Noona Suomalainen

FIBONACCIN LUKUJEN JAOLLISUUSOMINAISUUKSIA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Kesäkuu 2021

Tiivistelmä

Noona Suomalainen: Fibonaccin lukujen jaollisuusominaisuuksia
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2021

Fibonaccin luvut ovat keskiajan yhden tunnetuimman matemaatikon, italialaisen Leonardo Fibonaccin kehittelemä numerosysteemi, joka muodostaa rekursiivisesti määriteltävän lukujonon. Tässä työssä tutkitaan Fibonaccin lukujen perustaa ja yksinkertaisia perusominaisuuksia, mitkä johdattelevat tarkastelemaan Fibonaccin lukuja jaollisuusominaisuuksien suhteen. Työn keskeisessä roolissa on siis Fibonaccin lukujen perusominaisuudet ja jaollisuus.

Ensimmäisessä luvussa esitellään matemaatikko Leonardo Fibonacci ja tarkastellaan hänen elämänkertaansa sekä tärkeimpiä matemaattisia teoksiansa. Luku johdattelee lukijan historiallisen katsauksen kautta Fibonaccin lukuihin ja rekursiivisesti määritellyn lukujonon teoriaan. Rekursiivisessa määritelmässä lukujonon uusi jäsen lasketaan lukujonon edellisten jäsenten avulla. Rekursiivisesti määritellyn lukujonon idean Fibonacci esitteli vuonna 1202 teoksessaan Liber abaci, mikä perustuu pitkälti aritmetiikkaan ja algebraan.

Työn toinen luku sisältää tarpeellista perustietoa Fibonaccin luvuista ja siinä päästään tarkastelemaan Fibonaccin lukujen perusongelmaa, jota seuraa lukujonon rekursiivinen määritelmä. Tätä perusongelmaa Fibonacci havainnollistaa teoksessaan Liber abaci kertoen kanien lisääntymisestä, siksi sitä kutsutaan kaniongelmaksi.

Rekursiivisen määritelmän myötä voidaan esitellä Fibonaccin lukujen perusominaisuuksia. Tässä työssä tärkeimpiin perusominaisuuksiin sisältyy Fibonaccin lukujen summa ja Cassinin lause. Luvussa määritellään myös Q-matriisi, jota voidaan hyödyntää erityisesti lauseiden todistuksessa. Kuitenkin suurimmaksi osaksi todistuksissa käytetään induktioperiaatetta, joka on ominainen tapa Fibonaccin lukujen ominaisuuksien todistamiseen.

Edeltävät asiat johdattelevat tutkielman päälukuun lukuun, jossa esitellään Fibonaccin lukujen jaollisuusominaisuuksia. Jaollisuusominaisuudet ovat yksi Fibo-

naccin lukujen sovellusalueista. Fibonaccin jaollisuusominaisuuksia käsiteltäessä saadaan lisää tietoa Fibonaccin lukujen muistakin ominaisuuksista, kuten suurimman yhteisen tekijän määritelmästä.

Avainsanat: Fibonaccin luvut, Lukujono, Jaollisuus,

Sisällys

1 Johdanto

Tässä työssä tutkitaan Fibonaccin lukuja sekä niiden sovelluksia jaollisuuden suhteen. Työn päälähteenä on käytetty Thomas Koshyn teosta Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Tämän lisäksi päälähteen tueksi ja lisätietojen saamiseksi on käytetty Verner E. Hoggatin teosta Fibonacci and Lucas numbers.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa esitellään keskiajan Euroopan tunnetuimman matemattikon Leonardo Fibonaccin elämän historiaa. Luvussa käsitellään Fibonaccin tunnetuimpia teoksia ja niiden sisältöä, sekä merkitystä Euroopan matematiikan kehitykseen.

Seuraavassa luvussa 3 siirrytään Fibonaccin tunnetun perusongelman kautta lukujen ominaisuuksiin. Fibonaccin lukujen perusongelmaa eli kaniongelmaa seuraa lukujen rekursiivisen määritelmän perusta. Tämän lisäksi esitellään Fibonaccin lukujen yksinkertaisia perusominaisuuksia havainnollistavia lauseita sekä Q-matriisi, jota käytetään erityisesti tärkeiden lauseiden todistamisessa.

