Tampereen yliopisto

Jaana Korpela

ERILAISTEN OPETUSMENETELMIEN VAIKUTUS OPETUSVIDEOIDEN HYÖDYNTÄMISEEN MATEMATIIKAN OPISKELUSSA

Diplomityö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastajat: Yliopistonlehtori Terhi Kaarakka
Yliopisto-opettaja Elina Viro
Heinäkuu 2021

TIIVISTELMÄ

Jaana Korpela: Erilaisten opetusmenetelmien vaikutus opetusvideoiden hyödyntämiseen matematiikan opiskelussa
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, DI
Heinäkuu 2021

Tutkimuksessa selvitetään, millainen yhteys käytetyllä opetusmenetelmällä on opetusvideoiden hyödyntämiseen matematiikan opiskelijoilla. Vertailtavina opetusmenetelminä tutkimuksessa ovat luentomainen opetus ja käänteinen opetus eli flippaus. Tampereen yliopistossa flippaus on toteutettu käänteisen oppimisen (flipped learning) ideologian pohjalta käyttäen osittain käänteisen opetuksen (flipped classroom) menetelmiä.

Tutkimusaineistoa on kerätty kahdelta lukuvuoden 2019-2020 Insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolta ja kahdelta toteutukselta lukuvuoden 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksolta. Toteutuksilta saatuna aineistona on käytetty opetusvideoiden katselutietoja, laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden katselutietoja, opintojaksojen arviointitietoja ja toteutusten opiskelijoiden nimilistan mukaan kerättyjä oletettuja sukupuolitietoja. Aineistoa tutkittiin tilastollisesti.

Opintojaksojen opetusvideoista tutkimuksessa keskityttiin niihin videoihin, joiden aiheena olivat kompleksiluvut. Kompleksiluvut valittiin aiheeksi, koska niitä ei opiskella lukiossa, joten ne ovat suurimmalle osalle ensimmäisen vuoden opiskelijoista uusi aihe.

Tutkimuksessa selvisi, että opetusmenetelmä vaikutti opetusvideoiden hyödyntämiseen. Flippauksen menetelmin opetetuilla toteutuksilla opetusvideoita katsoi suurempi prosentuaalinen määrä opiskelijoita ja niistä katsottiin ajallisesti enemmän kuin luentomuotoisilla toteutuksilla. Tämä oli odotettu tulos, koska luentomaisessa opetuksessa uusi asia opiskellaan luennolla ja flippauksessa opetusvideoiden kautta. Tutkimuksessa selvitettiin myös sukupuolen vaikutusta videoiden katseluaktiivisuuteen. Saadun aineiston pohjalta huomattiin, että naiset hyödynsivät videoita enemmän kuin miehet. Opetusvideoiden katsomisella oli tutkimuksen mukaan yhteys opintojaksolta saatavaan arvosanaan.

Flippaustoteutuksilla opiskelijoille oli jaettu laskuharjoituksista ratkaisuvideot. Laskuharjoituksia oli kahdenlaisia. Osa tehtävistä piti palauttaa ennen laskuharjoituksia, jossa ne käytiin läpi ja loppuja oli mahdollista tehdä harjoituksissa ja palauttaa harjoitusten jälkeen. Opiskelijat hyödynsivät ratkaisuvideoita enemmän niiden tehtävien osalta, jotka palautettiin harjoitusten jälkeen.

Tutkimuksen pohjalta voidaan sanoa, että opetusmenetelmällä on vaikutus opetusvideoiden hyödyntämiseen. Opetusmenetelmien erilainen luonne vaikuttaa opetusvideoiden tarpeeseen ja sitä kautta niiden käyttöön opiskelussa. Opetusvideoiden hyödyntämisellä näyttää olevan suotuisat vaikutukset opintojaksolta saatavaan arvosanaan, joten opetusvideoiden voidaan ajatella olevan apuna oppimisprosessissa.

Avainsanat: flippaus, käänteinen opetus, aktiivinen oppiminen, passiivinen oppiminen, kompleksiluvut

ABSTRACT

Jaana Korpela: The effect of different teaching methods on the utilization of instructional videos in studying mathematics
Master of Science Thesis
Tampere University
Engineering and Natural Sciences
July 2021

The thesis study examines the connection between the teaching method used on the course and the utilization of instructional videos for mathematics students. Comparative teaching methods in the research are lecture-based teaching and flipped learning. In Tampere University flipped learning has been implemented based on the ideology of flipped learning, partly using the methods of flipped classroom.

Research material has been collected from two courses of the academic year 2019-2020 Insinöörimatematiikka 1 (in Engl. Engineering mathematics 1) and two implementations of the academic year 2020-2021 course Insinöörimatematiikan perusteet (in Engl. The basics of engineering mathematics). The material received from the implementations has been the observation data of instructional videos, the observation data of exercises solution videos, course evaluation data and gender data based on the list of students' names of the implementation participants. The data were examined statistically.

Of the instructional videos in the courses, the study focused on those videos that were about complex numbers. Complex numbers were selected as a topic of the research because they are not studied in high school, so they are a new topic for most of the first-year students.

The study found that the teaching method influenced on the utilization of instructional videos. With the implementations taught by flipped learning, the instructional videos were watched by a higher percentage of students and watched more in time than with the lecture-based implementations. This was an expected result, because a new subject is studied in lecture-based teaching during lectures and in flipped learning through instructional videos. The study also examined the effect of gender on video viewing activity. Based on the data obtained, it was found that women used the videos more than men. According to the study, watching instructional videos was related to the grade obtained from the course.

With the flipped learning implementations, solution videos of the exercises were distributed to the students. There were two types of exercises. Some of the exercises had to be returned before the exercise class, where they were checked, and the rest of the exercises could be done in the exercise class and returned after it. Students watched more solution videos for the tasks that were returned after the exercises.

Based on the research, it can be said that the teaching method influences the utilization of instructional videos. The different nature of teaching methods affects the need for instructional videos and therefore their use in learning. The utilization of instructional videos seem to have a favorable effect on the grade obtained from the course, so instructional videos can be thought to be helpful in the learning process.

Keywords: flipped learning, flipped classroom, active learning, passive learning, complex numbers

ALKUSANAT

Käänteinen opetus ja oppiminen kiinnostivat minua aiheina jo ennen diplomityöni teon aloittamista ja tiesin haluavani tehdä tutkimukseni flippaukseen liittyen. Aiheen tarkempi näkökulma tarkentui ensimmäisessä diplomityöpalaverissa ohjaajieni kanssa.

Erityiskiitos kuuluu ohjaajilleni yliopistonlehtori Terhi Kaarakalle ja yliopisto-opettaja Elina Virolle kaikesta ohjauksesta, kannustuksesta ja avusta, jota olen tämän diplomityön teon aikana saanut. Kirjoitusprosessin aikana sain teiltä joka ohjaustapaamisella paljon rakentavaa palautetta työstäni ja sitä kautta uusia ideoita työn teon jatkamiseen.

Haluan kiittää myös Jani Hirvosta, Jussi Kangasta ja Riikka Kangaslampea, jotka jaoitte aineistoa opintojaksoilta ja opetusvideoista tutkimustani varten. Oli hienoa päästä tutustumaan materiaalien kautta siihen, miten flippaus on toteutettu yliopiston ensimmäisen vuoden opintojaksoilla.

Lopuksi haluan kiittää erityisesti vanhempiani, veljeäni Jarkkoa, Eetua ja ystäviäni kaikista tsempeistä, joita olen opintojeni aikana saanut. Suuri kiitos opiskelukavereilleni, jotka ovat aina olleet apuna opintojeni aikana, kun olen tukea tarvinnut.

Seinäjoella, 18. heinäkuuta 2021

Jaana Korpela

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

ASV	muu videomateriaali (engl. Alternative Source Video)
$\mathbb{C}$	kompleksiluvut
GSL	vierailijaluennoitsijoiden luentovideot (engl. Guest Speaker's Lecture)
IDV	opettajan tekemä video (engl. Instructor-Developed Video)
Im	imaginääriakseli
IMP-F	Insinöörimatematiikan perusteet -opintojakson flippaustoteutus (käänteinen opetus)
IMP-L	Insinöörimatematiikan perusteet -opintojakson luentomuotoinen toteutus (luennot ja laskuharjoitukset)
Moodle	Oppimis- ja koulutusympäristö
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
Re	reaaliakseli
STEM	Luonnontieteiden ja insinöörityön alat, teknistieteelliset alat (engl. lyhenne sanoista Science, Technology, Engineering, Mathematics)
TAU	Tampereen yliopisto (engl. Tampere University)
TFM	tekstipohjainen materiaali (engl. Text-Formatted Material)
THL	Terveyden ja hyvinvoinnin laitos
URL	verkkosivun osoite (engl. Uniform Resource Locator)
θ	Vaihekulma
z	kompleksiluku
$\bar{z}$	kompleksiluvun liittoluku

1. JOHDANTO

Käänteistä opetusta, flippausta, käytetään opetusmenetelmänä useissa Suomen korkeakouluissa [17]. Menetelmä poikkeaa perinteisestä luennot ja harjoitukset -tyylisestä menetelmästä siinä, että suuri osa opetuksesta tapahtuu muiden materiaalien kautta kuin luennoimalla. Tämä tuo oppijalle enemmän vastuuta omasta oppimisestaan sekä monipuolistaa oppijan opiskelumateriaaleja ja opiskelumenetelmiä [30]. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, miten opetusmenetelmä vaikuttaa opiskelijan aktiivisuuteen hyödyntää opintojakson opetusvideoita. Lisäksi selvitetään, millainen vaikutus videoiden katseluaktiivisuudella on opintojaksolta saatuun arvosanaan, miten laskuharjoitusten ratkaisuvideoita hyödynnetään ja millaista videoiden katseluaktiivisuus on eri sukupuolilla.

Tutkimuksen aineisto on kerätty lukuvuosina 2019-2020 ja 2020-2021 järjestetyiltä Insinöörimatematiikan ja Insinöörimatematiikan perusteiden opetus- ja harjoitusvideoista saatavista katselutiedoista. Luvuodelta 2019-2020 tutkimukseen on otettu mukaan kaksi opintojaksoa (Insinöörimatematiikka B1 ja Insinöörimatematiikka C1) ja lukuvuodelta 2020-2021 kaksi Insinöörimatematiikan perusteiden toteutusta. Insinöörimatematiikan perusteiden toteutukset vastasivat sisällöltään ja opetusmenetelmiltään Insinöörimatematiikka B1- ja C1 -opintojaksoja. Vaikka Insinöörimatematiikka B1 ja C1 ovat virallisesti omat opintojaksonsa, viitataan niihin tutkimuksessa myöhemmin toteutuksina. Luvussa kaksi esitellään tarkemmin opintojaksojen toteutusten sisällöt, niiden kohderyhmät ja käydään läpi tutkimuskysymykset.

Molempien lukuvuosien osalta tutkimukseen valituista toteutuksista toinen on opetettu käänteisen opetuksen menetelmin ja toinen luentojen ja harjoitusten muodossa. Lisäksi aineistona on ollut näiden opintojaksojen toteutusten arviointitiedot niiden opiskelijoiden osalta, joilta on saatu tutkimuslupa.

Luvussa kolme esitellään käänteistä opetusta opetusmenetelmänä. Käänteisestä opetuksesta luvussa käydään läpi mitä käänteinen opetus tarkoittaa, miten opetusta voi käänteistää ja miten käänteinen opetus ja oppiminen eroavat toisistaan. Videot ovat yksi tapa, jolla käänteisessä opetuksessa opiskeltavia asioita opiskelijat pystyvät opiskelemaan itsenäisesti, joten luvussa esitellään videoiden käyttöä oppimisen välineenä. Tutkimuksen yksi lähtökohta on selvittää käänteisen opetuksen vaikutusta opiskeluaktiivisuuteen, joten luvussa kolme esitellään, mitä on aktiivinen ja passiivinen oppiminen. Luvun lopuksi esitellään myös sukupuolten välisiä eroja opiskelussa ja koulumaailmassa.

Tutkimuksessa keskityttiin videoiden osalta toteutusten kolmannen viikon aiheeseen, joka oli kompleksiluvut. Insinöörimatematiikan ja insinöörimatematiikan perusteiden opintojaksoilla kerrataan ja syvennetään lukiossa opittuja asioita, mutta kompleksilukuja lukiossa ei opeteta mahdollisia soveltavia lukiokohtaisia kursseja lukuunottamatta [14]. Tällöin kompleksiluvut ovat uusi aihe lähes kaikille tutkittavien opintojaksojen opiskelijoille, jolloin heidän opiskelutapansa eivät riipu siitä, miten hyvin lukion asiat ovat mielessä, vaan he ovat samassa lähtötilanteessa uuden oppimisen kannalta.

Toteutuksia on verrattu keskenään molempina lukuvuosina opiskelijoille jaossa olleiden opetusvideoiden katselutietojen perusteella. Luentomuotoisilla toteutuksilla opiskelijat oppivat uusia asioita luennoilla, kun flippaustoteutuksilla uusi asia opiskeltiin opetusvideoista. Jälkimmäisenä lukuvuotena 2020-2021 kompleksilukuihin liittyviä videoita on ollut opiskelijoille jaossa enemmän, mutta tutkimuksessa keskityttiin niihin videoihin, jotka ovat olleet opiskelumateriaalina molempina lukuvuosina. Näissä videoissa aiheina ovat olleet kompleksiluvut yleisesti, kompleksiluvun juuri ja kompleksiluvun polaarimuoto. Luvussa neljä esitellään videoiden aiheiden matemaattista taustaa.

Luvuissa viisi esitellään tutkimuksen aineisto, miten tutkimuksen aineisto on kerätty ja tutkimusmenetelmät, joita tulosten analysoinnissa on käytetty. Luvussa kuusi esitellään tutkimuksen aineistoista saadut tiedot ja niistä tehty analyysi sekä vertailu.

Viimeisenä lukuna seitsemän on yhteenveto. Yhteenvedossa käydään läpi tutkimuksen tuloksia yleisesti ja pohditaan, mitä tuloksista voi päätellä ja mitä jatkossa voisi tutkimuksen aihepiirin suhteen olla mielekästä tutkia.

2. TUTKIMUKSEN LÄHTÖKOHDAT JA TUTKIMUSKOHDE

2.1 Insinöörimatematiikka ja Insinöörimatematiikan perusteet

Tutkimuksessa vertaillaan Tampereen yliopistolla opetettavien opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1- ja Insinöörimatematiikan perusteet -toteutuksia lukuvuosina 2019-2020 [25] ja 2020-2021 [27]. Molemmat opintojaksot ovat Tampereen yliopiston matematiikan opintojaksoja. Insinöörimatematiikka 1:sen ja Insinöörimatematiikan perusteiden opiskelijoista suurin osa on ensimmäisen vuoden insinöörialojen opiskelijoita. Lukuvuonna 2019-2020 opintojakso järjestettiin nimellä Insinöörimatematiikka 1 ja lukuvuonna 2020-2021 nimellä Insinöörimatematiikan perusteet. Opintojaksojen sisällöt olivat lähes samat, ainoastaan Insinöörimatematiikka 1:sessä ydinsisältö oli hieman laajempi. Opintojaksojen keskeiset sisällöt esitellään taulukossa 2.1.

Insinöörimatematiikka 1 -opintojakso jaettiin lukuvuonna 2019-2020 neljään rinnakkaiseen toteutukseen: Insinöörimatematiikka A1, Insinöörimatematiikka B1, Insinöörimatematiikka C1 ja Insinöörimatematiikka X1 [26]. Toteutukset eroavat toisistaan opetusmenetelmien ja kohderyhmien osalta. Taulukossa 2.2 on eritelty, mitä opetusmenetelmää käytettiin kullakin Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson toteutuksella. Lisäksi taulukkoon on eritelty, minkä alan opiskelijat osallistuivat kullekin toteutukselle. Lukuvuonna 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksosta järjestettiin neljä erillistä toteutuskertaa. Näillä toteutuksilla opetusmenetelminä hyödynnettiin käänteistä opetusta eli flippausta, verkko-opetusta sekä luentomuotoista opetusmenetelmää. Luentoja ja harjoituksia opetusmenetelmänä hyödyntäviä toteutuksia oli kaksi, joista toinen järjestettiin suomeksi ja toinen englanniksi [27]. Insinöörimatematiikan perusteiden toteutuskertojen kohderyhmät on eritelty taulukossa 2.3

Tässä tutkimuksessa keskitytään lukuvuosien 2019-2020 ja 2020-2021 osalta luentojen ja harjoitusten muodossa järjestettäviin toteutuksiin ja käänteisen opetuksen, flippauksen, menetelmin järjestettyihin toteutuskertoihin. Luvussa kolme kerrotaan lisää käänteisestä oppimisesta ja -opetuksesta. Tampereen yliopistossa flippaus perustuu käänteisen oppimisen ideologiaan, jossa oppimista pyritään tekemään enemmän oppilaslähtöiseksi kuin luentomuotoisessa opetuksessa. Opintojaksojen sisältöihin kuuluu myöhemmissä luonnontieteiden ja tekniikan opinnoissa tarvittavia matematiikan taitoja, joihin kuuluu muun muassa opintojaksojen aihepiirien peruasioiden ymmärrys, erilaisten laskutehtävien ratkaisujen perustelu ja niiden esittämisen taito. Tämän vuoksi opintojaksojen sisältöihin kuuluu kertausta, lukion pitkän matematiikan syventämistä ja uusia aiheita. Opintojaksoilla keskitytään joka viikko eri aihepiireihin.

