/n)\big) - f(x)}{1/n}.$$

Lauseen oletuksen mukaan $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ on olemassa. Tällöin

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Koska funktio f on jatkuva, se on esimerkin 3.38 nojalla Borel-mitallinen. Vakiofunktio $\frac{1}{n} \neq 0$ on myös Borel-mitallinen. Nyt lauseen 3.43 nojalla

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{f\big(x + (1/n)\big) - f(x)}{1/n}$$

on Borel-mitallinen. Funktio f' ei välttämättä ole jatkuva. □

Diplomityössä sivuutetaan integraaliteoria [7, s. 73-100][8, s. 19-32][10, s. 24-35], jonka tulokset oletetaan tunnetuiksi. Integrointi perustuu funktion f arvioimiseen yksinkertaisilla funktiolla joko ylhäältä tai alhaalta, minkä jälkeen määritetään supremum tai infimum arviointitavan mukaan. Mittateoreettisella integroinnilla on tutut ominaisuudet: monotonisuus, additiivisuus ja homogeenisuus. Esitellään *Fatoun lemma*, jota hyödynnetään luvussa 5, kun käsitellään derivaattaa.

Apulause 3.45 (Fatoun lemma). *Olkoot* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *jono epänegatiivisia ja* $\mathcal{S}$*-mitallisia funktiota joukosta* X*. Jos kuvaus* $f : X \to [0, \infty]$*,* $f(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$*, niin*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu .$$

Todistus. [7, s. 86] tai [8, s. 23]. $\square$

Merkintä

$$\mu\text{-m.k.}$$

tarkoittaa, että jokin ominaisuus on voimassa ulkomitan μ suhteen jokaisella alkiolla $x \in X \setminus A$, missä A on μ-mitallinen ja $\mu(A) = 0$. Vanhemmassa kirjallisuudessa on käytetty merkintää p.p. (ransk. *presque partout*) [4, s. 37]. Se mitä tapahtuu *nollamittaisessa* joukossa, voidaan jättää huomiotta. [7, s. 90][8, s. 27-28][22, s. 69-70]

Miksi integroinnissa sitten vaaditaan mitallinen funktio? Eräs toivottu ominaisuus on additiivisuus. Seuraava esimerkki osoittaa mitallisuuden tarpeellisuuden. Idea on lähteestä [32]. Valitaan σ-algebraksi $\mathcal{S} = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$, jossa on sellainen mitta μ, että $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Määritellään $f = \chi_{[0,1]}$ ja $g = 1 - \chi_{[0,1]} = \chi_{\mathbb{R}\setminus[0,1]}$. Tällöin sekä f että g ovat epänegatiivisia ja yksinkertaisia, mutta ne eivät ole $\mathcal{S}$*-mitallisia*, sillä

$$f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = [0,1] \notin \mathcal{S} \quad \text{ja} \quad g^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = \mathbb{R} \setminus [0,1] \notin \mathcal{S} .$$

Kun ajatellaan funktioita f ja g hetken aikaa, huomataan, että ainoa epänegatiivinen, yksinkertainen ja $\mathcal{S}$-mitallinen funktio, joka arvioi funktioita f ja g alhaalta on nollafunktio. Alaintegraalit olisivat silloin

$$\int_{*\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu = 0 = \int_{*\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\mu ,$$

mutta samanaikaisesti kuvaus $f + g$ olisi *integroituva*, josta seuraisi, että

$$\int_{*\mathbb{R}} (f + g) \, \mathrm{d}\mu = 1 .$$

Jos käsitellään epämitallisia funktioita, ei voida taata additiivisuutta. Tässä esimerkissä funktiot f ja g eivät ole edes integroituvia, koska ala- ja yläintegraalit eivät täsmää. Niinpä ongelmia ilmaantuu jo ennen additiivisuuttakin.

4. PEITTEET

Reaaliluvuille on olemassa kaksi erityistä peitelausetta, *Lindelöfin lemma* ja *Heinen-Borelin lause*. Ensimmäisen mukaan jokainen avoin joukko $U \subset \mathbb{R}$ voidaan peittää *numeroituvasti* avoimilla väleillä [4, s. 7]; jälkimmäisen mukaan suljetun ja rajoitetun eli kompaktin joukon $K \subset \mathbb{R}$ *avoin peite* voidaan rajoittaa äärellisen moneksi avoimeksi joukoksi, jotka yhä peittävät joukon K [7, s. 18-19]. Tulos yleistyy joukkoon $\mathbb{R}^n$. [1, s. 25-26, 293–294] Vitalin ja Besicovitchin peitelauseet ovat samantyyppisiä, sillä ne takaavat numeroituvuuden, kun peitettä muokataan joukossa $\mathbb{R}^n$.

Teoria mitan derivoinnista edellyttää peitelauseiden tuntemista ja siksi ne on sisällytetty diplomityöhön. Luvussa tutkitaan yksinomaan joukkoa $\mathbb{R}^n$. Jos $\overline{B}(x, r)$ on suljettu pallo, niin merkitään viisinkertaista palloa $\widehat{B} = \overline{B}(x, 5r)$. Luvun päälähde on ollut [10, s. 35-46].

Määritelmä 4.1 (Peite). (a) Suljettujen pallojen kokoelmaa $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ kutsutaan joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *peitteeksi*, jos

$$A \subset \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{F}} \overline{B}.$$

(b) Kokoelma $\mathcal{F}$ on joukon A *hieno peite*, jos kohdan (a) lisäksi

$$\inf\{\mathrm{diam}(\overline{B}) \,:\, x \in \overline{B},\ \overline{B} \in \mathcal{F}\} = 0$$

jokaista $x \in A$ kohti.

Hieno peite tarkoittaa, että jokainen piste peitettävästä joukosta on peitettävissä pallolla, jonka säde on miten pieni tahansa.

Määritelmä 4.2. Pallo on *epädegeneroitunut*, jos se sisältää muitakin pisteitä kuin keskipisteensä.

Toisin sanoen, epädegeneroituneen pallon säde on positiivinen. Olipa säde kuinka pieni tahansa, löydetään ainakin sellainen rationaalikoordinaattinen piste, jonka etäisyys pallon keskipisteestä on pienempi kuin annettu säde.

4.1 Vitalin peitelause

Ensimmäistä peitelausetta voisi kuvailla karkeaksi peitteeksi. Palloja suurennetaan viisinkertaiseksi, minkä johdosta päädytään numeroituvaan kokoelmaan. Diplomityössä esitetty todistus perustuu Zornin lemmaan 2.17. Lähteen [20, s. 24-25] todistus perustuu induktiiviseen pallojen valitsemiseen, jolloin tulos todistetaan ensin lisäoletuksien kanssa, mutta laajennetaan sitten yleiseen tapaukseen.

Lause 4.3 (Vitalin peitelause). *Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ sellainen kokoelma epädegeneroituneita suljettuja palloja, että*

$$\sup\{\operatorname{diam}(\overline{B}) : \overline{B} \in \mathcal{F}\} < \infty. \tag{4.4}$$

Tällöin on olemassa numeroituva kokoelma $\mathcal{G}$ kokoelman $\mathcal{F}$ erillisiä palloja, joille

$$\bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{F}} \overline{B} \subset \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{G}} \widehat{C}.$$

Todistus. Merkitään $D = \sup\{\operatorname{diam}(\overline{B}) : \overline{B} \in \mathcal{F}\}$. Asetetaan

$$\mathcal{F}_j = \left\{ \overline{B} \in \mathcal{F} : \frac{D}{2^j} < \operatorname{diam}(\overline{B}) \leq \frac{D}{2^{j-1}} \right\}, \qquad j \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.5}$$

Määritellään kokoelmat $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$ seuraavasti:

(a) Olkoon $\mathcal{G}_1$ maksimaalinen kokoelma erillisiä, suljettuja palloja kokoelmasta $\mathcal{F}_1$. Tällainen kokoelma $\mathcal{G}_1$ on olemassa Zornin lemman 2.17 nojalla, kun tutkitaan osittain järjestettyä joukkoa $(\mathcal{F}_1, \subset)$. Kokoelma $\mathcal{F}_1$ on epätyhjä, sillä määrityksen (4.4) ε-karakterisointiin voidaan valita $\varepsilon = \frac{D}{2} > 0$ ja tätä valintaa verrataan asetukseen (4.5). Lisäksi jokaisen ketjun $K : K \subset \mathcal{F}_1$, jotka ovat siis suljettujen pallojen kokoelmia, *ylärajana* on kokoelma $\mathcal{F}_1$. Tällöin *pienin yläraja* on *korkeintaan* $\mathcal{F}_1$, joten $\sup(K) \in \mathcal{F}_1$.

(b) Kun kokoelmat $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{k-1}$ on valittu, kokoelmaksi $\mathcal{G}_k$ valitaan maksimaalinen kokoelma erillisiä, suljettuja palloja kokoelmasta

$$\left\{ \overline{B} \in \mathcal{F}_k : \overline{B} \cap \overline{C} = \varnothing \text{ jokaista } \overline{C} \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j \text{ kohti} \right\}. \tag{4.6}$$

Ehto (4.6) tarkoittaa, että kokoelmasta $\mathcal{F}_k$ valitaan vain sellaisia palloja, jotka eivät leikkaa *ainuttakaan* palloa edellä valituista. Tällainen kokoelma $\mathcal{G}_k$ on olemassa Zornin lemman nojalla.

Määritellään seuraavaksi yhdiste

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j.$$

Se on kokoelma erillisiä palloja, koska kokoelman $\mathcal{G}_j$ sisällä on erillisiä palloja ja koska kokoelmat $\mathcal{G}_j$ ja $\mathcal{G}_k$ ovat erillisiä aina, kun $j \neq k$. Jokainen epädegeneroitunut pallo sisältää rationaalikoordinaattisen pisteen, joten palloja voi olla vain numeroituva määrä kokoelmassa $\mathcal{G}_j$. Lisäksi määritelmien nojalla $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokaista $\overline{B} \in \mathcal{F}$ kohti on olemassa sellainen $\overline{C} \in \mathcal{G}$, että $\overline{B} \cap \overline{C} \neq \varnothing$ ja että $\overline{B} \subset \widehat{C}$. Väite seuraa tästä.

Olkoon $\overline{B} \in \mathcal{F}$. Tällöin $\overline{B} \in \mathcal{F}_j$ jollakin $j \in \mathbb{Z}^+$. Jos $\overline{B} \in \mathcal{G}_j \subset \mathcal{G}$, niin valitaan pallo $\overline{B}$ palloksi $\overline{C}$. Tällöin $\overline{B} \cap \overline{C} \neq \varnothing$ ja $\overline{B} \subset \overline{C} \subset \widehat{C}$. Jos $\overline{B} \notin \mathcal{G}_j$, niin pallon $\overline{B}$ on leikattava vähintään yhtä palloa, joka kuuluu kokoelmaan

$$\bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{G}_k,$$

koska muuten $\overline{B}$ kuuluisi kokoelmaan $\mathcal{G}_j$. On syytä huomata, että leikattava pallo voi kuulua kokoelmaan $\mathcal{G}_j$ toisin kuin määrityksessä (4.6), jossa pallojen leikkausta verrataan kokoelmaan $\bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{G}_k$. Tämä seuraa maksimaalisuudesta. Olkoon leikattava pallo $\overline{C}$. Tällöin saadaan epäyhtälöt

$$\frac{D}{2^j} < \operatorname{diam}(\overline{C}) \qquad \text{ja} \qquad \operatorname{diam}(\overline{B}) \leq \frac{D}{2^{j-1}},$$

joista lasketaan arvio $\operatorname{diam}(\overline{B}) < 2 \cdot \operatorname{diam}(\overline{C})$. Osoitetaan kolmioepäyhtälöllä, että $\overline{B} \subset \widehat{C}$. Olkoot b pallon $\overline{B}$ keskipiste, c pallon $\overline{C}$ ja $y \in \overline{B} \cap \overline{C}$. Jos $x \in \overline{B}$, niin

$$\begin{aligned}
\|x - c\| &= \|x - b + b - y + y - c\| \\
&\leq \|x - b\| + \|b - y\| + \|y - c\| \\
&\leq \frac{\operatorname{diam}(\overline{B})}{2} + \frac{\operatorname{diam}(\overline{B})}{2} + \frac{\operatorname{diam}(\overline{C})}{2} \\
&< \operatorname{diam}(\overline{C}) + \operatorname{diam}(\overline{C}) + \frac{\operatorname{diam}(\overline{C})}{2} \\
&= \frac{5}{2}\operatorname{diam}(\overline{C}).
\end{aligned}$$

Suljetuille palloille diam on sama kuin halkaisija eli $\|x - c\| < 5 \cdot \operatorname{rad}(\overline{C})$. Tämä tarkoittaa, että $x \in \widehat{C}$, joten $\overline{B} \subset \widehat{C}$. $\square$

Vitalin peitelauseen nojalla *mikä tahansa* kokoelma äärellisiä, suljettuja palloja voidaan peittää numeroituvasti. Tulosta voisi kuvata vaikuttavaksi. On myös mielenkiintoista, että pallojen lukumäärän ollessa äärellinen riittää, että valittavat pallot suurennetaan vain kolminkertaisiksi [7, s. 103-104][8, s. 137][23, s. 122-123].

Jos tutkittaisiin *Hausdorff-mittaa* ja *tiheyksiä*, niin seuraava lause olisi hyödyllinen. Perehdytään siihen harjoituksena.

Lause 4.7. *Olkoon $\mathcal{F}$ joukon A hieno peite suljetuin palloin ja*

$$\sup\{\mathrm{diam}(\overline{B}) \,:\, \overline{B} \in \mathcal{F}\} < \infty .$$

Tällöin on olemassa sellainen numeroituva kokoelma $\mathcal{G}$ kokoelman $\mathcal{F}$ erillisiä palloja, että jokaista äärellistä osakokoelmaa $\{\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_m\} \subset \mathcal{F}$ kohti

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B}_k \subset \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{G} \setminus \{\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_m\}} \widehat{C} . \tag{4.8}$$

Todistus. Valitaan $\mathcal{G}$ kuten Vitalin peitelauseessa. Sen nojalla kirjoitetaan

$$A \subset \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{F}} \overline{B} \subset \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{G}} \widehat{C} .$$

Olkoon $\{\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_m\} \subset \mathcal{F}$. Jos $A \subset \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B}_k$, niin yhtälön (4.8) vasen puoli on tyhjä joukko, ja väite on tosi. Muulloin valitaan $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B}_k$. Apulauseen 3.22 nojalla pisteen x etäisyys jokaiseen palloon $\overline{B}_k$ on suurempi kuin nolla, koska ne ovat suljettuja. Etäisyyksiä on äärellinen määrä, joten valitaan niistä pienin. Koska $\mathcal{F}$ on joukon A hieno peite, on olemassa sellainen pallo $\overline{B} \in \mathcal{F}$, että pallon $\overline{B}$ säde on pienempi kuin äsken valittu pienin säde ja että $x \in \overline{B}$. Lisäksi $\overline{B} \cap \overline{B}_k = \varnothing$ jokaista $k = 1, \dots, m$ kohti. Vitalin peitalauseen todistuksen mukaan jokaista $\overline{B} \in \mathcal{F}$ kohti on olemassa sellainen $\overline{C} \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, että $\overline{B} \cap \overline{C} \neq \varnothing$ ja että $\overline{B} \subset \widehat{C}$. Tässä lauseessa se tarkoittaa, että

$$x \in \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{G} \setminus \{\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_m\}} \widehat{C} ,$$

koska x ei kuulu mihinkään palloista $\overline{B}_k$ jokaista $k = 1, \dots, m$ kohti. □

Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta on mitta mitallisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Kun tarkastellaan palloja ja pallopintoja, saadaan hyödyllinen tulos erillisten joukkojen nojalla.

Apulause 4.9. *Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Tällöin*

$$\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\big) = \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big) ,$$

mistä seuraa, että $\mathcal{L}^n\big(S(x,r)\big) = 0$.

Todistus. Todistus on lähteestä [33]. Olkoon $\delta > 0$. Huomataan, että

$$B(x,r) \subset \overline{B}(x,r) \subset B\big(x, (1+\delta)r\big) .$$

Lebesguen n-ulotteisen mitan skaalautuvuuden [7, s. 140][22, s. 43] nojalla

$$\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\big) \leq \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big) \leq (1+\delta)^n \mathcal{L}^n\big(B(x,r)\big) .$$

Tulos seuraa, kun $\delta \to 0+$, ja erillisten joukkojen nojalla

$$\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\big) + \mathcal{L}^n\big(S(x,r)\big) = \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big) . \quad \square$$

Seuraava lauseessa avoin joukko ikään kuin täytetään suljetuilla palloilla niin tarkasti, että erotusjoukon Lebesgue-mitta on nolla. Bogachev [19, s. 345-347] esittää lauseen 4.10 oletuksena minkä tahansa joukon $A \subset \mathbb{R}^n$, jonka *jokaiseen* pisteeseen x asetetaan suljettu pallo $\overline{B}(x,\varepsilon)$, jossa $\varepsilon > 0$. Tällaisesta pallojen kokoelmasta löydetään sitten lauseen 4.10 mukainen kokoelma $\mathcal{G}$.

Lause 4.10. *Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\delta > 0$. Tällöin on olemassa sellainen numeroituva kokoelma $\mathcal{G}$ erillisiä, suljettuja palloja joukon U sisällä, että* $\operatorname{diam}(\overline{B}) \leq \delta$ *jokaista $\overline{B} \in \mathcal{G}$ kohti ja*

$$\mathcal{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}} \overline{B}\right) = 0.$$

Todistus. Asetetaan $1 - \frac{1}{5^n} < \theta < 1$. Oletetaan aluksi, että $\mathcal{L}^n(U) < \infty$.