Edeltävät asiat johdattelevat tutkielman päälukuun lukuun 4, jossa esitellään Fibonaccin lukujen jaollisuusominaisuuksia. Jaollisuusominaisuudet ovat yksi Fibonaccin lukujen sovellusalueista.

2 Leonardo Fibonacci 1170–1250

Tässä luvussa esitellään Leonardo Fibonaccin elämää sekä tunnetuimmat teokset. Luku perustuu Koshyn teokseen Fibonacci and Lucas Numbers with Applications [2, s. 1–3].

Pisassa Italiassa syntynyt Leonardo Fibonacci tunnetaan keskiajan Euroopan merkityksellisimpänä matemaatikkona. Fibonacci syntyi Bonaccin perheeseen vuonna 1170, ja hänen uskotaan kuolleen vuonna 1250 syntymäkaupungissaan. Hänet tiedetään myös nimeltä Leonardo Pisano.

Hänen isänsä Guglielmo Bonacci oli menestyvä kauppias, joka 1190-luvulla toimi töissä Bougiessa Etelä-Afrikassa, jossa Fibonacci sai varhaiskoulutuksensa muslimitaustaisen opettaja ohjauksessa. Kyseinen opettaja esitteli Fibonaccille arabialaisen numerojärjestelmän ja arabialaisia laskentatekniikoita.

Aikuisena Fibonacci teki usein työmatkoja Egyptiin, Syyriaan, Kreikkaan, Ranskaan ja Konstantinopoliin. Matkustellessaan hän tutustui eri maiden tutkijoihin ja alkoi opiskelemaan silloin käytössä olevia erilaisia matemaattisia järjestelmiä ja millaisia hyötyjä ne toivat näissä maissa.

Fibonacci oli vakuuttunut arabialaisen lukujärjestelmän toimivuudesta ja käytännöllisyydestä verrattuna silloin käytettyyn roomalaiseen järjestelmään. Hän julkaisi uraauurtavan teoksensa Liber Abaci (”Helmitaulun kirja”) vuonna 1202, minkä myötä arabialaiset numerot syrjäyttivät roomalaiset numerot. Teoksessa Fibonacci käsittelee intialaislähtöiset arabialaiset numerot ja myös nollan. Liber Abaci -kirjan myötä arabialainen numerointijärjestelmä ja aritmeettiset algoritmit kantautuivat Eurooppaan.

Liber Abacin jälkeen Fibonacci julkaisi kolme muuta tunnettua teosta. Vuonna 1220 ilmestyi Practica Geometriae (Practice of Geometry), joka esittelee geometrian ja trigonometrian sekä euklidisen tarkkuuden. Fibonacci käyttää teoksessa algebraa ratkaisemaan geometrisia ongelmia ja päin vastoin, mikä oli radikaali lähestymistapa keskiajan Euroopalle.

Seuraavat kaksi teosta olivat Flos ja Liber Quadratorum (Neliön kirja), jotka julkaistiin vuonna 1225. Molemmat kirjat käsittelevät lukuteoriaa, ja Liber Quadratorumin myötä Fibonacci sai maineensa merkittävänä lukuteoreetikkona.

3 Fibonaccin luvut

3.1 Kaniongelma

Liber Abaci sisältää oman aikansa aritmeettiset ja algebralliset tiedot. Sen lisäksi teos sisältää monia matemaattisia perusongelmia, mukaan lukien kuuluisan ”kaniongelman”. Kyseisessä ongelmassa on tarkoitus selvittää, kuinka monta paria kaneja yksi kanipari voi synnyttää vuodessa, jos:

1. kullakin kanilla sukukypsyyden saavuttaminen kestää kuukauden,
2. jokainen pari tuottaa sekaparin joka kuukausi alkaen toisesta kuukaudesta,
3. yhtään kaneja ei kuole vuoden aikana.

Voidaan olettaa, ensimmäisen kaniparin syntyneen tammikuun ensimmäinen päivä, mistä seuraa ensimmäisen ehdon mukaan, että kanit ovat sukukypsiä helmikuun ensimmäinen päivä. Tämä ensimmäinen pari tuottaa siis sekaparin helmikuun aikana ja näin ollen ensimmäinen maaliskuuta pareja on kaksi, mutta ainoastaan alkuperäiset kanit ovat sukukypsiä. Huhtikuun alussa pareja on kolme, joista kaksi on sukukypsiä. Ensimmäinen päivä toukokuuta on viisi paria kaneja, joista kolme paria on lisääntymiskykyisiä ja sama kaava toteutuu vuoden loppuun asti.