Taulukko 2.1. *Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikan perusteet [25][27]*

<table>
<tr><td>Lukuvuosi</td><td>2019-2020</td><td>2020-2021</td></tr>
<tr><td>Opintojakso</td><td>Insinöörimatematiikka A1, B1, C1 ja X1</td><td>Insinöörimatematiikan perusteet</td></tr>
<tr><td>Ydinsisältö</td><td colspan="2">1. Joukkojen yhdiste, leikkaus, erotus ja komplementti. Olemassaolo- ja kaikkikvanttorit. Suora ja epäsuora todistus, induktiotodistus.
2. Funktion määrittely. Funktion monotonisuus ja käänteisfunktio, yhdistetty funktio. Alkeisfunktioiden perusominaisuuksia. Hyperboliset funktiot ja niiden käänteisfunktiot.
3. Funktion raja-arvo ja jatkuvuus, toispuoleiset raja-arvot ja epäoleelliset raja-arvot ja epäoleelliset raja-arvot, l'Hospitalin sääntö.
4. Derivaatta erotusosamäärän raja-arvona, tulon ja osamäärän derivointi, yhdistetyn funktion derivointi (eli ketjusääntö) ja alkeisfunktioiden derivointikaavat. Funktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen selvittäminen derivaatan avulla.
5. Kompleksilukujen summa, erotus, tulo ja osamäärä, liittoluku ja itseisarvo. Siirtyminen koordinaattimuodon a+bi ja napakoordinaatti- eli eksponenttimuodon välillä (Eulerin kaava), laskeminen eksponenttimuotoa käyttäen. Kompleksiluvun juurten haku.
6. Integraalilaskennan perusteet.</td></tr>
<tr><td>Lisäksi ydinsisältöä</td><td>Looginen seuraus ja looginen ekvivalenssi.
Kompleksilukujen vaihekulma.</td><td></td></tr>
<tr><td>Täydentävä tietämys</td><td colspan="2">1. Alkukuva, injektiivisyys, surjektiivisuus ja bijektiivisyys.
2. Reaalikertoimisen polynomin nollakohdat ja tekijöihinjako.
3. Jatkuvien funktioiden väliarvolause ja käänteisfunktion jatkuvuus.
4. Käänteisfunktion derivaatta, lineaarinen approksimaatio.
5. Sovelluksia, mm. pinta-ala ja tilavuus.</td></tr>
<tr><td>Erityis-tietämys</td><td colspan="2">Differentiaalilaskennan väliarvolause.</td></tr>
</table>

Lukuvuonna 2019-2020 Insinöörimatematiikka B1 -opintojakso järjestettiin luentomuotoisena opetuksena. Opintojakson järjestelyihin kuuluivat tällöin luentojen lisäksi laskuharjoitukset. Lisäksi oppilaat pystyivät käyttämään oppimateriaaleina luentomonistetta ja lyhyitä opetusvideoita. Insinöörimatematiikka B1 kohdennettiin bio-, sähkö- ja tietotekniikan opiskelijoille. Insinöörimatematiikka C1 -opintojakson lukuvuonna 2019-2020 järjestetty flippaustoteutus kohdennettiin automaatio-, kone-, materiaali-, sekä ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoille. Flippaustoteutuksella oli opiskelun tueksi käytössä useita eri menetelmiä. Opintojaksolla ei järjestetty aloitustilaisuuden jälkeen luentoja. Opiskelijoille jaettiin opintojakson aikana opintomoniste, opetusvideoita eri aiheista ja muuta opetusmateriaaleja, joihin he itsenäisesti tutustuivat. Näiden materiaalien pohjalta opiskelijat tekivät tehtäviä itsenäisesti ja ryhmän kanssa. Joka viikko opiskelijoiden tehtä-

Taulukko 2.2. *Opetusmenetelmät Insinöörimatematiikan opintojaksolla lukuvuonna 2019-2020 [26]*

Opetusmenetelmä	Insinöörimatematiikka	Kohderyhmät
Luennot ja harjoitukset	A1	Rakennustekniikka
		Tietojohtaminen
		Tuotantotalous
	B1	Biotekniikka
		Sähkötekniikka
		Tietotekniikka
	X1	Avoimen yliopiston opiskelijat
Käänteinen opetus	C1	Automaatiotekniikka
		Konetekniikka
		Materiaalitekniikka
		Ympäristö- ja energiatekniikka

Taulukko 2.3. *Opetusmenetelmät Insinöörimatematiikan perusteiden opintojaksolla lukuvuonna 2020-2021 [27]*

Opetusmenetelmä	Kohderyhmät
Luennot ja harjoitukset (suomeksi)	Tietojohtaminen
Luennot ja harjoitukset (englanniksi)	Tuotantotalous
	Biotekniikka
	Sähkötekniikka
	Tietotekniikka
	Avoimen yliopiston opiskelijat
Käänteinen opetus	Automaatiotekniikka
	Konetekniikka
	Materiaalitekniikka
	Rakennustekniikka
	Ympäristö- ja energiatekniikka
Verkko-opetus	Muut kuin 1. vuoden opiskelijat

väksi tuli kolme tehtävää, joiden osalta harjoituspisteiden saanti perustui itse- ja vertaisarviointiin. Opintojaksolla opiskelijat osallistuvat joka viikko Prime time -tilaisuuteen, joka oli toteutuksen opiskelijoista koostuvan pienryhmän ja opettajan välinen keskustelu- ja ryhmätyöskentelytilaisuus. Viikoittaisen tapaamisen päätteeksi ryhmä palautti yhden yhdessä tehdyn tehtävän opettajalle. Prime time -tilaisuuden tarkoituksena opettajalle oli muun muassa saada tietoa, miten opintojakso sujuu ryhmän opiskelijoiden osalta. Prime time -tilaisuudessa opiskelijalla oli mahdollisuus kysyä opettajalta, mikäli jokin asia oli jäänyt opintojaksolla epäselväksi. Lisäksi pienissä ryhmissä tehdyt tehtävät auttoivat opiskelijaa ymmärtämään opiskelemaansa asiaa paremmin ja soveltamaan sitä. Keskustelu tehtävästä ohjasi opiskelijaryhmää matematiikan kielentämiseen.

Tukitoimena opintojaksolla järjestettiin lukuvuonna 2020-2021 Laskutupa, joka tunnettiin lukuvuonna 2019-2020 nimellä Reenaamo. Reenaamossa ja Laskutuvassa oli mahdollista saada apua kurssihenkilökunnalta tai opettajaopiskelijoilta tehtävien ratkaisuun. [25].

Lukuvuoden 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteet -opintojakson järjestelyihin vaikutti Covid19 -pandemia niin, että opintojakso jouduttiin järjestämään osittain etäopetuksena luentototeutuksella, jossa luennot olivat aina etänä. Pandemiasta huolimatta laskuharjoituksia pystyttiin järjestämään lähiopetuksena luentomuotoisen opetuksen mukaisella opintojaksolla. Flippaustoteutuksella viikoittaiset Prime time-tilaisuudet pystyttiin järjestämään pääosin lähiopetuksena.

2.2 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, miten erilaiset opetusmetodit vaikuttavat ensimmäisen vuoden insinööriopiskelijoiden opiskeluaktiivisuuteen matematiikan opinnoissa. Opiskeluaktiivisuutta tarkastellaan opetusvideoiden hyödyntämisen näkökulmasta. Vertailtavat opetusmetodit ovat luentomuotoinen- ja käänteinen opetus. Vertailuryhminä käytetään kahta Insinöörimatematiikan opintojaksoa ja kahta Insinöörimatematiikan perusteiden toteutuskertaa lukuvuosilta 2019-2020 ja 2020-2021.

Seuraavat tutkimuskysymykset nousevat esille:

1. Millainen vaikutus eri opetusmenetelmillä on opiskelijoiden aktiivisuuteen hyödyntää opetusvideoita? Millä tavalla opiskelijat hyödyntävät opetusvideoita ja laskuharjoitusten ratkaisuista tehtyjä videoita?

2. Millainen suhde videoiden hyödyntämisen määrällä on opintojaksosta saatuihin arvosanoihin?

3. Kuinka opiskelijan oletettu sukupuoli vaikuttaa videoiden katseluaktiivisuuteen?

3. ERILAISET OPETUSMENETELMÄT

Tässä luvussa tutustutaan käänteiseen opetukseen opetusmetodina, oppimisaktiivisuuden teoriaan ja videoihin oppimisvälineinä.

3.1 Käänteinen opetus ja oppiminen

Käänteinen opetus ja käänteinen oppiminen eivät tarkoita Yarbron ym. sekä Toivolan, Peuran ja Hulamojan mukaan samaa asiaa [32] [30]. Käänteinen oppiminen (flipped learning) tarkoittaa opetusideologiaa, jossa oppiminen on oppijalähtöistä, kun taas käänteinen opetus (flipped classroom) on opetusmetodi, jossa on kyse opetusteknisestä muutoksesta. Käänteinen oppiminen ja opetus ovat termeinä hyvin lähellä toisiaan ja toisinaan käänteiseen opetukseen viitataan termillä käänteinen luokkahuone. Käänteisessä opetuksessa opettaja jakaa sellaiset materiaalit oppijoita varten, jossa hän voi itse siirtyä sivummalle perinteisestä luennoivasta opetustyylistä ja luo materiaalien avulla tilanteen, jossa opiskelua ja oppimista siirretään enemmän oppijalähtöiseksi. Käytännössä tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että uuden asian opiskelu tehdään kotona materiaalien avulla ja tehtävät tehdään koulussa. Tällöin aikaa jää enemmän oppijoiden tukemiseen, kun uuden asian opettamiseen ei mene yhtä paljon aikaa kuin aikaisemmin tai uuden asian opetukseen aikaisemmin käytetty aika voidaan käyttää oppijoita ohjaten ja auttaen [32] [30].

On monia erilaisia tapoja, joilla opetusta voi käänteistää. Toivolan ym. kirjassa on nostettu esille käänteisen opetuksen nykypäivän pioneereina tunnetut coloradolaiset kemianopettajat Jonathan Bergmann ja Aaron Sams. Bergmann ja Sams kuvasivat oppitunneistaan videot, jotta he voisivat näyttää niitä seuraavana vuonna oppijoille ja korvata niiden avulla luennot. Oppijat pitivät videoita hyvinä opiskelumateriaaleina ja näin Bergman ja Sams alkoivat kehittää opetustyyliä, jossa oppijat saivat yksilöllisempää opetusta ja ohjausta omiin tarpeisiinsa perustuen. Kun uuden asian teoria opetettiin videolla, heillä jäi enemmän aikaa keskustella oppijoiden kanssa ja tukea heitä eri haasteissa [5] [30].

Bergman ja Sams ohjeistavat miettimään, mikä on paras tapa jakaa opiskelumateriaalia [5]. Opetusvideot eivät ole ainoa tapa, vaikka he itse niitä hyödynsivätkin. Toivolan ym. kirjassa videoiden kautta opettamisen lisäksi esiteltiin Peuran polkumallia, jossa jokaisella oppijalla on oma oppimispolkunsa, jonka mukaan he voivat edetä omaan tahtiin. Kirjassa esiteltiin Peuran polkumallin lisäksi Humalojan tapoja pelillistää matematiikkaa [30]. Jalal Nourin tutkimuksen mukaan oppimisalustoista oppijat kokivat Moodlen hyödylliseksi opiskeluvälineeksi, koska sen kautta pystyy helposti kysymään kurssin järjestäjältä asioita ja selailemaan, millaisia asioita muut kurssin oppijat ovat pohtineet [16].

Vaikka Bergman ja Sams ovat käänteisen opetuksen nykyisen muodon varhaisia edustajia, ei heitä pidetä Robert Talbertin mukaan käänteisen oppimisen aloittajina [24]. Käänteisen opetuksen ideologian taustalla pidetään Erik Mazurin työtä Harvardin yliopistossa 1990-luvun alusta alkaen. Käänteisessä oppimisessa opettaja ohjaa oppijoita opiskelemaan omatoimisesti. Pedagogisesta näkökulmasta suora opetus siirtyy käänteisessä opetuksessa ryhmässä oppimisen tilasta yksilölliseen, henkilökohtaiseen tilaan, jolloin ryhmässä opiskelun tila muuttuu vuorovaikutteiseksi oppimisympäristöksi, jossa oppijat voivat soveltaa oppimaansa samalla, kun opettaja ohjaa heitä. Tämä mahdollistaa sen, että jokainen oppija voi opiskella omaan tahtiin. Koska oppija saa enemmän valita, kuinka opiskelee, tuo se oppijalle enemmän vastuuta oppimisestaan. Opettaja kuitenkin seuraa käänteisessä opetuksessakin oppijan oppimisen edistymistä eri tavoilla, esimerkiksi keskustelemalla opiskeltavasta asiasta pienemmissä ryhmissä. Yarbro ym. kertovat käänteisen opetuksen käsitteen taustalla olevan Flipped Learning Networkin, käänteisen oppimisen ja opetuksen verkoston, joka on alkujaan perustettu voittoa tavoittelemattomaksi verkkosivustoksi, joka kokoaa opetusammattilaisten tietoa, vinkkejä ja tutkimustietoa flippauksesta ympäri maailman [6] [30] [32].

Käänteinen opetus ei välttämättä Yarbron ym. ja Flipped learning networkin mukaan johda käänteiseen oppimiseen. Opettaja voi käyttää käänteiseen opetukseen kuuluvia opetusmenetelmiä, kuten jakaa erilaisia tekstejä oppijoille, opetusvideoita ja antaa erilaisia tehtäviä ratkaistavaksi, mutta käänteiseen oppimiseen toteutumiseen vaaditaan Flipped learning networkin esittelemät käänteisen oppimisen neljä pilaria. Peruspilarit muodostuvat sanasta FLIP, jossa jokaisella kirjaimella on oma merkityksensä. Kirjain F viittaa joustavaan ympäristöön (Flexible environment), kirjain L oppimiskulttuuriin (Learning culture), kirjain I tarkoituksenmukaiseen sisältöön (Intentional content) ja kirjain P ammattitaitoiseen opettajaan (Professional educator) [6] [32].

3.2 Videot oppimisen välineenä

Opetusvideot ovat yksi esimerkki niistä välineistä, joita voi käyttää flippauksessa hyödyksi. Taotao Long, Joanne Logan ja Miachael Waugh tutkivat vuonna 2016, miten flippaustoteutuksella järjestetyllä kurssilla oppijat suhtautuivat eri oppimateriaaleihin. Kurssilla käytetyt oppimateriaalit jaettiin neljään kategoriaan erilaisten määritelmien mukaan: tekstipohjainen materiaali (TFM, Text-Formatted Material), opettajan tekemä video (IDV, Instructor-Developed Video), muu videomateriaali (ASV, Alternative Source Video) ja vierailijaluennoitsijoiden luentovideot (GSL, Guest Speaker's Lecture). Yksi neljästä määritellystä materiaalityypistä oli tekstipohjainen, loput olivat videoita. Tekstipohjainen materiaali tarkoittaa kaikkea sellaista materiaalia, jossa ei ollut liikkuvaa kuvaa tai ääntä mukana. Opettajan tekemät videot tarkoittivat kaikkia videoita, jotka luennoitsija oli itse tehnyt ja kuvannut. Vierailijaluennoitsijoiden videot tarkoittivat vierailijapuhujien luentoja, jotka oli nauhoitettu ja sisälsivät äänen lisäksi esimerkiksi tekstiä, kuvia, kaavioita ja taulukoita. Vaihtoehtoinen videomateriaali viittasi Internetistä jo valmiina löytyviin materiaaleihin, joihin mahdollisesti viitattiin ja linkitettiin oppijoille nähtäväksi. [13]

Longin ym. tutkimus osoitti, että oppijoilla oli positiivinen suhtautuminen videoita kohtaan oppimisen välineenä. Tutkimuksessa tehdyn kyselyn avoimissa kysymyksissä oppijat erittelivät ennen oppituntia katsottavista videoista, että ne olivat kiinnostavia, toivat samanlaisen tunnelman opiskeluun kuin luokkahuoneopetuksessa ja ne toivat esiin monia näkökulmia. Oppijoiden mielestä kaikkein parhain materiaali oppimiseen olivat opettajan tekemät videot. Näin vastasi 43,1 prosenttia kurssin oppijoista. Toiseksi parhaiten oppimista tuki muu videomateriaali verkosta (31,4 %), kolmanneksi parhaiten tekstimuotoinen materiaali (11,8 %) ja neljänneksi parhaiten vierailevien luennoitsijoiden videot (7,8 %). Youngin ym. mukaan vierailevat luennoitsijat toivat heidän tutkimuksessaan vaihtelua tavanomaisiin luentoihin, mutta toisen luennoitsijan tyyli, joka oli oppijoille uusi, ei saanut oppijoita keskittymään heidän tavanomaiseen tapaansa. Tämä selittää osittain Longin ym. tutkimuksen tulosta siitä, miksi hyödyllisemmäksi koettiin oman opettajan tekemät videot muuhun materiaaliin tai toisten luennoitsijoiden tekemiin videoihin verrattuna [13][33].