Todistetaan, että on olemassa sellainen äärellinen kokoelma $\{\overline{B}_i\}_{i=1}^{M_1}$ erillisiä, suljettuja palloja joukon U sisällä, että $\operatorname{diam}(\overline{B}_i) < \delta$ jokaista $i = 1, \dots, M_1$ kohti ja että

$$\mathcal{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} \overline{B}_i\right) \leq \theta \mathcal{L}^n(U). \tag{4.11}$$

Olkoon $\mathcal{F}_1 = \{\overline{B} \subset U : \operatorname{diam}(\overline{B}) < \delta\}$ kokoelma epädegeroituneita, suljettuja palloja. Koska joukko U on avoin, jokaista alkiota $x \in U$ kohti on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x,r) \subset U$. Valitaan

$$R = \frac{\min\{\delta, r\}}{4} > 0.$$

Tarkoituksena on muodostaa suljettu pallo, joka kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}_1$. Jos $x \in U$, niin

$$x \in \overline{B}(x,R) \subset B(x,r) \subset U$$

ja $\operatorname{diam}\big(\overline{B}(x,R)\big) < \delta$. Kokoelma $\mathcal{F}_1$ sisältää kaikki joukon U pisteet eli $\mathcal{F}_1$ on joukon U peite. Vitalin peitelauseen 4.3 nojalla on olemassa sellainen numeroituva kokoelma $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$ erillisiä, suljettuja palloja, että

$$U \subset \bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{F}_1} \overline{B} \subset \bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1} \widehat{C}.$$

Lebesgue-mitan ominaisuuksien [7, s. 140] ja kokoelman $\mathcal{G}_1$ erillisyyden nojalla

$$\mathcal{L}^n(U) \leq \sum_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(\widehat{C}) = 5^n \sum_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(\overline{C}) = 5^n \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1} \overline{C}\right),$$

jolloin

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)\geq\frac{1}{5^n}\mathcal{L}^n(U).$$

Toisaalta kokoelman $\mathcal{F}_1$ määritelmä takaa, että $\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\subset\bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{F}_1}\overline{B}\subset U$. Kokoelman $\mathcal{G}_1$ palloja *ei* tarkastella tässä viisinkertaisina. Tällöin erillisyyden nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)+\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)&=\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)+\mathcal{L}^n\left(U\cap\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)\\&=\mathcal{L}^n\left(\left(U\setminus\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)\cup\left(U\cap\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)\right)\\&\leq\mathcal{L}^n(U),\end{aligned}$$

josta päätellään, että $\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{\overline{C}\in\mathcal{G}_1}\overline{C}\right)\leq\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\mathcal{L}^n(U)$. Koska $\mathcal{G}_1$ on numeroituva kokoelma erillisiä palloja, lukujono

$$\left\{\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{\substack{i=1\\ \overline{C}_i\in\mathcal{G}_1}}^{m}\overline{C}_i\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$$

on vähenevä. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku M_1, että

$$\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{i=1}^{M_1}\overline{C}_i\right)<\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\mathcal{L}^n(U)+\varepsilon,$$

jossa $\varepsilon=\frac{\theta-\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{2}\mathcal{L}^n(U)>0$. Yhtälö (4.11) on todistettu. Määritellään sitten

$$\begin{aligned}U_2&=U\setminus\bigcup_{i=1}^{M_1}\overline{C}_i,\qquad\text{ja}\\ \mathcal{F}_2&=\{\overline{B}\subset U_2\,:\,\mathrm{diam}(\overline{B})<\delta\}.\end{aligned}$$

Tilanne on samanlainen kuin äsken, sillä U_2 on avoin, mikä todistetaan esimerkiksi De Morganin lailla. On siis olemassa äärellinen määrä M_2-M_1 sellaisia erillisiä, suljettuja palloja kokoelmassa $\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_1$, että

$$\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{i=1}^{M_2}\overline{C}_i\right)=\mathcal{L}^n\left(U_2\setminus\bigcup_{i=M_1+1}^{M_2}\overline{C}_i\right)\overset{(4.11)}{\leq}\theta\mathcal{L}^n(U_2)\leq\theta^2\mathcal{L}^n(U).$$

Jatkamalla tätä menettelytapaa päädytään numeroituvaan kokoelmaan erillisiä, suljettuja palloja, koska

$$\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{i=1}^{M_k}\overline{C}_i\right)\le\theta^k\mathcal{L}^n(U),\qquad\text{jossa } k\in\mathbb{Z}^+\quad\text{ja}\quad M_k\in\mathbb{Z}^+.$$

Huomataan, että $\theta^k\to 0+$, kun k kasvaa rajatta. Lause on tosi, jos $\mathcal{L}^n(U)<\infty$. Jos $\mathcal{L}^n(U)=\infty$, niin hyödynnetään yllä olevaa päättelyä avoimiin joukkoihin

$$U_m=\big\{x\in U\,:\,m<\|x\|<m+1\big\},\qquad\text{jossa } m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}.$$

Jokainen joukko U_m jää suljetun pallon $\overline{B}(0,m+1)$ sisään, joten $\mathcal{L}^n(U_m)<\infty$. Tällöin on olemassa sellaiset kokoelmat $\mathcal{G}_m\subset U_m$, että

$$\mathcal{L}^n\left(U_m\setminus\bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}_m}\overline{B}\right)=0.$$

Apulauseen 4.9 nojalla pallopinnan Lebesgue-mitta on nolla. Jos R on jokin pallopinta, niin minkä tahansa osajoukon $P\subset R$ Lebesgue-mitta on myös nolla. Kokoelma $\mathcal{G}=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\mathcal{G}_m$ on numeroituva lauseen 2.3 nojalla. Tällöin joukkojen erillisyydestä seuraa, että

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}}\overline{B}\right)&=\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\left(U_m\setminus\bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}_m}\overline{B}\right)\right)\\&\quad+\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\big\{x\in U\,:\,\|x\|=m\big\}\right)\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\mathcal{L}^n\left(U_m\setminus\bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}_m}\overline{B}\right)\\&\quad+\sum_{m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\mathcal{L}^n\big\{x\in U\,:\,\|x\|=m\big\}\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

Lause on tosi myös silloin, kun $\mathcal{L}^n(U)=\infty$. $\square$

Edellisessä todistuksessa hyödynnettiin tietoa, että Lebesgue-mitta on Radon-mitta. Kun seuraavaksi todistetaan Besicovitchin peitelause 4.12, sen sovelluksena avoin joukko voidaan täyttää palloilla ja siihen riittää oletus, että mitta on Borel-mitta.

4.2 Besicovitchin peitelause

Vitalin peitelauseessa 4.3 ei esiintynyt ulkomittaa ollenkaan, mutta sen sovelluksessa käytettiin Lebesgue-mittaa. Jos ulkomitta μ olisikin mikä tahansa Radon-mitta, niin miten voitaisiin käsitellä viisinkertaisia palloja? Jos mitalle ei ole olemassa systemaattista määritelmää, Vitalin peitelauseesta ei ole paljoa hyötyä. Olisiko siis mahdollista muodostaa sellainen peite, että se sopisi mille tahansa mitalle? Besicovitchin peitelause perustuu geometriaan ja siinä ei tarvita pallojen suurentamista.

Lause 4.12 (Besicovitchin peitelause). *On olemassa sellainen kokonaisluku N_n, joka on riippuvainen ainoastaan ulottuvuudesta n ja jolla on seuraava ominaisuus: Jos $\mathcal{F}$ on sellainen kokoelma suljettuja, epädegeneroituja palloja joukossa $\mathbb{R}^n$, että*

$$\sup\{\operatorname{diam}(\overline{B}) : \overline{B} \in \mathcal{F}\} < \infty, \tag{4.13}$$

ja jos A on näiden pallojen keskipisteiden joukko, niin on olemassa luvun N_n verran numeroituvia kokoelmia $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{N_n}$, jotka koostuvat erillisistä palloista kokoelmasta $\mathcal{F}$ ja joille

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{G}_i} \overline{C}.$$

Todistus. Kokoelmat $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{N_n}$ eivät siis välttämättä ole erillisiä keskenään, mutta jokaisen kokoelman pallot ovat erillisiä. Lauseen todistus on pitkä [10, s. 39-45] ja se on jaettu 16 kohtaan. Samanlainen todistus on Bogachevilla [19, s. 361-364]. Merkitään $D = \sup\{\operatorname{diam}(\overline{B}) : \overline{B} \in \mathcal{F}\}$. Oletetaan aluksi, että joukko A on rajoitettu eli $\mu(A) < \infty$. Tulos laajennetaan sitten rajoittamattomaan joukkoon.

1. Valitaan pallo $\overline{B}_1 = \overline{B}(a_1, r_1) \in \mathcal{F}$, missä $r_1 \geq \frac{3}{4}\frac{D}{2}$. Mahdollisia palloja $\overline{B}_1$ on olemassa ainakin yksi, koska yhtälön (4.13) nojalla on olemassa sellainen pallo $\overline{C} \in \mathcal{F}$, että $\operatorname{diam}(\overline{C}) > \frac{7D}{8}$ eli $\operatorname{rad}(\overline{C}) > \frac{7D}{16}$. Seuraavat pallot $\overline{B}_j = \overline{B}(a_j, r_j) \in \mathcal{F}$, $j \geq 2$, valitaan induktiivisesti: keskipiste a_j kuuluu aidosti pienenevään joukkoon $A_j = A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \overline{B}_i$ ja säde toteuttaa epäyhtälön

$$r_j \geq \frac{3}{4} \sup\left\{r : \overline{B}(a, r) \in \mathcal{F},\ a \in A_j\right\}. \tag{4.14}$$

Jos $A_j = \varnothing$ jollakin $j \in \mathbb{Z}^+$, asetetaan valittujen pallojen lukumääräksi $J = j - 1$ ja lopetetaan pallojen valitseminen. Muulloin $J = \infty$. Pallojen säteen r_j määrittely supremumin avulla takaa, että aina löytyy vähintään yksi pallo $\overline{B}_j$. Valitaan supremumin ε-karakterisointiin

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \sup\left\{r : \overline{B}(a, r) \in \mathcal{F},\ a \in A_j\right\} > 0.$$

2. Oletetaan, että $j > i$. Tällöin $r_j \leq \frac{4}{3} r_i$, koska $a_j \in A_i$ ja yhtälön (4.14) nojalla

$$r_i \geq \frac{3}{4} \sup\left\{r : \overline{B}(a, r) \in \mathcal{F},\ a \in A_i\right\} \geq \frac{3}{4} r_j.$$

3. Kolmannessädepallot eli $\{\overline{B}(a_k, \frac{r_k}{3})\}_{k=1}^J$ ovat *erillisiä*. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $j > i$, koska tarkoituksena on vain tutkia kahta eri palloa. Nyt $a_j \notin \overline{B}_i$, joten kohdan 2. avulla

$$\|a_i - a_j\| > r_i = \frac{r_i}{3} + \frac{2r_i}{3} \overset{2.}{\geq} \frac{r_i}{3} + \frac{2}{3}\frac{3}{4}r_j > \frac{r_i}{3} + \frac{r_j}{3}.$$

4. Jos $J = \infty$, niin $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$. Koska A on rajoitettu, on olemassa sellainen säde $R > 0$, että $A \subset \overline{B}(0, R)$. Koska $D < \infty$, niin kaikki pallot kokoelmassa $\mathcal{F}$ kuuluvat palloon $\overline{B}(0, R + D)$. Itse asiassa pallo $\overline{B}(0, R + \frac{D}{2})$ riittäisi. Kolmannessädepallot ovat erillisiä ja ne kuuluvat rajoitettuun palloon $\overline{B}(0, R + D)$, joten

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n \left(\overline{B}\left(a_j, \frac{r_j}{3}\right)\right) = \mathcal{L}^n \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B}\left(a_j, \frac{r_j}{3}\right)\right) \leq \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(0, R + D)\big) < \infty. \tag{4.15}$$

Koska yhtälön (4.15) vasemman laidan sarja on kasvava, niin sarjan rajoitettuuudesta seuraa, että $\lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^n\left(\overline{B}\left(a_j, \frac{r_j}{3}\right)\right) = 0$. Tämä on mahdollista vain, jos $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$.

5. Pallot $\overline{B}_j$ ovat peite keskipisteille A. Jos J on äärellinen, niin $A \setminus \bigcup_{j=1}^J \overline{B}_j = \varnothing$ ja väite on todistettu. Olkoon $J = \infty$. Jokaista $a \in A$ kohti on olemassa epädegeneroitunut pallo $\overline{B}(a, R) \in \mathcal{F}$ eli $R > 0$. Kohdan 4. mukaan on olemassa sellainen indeksi $j \in \mathbb{Z}^+$, että $r_j < \frac{3}{4}R$. Jos olisi, että $a \notin \bigcup_{i=1}^{j-1} \overline{B}_i$, niin $a \in A_j$. Mutta yhtälön (4.14) nojalla

$$r_j \geq \frac{3}{4} \sup\left\{r \,:\, \overline{B}(a, r) \in \mathcal{F},\ a \in A_j\right\} \geq \frac{3}{4}R,$$

mikä on ristiriita. Sen takia $a \in \bigcup_{i=1}^{j-1} \overline{B}_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i$.

6. Kiinnitetään $k > 1$ ja määritellään $I = \{j \,:\, 1 \leq j < k,\ \overline{B}_j \cap \overline{B}_k \neq \varnothing\}$. Tarkoituksena on arvioida joukon I *kardinaliteettia*, mikä tapahtuu lopulta kohdassa 14. Tutkitaan osajoukkoa $K = I \cap \{j \,:\, r_j \leq 3r_k\}$. Joukossa K on siis ne indeksit j, joille on voimassa

$$1 \leq j < k, \quad \overline{B}_j \text{ leikkaa palloa } \overline{B}_k \quad \text{ja} \quad r_j \leq 3r_k. \tag{4.16}$$

7. Osoitetaan, että $\mathrm{Card}(K) \leq 20^n$. Olkoon $j \in K$ ja $x \in \overline{B}(a_j, \frac{r_j}{3})$. Yhtälön (4.16) nojalla on olemassa $y \in \overline{B}_j \cap \overline{B}_k$, joten

$$\begin{aligned}
\|x - a_k\| &= \|x - a_j + a_j - y + y - a_k\| \\
&\leq \|x - a_j\| + \|a_j - y\| + \|a_k - y\| \\
&\leq \frac{r_j}{3} + r_j + r_k \overset{(4.16)}{\leq} 5r_k.
\end{aligned}$$

Päätellään, että $\overline{B}(a_j, \frac{r_j}{3}) \subset \overline{B}(a_k, 5r_k)$. Kohdan 3. mukaan kolmannessädepallot ovat erillisiä, joten Lebesgue-mitan ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(0,1)\big)5^n r_k^n &= \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(a_k,5r_k)\big) \geq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j\in K}\overline{B}\left(a_j,\frac{r_j}{3}\right)\right) \overset{\text{erill.}}{=} \sum_{j\in K}\mathcal{L}^n\left(\overline{B}\left(a_j,\frac{r_j}{3}\right)\right)\\ &= \sum_{j\in K}\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(0,1)\big)\left(\frac{r_j}{3}\right)^n \overset{\text{kohta 2.}}{\geq} \sum_{j\in K}\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(0,1)\big)\left(\frac{r_k}{4}\right)^n.\end{aligned}$$

Viimeinen summa on riippumaton indeksistä j ja yksikköpallon Lebesgue-mitta supistuu pois. Tällöin $\mathrm{Card}(K) \leq 20^n$.

8. Kohdissa 8.-13. arvioidaan joukon $I \setminus K$ kardinaliteettia. Suurin työ on etsittäessä alarajaa keskipisteiden (eli vektoreiden) a_i ja a_j väliselle kulmalle $\theta : 0 \leq \theta \leq \pi$.

Olkoon $i, j \in I \setminus K$ erilliset. Tällöin väitteet (4.16) on muuten voimassa, mutta $r_i > 3r_k$ ja $r_j > 3r_k$. Origo siirretään pallon $\overline{B}_k$ keskipisteeseen, mikä yksinkertaistaa merkintöjä. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $\|a_i\| \leq \|a_j\|$, koska indeksit voidaan tarpeen vaatiessa valita toisinpäin. Koska $i, j < k$, niin $a_k \notin \overline{B}_i \cup \overline{B}_j$. Origonvaihdos huomioiden saadaan arviot $r_i < \|a_i\|$ ja $r_j < \|a_j\|$. Väitteen (4.16) leikkausominaisuuden ja kolmioepäyhtälön nojalla $\|a_i\| \leq r_i + r_k$ ja $\|a_j\| \leq r_j + r_k$. Tähän mennessä on siis päätelty

$$\begin{cases} 3r_k < r_i < \|a_i\| \leq r_i + r_k\,, \\ 3r_k < r_j < \|a_j\| \leq r_j + r_k \quad \text{ja} \\ \|a_i\| \leq \|a_j\|\,. \end{cases} \tag{4.17}$$

9. Jos $\cos(\theta) > \frac{5}{6}$, niin $a_i \in \overline{B}_j$. Väite todistetaan kahdessa osassa, kontraposition kautta eli jos $a_i \notin \overline{B}_j$, niin $\cos(\theta) \leq \frac{5}{6}$.