Kaniongelman havainnollistamiseksi ovat tulokset kaniparien määrästä jokaisena kuukautena esitetty alla olevassa taulukossa 3.1. Viimeinen rivi taulukossa kertoo lopullisen vastauksen ongelmaan ja lisäksi taulukosta voi huomata saman lukusarjan toistuvuuden. Näissä numerosarjoissa on kyse Fibonaccin luvuista.

Taulukko 3.1. Kaniongelma

Kuukausi	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Aikuisia	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Poikasia	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Kaneja yhteensä	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

3.2 Fibonaccin lukujen ominaisuuksia

Kaniongelma taulukon alarivin numeroita kutsutaan Fibonaccin luvuiksi ja lukujen muodostama lukujono $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ on Fibonaccin lukujono. Fibonaccin luvuille on mahdollista muodostaa rekursiivinen määritelmä, jota käsitellään seuraavaksi.

Määritelmä 3.1 (vrt. [2, s. 6])**.** Fibonaccin luvut F_n määritellään rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= F_2 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{kun } n \geq 3. \end{aligned}$$

Lause 3.1. *Fibonaccin lukujen summa*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

Todistus. Määritelmän 3.1 perusteella voidaan luvut määritellä myös käänteisesti:

$$\begin{aligned} F_0 &= F_2 - F_1 \\ F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_2 \\ &\dots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

Laskettaessa nämä termit yhteen saadaan summa:

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \cdots + F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Voidaan merkitä yhtälön vasen puoli summamerkinnällä ja sieventää oikeaa puolta vastalukujen avulla. Saadaan:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} F_k &= -F_1 + (F_2 - F_2) + (F_3 - F_) + \cdots + (F_{n-1} - F_{n-1}) + F_{n-2} \\ &= F_{n-2} - F_1. \end{aligned}$$

Koska $F_1 = 1$, niin olemme osoittaneet, että

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \qquad \square$$

Lause 3.2. *Fibonaccin lukujen summa, kun summausindeksi on pariton. Olkoon $n \geq 1$. Silloin*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Todistus. Fibonaccin lukujen ominaisuuksia voidaan todistaa induktioperiaatteen avulla, jota käytämme nyt lauseen todistuksessa. Induktiotodistus etenee kolmen vaiheen kautta.

Osoitetaan ensin, että väite on tosi, kun $n = 1$:

$$F_{2n-1} = F_{(2\cdot 1-1)} = F_1 = 1 = F_2 = F_{2\cdot 1} = F_{2n}.$$

Määritelmän 3.1 perusteella lause pätee, kun $n = 1$.

Oletetaan nyt, että väite on tosi, kun $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} = F_{2k}.$$

Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = F_{2(k+1)}.$$

Todistetaan, että induktioperiaatteen avulla, että väite on tosi kun $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} &= F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2(k+1)-1} \\
&\overset{\text{io}}{=} F_{2k} + F_{2(k+1)-1} \\
&= F_{2k} + F_{2k+1} \\
&= F_{2k+2} \\
&= F_{2(k+1)}.
\end{aligned}$$

Olemme osoittaneet, että väite pätee luvulle $n = k + 1$. Täten induktioperiaatteen nojalla voidaan todeta, että lause 4.2 pätee kaikille positiivisille kokonaisluvuille n.

□

Lause 3.3. *Fibonaccin lukujen summa, kun summausindeksi on parillinen. Olkoon $n \geq 1$. Silloin*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Todistus. Osoitetaan nyt ensin, että väite on tosi, kun $n = 1$:

$$F_{2n} = F_{(2\cdot 1)} = F_2 = 1 = 2 - 1 = F_{2\cdot 1+1} - F_2 = F_{2n+1} - 1.$$

Fibonaccin lukujen rekursiivisen määritelmän 3.1 nojalla lause pätee, kun $n = 1$.

Oletetaan nyt, että väite on tosi, kun $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} F_{2i} = F_{2k+1} - 1.$$

Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i} = F_{2(k+1)+1} - 1.$$

Todistetaan, että induktioperiaatteen avulla, että väite on tosi, kun $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i} &= F_2 + F_4 + \cdots + F_{2k} + F_{2(k+1)} \\ &\overset{\text{io}}{=} F_{2k+1} - 1 + F_{2(k+1)} \\ &= F_{2k+1} + F_{2k+2} - 1 \\ &= F_{2k+2} - 1 \\ &= F_{2(k+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

Olemme osoittaneet, että väite pätee luvulle $n = k + 1$. Täten induktioperiaatteen nojalla voidaan todeta, että lause 3.3 pätee kaikille $n \geq 1$.