Jalal Nouri päätyy samaan johtopäätökseen Longin ym. kanssa opetusvideoiden kiinnostavuudesta ja hyödyllisyydestä Tukholman yliopistossa tehdyssä tutkimuksessaan opiskelijoiden suhtautumisesta käänteiseen opetukseen opetusmenetelmänä [16]. Hänen tutkimuksensa mukaan erityisesti heikosti koulussa menestyvät oppijat pitivät videoita hyvänä opetusmateriaalina. Tutkimukseen osallistuneiden opiskelijoiden mielestä opetusvideoiden etuna on se, että niitä pystyy pysäyttämään ja kelaamaan. Monille heikoille oppijoille luentotyylinen opetus saattaa olla liian nopeatempoista ja haastavaa seurata. Nourin mukaan heikot oppijat kokivat pystyvänsä opiskelemaan käänteisen opetustyylin myötä omaan tahtiin ja saivat enemmän mahdollisuuksia pohtia oppimaansa.

Bergmann ja Sams tuovat kirjassaan muutamia ohjeita esille, millaisia opetusvideoiden kannattaa olla, jotta ne ovat oppijaystävällisiä [5]. Heidän mukaansa videoiden kannattaa olla lyhyitä ja niissä on mielekästä esitellä yksi aihe aina kerrallaan. Tällöin oppijan on helpompi pysyä videon aiheessa mukana. Koska videot pyritään pitämään mahdollisimman lyhyinä, on syytä jättää runsas ylimääräinen puhe pois videoilta ja keskittyä aiheeseen. Longin ym. tutkimuksessa [13] oppijat olivat erityisesti toivoneet tätä. Videoissa kannattaa Bermannin ja Samsin mukaan muunnella ääntä, äänensävyä ja sen painoa, jotta videota on mukavampi kuunnella ja seurata. Jos videoille kuvataan luentoa, tämä tapahtuu luonnollisesti, mutta puhuessa joko suoraan kameralle ja äänittäessä ääntä tämä kannattaa huomioida. Puheessa ja muutenkin videoilla kannattaa olla huumoria mukana, koska ne lisäävät oppijoiden mielenkiintoa. Huumoria saa lisättyä pienillä asioilla niin, etteivät ne vie videosta liikaa tilaa. Bergmann ja Sams käyttivät itse videoissaan aina ensimmäisen minuutin vitsille, joka jatkui useissa videoissa. Oppijat oppivat tietämään tämän ja ne, ketkä vitsistä pitivät, saivat katsoa sen ja ne, ketkä eivät pitäneet, tiesivät voivansa kelata ensimmäisen minuutin videolta yli [5].

Opetusvideoita tehtäessä on hyvä miettiä, voisiko niitä tehdä jonkun toisen kanssa. Bergmann ja Sams suosittelivat tätä kirjassaan. He olivat huomanneet, että oppijoiden mielestä ne videot olivat kiinnostavampia, missä videon aiheesta oli keskustelemassa kaksi puhujaa. Tällöin puhe ei ole luentotyylistä vaan enemmänkin keskustelua aiheesta. He itse toteuttivat videoitaan niin, että toinen toimi videoilla oppijan roolissa ja toinen asiantuntijana. Oppijiden mukaan tällä tyylillä he ymmärsivät paremmin videolla puhuttua asiaa [5].

Luennoilla luennoitsija voi tehdä erilaisia lisäyksiä eri aihepiireistä taululle ja tätä tekniikkaa Bergmann ja Sams suosittelivat käyttämään videoilla. Joitakin aiheita on heidän mukaansa selkeämpi opettaa tussitaulun avulla ja videoita tehtäessä oli hyvä huomioida, että lisäyksiä saa jotenkin tehtyä. Lisäyksiä ja huomautuksia he suosittelivat lisäämään videon muokkausvaiheessa jälkikäteen videota editoitaessa, sillä oppijoiden mukaan ne auttoivat videon seuraamista, koska ne toivat esille pääasioita videoilta. Editoitaessa ja kuvatessa videota Bergmann ja Sams hyödynsivät kuvakulmien lähentämistä ja loitontamista. Erillisten huomioiden lisäksi esimerkiksi kuvan lähentäminen tiettyyn kohtaan tuo esille siinä kohtaa videolla esiteltävää tärkeää asiaa [5].

Tärkeänä opetusmateriaaleihin liittyvänä asiana Bergmann ja Sams muistuttavat videoita tekeville opettajille, että on tärkeä huomioida videoilla näkyvien mateliaalien tekijänoikeudet. Opetusvideon tekijällä tulee olla oikeus julkaista kaikkea materiaalia, jota heidän videoillaan esiintyy. Usein opetusvideot laitetaan Internetin kautta jakoon, joten jos materiaali ei ole täysin itse luotua ja siinä on esimerkiksi lainauksia toisten töistä, pitää huomioida tekijänoikeusasiat ja lähdeviittaukset. Toisten tekemän materiaalin julkaisuun Internetissä pitää olla lupa [5].

3.3 Aktiivinen ja passiivinen oppiminen

Oppimisen voi jakaa kahteen osaan: aktiiviseen ja passiiviseen. Michael Princen [19] mukaan aktiivinen oppiminen määritellään miksi tahansa oppimismenetelmäksi, joka sitouttaa oppijan oppimiseen. Susanna Hartikainen ym. esittelevät konferenssiesitelmässään yksitoista aktiivisen oppimisen menetelmää [8]. Prince ja Hartikainen ym. tuovat aktiivisen oppimisen menetelmistä molemmat esille yhdessä opiskelun (collaborative learning), ryhmätyöt (cooperative learning) ja ongelmalähtöisen oppimisen (problem-based learning, PBL). Näiden lisäksi Brittany Rodruguez nostaa esille myös erilaiset pelit, roolipelit, väittelyt ja pienten ryhmien keskustelut [20]. Lisäksi Hartikainen ym. tuovat esille oppimismenetelmistä mm. projektioppimisen, ongelmalähtöinen oppimisen ja käänteisen oppimisen.

Aktiivisessa oppimisessa painopiste on Princen ja Jose-Carl Garcia-Rosellin mukaan oppijan oppimisessa ja siinä oppijan tehtävänä on ottaa selvää, pohtia opittavaa asiaa ja keskustella siitä [7] [19]. Passiivista opiskelua on se, kun oppija saa tietoa opettajalta kuullen tai lukien ja opettelee sen. Tällaisia oppimismekanismeja ovat esimerkiksi luentojen seuraaminen tai äänitteiden kuunteleminen. Passiivisessa opiskelussa painopiste on uuden opettelulla, kun asian ymmärtämiseen tarvitaan oppijan aktiivista ajattelua [7]. Talbert kuvastaa passiiviseen oppimiseen liittyvää opetusmetodia suoraksi opetukseksi (direct instruction) [24].

Talbert tuo esille, että usein aktiivisen ja passiivisen oppimisen ajatellaan olevan täysin toistensa vastakohtia ja saatetaan ajatella, että aktiivinen oppiminen on hyvästä ja passiivinen pahasta. Hän ohjeistaa, että suoraa opetusta ja aktiivista oppimista on parempi ajatella toisiaan täydentävinä. Molemmilla oppimistavoilla on omat etunsa ja molempia hyödyntäen pystytään saamaan hyvä lopputulos opiskelussa [24].

Jotta oppiminen on tehokasta, on tärkeää voida hyödyntää aktiivista ja passiivista oppimista sopivassa suhteessa. Aktiivisen oppimisen etuja ovat erityisesti kriittisen ajattelun lisääntyminen ja keskusteluun kannustaminen. Aktiiviset menetelmät antavat myös oppijalle suuremman roolin oppimisympäristössä, kun oppiminen on lähtöisin enemmän oppijasta itsestään. Koska oppija on aktiivisessa oppimisessa aktiivinen osapuoli, saa oppija säännöllisesti palautetta materiaalin ymmärryksestä. Tähän kuitenkin liittyy aktiivisen oppimisen huono puoli. Kun oppija saa enemmän vastuuta omasta oppimisestaan, on vaarana, että oppijalta jää jotakin oppimatta tai on väärinymmärryksen vaara.[20].

Rodriguez tuo esille aktiivisen oppimisen lisäksi passiivisen oppimisen hyviä ja huonoja puolia. Passiiviseen oppimiseen johtavat opetusmenetelmät tuovat nopeasti esiin uutta tietoa, mahdollistavat luentomuistiinpanojen ennalta suunnittelun ja uudelleenkäytön, antavat opettajalle paremman hallinnan kurssin etenemisestä ja tarjoavat materiaalina oppijoille konkreettisen ja hyvin suunnitellun esityksen uudesta materiaalista. Valmiiksi suunnitellun materiaalin avulla oppijat myös välttävät väärinkäsityksiä. Passiivisilla opetusmenetelmillä ja välineillä on haittapuolensa. Jotkin materiaalit saattavat Toivolan, Peuran ja Humalojan mukaan vaikuttaa oppijan näkökulmasta tylsiltä, jolloin ne eivät motivoi opiskelemaan [30]. Jotkin materiaalit tarjoavat myös vähemmän mahdollisuuksia testata oppijan ymmärrystä. Passiivisen oppimisen materiaalien avulla vältetään todennäköisemmin väärinkäsityksiä, mutta tällöin oppijalle ei tule niin monia mahdollisuuksia oppia virheistään. Oppijat ovat vähemmän mukana oppimiskokemuksessa, mikäli se ei ole vuorovaikutteista tai ajattelua herättävää. [20]

Yksi Hartikaisen ym. esittelemistä opetusmenetelmistä on flipped classroom, käänteinen opetus. Käänteisessä opetuksessa hyödynnetään sekä aktiivista että passiivista oppimista [8]. Opettajat luomat materiaalit, kuten videot, ovat passiivisen opiskelun välineitä. Oppija hyödyntää itse näitä materiaaleja ja joutuu niiden avulla opiskellessaan pohtimaan ja tekemään ajatustyötä. Tällöin oppiminen on laadukasta ja auttaa oppijaa ymmärtämään paremmin oppimaansa, varsinkin jos materiaaleihin tutustumisen ja niiden sisällön pohtimisen lisäksi aktiivista oppimista tukemaan käytetään muitakin oppimismenetelmiä, kuten keskustelua aiheesta muiden oppijoiden kanssa ja vaihtelevia opiskelutapoja hyödyntäen. [30].

Hanna Alaniskan [3] mukaan aktivoivia opetusmenetelmiä valitessa tulee kiinnittää huomiota siihen, että tehtävä tai aktiviteetti tukee opetettavan asian oppimista. Menetelmän valintaan vaikuttavat muun muassa kohderyhmä eli oppijat, heidän lukumääränsä, aikaisempi tietämys ja käytössä oleva tila. Aktivoivan oppimistilanteen tavoitteena on ohjata oppijaa pohtimaan aktiivisesti uusia ajattelumalleja ja opittavaa asiaa, ohjata etsimään itse uutta tietoa ja auttaa oppijoita etsimään itse ratkaisuja erilaisiin tehtäviin. Aktivoivan opetuksen menetelmät vaativat myös joustavia oppituntisuunnitelmia, koska oppija saa enemmän vastuuta oppimastaan [20] [3].

3.4 Sukupuoli ja opiskelu

Sukupuolen vaikutusta opiskeluun ja oppimiseen on tutkittu laajalti, jotta pystytään esimerkiksi ymmärtämään ja kehittämään sukupuolten välistä tasa-arvoa koulumaailmassa. Terveyden ja hyvinvoinnin laitos THL on koonnut koulutuksen sukupuolen mukaisesta segregaatiosta tietoa eri ikäisillä oppijoilla perusopetuksessa, toisella asteella ja korkea-asteella. Segregaatiolla tarkoitetaan sukupuolikysymyksissä eri sukupuolten välisiä eroavaisuuksia eri osa-alueilla. THL:n mukaan Suomessa sukupuolten väliset erot koulutuksessa ovat selvät. Erot näkyvät erityisesti valittavissa oppiaineissa ja koulutusaloissa [29].

Ritva Jakku-Sihvosen mukaan perusopetuksessa tyttöjen on omasta mielestään ahkeroitava enemmän hyvien numeroiden eteen kuin poikien [11]. Matematiikan opiskelussa pojat olivat itsevarmempia kuin tytöt ja Jakku-Sihvosen tutkimuksen mukaan pojat pärjäsivät matematiikassa hivenen paremmin. Jakku-Sihvonen esittää tutkimuksessaan, että opiskelumotivaation parantamista varten tulisi tehdä empiirisiä tutkimuksia, joiden avulla voidaan etsiä uusia tapoja opettaa ja opiskella [10]. Jakku-Sihvosen kanssa saman tyttöjen itseluottamuksesta huomasivat tutkimuksessaan Stephanie Aguillon ym. [2]. He tutkivat tutkimuksessaan sukupuolten välisiä eroja korkeakouluopiskelijoiden osallistumisessa aktiiviseen oppimiseen suuntautuneessa opetusryhmässä. Heidän tutkimuksensa keskittyi erityisesti STEM-aloille. Tutkimuksen mukaan miehet osallistuivat odotettua enemmän luokkahuonetyöskentelyyn. Tutkimuksen yhteydessä pidetyn kurssin jälkeen pidettyyn kyselyyn naiset vastasivat heidän kokevansa erottuvansa sukupuolena näkyvämmin ja heidän itsetehokkuutensa olleen matalampi kurssin aikana. Aguillon ym. toteavat tutkimuksessaan, että saadakseen mahdollisimman paljon hyötyä aktiivisista oppimismenetelmistä, opettajien ja ohjaajien tulee pyrkiä käyttämään opetustapoja, jotka osallistavat ja kannustavat tasaväkiseen osallistumiseen oppijoita, jolloin sukupuolten välisiä eroja ei tulisi niin paljon esille.

THL toi esille korkeakouluopiskelijoista sen tiedon, että suurin osa tekniikan ja luonnontieteiden alalle hakeutuvista opiskelijoista oli miehiä. Kuitenkin korkeakouluopiskelijoista suurempi osa naisista valmistui viidessä vuodessa kuin miehistä [29]. Kirsi Ikonen tutki väitöskirjassaan suomalaisen koulutuksen ja työmarkkinoiden sukupuolijaottelua [9]. Hän totesi saman kuin THL, eli että STEM-aloilla opiskelee ja työskentelee enemmän miehiä kuin naisia. Ikonen huomasi tutkimuksessaan, että vielä nykyään yhdeksäsluokkalaisilla nuorillakin on vahvat käsitykset siitä, mitkä sukupuolet sopivat mihinkin ammattiryhmään. Eri alojen sukupuolittuneisuutta saisi Ikosen mukaan kitkettyä kannustamalla perusasteen oppilaita rohkeasti tutustumaan aloihin ja opintolinjoihin, jotka rikkovat perinteistä sukupuolistereotypiaa.

4. KOMPLEKSILUVUT

4.1 Kompleksiluvut

Insinöörimatematiikka- ja Insinöörimatematiikan perusteet-opintojaksoilla yhtenä opiskeltavana aihepiirinä on kompleksiluvut. Kompleksilukujen osalta opintojaksoilla opiskellaan kompleksilukujen peruskäsitteet, laskutoimitukset (summa, erotus, tulo ja osamäärä), liittoluku, itseisarvo, polaarimuoto, juuret ja kompleksimuuttujan polynomien tekijöihinjako. Lisäksi insinöörimatematiikka 1 -opintojakson ydinsisältöön kuului kompleksilukujen vaihekulma. Opintojaksojen aiheet on eritelty taulukossa 2.1. [25][27]

4.2 Kompleksilukujen peruskäsitteet

Kompleksilukuja käytetään tilanteissa, joissa esimerkiksi yhtälön $x^2 = -1$ muuttujalle x ei löydy reaalista ratkaisua. Tällaisissa tilanteissa $\sqrt{-1} = \pm i$, mikä yleensä määritellään, että $i^2 = -1$. Kompleksilukujen peruskäsitteisiin liittyvien tietojen lähteinä on käytetty Agarwalin et al. kirjoittamaa teosta An introduction to complex analysis [1] ja David Poolen teosta Linear algebra: a modern introduction [18].