Ensin oletetaan, että $\|a_i - a_j\| \geq \|a_j\| > r_j$. Tästä seuraa, että $a_i \notin \overline{B}_j$. Kosinilauseen ja ehtojen (4.17) nojalla

$$\cos(\theta) = \frac{\|a_i\|^2 + \|a_j\|^2 - \|a_i - a_j\|^2}{2\|a_i\|\|a_j\|} \leq \frac{\|a_i\|^2}{2\|a_i\|\|a_j\|} = \frac{\|a_i\|}{2\|a_j\|} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{5}{6}.$$

Seuraavaksi oletetaan, että $\|a_i - a_j\| \leq \|a_j\|$, mutta kuitenkin $a_i \notin \overline{B}_j$. Tällöin $r_j < \|a_i - a_j\|$. Kosinilauseen ja ehtojen (4.17) nojalla

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{\|a_i\|^2 + \|a_j\|^2 - \|a_i - a_j\|^2}{2\|a_i\|\|a_j\|} = \frac{\|a_i\|}{2\|a_j\|} + \frac{\big(\|a_j\| - \|a_i - a_j\|\big)\big(\|a_j\| + \|a_i - a_j\|\big)}{2\|a_i\|\|a_j\|}\\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{\big(\|a_j\| - \|a_i - a_j\|\big)2\|a_j\|}{2\|a_i\|\|a_j\|} \leq \frac{1}{2} + \frac{r_j + r_k - r_j}{r_i} = \frac{1}{2} + \frac{r_k}{r_i} \leq \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

10. Jos $a_i \in \overline{B}_j$, niin

$$0 \leq \|a_i - a_j\| + \|a_i\| - \|a_j\| \leq \|a_j\| \frac{8}{3}\big(1 - \cos(\theta)\big)$$

Oletuksen $a_i \in \overline{B}_j$ ja indeksien erillisyyden nojalla $i < j$. Tällöin $a_j \notin \overline{B}_i$, mistä seuraa, että $\|a_i - a_j\| > r_i$. Käänteisen kolmioepäyhtälön mukaan

$$\Big| \|a_j\| - \|a_i\| \Big| \leq \|a_j - a_i\| = \|a_i - a_j\|, \tag{4.18}$$

ja ehtojen (4.17) mukaan $\|a_j\| - \|a_i\| \geq 0$. Yhtälön (4.18) vasemmalta puolelta poistetaan itseisarvot ja jaetaan luvulla $\|a_j\|$, minkä jälkeen arvioidaan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|a_i - a_j\| + \|a_i\| - \|a_j\|}{\|a_j\|} \leq \frac{\|a_i - a_j\| + \|a_i\| - \|a_j\|}{\|a_j\|} \cdot \underbrace{\frac{\|a_i - a_j\| - \|a_i\| + \|a_j\|}{\|a_i - a_j\|}}_{\leq 1} \\ &= \frac{\|a_i - a_j\|^2 - \big(\|a_i\| - \|a_j\|\big)^2}{\|a_j\|\|a_i - a_j\|} \\ &= \frac{\|a_i\|^2 + \|a_j\|^2 - 2\|a_i\|\|a_j\|\cos(\theta) - \|a_i\|^2 - \|a_j\|^2 + 2\|a_i\|\|a_j\|}{\|a_j\|\|a_i - a_j\|} \\ &= \frac{2\|a_i\|\big(1 - \cos(\theta)\big)}{\|a_i - a_j\|} \leq \frac{2(r_i + \frac{1}{3}r_i)\big(1 - \cos(\theta)\big)}{r_i} = \frac{8}{3}\big(1 - \cos(\theta)\big). \end{aligned}$$

11. Jos $a_i \in \overline{B}_j$, niin $\cos(\theta) \leq \frac{61}{64}$. Osoitetaan tämä. Koska $a_i \in \overline{B}_j$, niin kohdan 10. perusteluilla $a_j \notin \overline{B}_i$, jolloin $r_i < \|a_i - a_j\| \leq r_j$, ja lisäksi kohdan 2. nojalla $r_j \leq \frac{4}{3}r_i$. Kulman θ kosinin alaraja on ehtojen (4.17) nojalla

$$\begin{aligned} \|a_i - a_j\| + \|a_i\| - \|a_j\| &\geq r_i + r_i - r_j - r_k \geq \frac{3}{2}r_j - r_j - r_k \\ &\geq \frac{1}{2}r_j - \frac{1}{3}r_j = \frac{1}{6}\frac{3}{4}\left(r_j + \frac{1}{3}r_j\right) \geq \frac{1}{8}(r_j + r_k) \geq \frac{1}{8}\|a_j\|. \end{aligned}$$

Kohdan 10. nojalla $\frac{1}{8}\|a_j\| \leq \|a_j\|\frac{8}{3}\big(1 - \cos(\theta)\big)$, joten $\cos(\theta) \leq \frac{61}{64}$.

12. Kohdissa 8.-12. etsittiin siis *alarajaa* vektoreiden a_i ja a_j väliselle kulmalle. Kohdasta 9. seuraa, että mikäli $\cos(\theta) > \frac{5}{6}$, niin $a_i \in \overline{B}_j$. Kun kosinifunktion arvo lähestyy 1, niin positiivinen kulma θ *pienenee*. Voidaan siis yleisyyttä rajoittamatta tarkastella vain aluetta $\cos(\theta) > \frac{5}{6}$. Kohdista 10. ja 11. seuraa, että mikäli $a_i \in \overline{B}_j$, niin $\cos(\theta) \leq \frac{61}{64}$. Huomataan, että

$$\frac{61}{64} > \frac{5}{6}.$$

Siispä alarajaksi valitaan $\theta_0 = \arccos\left(\frac{61}{64}\right) > 0$, koska se on pienempi kuin $\arccos\left(\frac{5}{6}\right)$.

13. Väitetään, että joukon $I \setminus K$ kardinaliteetin eräs yläraja on vakio L_n, joka on riippuvainen vain ulottuvuudesta n. Aluksi n-ulotteisen yksikköpallon pinnalta $S(0,1)$ valitaan piste x. Sitten muodostetaan sellainen suljettu pallo $\overline{B}(x,r_0)$, että minkä tahansa sen kahden pisteen välinen kulma on pienempää kuin θ_0. Kulma tarkoittaa tässä tapauksessa origosta lähtevien puolisuorien välistä kulmaa, jonka voi laskea *sisätulolla*. Luku L_n määräytyy siitä, kun yksikköpallon kuori peitetään r_0-säteisillä palloilla, joiden keskipisteet ovat yksikköpallon kuorella: peittämiseen ei riitä $L_n - 1$ palloa. Menetelmästä saa mielikuvan ainakin joukoissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$.

Skaalataan sitten muodostunut asetelma luvulla r_k. Yhdenmuotoisuuden nojalla pallopinta $S(0,r_k)$ peittyy $r_0 r_k$-säteisillä palloilla, kun niitä valitaan L_n kappaletta. Kohdan 12. nojalla vektorit $a_i - a_k$ ja $a_j - a_k$, kun $i,j \in I \setminus K$ ovat erilliset, eivät voi lävistää samaa palloa, joka on pallopinnalla $S(0,r_k)$. Tällöin $\mathrm{Card}(I \setminus K) \leq L_n$.

14. Olkoon $M_n = 20^n + L_n + 1$. Kohtien 7. ja 13. nojalla

$$\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(K) + \mathrm{Card}(I \setminus K) \leq 20^n + L_n < M_n .$$

15. Tavoitteena on muodostaa sellaiset numeroituvat kokoelmat $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{M_n}$, että jokainen kokoelma sisältää vain erillisiä palloja. Kokoelmat eivät välttämättä ole erillisiä *keskenään*. Todistus on tässä kohdassa *kombinatoriikkaa* eikä mittateoriaa.

Olkoon $\sigma : \mathbb{Z}^+ \to \{1,\ldots,M_n\}$, joka määritellään hieman myöhemmin. Käy ilmi, että sitä voisi luonnehtia *lokerointikuvaukseksi*. Kohdassa 1. valittiin palloja yksi kerrallaan, joten joukko $\mathbb{Z}^+$ periytyy sieltä. Kuvaus σ määritellään seuraavasti:

(a) Jos $1 \leq k \leq M_n$, niin $\sigma(k) = k$ eli kuvaus on *identtinen*. Tämä tarkoittaa, että jokaiseen kokoelmaan $\mathcal{G}_i$, $1 \leq i \leq M_n$, asetetaan yksi pallo. Asetettavien pallojen *ei tarvitse olla* erillisiä, joten voidaan huoletta valita M_n ensimmäistä palloa.

(b) Pallot $k \geq M_n + 1$ lokeroidaan induktiivisesti. Tarkoituksena on lokeroida jokainen pallo johonkin kokoelmaan $\mathcal{G}_i$, $1 \leq i \leq M_n$, jonka sisällä pallot *ovat* erillisiä. Lokerointi perustuu kohdasta 14. saatuun epäyhtälöön

$$\mathrm{Card}\{j \,:\, 1 \leq j < k,\ \overline{B}_j \cap \overline{B}_k \neq \varnothing\} < M_n . \tag{4.19}$$

Epäyhtälö (4.19) tarkoittaa, että olipa luku k kuinka suuri tahansa, palloa $\overline{B}_k$ leikkaa pienempi-indeksisempiä palloja vähemmän kuin luvun M_n verran. Toisin sanoen, on olemassa *ainakin* yksi sellainen kokoelma $\mathcal{G}_i$, $1 \leq i \leq M_n$, että pallo $\overline{B}_k$ on erillinen *kaikkien* tämän kyseisen kokoelman pallojen kanssa. Asetetaan pallo $\overline{B}_k$ tähän kokoelmaan, jota merkitään $\mathcal{G}_l$. Nyt siis $\sigma(k) = l$.

Edellisen kappaleen tarkastelun voi ilmaista indeksien avulla, jolloin määrittely on matemaattisen täsmällinen, mutta ensi silmäyksellä hieman vaikeaselkoinen. On olemassa sellainen $l \in \{1,\ldots,M_n\}$, että $\overline{B}_j \cap \overline{B}_k = \varnothing$ jokaista

$1 \leq j \leq k$ kohti, joille $\sigma(j) = l$. Asetetaan $\sigma(k) = l$. Todistus selkiytyy [10, s. 44], kun ajattelee lukua l kokoelmaindeksinä ja että ilmaisu "$\sigma(j) = l$ $(j = 1, \ldots, k)$"[10, s. 44] tarkoittaa kaikkia niitä palloja (indeksejä) j, jotka kuuluvat kokoelmaan $\mathcal{G}_l$, jossa $l \in \{1, \ldots, M_n\}$.

Äsken määriteltiin tarkalleen ottaen vain kuvaus σ, vaikka tekstin seassa oli puhetta myös kokoelmista $\mathcal{G}_i$. Seuraavaksi määritellään kokoelmat $\mathcal{G}_i$ — ehkä hieman keinotekoisesti — kuvauksen σ avulla. Kun $1 \leq i \leq M_n$ on kiinnitetty, kokoelmaan $\mathcal{G}_i$ valitaan kaikki ne suljetut pallot $\overline{B}_j$, $j \in \mathbb{Z}^+$, joiden indeksi j kuvautuu luvuksi i eli

$$\mathcal{G}_i = \left\{\overline{B}_j \,:\, \sigma(j) = i\right\}.$$

Kuvauksen σ määritelmän nojalla jokainen kokoelma $\mathcal{G}_i$ koostuu erillisistä, suljetuista palloista. Tällöin kohtien 1. ja 5. ja tämän kohdan nojalla

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{J} \overline{B}_i = \bigcup_{i=1}^{M_n} \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_i} \overline{B}.$$

Jos joukko A on rajoitettu, valitaan $N_n = M_n$.

16. Oletetaan, että joukko A on rajoittamaton. Asetetaan jokaista $l \in \mathbb{Z}^+$ kohti joukko

$$A_l = A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, 3D(l-1) \leq \|x\| < 3Dl\right\}. \tag{4.20}$$

Joukkoa A leikataan rengasjoukoilla, missä oleellinen ehto on kerroin $3D$. Renkaan sisäreuna on suljettu ja ulkoreuna avoin, jolloin joukosta A ei lasketa *mitään* pistettä kahdesti. Koska jokainen A_l on rajoitettu, todistuksen kohdat 1.-15. soveltuvat kokoelmille $\mathcal{F}^l = \{\overline{B}(a, r) \in \mathcal{F} \,:\, a \in A_l\}$. Tällöin on olemassa sellaiset numeroituvat kokoelmat $\mathcal{G}_1^l, \ldots, \mathcal{G}_{M_n}^l$ kokoelman $\mathcal{F}^l$ erillisiä suljettuja palloja, että

$$A_l \subset \bigcup_{i=1}^{M_n} \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_i^l} \overline{B}.$$

Luvun l mukaan valitaan parittomat ja parilliset renkaat erikseen eli

$$\mathcal{H}_i = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_i^{2l-1}, \qquad \text{kun } 1 \leq i \leq M_n \quad \text{ja}$$
$$\mathcal{H}_{i+M_n} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_i^{2l}, \qquad \text{kun } 1 \leq i \leq M_n.$$

Tällöin kokoelmat $\mathcal{H}_i$, jossa $1 \leq i \leq 2M_n$, koostuvat erillisistä palloista, sillä parittomista ja parillisista renkaista valitaan yksi kokoelma $\mathcal{G}_i^l$ ja renkaiden leveys on $3D$ yhtälön (4.20) mukaan. Jos olisi niin, että peräkkäisten, parittomien renkaiden joukossa olisi sellaiset pallot, että niiden keskipisteet olisivat aivan lähellä renkaan reunaa, niin pallot olisivat kuitenkin erilliset, koska väliin jäävä parillinen rengas on leveydeltään $3D$ ja pallot voivat päästä vain $\frac{D}{2}$ asti parillisen renkaan sisälle. Turvarajaa jää siis luvun $2D$ verran. Parilliset renkaat käsitellään vastaavasti.

Koska jokainen $\mathcal{G}_i^l$ on numeroituva, myös niiden numeroituva yhdiste on numeroituva. Tätä perusteltiin lauseen 2.3 jälkeen. Yhdistämällä parillisten ja parittomien renkaiden numeroituvat kokoelmat saadaan joukolle A vaadittu peite eli

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{2M_n} \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{H}_i} \overline{B}.$$

Jos joukko A on rajoittamaton, valitaan $N_n = 2M_n$. $\square$

Besicovitchin peitelauseen todistuksessa käytetään useita, erityyppisiä tekniikoita kuten joukko-oppia, Lebesgue-mittaa, epäsuoraa todistusta, topologiaa, trigonometriaa — erityisesti kosinilausetta — ja kombinatoriikkaa. Todistus on upea. Seuraava lause on samantyyppinen kuin 4.10, mutta mitta μ on yleisempi. Todistetaan ensin aritmetiikan perustulos, jota käytetään apulauseena.

Apulause 4.21. *Jos $\{a_k\}_{k=1}^n$ on äärellinen jono epänegatiivisia termejä, niin vähintään yksi termeistä on suurempi tai yhtäsuuri kuin jonon keskiarvo.*

Todistus. Olkoon keskiarvo $\overline{a}$. Jos jokin termi on ∞, niin väite toteutuu muodossa $\infty \leq \infty$. Oletetaan, että jokainen termi on äärellinen. Tällöin

$$n\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} \max_{1 \leq j \leq n}(a_j) = n \cdot \max_{1 \leq j \leq n}(a_j). \quad \square$$

Luvun 4 viimeinen tulos eli lause 4.22 tulee välittömästi käyttöön, kun tutkitaan mitan derivaattaa luvussa 5 [19, s. 364-365].

Lause 4.22. *Olkoot μ Borel-säännöllinen joukossa $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ kokoelma epädegeneroituneita suljettuja palloja ja A pallojen keskipisteiden joukko. Jos $\mu(A) < \infty$ ja*

$$\inf\left\{r : \overline{B}(a,r) \in \mathcal{F}\right\} = 0 \qquad \textit{jokaista } a \in A \textit{ kohti},$$

niin jokaista avointa joukkoa $U \subset \mathbb{R}^n$ kohti on olemassa sellainen kokoelma $\mathcal{G}$ erillisiä palloja kokoelmasta $\mathcal{F}$, että

$$\bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B} \subset U \tag{4.23}$$

ja

$$\mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B}\right) = 0.$$

Todistus. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Jos $A \cap U = \varnothing$, niin kokoelmaksi $\mathcal{G}$ valitaan tyhjä kokoelma, jotta (4.23) toteutuu. Oletetaan siis, että $A \cap U \neq \varnothing$.

Osoitetaan, että on olemassa sellainen äärellinen kokoelma $\{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_{M_1}\}$ erillisiä, suljettuja palloja joukossa U, että

$$\mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} \overline{B}_i\right) \leq \theta\mu(A \cap U), \tag{4.24}$$

jossa $0 < \theta < 1$.

Asetetaan $\mathcal{F}_1 = \{\overline{B} \in \mathcal{F} : \operatorname{diam}(\overline{B}) \leq 1,\ \overline{B} \subset U\}$. Koska $\mathcal{F}$ on joukon A hieno peite, niin $\mathcal{F}_1$ on epätyhjä. Besicovitchin peitelauseen nojalla on olemassa sellaiset kokoelmat $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{N_n}$ erillisiä palloja kokoelmasta $\mathcal{F}_1$, että

$$A \cap U \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_i} \overline{B}.$$

Vasemmalla puolella on leikkausjoukko, koska kokoelmaan $\mathcal{F}_1$ valitaan vain palloja joukon U sisältä. Joukko-opin nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}\mu(A \cap U) = \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_i} \overline{B}\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N_n}\left((A \cap U) \cap \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_i} \overline{B}\right)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_n} \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_i} \overline{B}\right).\end{aligned}$$

Kiinnitetään $1 - \frac{1}{N_n} < \theta < 1$. Apulauseen 4.21 nojalla on olemassa sellainen indeksi $j \in \{1, \ldots, N_n\}$, että

$$(1-\theta)\mu(A \cap U) < \frac{1}{N_n}\mu(A \cap U) \leq \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_j} \overline{B}\right). \tag{4.25}$$

Koska kokoelma $\mathcal{G}_j$ on numeroituva, merkitään $\mathcal{G}_j = \left\{\overline{B}_i : i \in \mathbb{Z}^+\right\}$. Tutkitaan rajoitettua, kasvavaa ja epänegatiivista reaalilukujonoa

$$\left\{\mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}_i\right)\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{jossa } \overline{B}_i \in \mathcal{G}_j.$$

Lauseen 3.27 nojalla jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $M \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_j} \overline{B}\right) - \varepsilon \leq \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{i=1}^{M} \overline{B}_i\right), \quad \text{jossa } \overline{B}_i \in \mathcal{G}_j.$$

Valitaan $\varepsilon = \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}_j} \overline{B}\right) - (1-\theta)\mu(A \cap U) > 0$ epäyhtälöstä (4.25).