□

3.3 Cassinin lause

Lause 3.4. *(Cassinin lause) Fibonaccin luvut toteuttavat seuraavan yhtälön:*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \textit{kun } n \geq 1.$$

Todistus (vrt. [2, s. 74]). Käytetään lauseen todistamisessa induktioperiaatetta.

Kun $n = 1$, niin

$$\begin{aligned}F_{1-1}F_{1+1} - F_1^2 &= F_0F_2 - F_1^2 \\ &= 0 \cdot 1 - 1^1 \\ &= -1.\end{aligned}$$

Oletetaan, että lause on tosi kun $n = k$:

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k.$$

Osoitetaan, että väite on tosi kun $n = k + 1$:

$$F_{(k+1)-1}F_{(k+1)+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}.$$

Tästä saadaan, että:

$$\begin{aligned}
F_{(k+1)-1}F_{(k+1)+1} - F_{k+1}^2 &= F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 \\
&= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\
&= F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_kF_{k-1} - F_{k+1}F_{k-1} - F_{k+1}^2 \\
&\overset{\text{io}}{=} F_kF_{k+1} - F_kF_{k-1} - F_k^2 - (-1)^k \\
&= F_kF_{k+1} - F_k(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\
&= F_kF_{k+1} - F_kF_{k+1} + (-1)^{k+1} \\
&= (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Täten voidaan todeta induktioperiaatteen nojalla, että väite on tosi kaikille $n \geq 1$. □

Seuraus 3.1. *Mitkä tahansa kaksi peräkkäistä Fibonaccin lukua ovat suhteellisia alkulukuja.*

$$(F_{k+1}, F_k) = 1, \quad \textit{jokaisella } k \in \mathbb{N}.$$

Todistus (vrt. [2, s. 75]). Olkoon q yhteinen tekijä luvuille F_k ja F_{k+1}. Cassinin lauseen 3.4 mukaan $q \mid 1$ ja $q \mid -1$, mikä on ristiriita. Täten $(F_{k+1}, F_k) = 1$. □

Lause 3.5. *Luvuilla*

$$F_{2n}, \quad F_{2n+2}, \quad F_{2n+4}, \quad 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}$$

on ominaisuus, että yksi isompi kun kahden luvun tulo on täydellinen neliö.

Todistus (vrt. [2, s. 94]). Cassinin lauseen 3.3 mukaan $1 + F_{2n}F_{2n+2} = F_{2n+1}^2$. Kuten myös $1 + F_{2n+1}F_{2n+3} = F_{2n+2}^2$ ja $1 + F_{2n+2}F_{2n+4} = F_{2n+3}^2$. Silloin saadaan, että:

$$\begin{aligned}
1 + F_{2n}(4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}) &= 1 + 4(F_{2n}F_{2n+2})(F_{2n+1}F_{2n+3}) \\
&= 1 + 4(F_{2n+1}^2 - 1)(F_{2n+2}^2 + 1) \\
&= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4(F_{2n+2}^2 - F_{2n+1^2}) - 3 \quad \text{(Cassinin lause)} \\
&= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+3}F_{2n} - 3 \\
&= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+3}(F_{2n+2} - F_{2n+1}) - 3 \\
&= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+3}F_{2n+2} + 4F_{2n+1}F_{2n+3} - 3 \\
&= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+3}F_{2n+2} + 4(F_{2n+2}^2 + 1) - 3 \\
&= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+1}F_{2n+2} + 1 \\
&= (2F_{2n+1}F_{2n+2} - 1)^2.
\end{aligned}$$

Olemme osoittaneet, että $1+F_{2n}(4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}) = (2F_{2n+1}F_{2n+2}-1)^2$. Täten yksi isompi kun kahden luvun tulo on täydellinen neliö. Muut tapaukset voidaan todistaa samalla tavalla. □

3.4 Q-matriisi

Matriisien sovelluksia voidaan hyödyntää Fibonaccin lukujen ominaisuuksien todistamiseen. Tässä luvussa esittelemme Q-matriisin, jota käytämme myös apuna työn kannalta olennaisten identieteettien todistamisessa.