Määritelmä 4.1. *Kompleksiluvut* ovat muotoa

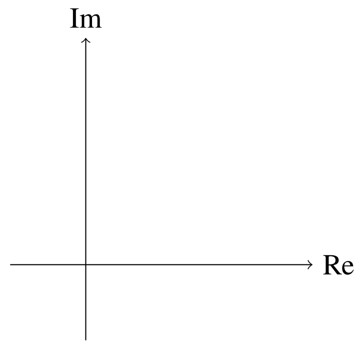
$$z = x + iy, \tag{4.1}$$

missä x ja y ovat reaalilukuja ja i on imaginääriyksikkö [1]. Kompleksilukuja merkitään

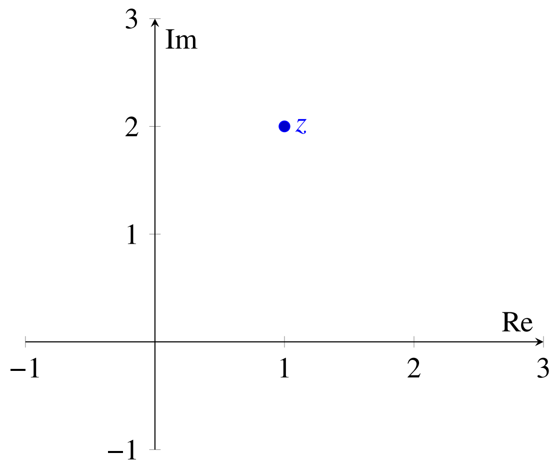
$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}. \tag{4.2}$$

Kompleksiluvut voidaan esittää kompleksitason pisteinä kuvaajalla lausekkeen 4.1 mukaisesti. Kuvaajassa vaakasuora x-akseli on reaaliakseli ja pystysuora y-akseli on imaginääriakseli kuvan 4.1 mukaisesti. Kompleksiluvun reaaliosan $\mathrm{Re}(z) = x$ arvo määrää pisteen x-akselin suuntaisen koordinaatin. Imaginääriosassa $\mathrm{Im}(z) = y$ pisteen paikan y-akselilla määrittää muuttujan y arvo. [1] [18]. Esimerkiksi kuvaan 4.2 on piirretty kompleksiluku $z = 1 + 2i$, missä luvun reaaliosa on $x = 1$ ja imaginääriosa $y = 2$.

Kompleksiluvun kompleksikonjugaatti eli liittoluku määritellään niin, että kompleksiluvun imaginääriosasta otetaan sen vastaluku.



Kuva 4.1. *Kompleksitason reaali- ja imaginääriakseli*



Kuva 4.2. *Kompleksiluku $z = 1 + 2i$ esitettynä kompleksitasossa*

Määritelmä 4.2. *Luvun* z kompleksikonjugaatti *eli* liittoluku $\bar{z}$ on luku

$$\bar{z} = x - iy. \tag{4.3}$$

Kompleksiluvun $z = 1 + 2i$ liittoluku on Määritelmän 4.2 mukaan $\bar{z} = 1 - 2i$. Kuvasta 4.3 nähdään, että liittoluvun piste sijoittuu alkuperäiseen pisteeseen verrattuna peilikuvana reaaliakselin toiselle puolelle [1].

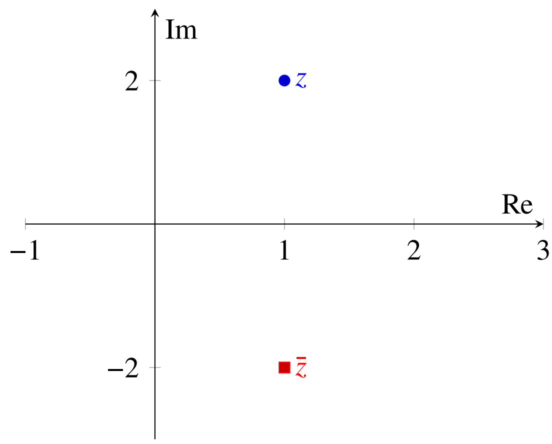
Kompleksiluvuilla voidaan laskea peruslaskutoimituksia, eli summia, erotuksia, tuloja ja osamääriä. Merkitään $z = a + ib$ ja $w = c + id$. Lukujen z ja w summa määritellään

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id = a + c + ib + id = (a + c) + i(b + d), \tag{4.4}$$

missä summassa reaaliosaksi saadaan $a + c$ ja imaginääriosaksi $i(b + d)$. Lukujen z ja w erotus määritellään

$$z - w = (a + ib) - (c + id) = a + ib - c - id = a - c + ib - id = (a - c) + i(b - d), \tag{4.5}$$

missä summassa reaaliosaksi saadaan $a - c$ ja imaginääriosaksi $i(b - d)$. Lukujen z ja w tulo



Kuva 4.3. *Kompleksiluku $z = 1 + 2i$ ja sen liittoluku $\bar{z} = 1 - 2i$ esitettynä kompleksitasossa*

määritellään

$$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd = ac+iad+ibc-bd = (ac-bd)+i(ad+bc), \quad (4.6)$$

missä summassa reaaliosaksi saadaan $ac - bd$ ja imaginääriosaksi $i(ad + bc)$.

Lukujen z ja w osamäärä on

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id}, \quad (4.7)$$

missä $c \neq 0$ tai $d \neq 0$. Osamäärää laskiessa pyritään saamaan jakolaskusta muodostuvan murtoluvun nimittäjästä imaginääriosa pois. Tämä onnistuu, kun kerrotaan osoittajaa ja nimittäjää nimittäjän liittoluvulla $\bar{w} = c - id$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} &= \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - icd + icd - i^2d^2} \\
&= \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i.
\end{aligned}$$

4.3 Kompleksiluvun eksponenttimuoto

Määritelmä 4.3. Tarkastellaan kompleksilukua $z = x + iy$. Eksponenttimuoto e^z voidaan kirjoittaa *Eulerin kaavan* mukaan [1] muodossa

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (4.8)$$

kun määritellään

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (4.9)$$

ja $x, y \in \mathbb{R}$.

Lause 4.4. *Kompleksimuotoinen eksponenttifunktio toteuttaa reaalisten eksponenttifunktioiden laskusäännön*

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{4.10}$$

Todistus. Todistetaan trigonometristen funktioiden laskusääntöjen [1] [34] mukaisesti

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1\cos y_2 + i\cos y_1\sin y_2 + i\sin y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2). \end{aligned}$$

Yhdistetään omiksi termeikseen ne tulot, joissa on i mukana ja ne, joissa ei ole

$$= e^{x_1}e^{x_2}((\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2) + i(\cos y_1\sin y_2 + \sin y_1\cos y_2)).$$

Trigonometristen funktioiden laskusääntöjen [28] mukaan $\cos x\cos y \pm \sin x\sin y = \cos x \mp y$ ja $\sin x\cos y \pm \cos x\sin y = \sin x \pm y$, joten

$$\begin{aligned} &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

Lause 4.5. *Kompleksimuotoinen eksponenttifunktio toteuttaa reaalisten eksponenttifunktioiden laskusäännön osamäärälle*

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}. \tag{4.11}$$

Todistus. Todistetaan osamäärälle

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)} \\ &= \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \cdot \frac{\cos y_1 + i\sin y_1}{\cos y_2 + i\sin y_2}. \end{aligned}$$

Koska x_1 ja x_2 ovat reaalisia, niille voidaan soveltaa reaalilukujen osamäärän laskusääntöä

$$= e^{x_1-x_2} \cdot \frac{\cos y_1 + i\sin y_1}{\cos y_2 + i\sin y_2}.$$

Määritelmän 4.3 mukaisesti saadaan trigonometriset funktiot ilmaistua eksponenttifunktion avulla

$$= e^{x_1-x_2} \cdot \frac{e^{iy_1}}{e^{iy_2}}.$$

Lavennetaan osamäärää sen nimittäjän liittoluvulla, jotta saadaan nimittäjästä reaalinen

$$= e^{x_1-x_2} \cdot \frac{e^{iy_1} \cdot e^{-iy_2}}{e^{iy_2} \cdot e^{-iy_2}}.$$

Kertolaskun laskusäännön mukaan saadaan

$$
\begin{aligned}
&= e^{x_1-x_2} \cdot \frac{e^{iy_1-iy_2}}{e^{iy_2-iy_2}} \\
&= e^{x_1-x_2} \cdot \frac{e^{i(y_1-y_2)}}{e^0} \\
&= e^{x_1-x_2} \cdot \frac{e^{i(y_1-y_2)}}{1} \\
&= e^{x_1-x_2} \cdot e^{i(y_1-y_2)} \\
&= e^{x_1-x_2+i(y_1-y_2)} \\
&= e^{z_1-z_2}.
\end{aligned}
$$

□

4.4 Kompleksiluvun polaarimuoto

Määritelmä 4.6. Tarkastellaan kompleksilukua $e^{i\theta}$. Tällöin kompleksiluvun argumenttia $\theta = \arg(z)$ kutsutaan *vaihekulmaksi*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{4.12}$$

Vaihekulman θ avulla voidaan ilmaista, mihin kohtaan reaali- ja imaginääriakseleilla kompleksiluku sijoittuu. Kuvasta 4.4 nähdään, miten vaihekulma vaikuttaa luvun sijaintiin koordinaatistossa. Tarkemmin sijainti saadaan määriteltyä, kun tiedetään kompleksiluvun pisteen etäisyys r origosta.

Määritelmä 4.7. Kompleksiluku voidaan ilmoittaa *polaarimuodossa*

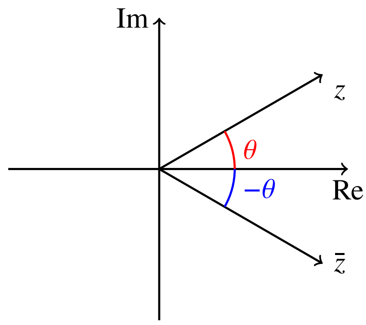
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \tag{4.13}$$

missä r on kompleksiluvun *itseisarvo* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, kun kyseessä on kompleksiluku $z = x + iy$. Itseisarvo r ilmaisee kompleksiluvun etäisyyttä origosta, kun luku sijoitetaan reaali- ja imaginääriakselien avulla koordinaatistoon. Kompleksiluvun polaarimuoto $re^{i\theta}$ on saatu Eulerin kaavaa 4.9 hyödyntäen. [1]

Lause 4.8. *Kompleksiluvun $z = x + iy$ reaaliosa $Re(z) = x$ ja imaginääriosa $Im(z) = y$ voidaan lausua vaihekulman avulla seuraavasti*

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
\Leftrightarrow \cos\theta &= \frac{x}{r}
\end{aligned}
$$

ja vastaavasti



Kuva 4.4. *Vaihekulmat kompleksiluvulle z ja sen liittoluvulle $\bar{z}$.*

$$\begin{aligned} y &= r \sin\theta \\ \Leftrightarrow \sin\theta &= \frac{y}{r}, \end{aligned}$$

missä r on kompleksiluvun etäisyys origosta.

Seuraus 4.9. *Kompleksiluvun $z = re^{i\theta}$ liittoluku on*

$$\bar{z} = re^{-i\theta}. \tag{4.14}$$

Todistus. Muutetaan aluksi kompleksiluvun liittoluku polaarimuotoon

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Trigonometrisille funktioille kosini ja sini toteutuu seuraavat yhtälöt

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos(-\theta) \\ -\sin\theta &= \sin(-\theta), \end{aligned}$$

joten polaarimuoto saadaan muokattua muotoon

$$\begin{aligned} r(\cos\theta - i\sin\theta) &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= re^{-i\theta} \end{aligned}$$

polaarimuodon määritelmän 4.7 mukaisesti. □

Lausetta 4.9 tukee kompleksiluvun ja sen liittoluvun vaihekulmia havainnollistava kuva 4.4. Itseisarvo r on kompleksiluvulla z ja liittoluvulla $\bar{z}$ samat, koska etäisyys origosta on sama. Ainoastaan vaihekulma muuttuu joko positiiviseksi tai negatiiviseksi riippuen siitä, mikä alkuperäisellä kompleksiluvulla oli vaihekulmana.

Esimerkki 4.10. Muutetaan kompleksiluku $z = 8 - 8i$ polaarimuotoon. Kompleksiluvun itseisarvo on

$$r = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}.$$

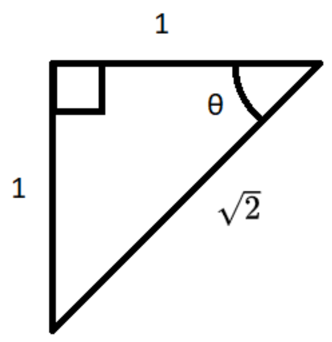
Kompleksiluvun reaali-ja imaginääriosat ovat

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z) &= 8\\ \mathrm{Im}(z) &= -8.\end{aligned}$$

Selvitetään vaihekulma θ. Vaihekulma saadaan laskemalla

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\\ &= \frac{-8}{8} = \frac{-1}{1} = -1.\end{aligned}$$

Vaihekulman θ ratkaisuun voidaan käyttää muistikolmiota, joka näkyy kuvassa 4.5. Muistikolmion



Kuva 4.5. *Muistikolmiossa, jossa kateetit ovat samansuuruisia, vaihekulmalle θ saadaan asteiksi 45. Tämä vastaa radiaaneissa $\frac{\pi}{4}$[15].*

mukaan vaihekulmaksi saadaan

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Muodostetaan itseisarvoa ja vaihekulmaa hyödyntäen polaarimuoto. Saadaan

$$\begin{aligned}z &= 8 - 8i\\ &= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

4.5 Kompleksilukujen juuret

Lause 4.11. *Kompleksiluvun z n. potenssi voidaan kirjoittaa polaarimuotoisena*

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \tag{4.15}$$

missä n on luonnollinen luku.

Todistus. Eksponenttifunktioiden potensseille

$$e^{kx} = (e^x)^k,$$

missä k on luonnollinen luku ja x on reaaliluku. Kompleksiluvun potenssille saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
z^n &= (re^{i\theta})^n \\
&= r^n(e^{i\theta})^n \\
&= r^n(\underbrace{e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot \ldots \cdot e^{i\theta}}_{n \text{ kpl}}) \\
&= r^n e^{(\underbrace{i\theta + i\theta + \ldots + i\theta}_{n \text{ kpl}})} \\
&= r^n e^{ni\theta} \\
&= r^n e^{in\theta},
\end{aligned}$$

missä n on luonnollinen luku Muuttamalla eksponenttimuotoinen lauseke polaarimuotoon saadaan

$$= r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Eksponenttifunktioiden potensseille toteutuu $e^{kx} = (e^x)^k$, mutta jotta voidaan varmistua, että sitä voidaan soveltaa myös kompleksiluvuille, todistetaan induktion avulla

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

kun n on luonnollinen luku. Aloitetaan induktiotodistuksen alkuaskeleella todistamalla, että lause pitää paikkansa, kun $n = 1$. Aloitetaan sijoittamalla $n = 1$ yhtälön vasemmalle puolelle

$$\begin{aligned}
(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n &= (r(\cos\theta + i\sin\theta))^1 \\
&= r(\cos\theta + i\sin\theta)
\end{aligned}$$

ja sijoitetaan $n = 1$ yhtälön oikealle puolelle

$$\begin{aligned}
r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) &= r^1(\cos(1\cdot\theta) + i\sin(1\cdot\theta)) \\
&= r(\cos\theta + i\sin\theta).
\end{aligned}$$

Yhtälö siis toteutuu, kun $n = 1$. Siirrytään induktiotodistuksen induktioaskeleeseen, eli oletetaan, että yhtälö toteutuu, kun $n = k$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta).$$

Todistetaan, että jos yhtälö toteutuu kun $n = k$, niin se toteutuu myös silloin kun $n = k+1$. Saadaan

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^{k+1} = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^k \cdot (r(\cos\theta + i\sin\theta))^1.$$

Edellä olevan oletuksen mukaisesti $(n = k)$ saadaan

$$\begin{aligned}
&= r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= r^{k+1} \cdot (\cos k\theta(\cos\theta + i\sin\theta) + i\sin k\theta(\cos\theta + i\sin\theta))\\
&= r^{k+1} \cdot (\cos k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta)\\
&= r^{k+1} \cdot (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta)).
\end{aligned}$$

Hyödynnetään trigonometristen funktioiden laskusääntöjä $\cos x\cos y \pm \sin x\sin y = \cos x \mp y$ ja $\sin x\cos y \pm \cos x\sin y = \sin x \pm y$ [28], jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&= r^{k+1} \cdot (\cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta))\\
&= r^{k+1} \cdot (\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)),
\end{aligned}$$

kun $n = k+1$. Näin ollen yhtälö toteuttaa induktioaskeleen. Voidaan siis olettaa, että yhtälö toteutuu kaikilla luonnollisilla luvuilla n. □

Yhtälöä 4.15 kutsutaan *De Moivre'n kaavaksi*. De Moivre'n kaavaa hyödynnetään kun halutaan löytää kompleksiluvuille juuria.

Määritelmä 4.12. Kompleksiluvun z *n. juurta* w merkitään

$$w = z^{1/n}, \tag{4.16}$$

eli toisin sanoen

$$w^n = z, \tag{4.17}$$

missä n on luonnollinen luku.