Nyt on olemassa pallot $\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_{M_1} \in \mathcal{G}_j$, joille

$$(1-\theta)\mu(A \cap U) \leq \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} \overline{B}_i\right).$$

Koska suljetut pallot $\overline{B}_i$ ovat Borel-joukkoja, ne ovat tässä lauseessa μ-mitallisia. Tällöin

$$\mu(A \cap U) = \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} \overline{B}_i\right) + \mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} \overline{B}_i\right),$$

mistä väite (4.24) seuraa.

Olkoon nyt $U_2 = U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} \overline{B}_i$ ja $\mathcal{F}_2 = \{\overline{B} \in \mathcal{F} \,:\, \mathrm{diam}(\overline{B}) \leq 1,\ \overline{B} \subset U_2\}$. Joukko U_2 on avoin, joten edellinen päättely toimii myös tässä kohdassa. Luku θ saattaa muuttua, mutta se on kuitenkin pienempää kuin 1. On siis olemassa sellaiset suljetut pallot $\overline{B}_{M_1+1}, \ldots, \overline{B}_{M_2}$ kokoelmassa $\mathcal{F}_2$, että

$$\begin{aligned}
\mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{M_2} \overline{B}_i\right) &= \mu\left((A \cap U_2) \setminus \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} \overline{B}_i\right) \\
&\leq \theta_2 \mu(A \cap U_2) \\
&\leq \theta_1 \theta_2 \mu(A \cap U).
\end{aligned}$$

Jatkamalla tätä menettelyä saadaan numeroituva kokoelma erillisiä palloja kokoelmasta $\mathcal{F}$ ja joukon U sisältä, ja jonka alkioille on voimassa

$$\mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{M_k} \overline{B}_i\right) \leq \mu(A \cap U) \prod_{i=1}^{k} \theta_i < \mu(A) < \infty.$$

Koska $\prod_{i=1}^{k} \theta_i \to 0+$, kun $k \to \infty$, väite on todistettu. $\square$

Onko sillä merkitystä, käytetäänkö peitteissä suljettuja vai avoimia palloja? Lauseen 2.10 nojalla numeroituvuus säilyy ainakin silloin, jos avoin peite muutetaan määritelmän 4.1(a) mukaiseksi (suljetuksi) peitteeksi. Toisaalta suljettuja palloja tarvitaan peitelauseiden sovelluksissa 4.10 ja 4.22, koska joukkojen U_j, missä $j \geq 2$, täytyy olla avoimia. Myös lauseen 4.7 todistus epäonnistuisi, jos peite määriteltäisiin avoimilla palloilla, sillä piste x voisi olla jonkun avoimen pallon B_k reunapiste.

Maksiminormi joukossa $\mathbb{R}^n$ määritellään $\|x\|_\infty = \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\}$. *Kuutiot* ovat samantyyppisiä joukkoja kuin pallot, mutta niiden ehdossa käytetään maksiminormia. Avoin ja suljettu kuutio ja kuution reuna määritellään samoin kuin palloilla. Peitteiden kannalta lienee lähinnä makuasia, määritteleekö ne pallojen vai kuutioiden kautta, koska jokaista $x \in \mathbb{R}^n$ kohti on voimassa

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty. \tag{4.26}$$

Epäyhtälön (4.26) nojalla jokainen pallo sisältää kuution ja jokainen kuutio sisältää pallon. [15, s. 25-26][16, s. 20, 103–105]

5. DERIVOINTI

Differentiaali- ja integraalilaskennassa derivointia ja integrointia voi pitää toistensa *käänteisoperaattoreina*. Mitan derivaatta ja integraali mitan suhteen yhdistyvät *Radonin-Nikodymin lauseessa* 5.15 sillä tavalla, että niitä voidaan pitää käänteisoperaattoreina. Mittateorian rakenne on tässä kohtaa tuttu.

Pääasiallisena tutkimuskohteena on joukon $\mathbb{R}^n$ Radon-mitat. Sovitaan seuraava merkintä: määritelmää 3.41 mukaillen asetetaan $\limsup_{r\to 0+} f(r) = \lim_{r\to 0+} \big(\sup_{R\le r} f(R)\big)$.

Määritelmä 5.1 (Mitan ylä- ja aladerivaatta). Jos $x \in \mathbb{R}^n$, niin ulkomitan ν *yläderivaatta* ulkomitan μ suhteen

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \limsup\limits_{r\to 0+} \dfrac{\nu\big(\overline{B}(x,r)\big)}{\mu\big(\overline{B}(x,r)\big)}, & \text{jos } \mu\big(\overline{B}(x,r)\big) > 0 \text{ jokaista } r > 0 \text{ kohti},\\ \infty, & \text{jos } \mu\big(\overline{B}(x,r)\big) = 0 \text{ erästä } r > 0 \text{ kohti}, \end{cases}$$

ja ulkomitan ν *aladerivaatta* ulkomitan μ suhteen

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \liminf\limits_{r\to 0+} \dfrac{\nu\big(\overline{B}(x,r)\big)}{\mu\big(\overline{B}(x,r)\big)}, & \text{jos } \mu\big(\overline{B}(x,r)\big) > 0 \text{ jokaista } r > 0 \text{ kohti},\\ \infty, & \text{jos } \mu\big(\overline{B}(x,r)\big) = 0 \text{ erästä } r > 0 \text{ kohti}, \end{cases}$$

Ulkomitan monotonisuuden nojalla määritelmä 5.1 on järkevä: jos $\mu\big(\overline{B}(x,r)\big) = 0$ erästä $r > 0$ kohti, niin tällöin jokaista $0 < R \le r$ kohti $\mu\big(\overline{B}(x,R)\big) = 0$. Jos ylä- tai aladerivaatta on ääretön, niin riittävä ehto on, että on olemassa sellainen $r > 0$, että $\mu\big(\overline{B}(x,r)\big) = 0$, sillä määritelmän 5.1 ylä- ja alaraja-arvoissa käsitellään kaikki positiiviset säteet. Todetaan vielä, että $\underline{D}_\mu \nu \le \overline{D}_\mu \nu$.

Määritelmä 5.2 (Mitan derivaatta). Jos $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$, niin ν on *differentioituva* ulkomitan μ suhteen pisteessä x. Tällöin merkitään

$$D_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x).$$

$D_\mu \nu$ on ulkomitan ν *derivaatta* tai *tiheys* ulkomitan μ suhteen.

Mittateoreettinen derivaatta pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ on siis raja-arvo ulkomittojen suhteesta, jossa ulkomitat määritetään suljetusta, x-keskisestä pallosta. Ensimmäisenä tavoitteena on tutkia, millä ehdoilla $D_\mu \nu$ on olemassa. Kun tutkitaan Radon-mittojen derivaattoja, voidaan olettaa, että joukon $\mathbb{R}^n$ mitta on äärellinen. Jos näin ei olisi, niin voitaisiin rajoittua kompakteihin joukkoihin. Seuraavassa lauseessa joukon A ei tarvitse olla μ- tai ν-mitallinen.

Apulause 5.3. *Olkoon* $0 < \alpha < \infty$.

(a) *Jos* $A \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}_\mu \nu(x) \leq \alpha\big\}$, *niin* $\nu(A) \leq \alpha\mu(A)$.

(b) *Jos* $A \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\big\}$, *niin* $\nu(A) \geq \alpha\mu(A)$.

Todistus. (a) Olkoot $\varepsilon > 0$ ja U sellainen avoin joukko, että $A \subset U$. On olemassa ainakin yksi tällainen joukko U, nimittäin $\mathbb{R}^n$. Määritellään kokoelma

$$\mathcal{F} = \big\{\overline{C} : \overline{C} = \overline{B}(a,r),\ a \in A,\ \overline{C} \subset U,\ \nu(\overline{C}) \leq (\alpha+\varepsilon)\mu(\overline{C})\big\}.$$

Toisin sanoen, kerätään kaikki suljetut pallot, joiden keskipisteet ovat joukossa A ja jotka kuuluvat joukkoon U. Koska $\liminf$ on kasvava funktio ja $a \in A$, kokoelman $\mathcal{F}$ ehto $\nu(\overline{C}) \leq (\alpha+\varepsilon)\mu(\overline{C})$ ja oletus $\underline{D}_\mu \nu(a) \leq \alpha$ takaavat, että ainakin hyvin pienisäteiset pallot ovat kokoelmassa $\mathcal{F}$ eli

$$\inf\big\{r : \overline{B}(a,r) \in \mathcal{F}\big\} = 0.$$

Lauseen 4.22 oletukset ovat voimassa, joten on olemassa sellainen numeroituva kokoelma $\mathcal{G}$ erillisiä, suljettuja palloja kokoelmasta $\mathcal{F}$, että $\bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B} \subset U$ ja että

$$\nu\left(\underbrace{(A \cap U)}_{=A} \setminus \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B}\right) = 0.$$

Erillisyyden, monotonisuuden ja kokoelman $\mathcal{F}$ määritelmän nojalla arvioidaan, että

$$\begin{aligned}\nu(A) &\leq \nu\left(A \setminus \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B}\right) + \nu\left(A \cap \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B}\right) \leq \nu\left(\bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B}\right)\\ &= \sum_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \nu(\overline{B}) \leq (\alpha+\varepsilon)\sum_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \mu(\overline{B}) = (\alpha+\varepsilon)\mu\left(\bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{G}} \overline{B}\right) \leq (\alpha+\varepsilon)\mu(U).\end{aligned}$$

Lauseen 3.31(a) nojalla tiedetään, että $\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ on avoin}\big\}$. Koska $\varepsilon > 0$ ja joukko $U \supset A$ ovat jo kiinnitetyt, päätellään, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku M, että $\mu(U) \leq \mu(A) + M\varepsilon$. Tällöin

$$\nu(A) \leq (\alpha+\varepsilon)\big(\mu(A) + M\varepsilon\big)$$

eli $\nu(A) \leq \alpha\mu(A)$, kun ε lähestyy nollaa.

(b) Kokoelmassa $\mathcal{F}$ valitaan ehdoksi $\nu(\overline{C}) \geq (\alpha-\varepsilon)\mu(\overline{C})$. Lauseen 4.22 tulos soveltuu myös ulkomitalle μ. Todistus on samankaltainen kuin kohdassa (a), mutta voidaan olettaa, että $\varepsilon < \alpha$. Tällöin vältytään negatiivisilta luvuilta, kun arvioidaan

$$(\alpha-\varepsilon)\mu(A) \leq (\alpha-\varepsilon)\left[\mu\left(A \setminus \bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}} \overline{B}\right) + \mu\left(A \cap \bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}} \overline{B}\right)\right] \leq (\alpha-\varepsilon)\mu\left(\bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}} \overline{B}\right)$$
$$= \sum_{\overline{B}\in\mathcal{G}} (\alpha-\varepsilon)\mu(\overline{B}) \leq \sum_{\overline{B}\in\mathcal{G}} \nu(\overline{B}) = \nu\left(\bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{G}} \overline{B}\right) \leq \nu(U)\,.$$

Päädytään tilanteeseen $(\alpha-\varepsilon)\mu(A) \leq \nu(A) + M\varepsilon$. Kun ε lähestyy nollaa, niin $\alpha\mu(A) \leq \nu(A)$. $\square$

Esimerkissä 3.38 osoitettiin, että jokainen jatkuva funktio on Borel-mitallinen. Tulos on voimassa myös heikommalla oletuksella eli jos funktio on *puolijatkuva*. Tätä tietoa tarvitaan lauseessa 5.6.

Määritelmä 5.4. Kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$ on *ylhäältä puolijatkuva* normiavaruuden X pisteessä x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$\forall x \in X \quad \text{ja} \quad \|x - x_0\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) < f(x_0) + \varepsilon\,.$$

Jos f on ylhäältä puolijatkuva jokaisessa joukon X pisteessä, sanotaan, että f on ylhäältä puolijatkuva.

Puolijatkuvuus *alhaalta* määritellään vastaavasti. Voidaan osoittaa, että funktio on jatkuva, jos ja vain jos se on alhaalta ja ylhäältä puolijatkuva. Kun tutkitaan funktion $D_\mu\nu$ μ-mitallisuutta, seuraava tulos on tarpeen.

Apulause 5.5. *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}^n$. Tällöin f on ylhäältä puolijatkuva, jos ja vain jos*

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq f(a)$$

jokaista jonoa $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n : x_k \to a$ kohti.

Todistus. Todistus on lähteestä [34]. Olkoon f ylhäältä puolijatkuva pisteessä a. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että määritelmä 5.4 on voimassa. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $\{x_k\}$ sellainen jono, että $x_k \to a$. Tällöin on olemassa sellainen $K \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\forall x_k \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad \|x_k - a\| < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{kun } k \geq K\,.$$

Määritelmän 5.4 mukaan

$$f(x_k) < f(a) + \varepsilon, \qquad \text{kun } k \geq K,$$

joten

$$\sup_{k \geq K} f(x_k) \leq f(a) + \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \limsup_{k \to \infty} f(x_k) \leq \sup_{k \geq K} f(x_k) \leq f(a) + \varepsilon.$$

Koska ε voi olla miten pieni tahansa, väite on todistettu *vain jos* -suuntaan.

Oletetaan sitten, että $\limsup\limits_{k \to \infty} f(x_k) \leq f(a)$ jokaista jonoa $\{x_k\} : x_k \to a$ kohti. Jotta muodostuisi ristiriita, oletetaan, että f ei ole ylhäältä puolijatkuva. Nyt on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että jokaista $\delta > 0$ kohti on olemassa sellainen alkio $x_\delta \in \mathbb{R}^n$, että

$$\|x_\delta - a\| < \delta \quad \text{ja} \quad f(x_\delta) \geq f(a) + \varepsilon.$$

Valitaan lukujono $\delta_k = \frac{1}{k}$, jossa $k \in \mathbb{Z}^+$. Tällöin jono $\left\{x_{\delta_k}\right\}$ suppenee alkioon a ja lisäksi

$$f\left(x_{\delta_k}\right) \geq f(a) + \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Koska kaikki luvut $f\left(x_{\delta_k}\right)$ ovat vähintään $f(a) + \varepsilon$, on oltava

$$\limsup_{k \to \infty} f\left(x_{\delta_k}\right) \geq f(a) + \varepsilon > f(a).$$

Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten f on ylhäältä puolijatkuva. $\square$

Analyysin peruskursseilta muistetaan, että jatkuva funktio on Riemann-integroituva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$ [15, s. 6]. Mikäli jollain funktiolla f on *numeroituva* määrä epäjatkuvuuskohtia suljetulla välillä, se on yhä Riemann-integroituva. Kyse on käsitteestä nollamittaisuus, joka esiintyy myös seuraavassa lauseessa. Reaalilukujen suljettu väli muuttuu joukossa $\mathbb{R}^n$ suljetuksi palloksi. Samoin kuin apulauseessa 5.3, voidaan olettaa, että joukon $\mathbb{R}^n$ mitta on äärellinen.

Lause 5.6. *Jos μ ja ν ovat Radon-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$, niin*

(a) *$D_\mu \nu$ on olemassa ja se on äärellinen μ-m.k. ja*

(b) *$D_\mu \nu$ on μ-mitallinen.*

Todistus. (a) Määritellään $I = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}_\mu \nu(x) = \infty\right\}$. Jokaista $\alpha > 0$ kohti on voimassa, että $I \subset \left\{x : \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\right\}$. Apulauseen 5.3 nojalla

$$\mu(I) \leq \frac{1}{\alpha} \nu(I).$$

Kun α kasvaa rajatta, $\mu(I)$ lähestyy nollaa eli $\mu(I) = 0$. Koska joukon I ulkomitta on nolla, $\overline{D}_\mu \nu$ on äärellinen μ-m.k. Määritellään seuraavaksi lukuja $0 < a < b$ kohti joukko

$$R(a,b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, \underline{D}_\mu \nu(x) < a < b < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty \right\}.$$

Huomataan, että $R(a,b) \subset \left\{ x \,:\, \underline{D}_\mu \nu(x) \le a \right\}$ ja että $R(a,b) \subset \left\{ x \,:\, \overline{D}_\mu \nu(x) \ge b \right\}$. Jälleen apulauseen 5.3 nojalla

$$b\mu\big(R(a,b)\big) \le \nu\big(R(a,b)\big) \le a\mu\big(R(a,b)\big),$$

joten $(b-a)\mu\big(R(a,b)\big) \le 0$. On oltava $\mu\big(R(a,b)\big) = 0$. Koska kahden erisuuren reaaliluvun välissä on rationaaliluku, tarkastellaan yhteneviä joukkoja

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, \underline{D}_\mu \nu(x) < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty \right\} = \bigcup_{\substack{0<a<b \\ a,b \text{ rationaaliset}}} R(a,b). \tag{5.7}$$

Yhtälön (5.7) oikean puolen ulkomitta on nolla, koska

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{0<a<b \\ a,b \text{ rationaaliset}}} R(a,b) \right) \le \sum_{\substack{0<a<b \\ a,b \text{ rationaaliset}}} \underbrace{\mu\big(R(a,b)\big)}_{=0} = 0,$$

joten monotonisuuden nojalla myös vasen puoli yhtälöstä (5.7) on nollamittainen mitan μ suhteen. Koska $\liminf \le \limsup$, tähänastisen tarkastelun nojalla jäljelle jää joukko $\left\{ x \,:\, \underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty \right\}$ eli $D_\mu \nu$ on olemassa ja se on äärellinen μ-m.k.