Tarkastelemme seuraavaksi $\boldsymbol{Q}$ -matriisia. Olkoon nyt:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voimme laskea matriisin determinantiksi $\det \boldsymbol{Q} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 1$. Sen lisäksi tarkastelemme tämän $\boldsymbol{Q}$ -matriisin kolmea ensimmäistä potenssia:

$$\boldsymbol{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Voimme nyt huomata, että $\boldsymbol{Q}$ -matriisien potensseissa esiintyvän järjestyksessä Fibonaccin luvut $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$.

Lause 3.6. *Kun $n \geq 1$ ja $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, niin $\boldsymbol{Q}$ -matriisi toteuttaa ominaisuuden:*

$$\boldsymbol{Q}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Todistus (vrt. [2, s. 363]). Osoitamme nyt induktiolla $\boldsymbol{Q}$ -matriisin toteuttavan aina väitteen.

Kun $n = 1$, niin:

$$\boldsymbol{Q}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}.$$

Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $n = k$:

$$\boldsymbol{Q}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = k + 1$:

$$\boldsymbol{Q}^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{(k+1)+1} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_{(k+1)-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{(k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}.$$

Matriisien laskusääntöjen mukaan saadaan, että:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}^{k+1} = \boldsymbol{Q}^k \boldsymbol{Q}^1 &= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{k+2} + F_{k+1} \\ F_{k+1} + F_k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla voimme todeta, että väite on tosi, kun $n \geq 1$.

□

Lause 3.7. *Seuraavat identiteetit ovat voimassa, kun $k \geq 1$ ja $h \geq 1$.*

$$F_{k+h+1} = F_{k+1}F_{h+1} + F_kF_h, \tag{3.1}$$

$$F_{k+h} = F_{k+1}F_h + F_kF_{h-1}, \tag{3.2}$$

$$F_{k+h} = F_kF_{h+1} + F_{k-1}F_h, \tag{3.3}$$

$$F_{k+h-1} = F_kF_h + F_{k-1}F_{h-1}. \tag{3.4}$$

Todistus (vrt. [2, s. 364]). Identiteetit voidaan todistaa Fibonaccin $\boldsymbol{Q}$ -matriisin laskusäännön avulla $\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{Q}^h = \boldsymbol{Q}^{k+h}$, josta saamme:

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{h+1} & F_h \\ F_h & F_{h-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+h+1} & F_{k+h} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

ja edelleen

$$\begin{pmatrix} F_{k+h}F_{h+1} + F_kF_h & F_{k+1}F_h + F_kF_{h-1} \\ F_kF_{h+1} + F_{k-1}F_h & F_kF_h + F_{k-1}F_{h-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+h+1} & F_{k+h} \\ F_{k+h} & F_{k+h-1} \end{pmatrix}.$$

$\square$

4 Jaollisuusominaisuuksia

Tässä luvussa esitellään Fibonaccin lukujen joitakin jaollisuusominaisuuksia.

Lause 4.1. *Kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, niin:*

$$F_m \mid F_{mn}.$$

Todistus. Käytetään induktioperiaatetta lauseen todistamiseksi. (vrt.[2, s. 196]).

Lause pätee, kun $n = 1$:

$$F_m \mid F_{m\cdot 1} = F_m \mid F_m.$$

Oletetaan ensin, että väite on tosi, kun $n = k$:

$$F_m \mid F_{mk}.$$

Osoitetaan, että väite on tosi myös, kun $n = k + 1$:

$$F_m \mid F_{m(k+1)}.$$

Nyt lauseen 3.3 identiteetin perusteella

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk}F_{m+1} + F_{mk-1}F_m.$$

Koska induktio-oletuksen mukaan $F_m \mid F_{mk}$, niin väite pätee. □

Huomautus 4.1. Vuonna 1964 Leonard Carlitz käänsi lauseen 4.1 käyttämällä apuna seuraavaa kaavaa:

$$F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1},$$

missä $r \leq s \leq 1$.

Lause 4.2. *Jos $F_h \mid F_k$, niin $h \mid k$.*

Todistus. (vrt.[2, s. 196]) Sijoittamalla $k = k - h$ identiteettiin (3.2) saadaan, että:

$$F_k = F_{k-h+1}F_h + F_{k-h}F_{h-1}.$$

Oletamme, että $F_h \mid F_k$, joten sijoittamalla edellinen yhtälö oletukseen saadaan, että:

$$F_h \mid F_{k-h+1}F_h + F_{k-h}F_{h-1}.$$

Selvästi $F_h \mid F_{k-h+1}F_h$ ja huomautuksen 4.1 mukaan $(F_{k+1}, F_k) = 1$, joten $(F_k, F_{k-1}) = 1$. Täten $F_h \mid F_{k-h}$.