Trigonometriset funktiot sin ja cos ovat 2π -jaksoisia, eli sinifunktiolle

$$\sin\theta = \sin\theta + 2\pi \tag{4.18}$$

ja kosinifunktiolle

$$\cos\theta = \cos\theta + 2\pi. \tag{4.19}$$

Lause 4.13. *Kompleksiluvun z juurelle saadaan lauseke*

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta/n + 2\pi k/n)} \tag{4.20}$$

missä n on luonnollinen luku ja $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Kompleksiluvulle z löytyy n kappaletta erisuuria n.:siä juuria.*

Todistus. Trigonometriset funktiot ovat 2π -jaksoisia, eli $\cos\theta = \cos\theta + 2\pi$ ja $\sin\theta = \sin\theta + 2\pi$. Kompleksiluvun kaavaksi saadaan de Moivren kaavan 4.15 ja Jamesin ym. [12] mukaan

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right] \\ &= r^{1/n} e^{i(\theta/n + 2\pi k/n)}, \end{aligned}$$

missä $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. □

Esimerkki 4.14. Määritellään kompleksiluvun $z = 8 - 8i$ neljäs juuri w. Ratkaisussa voidaan käyttää esimerkissä 4.10 ratkaistua itseisarvoa ja vaihekulmaa

$$w^4 = z = 8 - 8i$$

Koska w on kompleksiluvun z neljäs juuri, on z kompleksiluvun w neljäs potenssi. Saadaksemme selville w:n, selvitetään, mikä on luvun z neljäs juuri.

$$\begin{aligned} w &= z^{1/4} \\ &= 8^{1/4}\sqrt{2}^{1/4}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{4} + \frac{2\pi k}{4}\right) - i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{4} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right] \\ &= (8^2 + 8^2)^{1/8} e^{i(-\pi/16 + 2\pi k/4)} \\ &= 128^{1/8} e^{i(-\pi/16 + 8\pi k/16)}. \end{aligned}$$

Etsitään neljänsiä juuria, joten juuria tulee neljä kappaletta ja ne ovat kulman $\frac{2\pi k}{4}$ välein, kun $k = 0, 1, 2, 3$. Lisäksi $128 = 2^7$ Kompleksiluvun juuret ovat täten

$$\begin{aligned} w_1 &= (2^7)^{1/8} e^{i(-\pi/16)} \\ w_2 &= 2^{7/8} e^{i(-\pi/16 + 8\pi/16)} = 2^{7/8} e^{i(7\pi/16)} \\ w_3 &= 2^{7/8} e^{i(-\pi/16 + 16\pi/16)} = 2^{7/8} e^{i(15\pi/16)} \\ w_4 &= 2^{7/8} e^{i(-\pi/16 + 24\pi/16)} = 2^{7/8} e^{i(23\pi/16)}. \end{aligned}$$

4.6 Kompleksifunktioiden derivoituvuus

Reaalifunktioille raja-arvo määritellään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \tag{4.21}$$

missä L on reaaliluku, jota kohti funktion $f(x)$ arvot lähestyvät, kun x lähestyy reaalilukua x_0 [34]. Vastaavasti voidaan määritellä kompleksiluvulle raja-arvo.

Määritelmä 4.15. Funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on derivoituva kompleksisessa pisteessä z_0, jos on olemassa *raja-arvo*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L, \tag{4.22}$$

missä L on kompleksiluku. Jotta L voi olla raja-arvo kohdassa z_0, jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, niin että

$$|f(z) - L| < \epsilon, \tag{4.23}$$

jos

$$0 < |z - z_0| < \delta, \tag{4.24}$$

eli $f(z)$ saadaan mielivaltaisen lähelle lukua L, jos z on riittävän lähellä lukua z_0.

Määritelmä 4.16. Kompleksisen funktion *derivaatta* pisteessä z_0 määritellään raja-arvon avulla

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{4.25}$$

eli voidaan merkitä

$$f'(z_0) = L, \tag{4.26}$$

jos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L, \tag{4.27}$$

missä $L \in \mathbb{C}$.

Kompleksisen funktion $f : G \to \mathbb{C}$ reaali- ja imaginääriosia merkitään

$$u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$$
$$v(x, y) = \mathrm{Im} f(z),$$

jolloin u ja v saavat reaalilukuarvot. Funktio f on tällöin

$$f = u + iv. \tag{4.28}$$

Olkoon G avoin joukko ja $G \subset \mathbb{C}$. Mikäli funktio f on derivoituva jokaisessa pisteessä $z_0 \in G$, on funktio f *analyyttinen funktio*. Kompleksisia analyyttisiä funktioita kutsutaan *holomorfisiksi funktioiksi*.

Lause 4.17. *Jos funktio $f = u + iv$ on derivoituva pisteessä $z \in G \subset \mathbb{C}$, niin funktion osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y toteuttavat yhtälöt*

$$\begin{aligned} u_x(z) &= v_y(z) \\ u_y(z) &= -v_x(z). \end{aligned}$$

Yhtälöitä kutsutaan Cauchy-Riemann yhtälöiksi [4].

Todistus. Funktion kompleksinen derivaatta on

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Merkitään $h = z - z_0, h \in \mathbb{C}$ [4]. Tällöin kompleksifunktion derivaatalle

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Kokeillaan miten h vaikuttaa, jos se on reaalinen tai kompleksinen. Valitaan $h = t, t \in \mathbb{R}$. Koska $f(z_0) = u(z_0) + iv(z_0)$ saadaan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \right) \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Vasvaavasti valitaan kompleksisen h:ta varten $h = it, t \in \mathbb{R}$, jolloin

$$f'(z_0) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + it) - u(x_0, y_0)}{it} + i \frac{v(x_0, y_0 + it) - v(x_0, y_0)}{it} \right).$$

Jotta derivaattaa saadaan laskettua, pyritään nimittäjästä saamaan reaalinen. Lavennetaan murtolukuja luvulla i, jolloin

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{i \cdot (u(x_0, y_0 + it) - u(x_0, y_0))}{i \cdot it} + i \frac{i \cdot (v(x_0, y_0 + it) - v(x_0, y_0))}{i \cdot it} \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \left(i \cdot \frac{u(x_0, y_0 + it) - u(x_0, y_0)}{-t} - \frac{v(x_0, y_0 + it) - v(x_0)}{-t} \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \left(-i \cdot \frac{u(x_0, y_0 + it) + u(x_0, y_0)}{t} + \frac{v(x_0, y_0 + it) - v(x_0)}{t} \right) \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Koska molemmat yllä saadut funktion derivaatat ovat saman funktion derivaattoja ja silloin reaaliosat ja imaginääriosat ovat samoja, niin tällöin

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

ja

$$v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0),$$

eli Cauchy-Riemann-yhtälöt toteutuvat, kun $h \in \mathbb{C}$, mikäli funktio on derivoituva. $\square$

Oletetaan, että Cauchy-Riemann-yhtälöt toteutuvat pisteen z_0 ympäristössä $G \subset \mathbb{C}$ ja osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x sekä v_y ovat derivoituvia ja sen myötä jatkuvia. Tällöin funktio $f(z)$ on analyyttinen pisteessä $z = z_0$. Eli mikäli Cauchy-Riemann-yhtälöt toteutuvat, on funktio analyyttinen. Tämän ovat todistaneet Georgi E. Shilov ja Richard A. Silverman [21]. Cauchy-Riemannin yhtälöitä voidaan siis käyttää funktioiden derivoituvuuden ja analyyttisyyden tutkimisessa.

5. TUTKIMUKSEN AINEISTO

5.1 Tutkimusaineisto

Tutkimusaineistona käytettiin Panopto-järjestelmässä olevista videoista saatavia tietoja. Panopto-järjestelmän kautta voitiin nähdä opetusvideoista ja laskuharjoitustehtävien ratkaisuvideoista esimerkiksi niitä katselleiden opiskelijoiden lukumäärät ja videoiden katseluaika.

Katselutiedot saatiin videoittain ja niistä voitiin Microsoft Excelin avulla erotella eri toteutuksilla opiskelleet opiskelijat. Tällöin saatiin tarkempaa tietoa siitä, kuinka eri toteutuksilla katselumäärät ovat eronneet muista.

Tutkimusaineistona arvosanojen osalta käytettiin lukuvuoden 2019-2020 Insinöörimatematiikka B1- ja C1 -toteutusten ja lukuvuoden 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteiden luentomuoto- ja flippaustoteutusten tutkimusluvan antaneiden opiskelijoiden saamia arvosanoja opintojaksolta. Arvosanatietoja voitiin verrata videoiden katselumääriin ja selvittää, oliko niiden välillä yhteyttä.

Tutkittavien opintojaksojen osallistujalistoilta oli tutkimusaineistoon poimittu opiskelijan oletettu sukupuoli nimen mukaan. Tämä antoi tietoa, onko oletetulla sukupuolella merkitystä opetusvideoiden katseluaktiivisuuteen. Sukupuolen yhteyttä opintojaksolta saatuihin arvosanoihin oli tutkittu niiden opiskelijoiden osalta, jotka olivat antaneet tutkimusluvan tietojen käsittelyyn.

5.2 Panopto

Panopto-järjestelmä on Tampereen yliopistolla käytettävä videoiden tallennuspalvelu. Videoita voi jakaa järjestelmästä opiskelijoille. Insinöörimatematiikka 1- ja Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksoilla videot jaettiin Moodlen välityksellä. Panoptosta saatavassa datassa oli nähtävillä videoiden katselija, katselukerrat, katseluminuutit yhteensä ja prosentuaalinen määrä siitä, kuinka ison osan videosta videota katsellut henkilö oli sitä katsonut.

Opiskelijat saattavat katsoa luento- ja opetusvideoita nopeutettuina. Tässä tutkimuksessa tämän nopeutuksen aika otettiin huomioon siinä, että opetusvideoiden katseluajoista saatavia tietoja tutkittiin niiden prosentuaalisten määrien mukaan. Esimerkiksi jos opiskelija katsoi puolet videosta, hän katsoi siitä 50 prosenttia huolimatta siitä, katsoiko hän sen alkuperäisellä nopeudella vai nopeutettuna.

5.3 Tutkimusmenetelmät

Tutkittavista videoista saatavien tietojen avulla pyrittiin löytämään tietoa, onko opetusmenetelmien välisissä harjoitusvideoiden katselukerroissa tai muuten videoiden katseluaktiivisuudessa eroa eri opetusmenetelmien välillä. Aktiivisuudella tarkoitettiin tässä tapauksessa eri opiskelijoiden katselukertojen lukumääriä ja ajallista katselumäärää.

Videoiden katseluista saatuja tietoja taulukoitiin ja tutkimuksen kannalta oleellisista tiedoista tehtiin diagrammeja. Taulukoihin kerättiin eri tiedoista frekvenssejä ja keskiarvoja. Tutkimustietoa analysoitaessa tietoja verrattiin keskenään eri opetusmenetelmien, arvosanoja saaneiden opiskelijoiden ja sukupuolten välillä.

Merkittäviä eroavaisuuksia taulukosta etsittiin t-testin avulla. Eri opetusmetodien vaikutuksia selvittäessä hyödynnettiin riippumattomien tapausten t-testiä. Tapausten riippumattomuus tarkoittaa sitä, että toisen tapauksen tapahtuminen ei vaikuta toisen tapauksen tuloksiin. T-testin avulla saadaan selvitettyä, onko otannassa esiintyvä eroavaisuus merkittävä vai satunnainen. T-testiä käytettäessä oletetaan aineiston normaalijakautuneisuus. Kahden riippumattoman otoksen välistä eroa voi tutkia myös Mann-Whitneyn U-testin avulla. Sen kohdalla ei tarvitse olettaa normaalijakautuneisuutta [22] [31] [23]. Tilastolliset testaukset tehtiin SPSS-ohjelmalla.

6. TUTKIMUKSEN TULOKSET

6.1 Opetusvideot

Erilaisten oppimistilaisuuksien, kuten luentojen ja Prime time -tilaisuuksien lisäksi Insinöörimatematiikka 1- ja Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksoilla opiskelijoilla oli käytössä opetusvideoita kunkin viikon aihepiiristä. Opetusvideot olivat noin 15 minuutin mittaisia ja niissä käytiin lyhyesti opetettava asia läpi.

Molempien opintojaksojen kolmannen viikon aiheena oli kompleksiluvut. Kompleksilukujen teoriaa on käyty läpi tämän työn luvussa 4. Insinöörimatematiikka 1- ja Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksoilla oli opiskelijoilla oppimateriaalina kolme samaa videota. Aiheina niissä olivat kompleksiluvut yleisesti, kompleksiluvun juuri ja kompleksiluvun polaarimuoto. Lukuvuoden 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksolla oli edellä mainittujen lisäksi videot aiheesta kompleksimuuttujan polynomi ja esimerkki joukoista kompleksitasossa.

Taulukko 6.1. *Opetusvideoiden keskimääräiset katselukestot prosentuaalisesti. Taulukkoon on huomioitu kaikki toteutusten opiskelijat.*

Lukuvuosi	2019-2020		2020-2021	
Opintojakso	IMA B1	IMA C1	IMP-L	IMP-F
Opiskelijoita opintojaksolla lkm	285	263	385	307
Aihe: Kompleksiluvut				
Keskimääräinen katselukesto %	69,38	86,58	73,09	89,98
Katsoivat videon lkm	80	158	92	123
Opintojakson opiskelijoista %	28,07	60,08	23,90	40,07
Aihe: Kompleksiluvun juuri				
Keskimääräinen katselukesto %	76,38	76,25	77,07	78,89
Katsoivat videon lkm	76	139	122	131
Opintojakson opiskelijoista %	26,66	52,85	31,69	42,67
Aihe: Kompleksiluvut polaarimuodossa				
Keskimääräinen katselukesto %	80,94	77,79	71,15	83,9
Katsoivat videon lkm	71	158	94	125
Opintojakson opiskelijoista %	24,91	60,08	24,42	40,72

Taulukossa 6.1 on eritelty, mikä on ollut videoita katselleiden opiskelijoiden keskimääräinen videoiden katselumäärä prosentuaalisesti. Videoita katsoneiden opiskelijoiden kesken on laskettu taulukkoon heidän keskimääräinen katseluprosenttinsa. Todellisuudessa opiskelijoiden katselumäärät olivat yhdestä sataan prosenttiin eri opintojaksoilla ja taulukossa näkyy keskimääräinen arvo. Taulukkoon on eritelty eri opintojaksojen toteutukset niin, että luentomuotoista opetusta opetusmenetelmänä käyttänyt Insinöörimatematiikan opintojakso on IMA B1 ja vastaava Insinöörimatematiikan perusteiden opintojakso on IMP-L. Käänteistä opetusta opetusmenetelmänä hyödyntänyt Insinöörimatematiikka 1 on taulukossa IMA C1 ja Insinöörimatematiikan perusteiden opintojakso on IMP-F. Taulukkoon on lisätty myös opiskelijoiden määrät eri toteutuksilla ja kutakin videota katsoneiden opiskelijoiden lukumäärät.

Taulukon 6.1 videoiden keskimääräisiä katselukestoja opintojaksojen välillä voidaan vertailla t-testin avulla. Koska opintojaksojen välillä videoiden katselumäärät eivät vaikuta toisiinsa, ovat ne toisistaan riippumattomia ja t-testi voidaan suorittaa. Prosentuaaliset katselumäärät videoilla ovat noin 70-90 prosenttia. Nollahypoteesina t-testille on, että opetusmenetelmällä ei ole vaikutusta siihen kuinka suuret osat videoista opiskelijat ovat katsoneet.

Kompleksilukujen perusteiden videota katsoneet opiskelijat katsoivat videosta luentomuotoisissa toteutuksissa keskimäärin 18,32 % (keskihajonta 36,639), kun otokseen otetaan kaikki 670 opiskelijaa. Flippaustoteutuksissa vastaava keskiarvo on 43,42 % (keskihajonta 47,668), jossa on mukana 570 opiskelijaa. Otosten välillä oleva ero on erittäin merkitsevä, sillä t-testin tulokseksi saatiin $t(1238) = -10,254$ ja t-testin p-arvo on $p \leq 0,001$.

Kompleksilukujen juuren videolla keskiarvo oli kompleksiluvuista kertovaa videota isommat luentomuotoisissa toteutuksissa, mutta keskiarvot olivat kuitenkin samaa luokkaa. Videota katsoneet opiskelijat katsoivat videosta luentomuotoisissa toteutuksissa keskimäärin 22,70 % (keskihajonta 39,140, $N = 670$). Flippaustoteutuksissa vastaava keskiarvo on 36,73 % (keskihajonta 44,255, $N = 570$). Otosten välillä oleva ero on tälläkin videolla erittäin merkitsevä, sillä t-testin tulokseksi saatiin $t(1238) = -5,865$ ja t-testin p-arvo on $p \leq 0,001$.

Kompleksiluvun polaarimuodon video toi hyvin samantapaisia tuloksia kuin kaksi muuta videota. Luentomuotoisissa toteutuksissa videosta katsottiin keskimäärin 18,56 % (keskihajonta 36,798, N=670) ja flippaustoteutuksissa keskimäärin videosta katsottiin 39,96 % (keskihajonta 44,490, N=570). Otosten välillä oleva ero on tässäkin tapauksessa erittäin merkitsevä, sillä t-testin tulokseksi saatiin $t(1238) = -9,003$ ja t-testin p-arvo on tässäkin $p \leq 0,001$.