(b) Osoitetaan aluksi, että jokaista $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ kohti

$$\limsup_{y \to x} \mu\big(\overline{B}(y,r)\big) \le \mu\big(\overline{B}(x,r)\big).$$

Valitaan sellainen jono $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, että $y_k \to x$. Asetetaan $f_k = \chi_{\overline{B}(y_k,r)}$ ja $f = \chi_{\overline{B}(x,r)}$. Jokaista $a \in \mathbb{R}^n$ kohti on voimassa $f_k(a) \in \{0,1\}$ ja $f(a) \in \{0,1\}$. Jos $a \in \overline{B}(x,r)$ niin

$$f(a) = 1 \ge \sup_{k \in \mathbb{Z}^+} f_k(a) \ge \limsup_{k \to \infty} f_k(a) = \left(\limsup_{k \to \infty} f_k \right)(a). \tag{5.8}$$

Jos $a \notin \overline{B}(x,r)$, niin $\|a - x\| > r$, koska kyseessä on suljettu pallo. Tällöin on olemassa sellainen rationaaliluku q, että

$$\|a - x\| > q > r.$$

Olkoon $\varepsilon = q - r > 0$. Tällöin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku K, että

$$\|y_k - x\| < \varepsilon\,, \qquad \text{kun } k \geq K\,.$$

Käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\|y_k - a\| = \|y_k - x + x - a\| &\geq \Big|\|y_k - x\| - \|x - a\|\Big| \\ &\geq \|a - x\| - \|y_k - x\| > q - \varepsilon = q - q + r = r\,.\end{aligned}$$

Tällöin $a \notin \overline{B}(y_k, r)$, kun $k \geq K$, joten

$$f(a) = 0 = \sup_{k \geq K} f_k(a) \geq \limsup_{k\to\infty} f_k(a) = \Big(\limsup_{k\to\infty} f_k\Big)(a)\,. \tag{5.9}$$

Yhtälöiden (5.8) ja (5.9) nojalla joukossa $\mathbb{R}^n$ on voimassa epäyhtälö $\limsup_{k\to\infty} f_k \leq f$. Koska $-\sup(f_k) = \inf(-f_k)$, niin

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} f_k \leq f \qquad &\Leftrightarrow \qquad -\lim_{k\to\infty}\Big(\sup_{m\geq k} f_m\Big) \geq -f \\ &\Leftrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty}\Big(1 + \inf_{m\geq k}(-f_m)\Big) \geq 1 - f \\ &\Leftrightarrow \qquad \liminf_{k\to\infty}\,(1 - f_k) \geq 1 - f\,.\end{aligned}$$

Kun integroimisalueeksi valitaan hieman isompi pallo, $\overline{B}(x, 2r)$, varmistutaan, että pallo $\overline{B}(y_k, r)$ on kokonaan integroimisalueessa. Nyt Fatoun lemman 3.45 nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\overline{B}(x,2r)} (1 - f)\,\mathrm{d}\mu &\leq \int_{\overline{B}(x,2r)} \liminf_{k\to\infty}(1 - f_k)\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\overline{B}(x,2r)} (1 - f_k)\,\mathrm{d}\mu\,,\end{aligned}$$

joka on integroituna

$$\mu\big(\overline{B}(x, 2r)\big) - \mu\big(\overline{B}(x, r)\big) \leq \liminf_{k\to\infty}\Big(\mu\big(\overline{B}(x, 2r)\big) - \mu\big(\overline{B}(y_k, r)\big)\Big)\,.$$

Koska μ on Radon-mitta, $\mu\big(\overline{B}(x, 2r)\big) < \infty$, jolloin

$$\mu\big(\overline{B}(x, r)\big) \geq -\liminf_{k\to\infty}\Big(-\mu\big(\overline{B}(y_k, r)\big)\Big) = \limsup_{y\to x} \mu\big(\overline{B}(y, r)\big)\,.$$

Vastaava tulos on voimassa ulkomitalle ν.

Apulauseen 5.5 nojalla $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), g(x) = \mu\big(\overline{B}(x, r)\big)$ ja $h : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $h(x) = \nu\big(\overline{B}(x, r)\big)$, kun $r > 0$, ovat ylhäältä puolijatkuvia. Tällöin g ja h ovat Borel-mitallisia. Todistetaan tämä.

Tarkastellaan vain kuvausta g. Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että $g^{-1}\big((-\infty, c)\big)$ on avoin ja sitä myöten Borel-joukko. Jos $g^{-1}\big((-\infty, c)\big) = \varnothing$, niin väite on todistettu. Muulloin, olkoon $x_0 \in g^{-1}\big((-\infty, c)\big)$. Tällöin $g(x_0) < c$. Valitaan $\varepsilon = c - g(x_0) > 0$. Puolijatkuvuus ylhäältä takaa, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad \|y - x_0\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad g(y) < g(x_0) + \varepsilon = g(x_0) + c - g(x_0) = c.$$

Tällöin $y \in g^{-1}\big((-\infty, c)\big)$ eli jokainen piste avoimesta pallosta $B(x_0, \delta)$ kuuluu joukkoon $g^{-1}\big((-\infty, c)\big)$ eli se on avoin. Joukko $g^{-1}\big((-\infty, c)\big)$ on siis Borel-joukko.

Määritellään jokaista $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ kohti

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu\big(\overline{B}(x,r)\big)}{\mu\big(\overline{B}(x,r)\big)}, & \text{jos } \mu\big(\overline{B}(x,r)\big) > 0, \\ \infty, & \text{jos } \mu\big(\overline{B}(x,r)\big) = 0. \end{cases}$$

Lauseen 3.39(a) nojalla $g^{-1}(B)$ ja $h^{-1}(B)$ ovat Borel-joukkoja jokaista Borel-joukkoa $B \subset \mathbb{R}^n$ kohti. Nyt funktio f_r on Borel-mitallinen, sillä

$$\begin{aligned} f_r^{-1}\big(\{\infty\}\big) &= \big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f_r(x) = \infty\big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \underbrace{\mu\big(\overline{B}(x,r)\big)}_{=g(x)} = 0\Big\} \\ &= g^{-1}\big(\{0\}\big) \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

ja toisessa tapauksessa f_r on kahden Borel-mitallisen funktion osamäärä. Koska $f_r^{-1}(U)$ on Borel-joukko jokaista avointa joukkoa U kohti ja koska μ on Borel-mitta, funktio f_r on μ-mitallinen. Kohdan (a) ja lauseen 3.43(b) nojalla μ-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$D_\mu \nu = \lim_{r \to 0+} f_r = \lim_{k \to \infty} f_{\frac{1}{k}},$$

joten $D_\mu \nu$ on μ-mitallinen. $\square$

Luvun 5 alun tulokset esitetään samanlaisesti Bogachevin kirjassa [19, s. 367-368]. Nyt tiedetään, että ulkomitan ν derivaatta ulkomitan μ suhteen on μ-mitallinen kuvaus ja äärellinen μ-m.k. Oletukseksi riittää, että mitat ovat Radon-mittoja.

5.1 Derivaatan integrointi

Derivaatan mitallisuutta hyödynnetään Radonin-Nikodymin lauseessa, jonka mukaan joukon A ν-mitta on yhtäsuuri kuin integraali derivaatasta eli tiheydestä joukon A yli mitan μ suhteen. Radonin-Nikodymin lause olettaa, että ν on *absoluutti-*

sesti jatkuva mitan μ suhteen. Määritellään tämä.

Määritelmä 5.10 (Absoluuttinen jatkuvuus ja singulaarisuus). Olkoot μ ja ν Borel-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$.

(a) Ulkomitta ν on *absoluuttisesti jatkuva* ulkomitan μ suhteen, jos ehdosta $\mu(A) = 0$ seuraa, että $\nu(A) = 0$ jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti. Merkitään

$$\nu << \mu .$$

(b) Ulkomitat μ ja ν ovat *singulaarisia*, jos on olemassa sellainen Borel-joukko $B \subset \mathbb{R}^n$, että

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \nu(B) = 0 .$$

Merkitään $\nu \perp \mu$.

Tutustutaan tarkemmin mittojen absoluuttiseen jatkuvuuteen ja singulaarisuuteen. Seuraava esimerkki yhdistää luvun 5 keskeisiä käsitteitä [20, s. 36].

Esimerkki 5.11. Jos μ ja ν ovat Radon-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$, niin $\nu << \mu$, jos ja vain jos

$$\underline{D}_\mu \nu(x) < \infty \qquad \nu\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n . \tag{5.12}$$

Todistus. Ehto (5.12) on nimenomaan ulkomitasta ν. Lauseen 5.6(a) nojalla $D_\mu \nu$ on äärellinen μ-m.k., joten määritelmän 5.2 nojalla $\underline{D}_\mu \nu < \infty$, kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ja $\mu(A) = 0$. Absoluuttisen jatkuvuuden nojalla $\nu(A) = 0$, joten ehto (5.12) on voimassa myös ν-m.k.

Oletetaan sitten, että ehto (5.12) on voimassa ja $A \subset \mathbb{R}^n$ on sellainen joukko, että $\mu(A) = 0$. Tällöin apulauseen 5.3(a) nojalla

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu\Big(\big\{x \in A : \underline{D}_\mu \nu(x) = \infty\big\}\Big) + \nu\Big(\big\{x \in A : \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty\big\}\Big) \\
&\leq 0 + \bigcup_{k=1}^{\infty} \nu\Big(\big\{x \in A : \underline{D}_\mu \nu(x) \leq k\big\}\Big) \\
&\leq \bigcup_{k=1}^{\infty} k\mu\Big(\big\{x \in A : \underline{D}_\mu \nu(x) \leq k\big\}\Big) \\
&\leq \bigcup_{k=1}^{\infty} k\mu(A) = 0 ,
\end{aligned}$$

joten $\nu << \mu$. $\square$

Esimerkki singulaarisuudesta on samantapainen kuin äskeinen esimerkki absoluuttisesta jatkuvuudesta [20, s. 43].

Esimerkki 5.13. Jos μ ja ν ovat Radon-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$, niin μ ja ν ovat singulaarisia, jos ja vain jos

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \infty \qquad \nu\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Todistus. Oletetaan, että väite on voimassa. Tällöin $\overline{D}_\mu \nu(x) = \infty$, kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ja $\nu(A) = 0$. Ulkomitan ν Borel-säännöllisyyden nojalla on olemassa sellainen Borel-joukko $B : A \subset B$, että $\nu(A) = \nu(B) = 0$. Määritelmän 5.1 nojalla

$$\overline{D}_\mu \nu(x) < \infty, \qquad \text{kun } x \in B = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus B).$$

Nyt huomataan, että lauseen 5.6(a) nojalla $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$. Tällöin μ ja ν ovat singulaarisia. Toinen suunta päätellään nurin perin.

Oletetaan, että μ ja ν ovat singulaarisia. Tällöin on olemassa sellainen Borel-joukko B, että $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \nu(B) = 0$. Tällöin lauseen 5.6(a) nojalla kirjoitetaan

$$\overline{D}_\mu \nu(x) < \infty, \qquad \text{kun } x \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus B),$$

joten määritelmän 5.1 mukaan $\overline{D}_\mu \nu(x) = \infty$, kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$. Koska $\nu(B) = 0$, väite seuraa. $\square$

Kolmas esimerkki yhdistää absoluuttisen jatkuvuuden ja singularisuuden. Tehtävä löytyy useista kirjoista [7, s. 270][8, s. 120][9, s. 183][23, s. 100].

Esimerkki 5.14. Olkoot μ ja ν ovat Radon-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$. Jos $\nu << \mu$ ja $\nu \perp \mu$, niin ν on *nollamitta* eli $\nu(A) = 0$ jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti.

Todistus. Singulaarisuuden nojalla on olemassa sellainen Borel-joukko $B \subset \mathbb{R}^n$, että $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \nu(B) = 0$. Absoluuttisen jatkuvuuden nojalla myös $\nu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Koska ν on Borel-mitta ja koska ulkomitta on monotoninen, saadaan arvio

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) \\ &\le \nu(B) + \nu(\mathbb{R}^n \setminus B) \\ &= 0 + 0 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Radonin-Nikodymin lause esitetään toisinaan muodossa, jossa integradin kerrotaan olevan yksikäsitteinen [7, s. 272-274][8, s. 121-123][9, s. 142-143][20, s. 39][23, s. 95]. Muun muassa Evans ja Gariepy osoittavat, että tämä yksikäsitteinen funktio on derivaatta [10, s. 50][19, s. 369].

Lause 5.15 (Radonin-Nikodymin lause). *Olkoot ν ja μ Radon-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$. Jos $\nu << \mu$, niin*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, \mathrm{d}\mu$$

jokaista μ-mitallista joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti.

Todistus. Oletetaan, että $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Olkoon A μ-mitallinen. Koska μ on Borel-säännöllinen, on olemassa sellainen Borel-joukko B, että $A \subset B$ ja että $\mu(A) = \mu(B)$. Tällöin μ-mitallisuuden nojalla $\mu(B \setminus A) = 0$, ja absoluuttisen jatkuvuuden nojalla $\nu(B \setminus A) = 0$. Lauseen 3.4 kohtien (b) ja (c) perusteella joukko A on ν-mitallinen. Jos siis joukko on μ-mitallinen, niin se on myös ν-mitallinen. Asetetaan seuraavaksi

$$Z = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, D_\mu\nu(x) = 0\big\} \qquad \text{ja} \qquad I = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \overline{D}_\mu\nu(x) = \infty\big\}.$$

Lauseen 5.6 todistuksen nojalla $\mu(I) = 0$, jolloin $\nu(I) = 0$ absoluuttisen jatkuvuuden oletuksesta. Lisäksi I on μ-mitallinen lauseen 3.4(c) nojalla. Apulauseen 5.3 nojalla $\nu(Z) \le \alpha\mu(Z)$ jokaista $\alpha > 0$ kohti, joten $\nu(Z) = 0$. Lauseiden 3.39(a) ja 5.6(b) nojalla joukko Z on μ-mitallinen.

Olkoot A μ-mitallinen ja $1 < t < \infty$. Määritellään jokaista kokonaislukua m kohti

$$A_m = A \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, t^m \le D_\mu\nu(x) < t^{m+1}\big\}. \tag{5.16}$$

Lauseen 3.39(a) nojalla yhtälön (5.16) oikean puolimmaisin joukko on μ-mitallinen, jolloin myös A_m on μ-mitallinen. Tämän todistuksen alun mukaan joukko A_m on ν-mitallinen. Poistetaan seuraavaksi joukosta A kaikki ne pisteet, jotka eivät kuulu mihinkään joukkoon A_m. Näitä pisteitä on kolmea eri tyyppiä: $D_\mu\nu(x) = 0$, $\overline{D}_\mu\nu(x) = \infty$ ja $\overline{D}_\mu\nu(x) > \underline{D}_\mu\nu(x)$. Nyt siis

$$A \setminus \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m \subset Z \cup I \cup \big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \overline{D}_\mu\nu(x) > \underline{D}_\mu\nu(x)\big\},$$

jolloin lauseen 5.6 todistusta ja oletusta $\nu << \mu$ hyödyntäen saadaan arvio

$$\nu\left(A \setminus \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m\right) \le \nu(Z) + \nu(I) + \nu\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \overline{D}_\mu\nu(x) > \underline{D}_\mu\nu(x)\big\}\Big) = 0+0+0 = 0.$$

Joukon $\bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m$ μ-mitallisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu\left(A \setminus \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m\right) + \nu\left(A \cap \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m\right) = \nu\left(\bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m\right)\\ &\overset{\text{erill.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu(A_m) \overset{\text{Apulause 5.3}}{\le} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{m+1}\mu(A_m) = t \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m\mu(A_m) \le t \int_A D_\mu\nu \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että jako joukkoihin A_m kattaa sen osan joukosta A, joka on ei-nollamittainen, eli joukot A_m ja luvut t^m muodostavat erään yksinkertaisten funktioiden lineaarikombinaation, joka arvioi funktiota $D_\mu\nu$ alhaaltapäin.

Vastaavasti saadaan

$$\nu(A) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu(A_m) \overset{\text{Apulause 5.3}}{\geq} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \mu(A_m) = \frac{1}{t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{m+1} \mu(A_m) \geq \frac{1}{t} \int_A D_\mu \nu \, \mathrm{d}\mu .$$

Tällöin jokaista $1 < t < \infty$ kohti on voimassa

$$\frac{1}{t} \int_A D_\mu \nu \, \mathrm{d}\mu \leq \nu(A) \leq t \int_A D_\mu \nu \, \mathrm{d}\mu .$$

Kun $t \to 1^+$, niin $\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, \mathrm{d}\mu$. $\square$

Radonin-Nikodymin lauseesta selviää syy, miksi mitan derivaattaa kutsutaan myös *tiheydeksi*. Kun mitallista joukkoa A integroidaan mitan μ yli, lopputuloksena on ikään kuin joukon A ν-massa. Derivaatta eli tiheys kuvastaa, miten tämä ν-massa on jakautunut joukkoon $\mathbb{R}^n$ mitan μ suhteen.

Lebesguen hajotelmalauseen avulla Radon-mitta ν hajotetaan kahteen osaan, joilla on tietyt ominaisuudet suhteessa Radon-mittaan μ [7, s. 271][8, s. 121][10, s. 52]. Todistuksessa päästään hyödyntämään täydellisyysaksioomaa 2.11. Voidaan jälleen rajoittua kompakteihin joukkoihin tai vaihtoehtoisesti olettaa, että $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ ja $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Lause 5.17 (Lebesguen hajotelmalause). *Olkoot ν ja μ Radon-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Voidaan kirjoittaa*

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s ,$$

jossa ν_{ac} ja ν_s ovat sellaisia Radon-mittoja joukossa $\mathbb{R}^n$, että $\nu_{ac} << \mu$ ja $\nu_s \perp \mu$.

(b) *On voimassa*

$$D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac} \qquad \text{ja} \qquad D_\mu \nu_s = 0 \qquad \mu\text{-m.k.},$$

joista seuraa, että

$$\nu(B) = \int_B D_\mu \nu \, \mathrm{d}\mu + \nu_s(B)$$

jokaista Borel-joukkoa $B \subset \mathbb{R}^n$ kohti.