Oletetaan tunnetuksi Eukleideen algoritmi. Merkitään sen mukaan, että $k = qh + r$, missä $0 \leq r < h$. Silloin

$$F_h \mid F_{k-qh} \quad \text{eli} \quad F_h \mid F_r.$$

Mutta koska $r < h$, niin täytyy olla $r = 0$. Täten, koska $r = k - qh = 0$, niin $k = qh$ ja $h \mid k$. □

Seuraus 4.1. *$F_m \mid F_n$, jos ja vain jos $m \mid n$.*

Todistus seuraa suoraan lauseesta 4.1 ja 4.2.

Esimerkki 4.1. Koska $4 \mid 12$ niin oletetaan, että myös $F_4 \mid F_{12}$. Fibonaccin lukujonon mukaan $F_4 = 3$ ja $F_{12} = 144$, siis $3 \mid 144$.

Apulause 4.1. $(F_{qn-1}, F_n) = 1$ kaikilla $n \geq 1$.

Todistus (vrt. [2, s. 198]). Olkoon $d = (F_{qn-1}, F_n)$. Tällöin $d \mid F_{qn-1}$ ja $d \mid F_n$. Lauseen 4.1 mukaan $F_n \mid F_{qn}$, joten $d \mid F_{qn-1}$ ja $d \mid F_{qn}$. Lisäksi seurauksen 3.1 nojalla $d \mid 1$, joten $d = 1$. Täten $(F_{qn-1}, F_n) = 1$, joten lause on tosi. □

Apulause 4.2. Olkoon $m = qn + r$. Tällöin $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

Todistus (vrt. [2, s. 198]).

$$\begin{aligned}
(F_m, F_n) &= (F_{qn+r}, F_n) \\
&= (F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}F_n, F_n) \quad \text{Huomautuksen 4.1 mukaan} \\
&= (F_{qn-1}F_r, F_n) \\
&= (F_r, F_n) \quad \text{Apulauseen 4.1mukaan} \\
&= (F_n, F_r).
\end{aligned}$$

Huomautusta 4.1 ja apulausetta 4.1 apuna käyttäen lause on osoitettu todeksi. □

Lause 4.3. *Kahden Fibonaccin luvun suurin yhteinen tekijä on aina Fibonaccin luku:*

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

Todistus. Oletetaan, että $m \geq n$. Soveltamalla Eukleideen algoritmia luvuille n ja m saadaan seuraava yhtälöketju:

$$\begin{aligned}
m &= q_0 n + r_1, && 0 \leq r_1 < n \\
n &= q_1 r_1 + r_2, && 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3, && 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\dots \\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, && 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_n r_n + 0.
\end{aligned}$$

Lauseen 4.1 ja apulauseen 4.2 mukaan voidaan todeta, että $(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}) = F_{r_n}$. Täten myös $(F_m, F_n) = F_{r_n}$. Nyt Eukleideen algoritmin mukaan $r_n = (m, n)$. Näin ollen $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$. □

Seuraus 4.2. *Jos* $(m, n) = 1$*, niin* $F_m F_n \mid F_{mn}$.

Todistus. Lauseen 4.1 mukaan $F_m \mid F_{mn}$ ja $F_n \mid F_{mn}$. Täten pienin yhteinen monikerta $[F_m, F_n] \mid F_{mn}$, mutta koska $(F_m, F_n) = F_{(m,n)} = 1$, niin $[F_m, F_n] = F_m F_n$. Tästä seuraa, että:

$$F_m F_n \mid F_{mn}.$$ □

Esimerkki 4.2. Tarkastellaan tapausta $(3, 5) = 1$, $F_3 = 2$, $F_5 = 5$ ja $F_{15} = 610$. Huomataan, että:

$$2 \cdot 5 \mid 610, \text{ eli } F_3 F_5 \mid F_{15}.$$

Lähteet

[1] Hoggat, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Houghton Mifflin Company, 1969.

[2] Koshy, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. John Wiley and Sons Inc, 2001.