T-testin mukaan ero keskimääräisissä katselukestoissa on siis merkittävä ja havaittavissa jokaisen videon kohdalla. P-arvo oli jokaisen videon kohdalla alle 0,001, jolloin otosten välillä oleva ero on erittäin merkitsevä.

Suurin ero opintojaksojen välillä on videoita katsoneiden opiskelijoiden prosentuaalisissa määrissä. Prosentuaalisesti selkeästi suurempi osa opiskelijoista katsoi opetusvideoita käänteistä opetusta hyödyntävillä opintojaksoilla. Määrät vaihtelivat videoittain, mutta prosentuaalinen määrä oli silti selkeästi suurempi kuin luentomuotoista opetusta hyödyntävillä opintojaksoilla. Insinöörimatematiikka B1- ja luentomuotoisen opetuksen menetelmin toteutetulla Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksoilla noin 25-30 prosenttia kaikista opintojaksojen opiskelijoista katsoivat opetusvideoita. Vastaava määrä Insinöörimatematiikka C1- ja käänteisen opetuksen menetelmin järjestetyllä Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksolla oli noin 40-60 prosenttia. Videoita katsoneiden opiskelijoiden osuus siis noin kaksinkertaistui eri opetusmenetelmin järjestetyillä toteutuksilla.

Selkeää eroa opiskelijoiden opetusvideoiden katseluaktiivisuudessa voi selittää käänteistä opetusta opetusmenetelmänä hyödyntävän opintojakson toteutustyyli. Kun luentomuotoisessa opetuksessa opetus painottuu luentoihin ja laskuharjoituksiin, on käänteisessä opetuksessa suurempi paino uuden asian opiskelussa erilaisilla opiskelijoille jaettavilla materiaaleilla ja viikoittaisilla Prime time -tilaisuuksilla. Koska luentoja ei flippaustoteutuksilla ole, on opetusvideoilla suurempi merkitys.

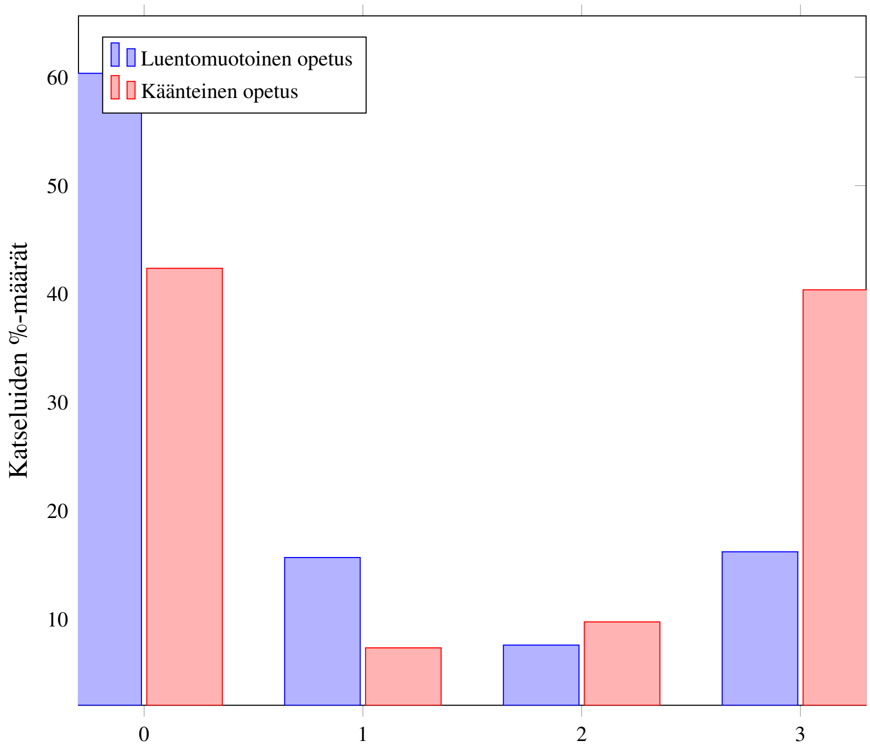
Taulukko 6.2. *Opiskelijoiden katsomien videoiden lukumäärät kolmannelta aiheviikolta, jonka aiheena oli kompleksiluvut*

Lukuvuosi	2019-2020				2020-2021			
Opintojakso	IMA B1		IMA C1		IMP-L		IMP-F	
Opiskelijoita toteutuksella	285		263		385		307	
	lkm	%	lkm	%	lkm	%	lkm	%
Kolmea videota katsoneet opiskelijat	49	17,19	126	47,91	59	15,32	101	32,90
Kahta videota katsoneet opiskelijat	17	5,96	31	11,79	36	9,35	24	7,82
Yhtä videota katsoneet opiskelijat	46	16,14	15	5,70	59	15,32	28	9,12
Eivät katsoneet opetusvideoita	173	60,70	91	34,60	231	60,00	154	50,16

Tarkempien tietojen yksittäisten opiskelijoiden videoiden katseluaktiivisuudesta saamiseksi taulukkoon 6.2 on kerätty eri toteutuksista tieto siitä, kuinka monta kolmesta taulukossa 6.1 mainitusta opetusvideosta yksittäiset opiskelijat katsoivat. Taulukossa on prosentuaaliset osuudet kullekin ryhmälle, jotka on jaoteltu opetusvideoiden katselun mukaan. Yhtenä ryhmänä ovat ne opiskelijat, jotka ovat katsoneet kaikki kolme molempien lukuvuosien toteutuksilla ollutta opetusvideota, toiseen ryhmään kuuluvat ne, jotka ovat katsoneet kaksi kolmesta videosta, kolmanteen yhden videon katsoneet ja neljänteen ryhmään ne opiskelijat, jotka eivät katsoneet opetusvideoita ollenkaan. Tehdään t-testi, jotta verrataan valittua metodia katsottujen opetusvideoiden lukumääriin.

Erilaisilla opetusmenetelmillä vaikutti olevan suuri vaikutus opetusvideoiden katselumääriin taulukon 6.1 ja t-testin mukaan. Samaa on nähtävissä aktiivisesti opetusvideoita katselleiden opiskelijoiden suhteellisessa määrässä taulukon 6.2 mukaan. Luentomuotoista opetusta opetusmenetelmänä hyödyntäneillä Insinöörimatematiikka B1 ja Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksoilla opetusvideoita katsomatta jättäneiden opiskelijoiden määrä oli 60 prosenttia. Vastaava määrä käänteistä opetusta opetusmenetelmänään käyttäneillä Insinöörimatematiikka C1 ja Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksoilla oli noin 35-50. T-testin mukaan opiskelijat katsoivat luentomuotoisissa toteutuksissa keskimäärin 1,12 videota (keskihajonta 1,12, $N = 462$) ja flippaustoteutuksissa 1,52 (keskihajonta 1,38, $N = 479$). Tällöin $t(939) = -9,145$ ja $p \leq 0,001$ eli opetusmenetelmän vaikutus on tilastollisesti erittäin merkitsevä.

Jotta eri opetusmenetelmien vaikutusta voidaan vertailla helposti, on taulukossa 6.2 esitellyistä prosentuaalisista määristä laskettu keskiarvot opetusmenetelmien mukaan ja tehty niistä histogrammi, joka on kuvassa 6.1. Kuvan sinisten palkkien arvo vastaa opintojaksojen Insinöörimatematiikka



Kuva 6.1. *Opetusvideoiden keskimääräiset katselukerrat luentomuotoista- ja käänteistä opetusta hyödyntäneillä toteutuksilla. Luvut 0, 1, 2 ja 3 viittaavat katsottujen opetusvideoiden määrään, eli kuinka suuri prosentuaalinen määrä opiskelijoista on katsonut kaikki kolme, kaksi, yhden tai ei yhtään kolmesta tutkimuksessa mukana olevasta opetusvideosta*

B1 ja Insinöörimatematiikan perusteiden luentototeutuksen videoita katsoneiden opiskelijoiden keskiarvoa. Vastaavasti punaiset palkit ilmaisevat käänteistä opetusta opetusmenetelmänä hyödyntäneiden Insinöörimatematiikka C1-opintojakson ja Insinöörimatematiikan perusteiden flippaustoteutuksen katselumäärien prosentuaalisten arvojen keskiarvoa.

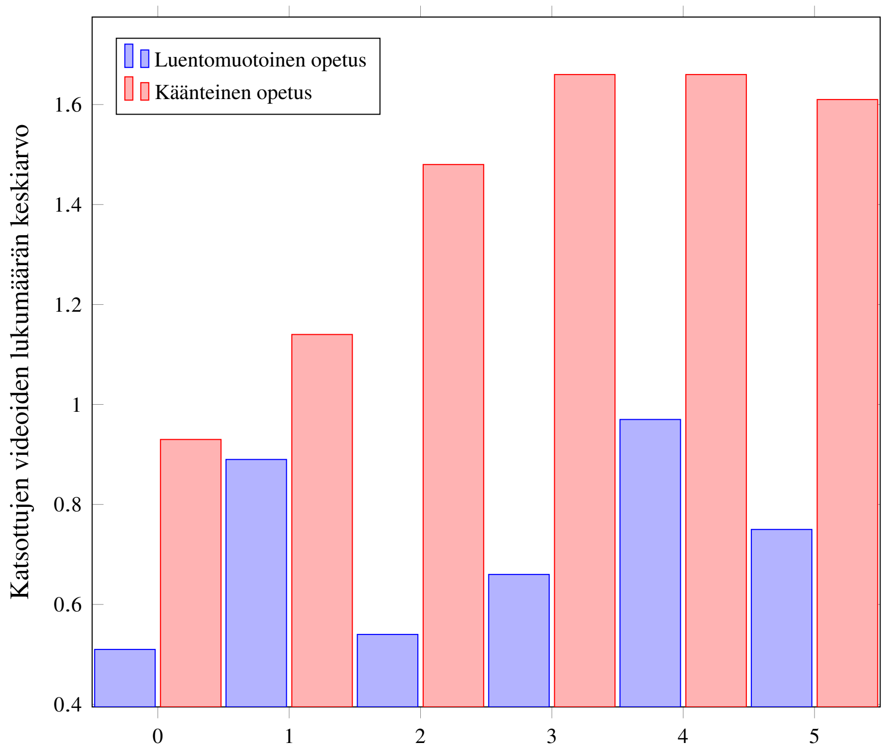
Käänteistä opetusta hyödyntävällä kurssilla eri lukuvuosien välillä oli opetusvideoita katsomatta jääneiden välillä eroavaisuuksia. Insinöörimatematiikka C1 -toteutuksella opetusvideoita katsoneiden määrä oli suurempi kuin lukuvuonna Insinöörimatematiikan perusteiden flippaustoteutuksella. Insinöörimatematiikka C1 -toteutuksella suurin osa oli katsonut opetusvideoita, mutta Insinöörimatematiikan perusteissa hieman yli puolet jättivät katsomatta opetusvideoita. Kuvasta 6.1 voidaan tarkastella opetusmenetelmän vaikutusta katselumäärien prosentuaalisiin määriin. Eri opetusmenetelmiä verratessa nähdään, miten luentomuotoista opetusta hyödyntävillä toteutuksilla videoiden katsomatta jääneiden osuus on selvästi suurempi kuin niitä katsoneiden lukumäärä. Flippaustoteutuksilla videoita katsomatta jättäneiden määrä on iso, mutta kolme videota katsoneiden lukumäärä on lähes yhtä suuri. Kuvassa näkyy myös se, että kaksi tai kolme videota katsoneiden määrä on suurempi käänteisen opetuksen metodilla opiskelleilla opiskelijoilla, kun taas nolla tai yhden videon katsoneiden määrä on suurempi luentomuotoisessa opetuksessa opiskelleilla opiskelijoilla.

Taulukko 6.3. *Opetusvideoiden katselumäärät arvosanoittain. Taulukkoon on eritelty, kuinka moni tietyn arvosanan saaneista opiskelijoista on katsellut tutkimuksessa olevista kolmesta opetusvideoista joko kaikki kolme, kaksi, yksi tai ei yhtään. Taulukkoon on korostettu kunkin toteutuksen jokaisesta arvosanaluokasta kaksi suurinta prosentuaalista määrää videoiden katsontalukumäärälle. Luentomuotoista opetusta ilmaistaan sinisellä ja käänteistä opetusta punaisella värillä.*

		Lukuvuosi 2019-2020				Lukuvuosi 2020-2021			
		IMA B1		IMA C1		IMP-L		IMP-F	
Arvosana	Videoista katsottu	lkm	%	lkm	%	lkm	%	lkm	%
0	0	15	51,72	11	64,71	13	86,67	4	57,14
	1	8	27,59	0	0	2	13,33	1	14,29
	2	0	0	1	5,88	0	0	1	14,29
	3	6	20,69	5	29,41	0	0	1	14,29
	Yhteensä	29	100	17	100	15	100	7	100
1	0	18	78,26	7	30,43	4	50,00	8	66,67
	1	1	4,35	2	8,70	0	0	3	25,00
	2	1	4,35	1	4,35	2	25,00	1	8,33
	3	3	13,04	13	56,52	2	25,00	0	0
	Yhteensä	23	100	23	100	8	100	12	100
2	0	21	58,33	10	29,41	11	73,33	11	40,74
	1	6	16,67	9	26,47	4	26,67	4	14,81
	2	4	11,11	1	2,94	0	0	2	7,41
	3	5	13,88	14	41,18	0	0	10	37,04
	Yhteensä	36	100	34	100	15	100	27	100
3	0	31	58,49	14	25,93	19	67,86	22	44,00
	1	10	18,87	3	5,56	5	17,86	6	12,00
	2	3	5,66	7	12,96	3	10,71	5	10,00
	3	9	16,98	30	55,56	1	3,57	17	34,00
	Yhteensä	53	100	54	100	28	100	50	100
4	0	42	61,76	9	18,75	33	45,20	50	55,56
	1	7	10,29	2	4,17	13	17,81	8	8,89
	2	6	8,82	7	14,58	14	19,18	4	4,44
	3	13	19,12	30	62,5	13	17,81	28	31,11
	Yhteensä	68	100	48	100	73	100	90	100
5	0	24	61,54	10	30,30	53	69,74	38	45,24
	1	5	12,82	4	12,12	7	9,21	5	5,95
	2	2	5,13	2	6,06	5	6,58	8	9,52
	3	8	20,51	17	51,52	11	14,47	33	39,29
	Yhteensä	39	100	33	100	76	100	84	100

Yksi oppimisen arvioinnin mittareista opintojaksoilla on lopullinen arviointi, joka perustuu yleensä tentin, laskuharjoitusaktiivisuuden tai harjoitustöiden tuloksiin. Laskuharjoitusaktiivisuudella tarkoitetaan harjoitusten määrällistä tekemistä. Jos halutaan selvittää, millaisia vaikutuksia oppimiseen menetelmillä ja videoiden katsomisilla on ollut, voidaan vertailla videoiden katselutietoja arvosanatietoihin niiden opiskelijoiden osalta, ketkä ovat antaneet siihen tutkimusluvan.

Taulukossa 6.3 on eritelty, kuinka monta videota kunkin arvosanan saaneet opiskelijat ovat katsoneet eri toteutuksilla. Videoita katsoneiden opiskelijoiden lukumäärää on verrattu kyseisen arvosanan saaneiden opiskelijoiden lukumääriin eri toteutuksilla. Tästä vertailusta on saatu opetusvideoita katsoneiden opiskelijoiden prosentuaaliset katselumäärät arvosanoittain. Taulukon pohjalta on tehty kuvassa 6.2 näkyvä pylväsdiagrammi, johon on laskettu videoiden keskimääräinen katselulukumäärä eri arvosanoja saaneilla opiskelijoilla opetusmenetelmittäin.



Kuva 6.2. *Videoiden keskimääräinen katselulukumäärä eri arvosanoja saaneilla opiskelijoilla opetusmenetelmittäin. Diagrammiin on yhdistetty lukuvuosien 2019-2020 ja 2020-2021 luentomuotoisen opetuksen ja käänteisen opetuksen opiskelijoiden tiedot.*

Taulukkoon 6.3 on korostettu jokaisen toteutuksen eri arvosanaryhmistä kaksi suurinta prosentuaalista osuutta. Lähes kaikissa toteutuksissa ja arvosanaryhmissä suurin ryhmä oli ne opiskelijat, jotka eivät olleet hyödyntäneet videoita. Poikkeuksena on Insinöörimatematiikka C1, jossa kaikista opintojakson läpäisseistä arvosanoista eniten oli niitä opiskelijoita, jotka olivat katsoneet kaikki kolme videota. Molempien flippaustoteutusten lähes kaikissa arvosanaryhmissä kaksi suurinta ryhmää olivat kaikki videot katsoneet opiskelijat ja nolla videota katsoneet. Tässä poikkeuksena on Insinöörimatematiikan perusteiden flippaustoteutuksen arvosanaluokat 0 ja 1. Hylätyn arvosanan 0 saaneilla suurin ryhmä on ne, ketkä eivät videoita katsoneet, mutta muihin ryhmiin opiskelijoita jakautui tasaisesti yksi kuhunkin. Arvosanan 1 saaneilla toiseksi suurin ryhmä oli yhden videon katsoneet opiskelijat, kun suurin oli nolla videota katsoneet.