Todistus. (a) Määritellään

$$\mathcal{E} = \big\{ B \subset \mathbb{R}^n \, : \, B \text{ on Borel-joukko}, \; \mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0 \big\}.$$

Koska joukko $\big\{ \nu(A) \, : \, A \in \mathcal{E} \big\}$ on alhaalta rajoitettu, sillä on suurin alaraja. Valitaan sellainen joukkojono $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, että

$$\nu(B_k) \le \inf_{B\in\mathcal{E}} \nu(B) + \frac{1}{k}, \qquad \text{jossa } k \in \mathbb{Z}^+ .$$

Asetetaan $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. De Morganin lain nojalla

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus C) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus B_k)\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbb{R}^n \setminus B_k) = 0 ,$$

joten $C \in \mathcal{E}$, sillä C on myös Borel-joukko. Tällöin

$$\inf_{B\in\mathcal{E}} \nu(B) \le \nu(C) \le \nu(B_k) \le \inf_{B\in\mathcal{E}} \nu(B) + \frac{1}{k}, \qquad \text{jossa } k \in \mathbb{Z}^+ ,$$

joten

$$\nu(C) = \inf_{B\in\mathcal{E}} \nu(B) . \tag{5.18}$$

Määritellään $\nu_{\mathrm{ac}} = \nu \llcorner C$ ja $\nu_{\mathrm{s}} = \nu \llcorner (\mathbb{R}^n \setminus C)$, jotka ovat Radon-mittoja lauseen 3.28 nojalla. Joukon C ν-mitallisuuden nojalla

$$\nu(A) = \nu_{\mathrm{ac}}(A) + \nu_{\mathrm{s}}(A) = \big(\nu_{\mathrm{ac}} + \nu_{\mathrm{s}}\big)(A) , \qquad \text{jokaista } A \subset \mathbb{R}^n \text{ kohti} .$$

Osoitetaan, että $\nu_{\mathrm{ac}} << \mu$. Ristiriitaa varten oletetaan, että on olemassa sellainen Borel-joukko $A : A \subset C$, että $\mu(A) = 0$, mutta $\nu(A) > 0$. Koska $C \in \mathcal{E}$, joukko-opin nojalla saadaan arvio

$$\mu\big(\mathbb{R}^n \setminus (C \setminus A)\big) \le \mu(\mathbb{R}^n \setminus C) + \mu(A) = 0 + 0 = 0 ,$$

joten $C \setminus A \in \mathcal{E}$. Mutta tällöin joukon A ν-mitallisuuden nojalla

$$\nu(C) = \nu(C \cap A) + \nu(C \setminus A) \qquad \Rightarrow \qquad \nu(C \setminus A) = \nu(C) - \nu(A) < \nu(C) ,$$

mikä on ristiriita yhtälön (5.18) kanssa. Siispä $\nu(A) = 0$, jos $\mu(A) = 0$ jokaista Borel-joukkoa $A \subset C$ kohti. Koska tämä tulos on vain Borel-joukoille $A : A \subset C$, absoluuttisen jatkuvuuden todistaminen vaatii lisätyötä.

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, että $\mu(D) = 0$. Pitää osoittaa, että $\nu_{\mathrm{ac}}(D) = 0$. Huomataan, että $\mu(C \cap D) = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lauseen 3.31(a) nojalla on olemassa sellainen avoin joukko $U : (C \cap D) \subset U$, että $\mu(U) < \varepsilon$. Joukko $C \cap U \subset C$ on Borel-joukko ja lisäksi

$$C \cap D \subset C \cap U \subset U .$$

Toisin sanoen, $\mu(C \cap U) = 0$. Tällöin aiemman päättelyn nojalla $\nu(C \cap U) = 0$ ja monotonisuuden nojalla $\nu(C \cap D) = 0$. Tämä tarkoittaa, että $\nu_{\mathrm{ac}}(D) = 0$.

Lopuksi todetaan, että $\mu(\mathbb{R}^n \setminus C) = 0$ ja $\nu_{\mathrm{s}}(C) = 0$, joten $\nu_{\mathrm{s}} \perp \mu$.

(b) Olkoon $\alpha > 0$. Määritellään

$$E = \big\{x \in C \,:\, D_\mu \nu_{\mathrm{s}}(x) \ge \alpha\big\} .$$

Apulauseen 5.3 nojalla $\alpha\mu(E) \leq \nu_{\mathrm{s}}(E) \leq \nu_{\mathrm{s}}(C) = 0$, joten $D_\mu \nu_{\mathrm{s}} = 0$ μ-m.k., koska $\mu(E) = 0$. Tällöin

$$D_\mu \nu = D_\mu \nu_{\mathrm{ac}} + D_\mu \nu_{\mathrm{s}} = D_\mu \nu_{\mathrm{ac}} \quad \mu\text{-m.k.}$$

Lauseen 5.15 nojalla jokaista Borel-joukkoa $B \subset \mathbb{R}^n$ kohti on voimassa

$$\nu(B) = \nu_{\mathrm{ac}}(B) + \nu_{\mathrm{s}}(B) = \int_B D_\mu \nu_{\mathrm{ac}} \,\mathrm{d}\mu + \nu_{\mathrm{s}}(B) \overset{\mu\text{-m.k.}}{=} \int_B D_\mu \nu \,\mathrm{d}\mu + \nu_{\mathrm{s}}(B). \quad \square$$

Edellisen lauseen nojalla määritellään termejä.

Määritelmä 5.19. Ulkomitta ν_{ac} on *absoluuttisesti jatkuva osa* ulkomitasta ν ulkomitan μ suhteen, kun taas ν_{s} on *singulaarinen* osa.

Diplomityön viimeiset kaksi alilukua perustuvat Radonin-Nikodymin lauseeseen 5.15, jonka todistus taas perustui mitan derivaatan ominaisuuksiin. *Lebesguen differentioituvuuslauseessa* 5.23 mitan derivaatta esiintyy vielä seikkaperäisesti, erityisesti yhtälössä (5.24). Sen jälkeen sitä ei enää mainita.

5.2 Lebesgue-piste

Luvussa 5 on pohdittu tähän asti vain yleisiä Radon-mittoja. Nyt käsittelyyn tulee myös n-ulotteinen Lebesgue-mitta ja diplomityön lopulla se onkin ainoa tutkittava mitta. Aliluvuissa 5.2 ja 5.3 tarkasteluun tulee mukaan integraalit.

Määritelmä 5.20 (Kuvauksen keskiarvo). Kuvauksen f *keskiarvo* joukossa E ulkomitan μ suhteen määritellään

$$⨍_E f \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu,$$

jos $0 < \mu(E) < \infty$ ja integraali on määritelty.

Mitallisen funktion integraali yli mitallisen joukon määrittää uuden mitan. Seuraavat kaksi apulausetta osoittavat tämän.

Apulause 5.21. *Olkoot $(X, \mathcal{S}, \mu)$ mitta-avaruus ja $f_n : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{S}$-mitallisia funktioita jokaista $n \in \mathbb{Z}^+$ kohti. Tällöin*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Sivuutetaan. Tulos seuraa *monotonisen konvergenssin lauseesta* ja integraalin additiivisuudesta. $\square$

Apulause 5.22. *Olkoot* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $f : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{S}$*-mitallinen funktio. Tällöin kuvaus* $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$*, joka määritellään jokaista* $A \in \mathcal{S}$ *kohti*

$$\nu(A) = \int_X \chi_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu,$$

on mitta joukossa $(X, \mathcal{S})$*.*

Todistus. Sivuutetaan. Todistus perustuu apulauseeseen 5.21 ja erillisten joukkojen E_j, jossa $j \in \mathbb{Z}^+$, identiteettiin

$$\chi_{E_1 \cup E_2 \cup \cdots} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} + \cdots . \qquad \square$$

Lokaalisti integroituvien funktioiden joukko $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$ tarkoittaa niitä funktioita f, joiden integraali kompaktin joukon $K \subset \mathbb{R}^n$ yli on äärellinen, kun integrandi on $|f|$. Vastaavasti, jos joukko on $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$, niin integrandi on $|f|^p$. [10, s. 24-26]

Lause 5.23 (Lebesguen differentioituvuuslause). *Olkoon* μ *Radon-mitta joukossa* $\mathbb{R}^n$ *ja* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$*. Tällöin*

$$\lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} f \, \mathrm{d}\mu = f(x) \qquad \mu\text{-m.k. } \ x \in \mathbb{R}^n .$$

Todistus. Asetetaan Borel-joukolle $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\xi(B) = \int_B f^+ \, \mathrm{d}\mu .$$

Apulauseen 5.22 nojalla ξ on mitta mitallisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Laajennetaan mitta ξ ulkomitaksi koko joukkoon $\mathbb{R}^n$ asettamalla mille tahansa joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\nu^+(A) = \inf \big\{ \xi(B) \, : \, A \subset B, \ B \text{ on Borel-joukko} \big\} .$$

Osoitetaan, että ν^+ on ulkomitta [20, s. 8]. Koska $\varnothing \subset \varnothing$, saadaan $\nu^+(\varnothing) \leq \xi(\varnothing) = 0$ eli $\nu^+(\varnothing) = 0$. Monotonisuus $\nu^+(A) \leq \nu^+(B)$, jos $A \subset B$, seuraa infimumin määritysjoukosta, sillä määritysjoukkoa laajentamalla infimum voi vain vähetä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen Borel-joukko $C : A \subset C$, että

$$\nu^+(A) \leq \xi(C) < \nu^+(A) + \varepsilon .$$

Valitaan jono $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, jonka alkiot eivät välttämättä ole erillisiä. Tällöin on olemassa sellainen Borel-joukkojen jono $\{B_k\}$, että $A_k \subset B_k$ ja $\xi(B_k) < \nu^+(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$, jolloin

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}_{\in \mathcal{B}_n} \quad \text{ja} \quad \nu^+ \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \leq \xi \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) .$$

Koska Borel-joukot B_k eivät välttämättä ole erillisiä [7, s. 43], saadaan arvio

$$\nu^{+}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \xi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \xi(B_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{+}(A_k) + \varepsilon,$$

jonka mukaan ν^+ on ulkomitta.

Osoitetaan, että ν^+ on Radon-mitta. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. Suljettuna joukkona K on Borel-joukko, joten

$$\nu^{+}(K) \le \xi(K) = \int_K f^{+}\,\mathrm{d}\mu \le \int_K |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Tutkitaan Borel-säännöllisyyttä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja valitaan sellaiset Borel-joukot $B_k : A \subset B_k$, että

$$\xi(B_k) \le \nu^{+}(A) + \frac{1}{k}, \qquad \text{jossa } k \in \mathbb{Z}^{+},$$

jolloin $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}_n$. Epäyhtälö

$$\xi\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) \le \xi(B_k) \le \nu^{+}(A) + \frac{1}{k} \le \xi\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) + \frac{1}{k}$$

on voimassa jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti. Leikkausjoukko $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ on sopiva Borel-säännöllisyyden 3.26(b) toiseen ehtoon, sillä $\nu^+(A) = \xi(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = \nu^+(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k)$. Perustellaan, että Caratheodoryn ehdon 3.23 mukaan ν^+ on Borel-mitta. Sellaiset joukot $A, B \subset \mathbb{R}^n$, joille $\operatorname{dist}(A,B) > 0$, voidaan peittää erillisillä Borel-joukoilla $C_1 : A \subset C_1$ ja $C_2 : B \subset C_2$, ja lisäksi on olemassa sellainen Borel-joukko $D : A \cup B \subset D$, että $\nu^+(A \cup B) = \nu^+(D) = \xi(D)$. Ulkomitan ν^+ subadditiivisuuden nojalla riittää osoittaa, että

$$\nu^{+}(A) + \nu^{+}(B) \le \xi(C_1 \cap D) + \xi(C_2 \cap D) \overset{\text{erill.}}{=} \xi\big((C_1 \cup C_2) \cap D\big) \le \xi(D) = \nu^{+}(A \cup B).$$

Nyt ν^+ on Borel-säännöllinen ja lopulta Radon-mitta määritelmän 3.26(c) mukaan. Osoitetaan, että $\nu^+ << \mu$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, että $\mu(A) = 0$. Koska μ on Borel-säännöllinen, on olemassa sellainen Borel-joukko $B : A \subset B$, että $\mu(B) = 0$. Nyt

$$\nu^{+}(A) \le \xi(B) = \int_B f^{+}\,\mathrm{d}\mu \le \mu(B) \sup_{x \in B}\big(f^{+}(x)\big) = 0,$$

joten $\nu^+ << \mu$. Lauseen 5.15 nojalla jokaista μ-mitallista joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti

$$\nu^{+}(A) = \int_A D_\mu \nu^{+}\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.24}$$

Todistuksen lopputarkastelun ideana on osoittaa, että $D_\mu \nu^+ = f^+$ μ-m.k. Mitta ξ määriteltiin vain Borel-joukoille, mikä aiheuttaa lisätyötä, koska μ-mitallinen joukko A *ei välttämättä* ole Borel-joukko. Koska μ on Borel-säännöllinen, on olemassa sellainen Borel-joukko $B : A \subset B$, että $\mu(A) = \mu(B)$. Voidaan olettaa, että $\mu(A) < \infty$, koska Radon-mitan ominaisuuksien nojalla voitaisiin rajoittua kompakteihin joukkoihin ja tutkia joukkoa

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(A \cap \overline{B}(0,k)\big).$$

Joukon A μ-mitallisuuden ja äärellisten mittojen nojalla

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \cap A)}_{=\mu(A)} + \mu(B \setminus A) \qquad \Rightarrow \qquad \mu(B \setminus A) = 0.$$

Aiemman todistuksen mukaan $\nu^+ << \mu$, joten $\nu^+(B \setminus A) = 0$. Lauseen 3.4(c) nojalla joukko $B \setminus A$ on ν^+-mitallinen. Tällöin

$$\begin{aligned} \nu^+(B) &= \nu^+\big(B \cap (B \setminus A)\big) + \nu^+\big(B \setminus (B \setminus A)\big) \\ &= \nu^+(B \setminus A) + \nu^+(A) = \nu^+(A). \end{aligned}$$

Nyt jokaista μ-mitallista joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti

$$\nu^+(A) = \nu^+(B) = \xi(B) = \int_B f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_{B \setminus A} f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu,$$

joten yhtälön (5.24) nojalla

$$\nu^+(A) = \int_A D_\mu \nu^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu.$$

Tällöin $D_\mu \nu^+ = f^+$ μ-m.k., sillä mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ voi olla mikä tahansa. Tapauksessa ν^- määritellään $\xi(B) = \int_B f^- \, \mathrm{d}\mu$. Koska $f = f^+ - f^-$, niin μ-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} f \, \mathrm{d}\mu &= \lim_{r \to 0+} \left(\frac{1}{\mu\big(\overline{B}(x,r)\big)} \Big[\nu^+\big(\overline{B}(x,r)\big) - \nu^-\big(\overline{B}(x,r)\big) \Big] \right) \\ &\overset{5.6(a)}{=} D_\mu \nu^+(x) - D_\mu \nu^-(x) \\ &= f^+(x) - f^-(x) = f(x). \quad \square \end{aligned}$$

Lause 5.23 tarkoittaa, että lokaalisti integroituvan funktion arvo on Radon-mitan μ suhteen melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ funktion infinitesimaalinen keskiarvo. Tulos on melko yllättävä, koska funktiosta oletetaan vain lokaali integroituvuus. Kuitenkin hyvin pienen pallon sisällä funktion arvo on keskimäärin sama kuin funktion arvo pallon keskipisteessä. Seuraava lause yleistää lausetta 5.23, sillä kiinnitetylle pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ kirjoitetaan keskiarvot huomioiden

$$\lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} f \, \mathrm{d}\mu = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} \big(f - f(x)\big) \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

ja arvioidaan $f - f(x) \leq |f - f(x)|$. Axler esittää lauseen 5.25 yksiulotteisena ja osoittaa sen avulla lauseen 5.23 todeksi [7, s. 108-109, 201].

Lause 5.25. *Olkoon μ Radon-mitta joukossa $\mathbb{R}^n$. Jos $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, niin*

$$\lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} |f - f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \mu\text{-m.k.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Todistus. Olkoon $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ numeroituva ja *tiheä* osajoukko joukolle $\mathbb{R}$. Huomataan, että

$$0 \le |f - r_i|^p \le (|f| + |r_i|)^p \le (2\max\{|f|, |r_i|\})^p \le 2^p\left(|f|^p + |r_i|^p\right), \tag{5.26}$$

joten jokaista kompaktia joukkoa $K \subset \mathbb{R}^n$ ja $i \in \mathbb{Z}^+$ kohti on voimassa

$$\int_K |f - r_i|^p \,\mathrm{d}\mu \le 2^p \int_K |f|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^p \int_K |r_i|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Nyt $|f - r_i|^p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$ ja lauseen 5.23 nojalla jokaista $i \in \mathbb{Z}^+$ kohti on voimassa, että

$$\lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} |f - r_i|^p \,\mathrm{d}\mu = |f(x) - r_i|^p \qquad \mu\text{-m.k.} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.27}$$

Koska yhtälö (5.27) on voimassa μ-m.k., on olemassa mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle $\mu(A) = 0$ ja (5.27) on voimassa jokaista $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ kohti. Olkoot siis $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ja $\varepsilon > 0$. Yhtälön (5.27) nojalla $|f| < \infty$ eli $f(x) \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan avointa väliä

$$\left(f(x) - \frac{\varepsilon^{1/p}}{2^{1/p}2}, f(x) + \frac{\varepsilon^{1/p}}{2^{1/p}2}\right).$$

Valitaan jonosta $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ sellainen alkio r_j, että

$$|f(x) - r_j| < \frac{\varepsilon^{1/p}}{2^{1/p}2} \qquad \Leftrightarrow \qquad |f(x) - r_j|^p < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}.$$

Samalla tavoin kuin epäyhtälöketjussa (5.26) päätellään, että

$$\begin{aligned}
\limsup_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu \;&\le\; 2^p \left[\limsup_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} |f - r_j|^p \,\mathrm{d}\mu \right. \\
&\qquad \left. + \limsup_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} \underbrace{|f(x) - r_j|^p}_{\text{vakio}} \,\mathrm{d}\mu \right] \\
&\overset{(5.27)}{=} 2^p \left[|f(x) - r_j|^p + \limsup_{r \to 0+} \left(\frac{1}{\mu\big(\overline{B}(x,r)\big)} |f(x) - r_j|^p \mu\big(\overline{B}(x,r)\big) \right) \right] \\
&= 2^p \left[|f(x) - r_j|^p + |f(x) - r_j|^p \right] \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska arvio on voimassa jokaista $\varepsilon > 0$ kohti ja μ-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$, väite on todistettu, sillä $\liminf \le \limsup$. $\square$

Lauseen 5.25 toisenlainen todistus [23, s. 123-125] perustuu funktion $f \in L^1_{\text{loc}}$ hajotelmaan, jossa ensimmäinen osa on rajoitettu ja jatkuva, ja toinen osa on rajoitettu L^1-normilla. Lopputodistus perustuu jatkuvuuteen, *Markovin epäyhtälöön* ja Vitalin peitelauseeseen. Määritellään edellisen lauseen nojalla *Lebesgue-piste* [8, s. 138].

Määritelmä 5.28 (Lebesgue-piste). Jos piste $x \in \mathbb{R}^n$ toteuttaa lauseen 5.25 yhtälön, niin x on funktion f *Lebesgue-piste* ulkomitan μ suhteen.

Lauseen 5.25 nojalla melkein kaikki joukon $\mathbb{R}^n$ pisteet ovat Lebesgue-pisteitä. Funktiosta tarvitsee olettaa vain lokaalinen p-integroituvuus, jolloin sen arvot ovat hyvin pienessä pallossa keskimäärin yhtäsuuria kuin keskipisteessä. Päätellään, että lokaalisti integroituvat funktiot ovat pääsääntöisesti hyvin käyttäytyviä funktioita. Jos käsitellään Lebesgue-mittaa, niin vahvempi tulos on voimassa.

Lause 5.29. *Olkoon $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$, jossa $1 \le p < \infty$. Tällöin*

$$\lim_{\overline{B} \to \{x\}} \fint_{\overline{B}} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \qquad \mathcal{L}^n\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n,$$

jossa raja-arvo määritetään suljetuista palloista $\overline{B}$, jotka sisältävät pisteen x ja joille $\operatorname{diam}(\overline{B}) \to 0+$.

Todistus. Erona edelliseen on, että pallojen keskipisteen ei tarvitse olla x. Palautetaan mieleen, että Lebesgue-mitta $\mathcal{L}^n$ on Radon-mitta. Merkitään $d_k = \operatorname{diam}(\overline{B}_k)$. Olkoon $\{\overline{B}_k\}_{k=1}^{\infty}$ jono sellaisia suljettuja palloja, että $x \in \overline{B}_k$ jokaista $k \in \mathbb{Z}^+$ kohti ja $d_k \to 0+$, kun $k \to \infty$. Koska jokaista $y, z \in \overline{B}_k$ kohti on voimassa

$$\|z - y\| \le d_k,$$

saadaan arvio $\|x - y\| \le d_k$. Tällöin $\overline{B}_k \subset \overline{B}\big(x, d_k\big)$ ja Lebesgue-mitan ominaisuuksien nojalla [7, s. 140, 144][23, s. 89] lasketaan

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(\overline{B}_k)} = \frac{1}{\mathcal{L}^n\left(\frac{d_k}{2}\overline{B}(0,1)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{d_k}{2}\right)^n \mathcal{L}^n\left(\overline{B}(0,1)\right)} = \frac{2^n}{\mathcal{L}^n\left(d_k\overline{B}(0,1)\right)} = \frac{2^n}{\mathcal{L}^n\left(\overline{B}(x,d_k)\right)},$$

joten

$$\fint_{\overline{B}_k} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \le 2^n \fint_{\overline{B}(x,d_k)} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n .$$

Kun $k \to \infty$, niin lauseen 5.25 nojalla $\mathcal{L}^n$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$\lim_{k\to\infty} \fint_{\overline{B}_k} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \le 2^n \lim_{d_k \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,d_k)} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 . \quad \square$$

Tärkeä seuraus lauseesta 5.23 johdattelee käsitteeseen *tiheyspiste*. *Lebesguen tiheyslauseen* todistus perustuu karakteristisen funktion ominaisuuksiin [7, s. 113].

Lause 5.30 (Lebesguen tiheyslause). *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-mitallinen. Tällöin*

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap E\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 1 \qquad \mathcal{L}^n\text{-m.k. } x \in E$$

ja

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap E\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0 \qquad \mathcal{L}^n\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n \setminus E\,.$$

Todistus. Kuvaus χ_E on $\mathcal{L}^n$-mitallinen, sillä E on $\mathcal{L}^n$-mitallinen. Koska $\mathcal{L}^n$ on Radon-mitta ja $\chi_E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$, lauseen 5.23 nojalla $\mathcal{L}^n$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} \chi_E \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = \chi_E(x)\,.$$

Huomataan, että

$$\fint_{\overline{B}(x,r)} \chi_E \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = \frac{1}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\overline{B}(x,r) \cap E} \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap E\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)}\,,$$

mistä väite seuraa. $\square$

Edellisen lauseen oletuksena oli, että joukko E on $\mathcal{L}^n$-mitallinen. Sen avulla voitaisiin todistaa *Steinhausin lause* 5.34 [19, s. 85][20, s. 43]. Valitaan kuitenkin toinen lähestymistapa.

Apulause 5.31. *Jos $K \subset \mathbb{R}^n$ on sellainen kompakti joukko, että $\mathcal{L}^n(K) > 0$, niin joukko $\{x - y \,:\, x, y \in K\}$ sisältää avoimen pallon $B(0,\delta)$ jollakin $\delta > 0$.*

Todistus. Todistus on lähteestä [35]. Radon-mitan ominaisuuden ja oletuksen nojalla $0 < \mathcal{L}^n(K) < \infty$, joten lauseen 3.31(a) mukaan on olemassa sellainen avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$, että $K \subset U$ ja

$$\mathcal{L}^n(U) < 2\mathcal{L}^n(K)\,. \tag{5.32}$$

Tässä on siis valittu $\varepsilon = \mathcal{L}^n(K) > 0$ infimumin ε-karakterisointiin. Joukko $\mathbb{R}^n \setminus U$ on suljettu eli $\mathbb{R}^n \setminus U = \overline{\mathbb{R}^n \setminus U}$. Valitaan $x \in K$. Tällöin $x \notin \mathbb{R}^n \setminus U$, joten apulauseen 3.22 nojalla

$$\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0\,.$$

Koska tämä on voimassa jokaista $x \in K$ kohti, $\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$. Osoitetaan, että jos $y \in \mathbb{R}^n$ ja $\|y\| < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$, niin $K + y \subset U$. Ristiriitaa varten oletetaan, että eräälle alkiolle $z \in K$ olisi voimassa

$$z + y \in \mathbb{R}^n \setminus U \qquad \text{ja} \qquad \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U) \le \|z - (z+y)\| = \|y\|\,,$$

mikä on ristiriita. Nyt siis sekä $K + y \subset U$ ja $K \subset U$, joten $(K + y) \cup K \subset U$. Jos joukot $K+y$ ja K ovat erillisiä, niin Lebesgue-mitan siirtoinvarianttiuden [7, s. 144] nojalla

$$\mathcal{L}^n(U) \geq \mathcal{L}^n\big((K+y) \cup K\big) = \mathcal{L}^n(K+y) + \mathcal{L}^n(K) = 2\mathcal{L}^n(K),$$

mikä on ristiriita epäyhtälön (5.32) kanssa. Nyt leikkausjoukko $(K+y) \cap K$ on epätyhjä. Tässä vaiheessa tiedetään, että

$$\text{jos} \quad y \in B\big(0, \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)\big), \qquad \text{niin} \quad (K+y) \cap K \neq \varnothing. \tag{5.33}$$

Valitaan $\delta = \frac{\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)}{2} > 0$. Tällöin jos $v \in B(0, \delta)$, niin seurauksen (5.33) mukaan on olemassa sellainen $w \in \mathbb{R}^n$, että $w \in K+v$ ja $w \in K$. Edelleen, on olemassa sellaiset $k_1, k_2 \in K$, että $w = k_1 + v$ ja $w = k_2$. Tällöin

$$v = k_2 - k_1,$$

joten $v \in \{x - y \,:\, x, y \in K\}$. $\square$

Edellisen apulauseen ja Steinhausin lauseen todistukset perustuvat Hans Rademacherin kirjaan vuodelta 1921 [19, s. 85, 472]. Lauseiden ero on vain siinä, mitä joukosta oletetaan: ensimmäisessä kyse on kompaktista joukosta, kun taas toisessa kyse on $\mathcal{L}^n$-mitallisesta joukosta.

Lause 5.34 (Steinhausin lause). *Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on sellainen $\mathcal{L}^n$-mitallinen joukko, että $\mathcal{L}^n(A) > 0$, niin joukko $\{x - y \,:\, x, y \in A\}$ sisältää avoimen pallon $B(0, \delta)$ jollakin $\delta > 0$.*

Todistus. Todistus on lähteestä [35]. Joukko $\mathbb{R}^n$ voidaan ilmaista avoimien pallojen yhdisteenä $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(0, k)$. Tällöin

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B(0, k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(A \cap B(0, k)\big),$$

joten määritelmän 3.1 ja oletuksen nojalla $0 < \mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\big(A \cap B(0, k)\big)$. Koska epänegatiivisten termien summa on positiivinen, on olemassa sellainen luku $M \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\mathcal{L}^n\big(A \cap B(0, M)\big) > 0.$$

Asetetaan $F = A \cap B(0, M)$. Tällöin monotonisuuden nojalla $\mathcal{L}^n(F) < \infty$ ja lisäksi F on $\mathcal{L}^n$-mitallinen kahden mitallisen joukon leikkauksena. Lauseen 3.31(b) nojalla on olemassa sellainen kompakti joukko $K : K \subset F$, että

$$0 < \frac{\mathcal{L}^n(F)}{2} < \mathcal{L}^n(K).$$

Tässä on siis valittu $\varepsilon = \frac{\mathcal{L}^n(F)}{2} > 0$ supremumin ε-karakterisointiin. Apulauseen 5.31 nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$B(0,\delta) \subset \{x - y \,:\, x, y \in K\} \overset{K \subset F \subset A}{\subset} \{x - y \,:\, x, y \in A\}. \quad \square$$

Tiheyspisteen määritelmä muistuttaa lausetta 5.30, mutta joukolle E ja pisteelle x ei ole ehtoja. Bogachev määrittelee tiheyspisteen mitalliselle joukolle [19, s. 366].

Määritelmä 5.35 (Tiheyspiste). Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon E *1-tiheyspiste*, jos

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap E\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 1.$$

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon E *0-tiheyspiste*, jos

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap E\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0.$$

Metrisissä avaruuksissa joukon A piste x on *sisäpiste*, jos on olemassa sellainen positiivinen luku $r > 0$, että

$$B(x,r) \subset A.$$

Koska euklidinen normi määrittelee metriikan joukossa $\mathbb{R}^n$, käsitellään euklidista normia. Tutkitaan määritelmää 5.35. Jos säteen r pienentyessä tulee vastaan tilanne, jolloin pallo $\overline{B}(x,r)$ sisältyy täysin joukkoon E, osamäärästä tulee 1. Tällöin piste x on 1-tiheyspiste ja sisäpisteen käsite samaistuu euklidiseen sisäpisteeseen, sillä suljetun pallon sisällä on aina avoin pallo. Joukko 1-tiheyspisteistä on joukon E *mittateoreettinen sisus*. Lauseen 5.30 nojalla melkein kaikki $\mathcal{L}^n$-mitallisen joukon pisteet ovat 1-tiheyspisteitä. Vastaavasti joukko 0-tiheyspisteistä on joukon E *mittateoreettinen ulkopuoli. Mittateoreettisen reunan* määrittely ylittää diplomityön laajuuden [10, s. 235]. [19, s. 366]

Määritelmä 5.36 (Täsmällinen edustaja). Olkoon $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$. Tällöin

$$f^*(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{r \to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n, & \text{jos raja-arvo on olemassa,} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on funktion f *täsmällinen edustaja*.

Määritelmän 5.36 motiivi on joukon $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ alkioiden eli funktioiden samaistaminen. Jos siis $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ ovat sellaisia funktioita, että $f = g$ $\mathcal{L}^n$-m.k., niin lauseen 5.23 nojalla

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = f(x) = g(x) = \lim_{r\to 0+} \fint_{\overline{B}(x,r)} g \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \qquad \mathcal{L}^n\text{-}m.k. \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ja nollamittaisessa joukossa arvo on määritelty nollaksi, mutta myös muu reaaliluku kävisi. Tällöin *jokaista* $x \in \mathbb{R}^n$ kohti on $f^* = g^*$. Määritelmän 5.36 raja-arvo voi olla olemassa, vaikka x ei olisikaan Lebesgue-piste [10, s. 241].

5.3 Approksimatiivinen raja-arvo ja jatkuvuus

Käsite *approksimatiivinen* kumpuaa nollamittaisuudesta. Luvussa perehdytään analyysin peruskäsitteisiin raja-arvo ja jatkuvuus uudesta näkökulmasta.

Määritelmä 5.37 (Approksimatiivinen raja-arvo). Olkoon f vektoriarvoinen kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| \geq \varepsilon\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0,$$

niin piste $l \in \mathbb{R}^m$ on kuvauksen f *approksimatiivinen raja-arvo*, kun $y \to x$. Merkitään

$$\operatorname{ap}\lim_{y\to x} f(y) = l.$$

Tarkastellaan määritelmää 5.37 tarkemmin. Kun $y \to x$, niin pisteet y kuuluvat aina pienempiin ja pienempiin suljettuihin palloihin $\overline{B}(x,r)$. Kun ε on kiinnitetty, niin joukko $A = \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| \geq \varepsilon\}$ on ne pisteet joukosta $\mathbb{R}^n$, jotka kuvautuvat joukossa $\mathbb{R}^m$ *vähintään* etäisyydelle ε pisteestä l. Approksimatiivinen raja-arvo tarkoittaa siis, että on olemassa sellainen $R > 0$, että joukon

$$\overline{B}(x,r) \cap A, \qquad \text{kun } 0 < r \leq R,$$

Lebesgue-mitta saadaan miten pieneksi tahansa. Kun säde r lähestyy nollaa, niin niiden alkioiden joukko, jotka ovat suljetussa pallossa $\overline{B}(x,r)$ ja jotka kuvautuvat vähintään etäisyydelle ε pisteestä l, on käytännössä nollamittainen. Erikoistapauksena on tilanne, jossa joukot A ja $\overline{B}(x,r)$ ovat erillisiä tai jos leikkausjoukossa on numeroituva määrä pisteitä. Tällöinhän Lebesgue-mitta on nolla. Lopuksi huomataan, että määritelmän 5.37 toteutuessa piste $x \in \mathbb{R}^n$ on 0-tiheyspiste joukolle

$$\{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| \geq \varepsilon\}$$

jokaista ε kohti, määritelmän 5.35 mukaan.

Lause 5.38. *Jos kuvauksella $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on approksimatiivinen raja-arvo, niin se on yksikäsitteinen.*

Todistus. Väitetään vastoin, että approksimatiivinen raja-arvo ei ole yksikäsitteinen. Tällöin on olemassa sellaiset, erilliset pisteet $l, k \in \mathbb{R}^m$, että

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| \geq \varepsilon\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0 \tag{5.39}$$

ja

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - k\| \geq \varepsilon\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0 \tag{5.40}$$

jokaista $\varepsilon > 0$ kohti. Asetetaan $\varepsilon = \frac{\|l-k\|}{3} > 0$. Olkoon $y \in \overline{B}(x,r)$, missä $r > 0$. Kolmioepäyhtälön nojalla huomataan, että

$$3\varepsilon = \|l - k\| \leq \|f(y) - l\| + \|f(y) - k\|,$$

joten apulauseen 4.21 nojalla vähintään toinen termeistä $\|f(y) - l\|$ ja $\|f(y) - k\|$ on $\frac{3\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$\overline{B}(x,r) \subset \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| \geq \varepsilon\} \cup \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - k\| \geq \varepsilon\}. \tag{5.41}$$

Kun yhtälön (5.41) oikea puoli leikataan joukolla $\overline{B}(x,r)$, päädytään arvioon

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big) \leq\ & \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| \geq \varepsilon\}\big) \\ & + \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - k\| \geq \varepsilon\}\big).\end{aligned}$$

Jaetaan epäyhtälö luvulla $\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big) > 0$ ja tarkastellaan tilannetta $r \to 0+$. Huomataan, että ehdot (5.39) ja (5.40) *eivät* voi toteutua samaan aikaan. Koska vastaväite johtaa ristiriitaan, on alkuperäinen väite tosi. $\square$

Jos määritelmän 5.37 funktiolla f on tavanomainen raja-arvo $l \in \mathbb{R}^m$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$, niin l on myös approksimatiivinen raja-arvo. Tavanomaisen raja-arvon nojalla jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $R > 0$, että

$$\big\{z \in \mathbb{R}^n : \|z - x\| < R\big\} \subset \big\{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| < \varepsilon\big\}.$$

Valitaan vielä täsmällisyyden takia suljettu pallo $\overline{B}(x, \frac{R}{2})$ Tällöin määritelmän 5.37 osoittaja on nolla jokaista $r : 0 < r \leq \frac{R}{2}$ kohti.

Käänteinen tulos ei ole voimassa eli approksimatiivisen raja-arvon olemassaolosta ei seuraa raja-arvon olemassaoloa. Määrittelemällä sopivasti sellainen numeroituva pistejono, joka suppenee pisteeseen x, riittää vastaesimerkiksi ε-ehdolle.