Taulukosta 6.3 ja kuvasta 6.2 huomataan molemmista kiinnostava yksityiskohta luentototeutusten osalta. Arvosanaluokissa 0-3 suurimmat ryhmät opiskelijoissa ovat ne, jotka eivät ole katsoneet videoita ollenkaan tai ovat katsoneet yhtä videota. Tässä näkyy kuitenkin selvä poikkeus niillä opiskelijoilla, jotka ovat saaneet arvosanan 1 opintojaksosta. Heillä kaksi suurinta ryhmää ovat nolla videota ja kaikki kolme videota katsoneet opiskelijat. Tämä eroavaisuus näkyy selkeästi myös kuvassa 6.2 ja ilmiö toistuu molempien lukuvuosien toteutuksissa.

Kun testattiin t-testin avulla, vaikuttaako katsottujen videoiden lukumäärä saatuun arvosanaan, oli katsottujen videoiden lukumäärä merkittävässä osassa. Nollahypoteesina oli, että katsottujen videoiden lukumäärä ei vaikuta saatuun arvosanaan. Otokseen otettiin kaikki arvosanatiedoista tutkimusluvan antaneet opiskelijat riippumatta käytetystä opetusmenetelmästä. Kaksi tai kolme videota katsoneiden arvosanan keskiarvo 3,44 (keskihajonta 1,357, $N = 356$) poikkesi yhden tai ei yhtään videota katsoneiden keskiarvosta 3,24 (keskihajonta 1,571, $N = 585$). T-testin tulokseksi saatiin $t(939) = 2,024$. Kaksisuuntaisen testin p-arvo oli tällöin 0,043 eli tilastollisesti melkein merkitsevä.

6.2 Harjoitusten ratkaisuvideot

Insinöörimatematiikka 1- ja Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksoilla annettiin oppilaille ratkaistavaksi harjoitustehtäviä. Laskuharjoitusten jälkeen opintojaksojen Moodle-sivuille laitettiin laskuharjoitusten jokaisesta tehtävästä video, jossa ratkaisu käytiin läpi. Flippaustoteutuksilla osa tehtävistä ratkaistiin harjoituksissa, jolloin ne palautettiin vasta harjoitusten jälkeen. Palautuksen jälkeen opiskelijat itse- ja vertaisarvioivat palautustehtävät. Lukuvuoden 2019-2020 Insinöörimatematiikka 1:sen flippaustoteutuksella palautustehtäviä oli kolme ja lukuvuoden 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteiden flippaustoteutuksella palautustehtäviä oli kaksi.

Taulukko 6.4. *Lukuvuoden 2019-2020 Insinöörimatematiikka C1 -opintojakson harjoitusten katselijamäärät. Opintojaksolla opiskelijoiden kokonaismäärä oli N=263. Taulukkoon on merkitty sinisellä ennen laskuharjoitustilaisuutta palautettavat tehtävät ja punaisella tehtävät, joita oli mahdollisuus tehdä ohjatusti laskuharjoitustilaisuudessa ja palauttaa sen jälkeen.*

Katselijoiden määrä	H1	H2	H3	H4	H5	H6
Tehtävä 1	43	14	7	8	8	7
Tehtävä 2	12	6	6	6	6	9
Tehtävä 3	12	8	9	5	6	8
Tehtävä 4	76	45	32	24	18	11
Tehtävä 5	34	26	23	17	12	10
Tehtävä 6	34	17	19	9	11	10
Pisteytysohje teht.4-6	191	172	164	179	163	145
Tehtävä4 toisin ja pisteytysohje	-	17	-	-	-	-

Taulukoissa 6.4 ja 6.5 on listattuna Insinöörimatematiikka C1- ja Insinöörimatematiikan perusteet -opintojaksojen flippaustoteutusten harjoitusvideoiden katselijamäärät videoita katsoneiden opiskelijoiden lukumäärän mukaan. Lukumäärissä on huomioitu vain videoiden katsojien lukumäärä,

Taulukko 6.5. *Lukuvuoden 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteet -opintojakson flippaustoteutuksen harjoitusten katselijamäärät. Opintojaksolla opiskelijoiden kokonaismäärä oli N=307. Taulukkoon on merkitty sinisellä ennen laskuharjoitustilaisuutta palautettavat tehtävät ja punaisella tehtävät, joita oli mahdollisuus tehdä ohjatusti laskuharjoitustilaisuudessa ja palauttaa sen jälkeen.*

Katselijoiden määrä	H1	H2	H3*	H4	H5*	H6
Tehtävä 1	11	7	-	6	-	2
Tehtävä 2	3	2	-	3	-	2
Tehtävä 3	3	2	-	3	-	2
Tehtävä 4	4	2	-	3	-	3
Tehtävä 5	49	56	-	46	-	20
Tehtävä 6	41	40	-	28	-	40
Pisteytysohje teht.5-6	61	60	-	64	-	40

ei kuinka monta kertaa he ovat videoita katsoneet. Taulukoissa H1, H2, H3, H4, H5 ja H6 viittaavat viikoittaisiin harjoituksiin. Esimerkiksi H1-sarake ilmoittaa ensimmäisen viikon laskuharjoitusten tehtävävideoiden katselujen lukumääriä. Insinöörimatematiikan perusteiden 6.5 harjoitusten 3 ja 5 videoiden kanssa oli teknisiä ongelmiaa, joten H3 ja H5 on jätetty taulukoissa tyhjiksi.

Taulukoihin 6.6 ja 6.7 on kerätty Insinöörimatematiikka C1- ja Insinöörimatematiikan perusteiden flippaustoteutuksen laskuharjoitusten ratkaisuvideoista tieto siitä, kuinka suuri osa videon kokonaiskestosta on katsottu prosentuaalisesti. Prosentuaalinen määrä kertoo sen, kuinka suuren osan videosta kaikki sen katsoneet ovat keskimäärin katsoneet. Taulukoista näkee myös harjoitusvideoiden katseluajan keskimääräisen keston prosentteina kunkin viikon osalta. Prosentuaalinen osuus kunkin videon kokonaiskestosta kertoo sen, kuinka ison osan videoista opiskelijat ovat katsoneet. Taulukossa on huomioitu ainoastaan videoita katselleiden opiskelijoiden katselujen kestot.

Prosentuaalisten katselumäärien taulukoihin on merkitty punaisella ne videot, joista on keskimäärin katsottu yli puolet eli 50 prosenttia. Molempien vuosien toteutuksilla erikseen palautettavien ja vertaisarvioitavien laskuharjoitusten pisteytysohjeet olivat joka viikko viikon katsotuimmat videot katselijoiden lukumäärän ja katselumäärän suhteen. Taulukoista 6.6 ja 6.7 nähdään, että yli puolet videosta katsottiin laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden osalta usen niiden videoiden kohdalla, jotka oli tehtävä ennen laskuharjoituksia. Tällaisia olivat lukuvuonna 2019-2020 harjoitustehtävät 1-3 ja lukuvuonna 2020-2021 harjoitustehtävät 1-4. Lukumäärällisesti katsottiin eniten niitä videoita, joissa oli ratkaisuohjeet palautettaviin tehtäviin. Tämä voi johtua siitä, että etukäteen tehtävät laskuharjoitukset tarkastettiin laskuharjoituksissa, joten niiden ratkaisuja ei katsottu jälkikäteen enää videolta. Ne jotka katsoivat, saattoivat olla esimerkiksi sellaisia opiskelijoita, jotka eivät päässeet laskuharjoituksiin tai kertasivat tenttiin videoiden avulla. Määrällisesti eniten katsottiin palautettavien laskuharjoitusten ratkaisuja luultavasti sen takia, ettei niitä käyty harjoituksissa läpi. Tällöin videota ei välttämättä katsottu kokonaan, vaan osa opiskelijoista saattoi tarkistaa tehtävien ratkaisuista yksittäisiä asioita, jolloin katselun kesto ei ole suuri.

Tilastollisen testin avulla voidaan selvittää, vaikuttaako tilastollisesti merkittävältä tehtävätyypin vaikutus ratkaisuvideon katselijoiden määrään. Tehtävätyypit jaotellaan etukäteen palautettaviin ja harjoituksissa ratkaistaviin, laskuharjoitusten jälkeen palautettaviin, tehtäviin. T-testiin kerättiin mukaan opiskelijoiden lukumäärät taulukoista 6.4 ja 6.5. Ennakkoon tehtävän tehtävän katsoi keskimäärin 7 opiskelijaa (keskihajonta 7,15, N=34) ja laskuharjoitusten jälkeen palautettavan tehtävän keskimäärin 28,77 opiskelijaa (keskihajonta 16,79, N=26). T-testin tulokseksi saatiin $t(58) = -6,196$ ja p-arvoksi $p \leq 0,001$. Ero on tällöin tilastollisesti erittäin merkittävä, eli jälkikäteen palautettavien tehtävien ratkaisuvideoita katsoi selvästi suurempi määrä opiskelijoita kuin ennakkoon tehtävien harjoitusten ratkaisuvideoita.

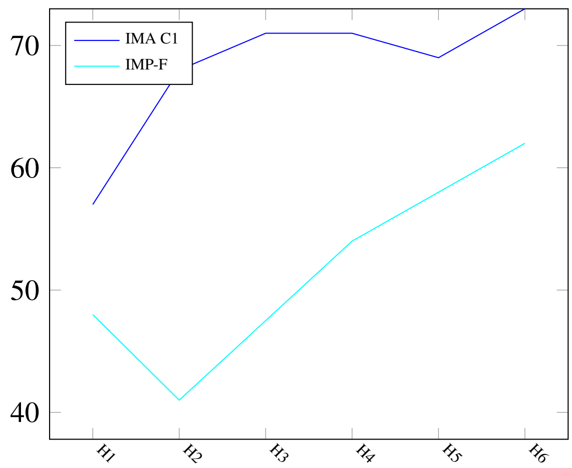
Taulukko 6.6. *Lukuvuoden 2019-2020 Insinöörimatematiikka C1 -opintojakson laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden keskimääräiset katseluajat prosentteina niiden opiskelijoiden osalta, jotka olivat katsoneet laskuharjoitusten ratkaisuvideoita. Punaisella on merkitty ne ratkaisuvideoiden ja pisteytysohjeiden osalta katselumäärät, jotka ylittävät 50 prosenttia.*

Videosta katsottu prosentuaalisesti	H1	H2	H3	H4	H5	H6
Tehtävä 1	20,52	28,33	48,11	66,38	35,25	52,71
Tehtävä 2	25,25	55,29	71,43	89,17	24,00	50,33
Tehtävä 3	35,92	44,88	43,80	52,40	52,00	26,75
Tehtävä 4	50,70	45,24	58,06	40,92	26,94	44,18
Tehtävä 5	48,91	46,41	48,79	42,24	45,75	44,90
Tehtävä 6	37,97	31,95	25,85	50,22	43,25	51,70
Pisteytysohje teht.4-6	81,70	89,17	85,23	79,48	80,51	83,40
Tehtävä4 toisin ja pisteytysohje		49,72				
Kaikkien keskiarvo	59,67	68,36	71,04	71,40	68,51	72,96

Taulukko 6.7. *Lukuvuoden 2020-2021 Insinöörimatematiikan perusteet -opintojakson flippaustoteutuksen laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden keskimääräiset katseluajat prosentteina niiden opiskelijoiden osalta, jotka olivat katsoneet laskuharjoitusten ratkaisuvideoita. Punaisella on merkitty ne ratkaisuvideoiden ja pisteytysohjeiden osalta katselumäärät, jotka ylittävät 50 prosenttia.*

Videosta katsottu prosentuaalisesti	H1	H2	H3*	H4	H5*	H6
Tehtävä 1	18,50	41,43	-	36,00	-	100,00
Tehtävä 2	19,00	5,50	-	72,00	-	100,00
Tehtävä 3	52,33	58,00	-	68,33	-	44,50
Tehtävä 4	57,00	54,50	-	34,33	-	75,33
Tehtävä 5	40,43	21,36	-	29,09	-	33,70
Tehtävä 6	34,00	29,43	-	43,00	-	47,8
Pisteytysohje teht.5-6	70,44	68,20	-	77,16	-	77,66
Kaikkien keskiarvo	48,35	41,37	-	53,73	-	62,24

T-testin avulla voidaan selvittää, onko sillä merkitystä videoiden katselukestoihin, onko kyseessä ennakkoon tehtävä harjoitustehtävä vai harjoitusten jälkeen palautettava tehtävä. Jaotellaan harjoitusten ratkaisuvideot ennalta tehtävien ja palautettavien tehtävien ratkaisuvideoiden katselun välillä kahteen ryhmään. T-testin mukaan ennakkoon tehtävistä tehtävistä ratkaisuvideoista kat-



Kuva 6.3. *Laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden keskimääräiset katseluajat prosentteina flippaus-toteutuksilla niiden opiskelijoiden osalta, jotka olivat katsoneet laskuharjoitusten ratkaisuvideoita. Kuvassa H1 tarkoittaa ensimmäisen viikon laskuharjoituksia, H2 toisen viikon jne. IMA-C1 on lukuvuoden 2019-2020 toteutus ja IMP-F on lukuvuoden 2020-2021 vastaava toteutus. IMP-F-toteutuksessa laskuharjoitusten H3 ja H5 tuloksia ei ole huomioitu, koska niillä viikoilla oli teknisiä ongelmia videoiden kanssa.*

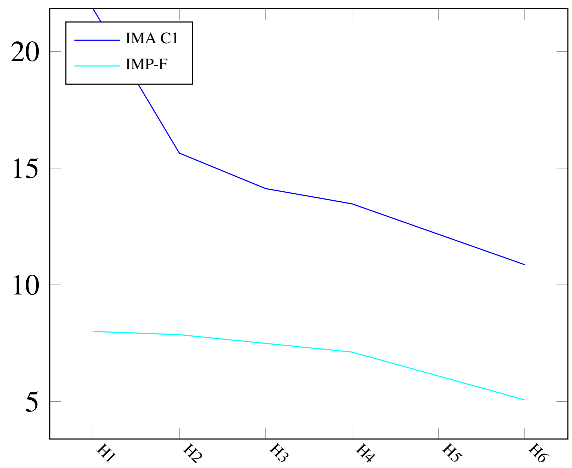
sottiin keskimäärin 40,30 prosenttia (keskihajonta 19,64, $N = 238$) ja palautustehtävillä 39,92 (keskihajonta 9,86, $N = 723$, jolloin $t(959) = 0,291$ ja p-arvo on $p = 0,771$. Ero ei siis ole tilastollisesti merkitsevä.

Kuvaan 6.3 on kerätty laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden keskimääräiset katseluajat viikottain. Kuva on tehty taulukoiden 6.6 ja 6.7 pohjalta. Kuvasta nähdään, että laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden katselumäärä kasvoi opintojaksojen loppuja kohden. Prosentuaalista katselumäärän kasvua voi selittää monet asiat. Yksi niistä voi olla se, että opiskelijat, jotka katsoivat ahkerasti videoita, katsoivat niitä toteutuksen loppuun saakka. Opiskelijat, jotka katsoivat videoista vain pienen osan, saattoivat jättää katsomatta opintojakson loppupuolen laskuharjoitusten ratkaisuvideoita, jolloin koko videon katsoneiden opiskelijoiden määrä oli opintojakson loppua kohden suurempi ja näin ollen myös videoiden katseluprosentti. Taulukoiden 6.4 ja 6.5 perusteella videoiden katselijoiden määrä väheni hieman loppua kohden. Tämä on nähtävissä myös kuvassa 6.4.

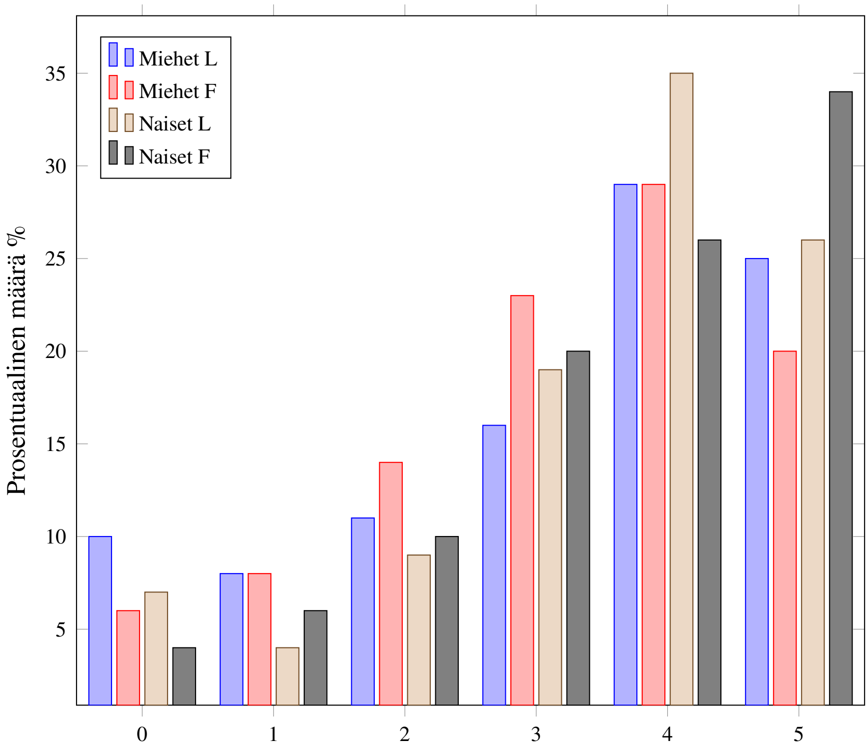
6.3 Sukupuolen vaikutus videoiden hyödyntämiseen

Aineiston pohjalta kerätystä opiskelijoiden oletettujen sukupuolten mukaisia tietoja voidaan verrata videoiden katselutietoihin ja arviointitietoihin. Opiskelijat on jaoteltu nimen mukaan sukupuolittain miehiin ja naisiin.