Määritelmä 5.42 (Approksimatiivinen ylä- ja alaraja-arvo). Olkoon f reaaliarvoinen kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Funktion f *approksimatiivinen yläraja-arvo* l, kun $y \to x$, määritellään

$$l = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \,:\, \lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, f(z) > t\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0 \right\}.$$

Tällöin merkitään

$$\operatorname{ap}\limsup_{y \to x} f(y) = l\,.$$

(b) Funktion f *approksimatiivinen alaraja-arvo* l, kun $y \to x$, määritellään

$$l = \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \,:\, \lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, f(z) < t\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0 \right\}.$$

Tällöin merkitään

$$\operatorname{ap}\liminf_{y \to x} f(y) = l\,.$$

Maalijoukko on määritelmässä 5.42 siis reaalilukujen joukko. Tutkitaan kohtaa (a). Kun $x \in \mathbb{R}^n$ on kiinnitetty, oleellisinta on katsoa, mitä tapahtuu pallojen $\overline{B}(x,r)$ sisällä. Tarkoituksena on etsiä sellaisia lukuja $t \in \mathbb{R}$, että jollakin $R > 0$ niiden alkioiden joukko, jotka ovat pallon $\overline{B}(x,R)$ sisällä ja jotka kuvautuvat suuremmaksi kuin t, on käytännössä nollamittainen. Jos tällainen t löydetään, niin seuraavaksi riittää tutkia pienempiä lukuja kuin t, koska etsitään alarajaa. Toisaalta, jos t pienenee rajatta, niin joukko

$$\{z \in \mathbb{R}^n \,:\, f(z) > t\}$$

lähestyy joukkoa $\mathbb{R}^n$. Tällöin ehdon

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, f(z) > t\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0$$

tarkastaminen muuttuu vaikeammaksi. Ääritapauksessa osamäärä on identtisesti 1 jollakin $t' \in \mathbb{R}$.

Lause 5.43. *Jos kuvauksen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ approksimatiivinen ylä- ja alaraja-arvo ovat yhtäsuuret, niin kuvauksella f on myös approksimatiivinen raja-arvo. Tällöin*

$$\operatorname{ap}\lim_{y \to x} f(y) = \operatorname{ap}\limsup_{y \to x} f(y) = \operatorname{ap}\liminf_{y \to x} f(y)\,.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Merkitään $l = \operatorname{ap}\limsup_{y\to x} f(y) = \operatorname{ap}\liminf_{y\to x} f(y)$. Määritelmän 5.42 nojalla on olemassa sellaiset $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, että

$$l \leq t_1 < l + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad l - \frac{\varepsilon}{2} < t_2 \leq l,$$

joille on voimassa

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) > t_1\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0 \tag{5.44}$$

ja

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) < t_2\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} = 0. \tag{5.45}$$

Huomataan, että $\{z \in \mathbb{R}^n : f(z) > l + \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) > t_1\}$, joten monotonisuuden nojalla yhtälö (5.44) on voimassa, jos luku t_1 korvataan luvulla $l + \frac{\varepsilon}{2}$. Yhtälö (5.45) muokataan vastaavasti. Ennen määritelmän 5.37 käyttämistä sievennetään joukkoa

$$\begin{aligned}
&\overline{B}(x,r) \cap \{z : |f(z) - l| \geq \varepsilon\} \\
&\qquad = \overline{B}(x,r) \cap \{z : f(z) - l \geq \varepsilon \quad \text{tai} \quad f(z) - l \leq -\varepsilon\} \\
&\qquad = \big(\overline{B}(x,r) \cap \{z : f(z) \geq l + \varepsilon\}\big) \cup \big(\overline{B}(x,r) \cap \{z : f(z) \leq l - \varepsilon\}\big).
\end{aligned}$$

Nyt monotonisuuden ja yhtälöjen (5.44) ja (5.45) nojalla

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0+} \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z : |f(z) - l| \geq \varepsilon\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} \\
&\quad \leq \lim_{r\to 0+} \left[\frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z : f(z) \geq l + \varepsilon\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} + \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z : f(z) \leq l - \varepsilon\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} \right] \\
&\quad \leq \lim_{r\to 0+} \left[\frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z : f(z) > l + \frac{\varepsilon}{2}\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} + \frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r) \cap \{z : f(z) < l - \frac{\varepsilon}{2}\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} \right] \\
&\quad = 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Määritelmän 5.37 nojalla $\operatorname{ap}\lim_{y\to x} f(y) = l$. $\square$

Edellinen tulos osoittaa, että approksimatiivinen ylä- ja alaraja-arvo ovat järkevästi määritelty, koska vastaava tulos on voimassa tavanomaiselle raja-arvolle ja ylä- ja alaraja-arvolle.

Approksimatiivisen jatkuvuuden määritelmä 5.46 on yllätyksetön. Bogachevin määritelmässä käytetään approksimatiivisen raja-arvon 5.37 vaihtoehtoista muotoa eli tutkitaan joukon $\{z \in \mathbb{R}^n : \|f(z) - l\| < \varepsilon\}$ 1-tiheyspistettä [19, s. 369].

Määritelmä 5.46 (Approksimatiivinen jatkuvuus). Kuvaus $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ on *approksimatiivisesti jatkuva* pisteessä $x\in\mathbb{R}^n$, jos

$$\operatorname{ap}\lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

Diplomityön viimeisen lauseen todistus perustuu *Lusinin lauseeseen*, joka esitetään usein integraaliteorian yhteydessä [7, s. 66][10, s. 21][22, s. 81-82]. Koska siihen ei perehdytty, lauseen 5.47 yleisen tapauksen todistus sivuutetaan. Lause voidaan todistaa tämän hetkisillä tiedoilla, jos oletetaan lokaali integroituvuus.

Lause 5.47. *Jos $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ on $\mathcal{L}^n$-mitallinen, niin f on approksimatiivisesti jatkuva $\mathcal{L}^n$-m.k.*

Todistus. Sivuutetaan yleisessä tapauksessa [10, s. 58]. Olkoon $\varepsilon>0$ ja $x\in\mathbb{R}^n$. Koska f on vektoriarvoinen, oletetaan, että *funktionormi* $\|f\|\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^n)$ ja että (euklidinen normi) $\|f-f(x)\|\geq\varepsilon$. Näillä oletuksilla arvioidaan

$$\begin{aligned}\infty > \int_{\overline{B}(x,r)} \|f-f(x)\|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n &\geq \int_{\overline{B}(x,r)} \varepsilon\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n\\ &= \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)\varepsilon \geq \mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\cap\{z\in\mathbb{R}^n : \|f(z)-f(x)\|\geq\varepsilon\}\big)\varepsilon.\end{aligned}$$

Kun epäyhtälö jaetaan luvuilla $\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)$ ja ε, päädytään arvioon

$$\frac{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\cap\{z\in\mathbb{R}^n : \|f(z)-f(x)\|\geq\varepsilon\}\big)}{\mathcal{L}^n\big(\overline{B}(x,r)\big)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\fint_{\overline{B}(x,r)} \|f-f(x)\|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

ja lauseen 5.25 nojalla oikean puolen piste on Lebesgue-piste $\mathcal{L}^n$-m.k. Tällöin f on approksimatiivisesti jatkuva $\mathcal{L}^n$-m.k. Erityisesti, kuvaus f on approksimatiivisesti jatkuva jokaisessa Lebesgue-pisteessä. □

Lauseen 5.47 tulosta on kuvailtu osuvasti, että ”mitallinen funktio on käytännössä jatkuva käytännössä jokaisessa pisteessä”[10, s. 58]. Myös käänteinen tulos on voimassa. [10, s. 58][19, s. 369-370]

Määrittelemättä jäi ainakin *approksimatiivinen differentioituvuus* ja *approksimatiiviset osittaisderivaatat* [19, s. 373]. Ne ovat kuitenkin diplomityön ulottumattomissa. Niitä varten tulisi perehtyä ainakin *Hausdorffin mittaan*, *lineaarisiin* kuvauksiin ja *rajoitetusti heilahteleviin* kuvauksiin. Lähdekirjallisuudesta jää mielikuva, että approksimatiivisista seikoista on kirjoitettu melko vähän. Sen sijaan määritelmässä 5.35 esitetty *tiheys*, johon aliluvun 5.3 asiat liittyvät, lienee melko keskeinen käsite. Siitä voisi kirjoittaa diplomityön.

Approksimatiivinen jatkuvuus ja differentioituvuus tulivat tunnetuksi Arnaud Denjoyn ja Aleksandr Khinchin kautta 1910-luvun loppupuolella. Mitallisuuden voi ilmaista approksimatiivisen jatkuvuuden avulla. Tätä asiaa tutki erityisesti Vyacheslav Stepanov 1920-luvulla. [19, s. 438]

6. YHTEENVETO

Mitan derivaatta on olemassa äärellisenä melkein kaikkialla n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Lisäksi se on mitallinen kuvaus. Näiden tulosten todistukset perustuvat muun muassa rationaalilukujen ja Borel-joukkojen ominaisuuksiin sekä Fatoun lemmaan. Rationaalilukujen erityisasema mittateoriassa perustuu niiden numeroituvuuteen ja tiheyteen reaalilukujen joukossa. Numeroituvuus periytyy joukkojen yhdistämisissä ja karteesisissa tuloissa. Mittateorian ehkä maineikkain tulos on rationaalilukujen nollamittaisuus Lebesgue-ulkomitan suhteen; toisaalta kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku. Vaikuttaa siis siltä, että rationaalilukuja olisi melko paljon, mutta ei kuitenkaan riittävän paljon.

Radonin-Nikodymin lauseessa yhdistyvät integraali mitan suhteen ja mitan derivaatta. Sen todistuksessa huomataan, että derivaatalla on tarpeelliset ominaisuudet: sopivilla määrityksillä integraali mitan derivaatasta mitallisen joukon yli ja mitan suhteen lähestyy tiettyä arvoa rajaprosessissa. Mitan derivaattaa arvioidaan yksinkertaisilla funktioilla sekä ylä- että alapuolelta. Radonin-Nikodymin lausetta voisi kuvata tilanteeksi, jossa n-ulotteisesta euklidisesta avaruudesta valitaan kappale ja tälle kappaleelle määritetään mittateoreettinen massa.

Lokaalisti integroituvat funktiot ovat melko tasaisia lähes koko n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa Radon-mitan suhteen. Funktion arvot eivät siis heilahtele suuresti, kun lähtöjoukko on pieni. Tulos perustuu osittain myös Radonin-Nikodymin lauseeseen. Eräänä erikoistapauksena on Lebesguen tiheyspistelause, jonka avulla määritellään yleisempi tiheys. Approksimatiivinen raja-arvo määrittelee tiheyden avulla funktiolle raja-arvon, joka on voimassa melkein kaikkialla.

Lopuksi ehdotetaan aiheita kandidaatintutkielmiin ja diplomitöihin. Ne kumpuavat luvuista 1-5. Ensimmäisiksi voisivat sopia Dedekindin leikkaukset ja laajennettu reaalilukujoukko, reaalilukujoukon peitelauseet ja kompaktius ja kokoelmien vertailu. Kokoelmia ovat muuan muassa σ-algebra, π-systeemi ja topologia. Jälkimmäisiksi taas soveltuisivat Lebesguen tiheyspistelause ja mittateoreettinen tiheys, vektorimittojen rajoitettu heilahtelu, Aleksandrovin lause, konveksisuus mittateoriassa, Tihonovin lauseen sovellukset, mitat karteesisissa tuloissa ja n-ulotteisen Lebesgue-mitan täsmällinen määrittely ja approksimatiivinen differentioituvuus .

LÄHTEET

[1] Trench, W. F. *Introduction to Real Analysis*. Faculty Authored ja Edited Books & CDs, 2013. 577 s.

[2] Thompson, J., Martinson, T., Martinson, P.-G. ja Thompson, J. *Matematiikan käsikirja*. Tammi, 1994. 431 s.

[3] Boyer, C. B. ja Merzbach, U. C. *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia, osa II*. John Wiley & Sons, 1991. 471-982 s.

[4] Burkill, J. C. *The Lebesgue Integral*. Cambridge University Press, 1961. 87 s.

[5] Katz, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. Addison-Wesley, 1998. 864 s.

[6] Bell, E. T. *Matematiikan miehiä*. WSOY, 1963. 552 s.

[7] Sheldon, A. *Measure, Integration & Real Analysis*. Springer, 2021. 411 s. Saatavissa: `https://measure.axler.net/MIRA.pdf` (viitattu 16. 12. 2021). CC: `http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/`.

[8] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1987. 416 s.

[9] Munroe, M. E. *Measure And Integration*. Addison-Wesley, 1971. 290 s.

[10] Evans, L. ja Gariepy, R. *Measure Theory And Fine Properties Of Functions*. CRC Press, 2015. 296 s.

[11] *Prove that the union of two disjoint countable sets is countable*. 3. toukokuuta 2014. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/780043/prove-that-the-union-of-two-disjoint-countable-sets-is-countable` (viitattu 28. 10. 2021).

[12] *Countable Union of Countable Sets is Countable*. 30. syyskuuta 2020. Saatavissa: `https://proofwiki.org/wiki/Countable_Union_of_Countable_Sets_is_Countable` (viitattu 15. 12. 2021).

[13] *Cartesian Product of Countable Sets is Countable*. 5. heinäkuuta 2021. Saatavissa: https://proofwiki.org/wiki/Cartesian_Product_of_Countable_Sets_is_Countable (viitattu 27. 10. 2021).

[14] *Is there a simple, constructive, 1-1 mapping between the reals and the irrationals?* 2. lokakuuta 2013. Saatavissa: https://math.stackexchange.com/questions/512397/is-there-a-simple-constructive-1-1-mapping-between-the-reals-and-the-irrationa (viitattu 01. 12. 2021).

[15] Sheldon, A. *Supplement for Measure, Integration & Real Analysis*. Sheldon Axler, 2021. 44 s. Saatavissa: https://measure.axler.net/SupplementMIRA.pdf (viitattu 16. 12. 2021). CC: http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/.

[16] Väisälä, J. *Topologia I*. Limes ry, 2004. 144 s.

[17] *Open set as a countable union of spheres*. 11. tammikuuta 2013. Saatavissa: https://math.stackexchange.com/questions/275742/open-set-as-a-countable-union-of-spheres (viitattu 27. 10. 2021).

[18] Väisälä, J. *Topologia II*. Limes ry, 2005. 195 s.

[19] Bogachev, V. I. *Measure Theory: Volume 1*. Springer, 2007. 500 s.

[20] Mattila, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and rectifiability*. Cambridge University Press, 1995. 343 s.

[21] *Confused about proof that diameter of a closure of a set is the same as the diameter of the set*. 27. toukokuuta 2015. Saatavissa: https://math.stackexchange.com/questions/1301507/confused-about-proof-that-diameter-of-a-closure-of-a-set-is-the-same-as-the-diam (viitattu 30. 11. 2021).

[22] Kinnunen, J. *Measure and Integral*. Juha Kinnunen, 2020. 138 s.

[23] Ambrosio, L., Da Prato, G. ja Mennucci, A. *Introduction to Measure Theory and Integration*. Scuola Normale Superiore Pisa, 2011. 187 s.

[24] *σ-algebra generated by singletons of X*. 14. lokakuuta 2018. Saatavissa: https://math.stackexchange.com/questions/2954720/sigma-algebra-generated-by-singletons-of-x (viitattu 08. 12. 2021).

[25] *dist(x, A)=0 if and only if $x \in \overline{A}$ (closure of A)*. 27. lokakuuta 2017. Saatavissa: https://math.stackexchange.com/questions/2491698/distx-a-0-if-and-only-if-x-in-overlinea-closure-of-a (viitattu 03. 11. 2021).

[26] *Borel measure*. 3. marraskuuta 2017. Saatavissa: `https://encyclopediaofmath.org/wiki/Borel_measure` (viitattu 03. 11. 2021).

[27] *Is the extended real line a metric space?* 2. syyskuuta 2015. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/1418438/is-the-extended-real-line-a-metric-space` (viitattu 04. 11. 2021).

[28] *Extended real number line*. 3. marraskuuta 2021. Saatavissa: `https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line` (viitattu 04. 11. 2021).

[29] *Show directly that if* (s_n) *is decreasing sequence, then* $\lim(s_n) = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. 1. marraskuuta 2016. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/1994081/show-directly-that-if-s-n-is-decreasing-sequence-then-lim-s-n-inf-s-n` (viitattu 17. 11. 2021).

[30] *A function* f *is measurable iff* $f+$ *and* $f-$ *are*. 8. huhtikuuta 2017. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/2225125/a-function-f-is-measurable-iff-f-and-f-are` (viitattu 08. 11. 2021).

[31] *If a function f is differentiable then its derivate is Borel measurable*. 12. marraskuuta 2016. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/2010803/if-a-function-f-is-differentiable-then-its-derivate-is-borel-measurable` (viitattu 08. 12. 2021).

[32] *Lebesgue Integral of Non-Measurable Function*. 26. joulukuuta 2014. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/1081021/lebesgue-integral-of-non-measurable-function?rq=1` (viitattu 11. 11. 2021).

[33] *Lebesgue measure of closed ball and open ball are the same.* 8. tammikuuta 2014. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/642412/lebesgue-measure-of-closed-ball-and-open-ball-are-the-same` (viitattu 11. 11. 2021).

[34] *3.7: Lower Semicontinuity and Upper Semicontinuity*. 5. syyskuuta 2021. Saatavissa: `https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Introduction_to_Mathematical_Analysis_I_(Lafferriere_Lafferriere_and_Nguyen)/03%3A_Limits_and_Continuity/3.07%3A_Lower_Semicontinuity_and_Upper_Semicontinuity` (viitattu 16. 11. 2021).

[35] *Does the set of differences of a Lebesgue measurable set contains elements of at most a certain length?* 31. tammikuuta 2012. Saatavissa: `https://math.stackexchange.com/questions/84491/does-the-set-of-differences-of-a-lebesgue-measurable-set-contains-elements-of-at?noredirect=1&lq=1` (viitattu 30. 11. 2021).