Kuvaan 6.5 on koottu eri opetusmenetelmittäin ja sukupuolittain arviointitietoa. Eri arvosanojen määriä on verrattu toteutusten mies- ja naisopiskelijoiden kokonaismääriin ja saatu eri arvosanoille prosentuaaliset osuudet sukupuoliryhmittäin.

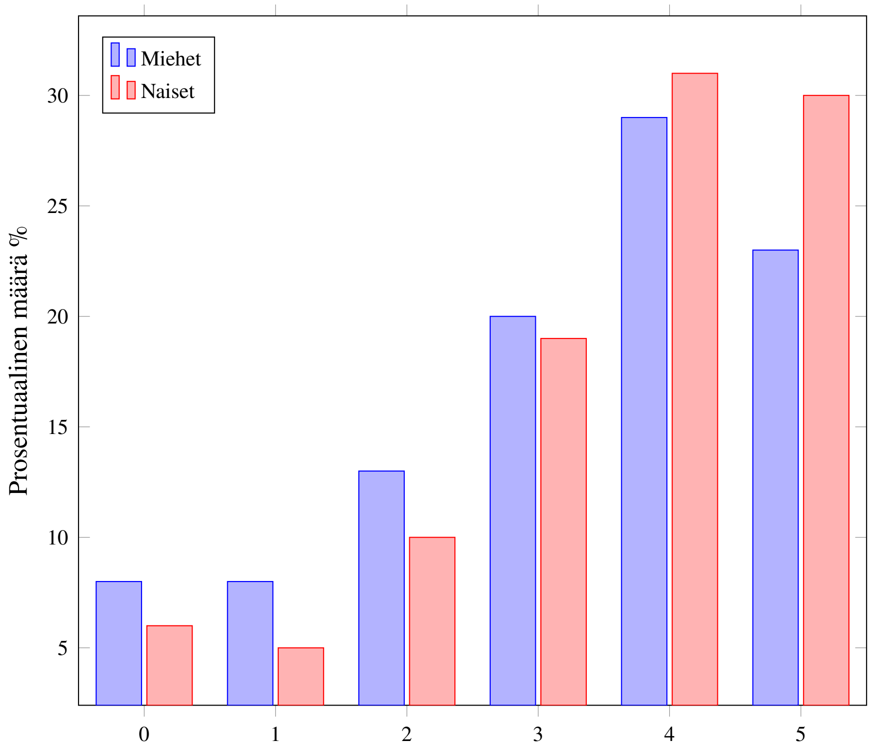


__Kuva 6.4.__ Laskuharjoitusten ratkaisuvideoiden keskimääräiset katselijamäärät prosentteina flippaustoteutuksilla niiden opiskelijoiden osalta, jotka olivat katsoneet laskuharjoitusten ratkaisuvideoita. Kuvassa H1 tarkoittaa ensimmäisen viikon laskuharjoituksia, H2 toisen viikon jne. IMA-C1 on lukuvuoden 2019-2020 toteutus ja IMP-F on lukuvuoden 2020-2021 vastaava toteutus. IMP-F-toteutuksessa laskuharjoitusten H3 ja H5 tuloksia ei ole huomioitu, koska niillä viikoilla oli teknisiä ongelmia videoiden kanssa.



__Kuva 6.5.__ Prosentuaaliset määrät eri arvosanoille sukupuolittain ja toteutuksittain. Tietoihin on yhdistetty tiedot lukuvuosilta 2019-2020 ja 2020-2021. L viittaa luentomuotoiseen toteutukseen (luennot ja harjoitukset) ja F viittaa flippaustoteutukseen (käänteinen opetus).

T-testin mukaan sukupuolella oli tilastollisesti merkittävä vaikutus opintojaksolta saatuun arvosanaan p-arvon ollessa $p = 0,002$ riippumatta opetusmetodista. Naisilla keskiarvo oli 3,56 (keskihajonta 1,41, $N = 260$) ja miehillä 3,22 (keskihajonta 1,52, $N = 681$). T-arvoksi saatiin $t(393) = 3,159$.



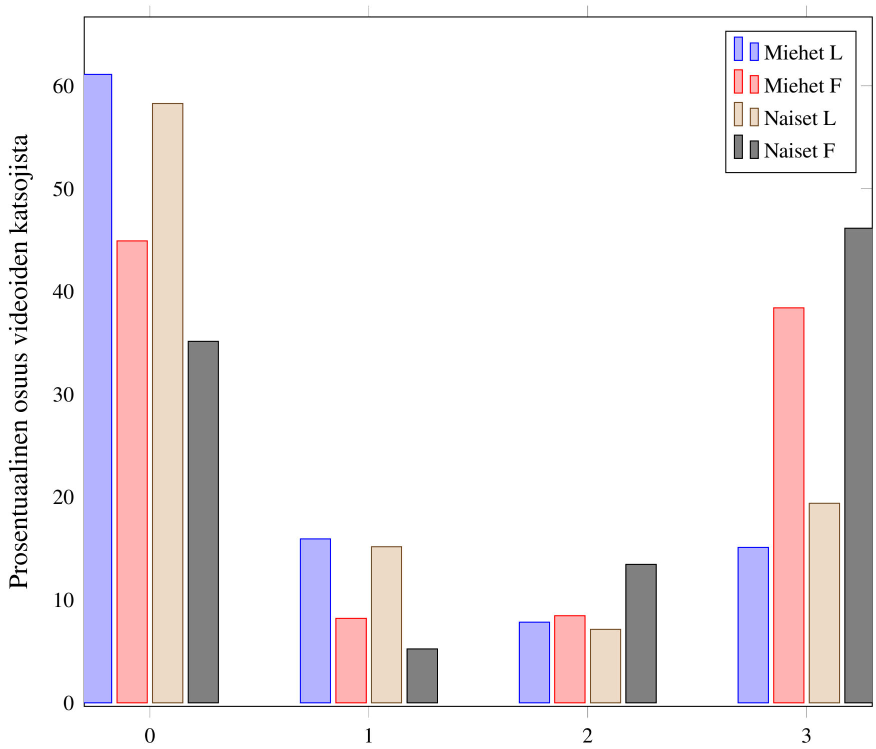
Kuva 6.6. *Prosentuaaliset määrät eri arvosanoille sukupuolittain. Tietoihin on yhdistetty tiedot lukuvuosilta 2019-2020 ja 2020-2021.*

Kuvaan 6.6 on koottu arvosanatiedot sukupuolittain huomioiden kaikki neljä tutkimuksessa mukana olevaa toteutusta. Määrät on ilmoitettu prosentteina, jotta ne ovat vertailukelpoisia.

Toteutuksilta saatujen arvosanojen perusteella naisilla vaikutti olevan kuvan 6.5 perusteella enemmän vaikutusta opetusmenetelmällä. Tutkimuksessa mukana olleilla toteutuksilla naiset saivat kuvan 6.6 perusteella enemmän arvosanoja 4 ja 5 sekä pääsivät opintojaksoilta läpi. Selkein ero on nähtävissä arvosanassa 5, jossa prosentuaalisten määrien ero on suurin. Ero ei ollut kuitenkaan tilastollisesti merkittävä. Naiset saivat luentomuotoisilta toteutuksilta arvosanojen keskiarvoksi 3,47 (keskihajonta 1,45, $N = 132$) ja flippaustoteutuksilta 3,66 (keskihajonta 1,38, $N = 128$). T-testin tulokseksi saatiin tällöin $t(258) = -1,064$ ja p-arvoksi $p = 0,288$.

Miehillä opetusmetodi ei tehnyt yhtä suurta eroa arvosanajakaumaan. Kuvasta 6.5 nähdään, että miehillä arvosanaa 5 saatiin enemmän luentomuotoisessa opetuksessa kuin käänteisessä opetuksessa. Arvosanaluokassa 4 ja sitä matalammissa arvosanoissa määrät ovat joko prosentuaalisesti samat tai käänteisen opetuksen metodeilla opetetuilla jaksoilla hieman korkeammat. Miehilläkin läpipääsyprosentti oli suurempi käänteisen opetuksen metodilla toteutetuilla jaksoilla. Kuitenkaan opetusmetodin vaikutus ei ollut miestenkään kohdalla tilastollisesti merkitsevä. Miehet saivat luentomuotoisilta toteutuksilta arvosanojen keskiarvoksi 3,19 (keskihajonta 1,61, $N = 330$) ja flippaustoteutuksilta 3,24 (keskihajonta 1,42, $N = 351$). T-testin tulokseksi saatiin tällöin $t(679) = -0,413$ ja p-arvoksi $p = 0,680$.

Taulukkoon 6.8 on kerätty tietoa opiskelijoiden oletettujen sukupuolten mukaan ja vertailtu sukupuolta katsottujen videoiden lukumääriin. Toteutuksilla naisopiskelijoita on ollut määrällisesti vähemmän kuin miesopiskelijoita, joten katseltujen videoiden määristä vertaillaan prosentuaalisia määriä. Taulukon pohjalta prosentuaalisten katselulukumäärien keskiarvot on kerätty pylväsdiagrammiksi 6.7, joihin on eritelty sukupuolten väliset katselijamääräerot luentomuotoisen- ja käänteisen opetuksen suhteen. Kuvassa L viittaa luentomuotoiseen opetukseen ja F flippausopetukseen.



Kuva 6.7. *Videoiden prosentuaalisten katselijamäärien keskiarvo sukupuolittain. Luvut 0, 1, 2 ja 3 viittaavat katsottujen opetusvideoiden määrään, eli kuinka suuri prosentuaalinen määrä opiskelijoista on katsonut kaikki kolme, kaksi, yhden tai ei yhtään kolmesta tutkimuksessa mukana olevasta opetusvideosta.*

Sukupuolten välisiä eroja tutkiessa huomattiin, että molemmilla opetusmenetelmillä opetetuilla toteutuksilla oli havaittavissa, että naiset olivat miehiä aktiivisempia katsomaan opetusvideoita. Naisten prosentuaalienen osuus joko kaikkien tai kahden kolmesta opetusvideon katsoneista ylitti miesten prosentuaalisen määrän luentomuotoisessa- ja käänteisessä opetuksessa. Tämä on nähtävissä kuvassa 6.7. Ero naisten ja miesten välillä oli selkeämpi käänteisen opetuksen menetelmällä opetetulla toteutuksella. Luentototeutuksella prosentuaalinen määrä naisista oli suurempi ainoastaan kolmea videota katsoneiden opiskelijoiden kohdalla, kun muissa prosentuaalinen määrä miehistä oli suurempi. Mann-Whitneyn U-testin mukaan p-arvo on 0,018, kun nollahypoteesina on se, että sukupuolet katsovat yhtä paljon opetusvideoita. Testin tuloksen pohjalta nollahypoteesi voidaan hylätä, koska p-arvo arvon mukaan ero on melkein merkitsevä. T-testin avulla ero oli myös melkein merkitsevä. Sen mukaan naiset katsoivat videoita keskimäärin 1,26 (keskihajonta 1,33, N = 328) ja miehet 1,05 (keskihajonta 1,28, N = 912). Testin mukaan $t(1238) = 2,435$ ja $p = 0,015$ eli melkein merkitsevä.

Taulukko 6.8. *Opetusvideoiden katselumäärät oletettujen sukupuolten mukaan. IMA c1 ja IMA B1 olivat lukuvuonna 2019-2020 järjestettyjä opintojaksoja. IMP-L ja IMP-F järjestettiin lukuvuonna 2020-2021. Lyhenteissä L viittaa luentomuotoiseen toteutukseen ja F flippaustoteutukseen.*

Miehet										
Katsottu	IMA B1	%	IMP-L	%	KA	IMA C1	%	IMP-F	%	KA
0	125	59,81	176	62,41	61,11	69	36,13	123	53,17	44,92
1	34	16,27	44	15,6	15,94	13	6,81	22	9,61	8,21
2	15	7,18	24	8,51	7,84	19	9,95	16	6,99	8,47
3	35	16,75	38	13,48	15,11	90	47,12	68	29,69	38,41
Yht.	209	100	282	100	100	191	100	229	100	100
Naiset										
Katsottu	IMA B1	%	IMP-L	%	KA	IMA C1	%	IMP-F	%	KA
0	48	63,16	55	53,4	58,28	22	30,56	31	39,74	35,15
1	12	15,79	15	14,56	15,18	2	2,78	6	7,69	5,24
2	2	2,63	12	11,65	7,14	12	16,67	8	10,26	13,46
3	14	18,42	21	20,39	19,4	36	50	33	42,31	46,15
Yht.	76	100	103	100	100	72	100	78	100	100

7. YHTEENVETO

Tässä tutkimuksessa selvitettiin, millainen vaikutus erilaisilla opetusmenetelmillä on opetusvideoiden katseluun, miten opetusvideoita ja laskuharjoitusten ratkaisuvideoita hyödynnettiin ja millainen vaikutus sukupuolella on opetusvideoiden katseluun.

Tutkimuksessa saatiin selville, että opetusmenetelmällä oli vaikutusta siihen, miten opiskelijat hyödynsivät opetusvideoita. Flippaustoteutuksilla opiskelijat katsoivat keskimäärin suuremman osan opetusvideosta ja määrällisesti enemmän kuin luentomuotoisella toteutuksella. Yksittäisillä videoilla opetusmenetelmän vaikutus oli myös erittäin merkittävä.

Tulosta selittää varmasti osaltaan se, että luentomuotoisella toteutuksella opiskelijoilla on luennot, joita he seuraavat paikan päällä. Näistä ei saada samanlaista katseludataa, vaikka luentoja osittain myös kuvataan ja laitetaan luentovideo opiskelijoille jakoon esimerkiksi Moodlen kautta. Koska opiskelijat ovat luennolla paikan päällä, he oppivat uuden asian siellä ja eivät välttämättä tarvitse opetusvideota lisätueksi.

Luentototeutuksella opetusvideoita kuitenkin myös katsottiin. Katseluajat prosentteina olivat odotetusti pienemmät kuin flippaustoteutuksella. Flippaustoteutuksilla opetusvideoita katsottiin enimmäkseen uuden asian opettelua varten, kun luentototeutuksella uusi asia opiskeltiin luennoilla. Videoita katsottiin luentototeutuksella mahdollisesti yksittäisten asioiden tarkistukseen. Jos luennolla jokin asia oli jäänyt epäselväksi, saattoi opiskelija katsoa, onko opetusvideolla selitetty asia.

Mikäli opiskelija oli katsonut useamman opetusvideon, oli sillä yhteys hänen tulevaan arvosanaansa. Tätä yhteyttä voi selittää moni asia. Opetusvideoita saattoivat katsoa tunnolliset opiskelijat, jotka ovat opiskelussaan aktiivisia muutenkin kuin ainoastaan opetusvideoita katsomalla. Aktiivista opiskelua on kuitenkin esimerkiksi laskuharjoitusten teko ja luentomonisteiden luku, joita voi olla hankala mitata. Yksi tapa tutkia opiskelun aktiivisuutta voisi jatkossa olla laskuharjoitusten määrien vertailu videoiden katselumääriin ja arviointitietoihin. Tällöin voitaisiin nähdä useamman opiskelutavan vaikutus arvioinnissa. On huomioitava, että tutkimuksessa keskityttiin vain kolmeen videoon kaikista toteutuksilla jaossa olleista videoista. Kompleksilukuihin liittyvien videoiden katselulukumäärässä oli melkein merkitsevä vaikutus arvosanoihin ja olisi kiinnostavaa tietää, millainen vaikutus kaikkien opintojakson opetusvideoiden katselumäärillä olisi arvosanaan.

Eri lukuvuosien flippaustoteutuksilla harjoitusten ratkaisuvideoista opiskelijat hyödynsivät selvästi eniten laskuharjoitusten jälkeen palautettavien videoiden ratkaisuja. Ero ennen laskuharjoituksia ratkaistavien tehtävien videoille oli erittäin merkittävä. Tähän vaikuttaa osaltaan se, että ennakkoon ratkaistavat harjoitustehtävät käytiin laskuharjoituksissa läpi. Eniten opiskelijat katsoivat vertaisarviointeja varten pisteytysohjevideoita.

Videoiden katseluaktiivisuuteen vaikutti opiskelijan sukupuoli. Keskimäärin naiset katsoivat miehiä enemmän katselukeston ja prosentuaalisen määrän mukaan. Tilastollisesti ero oli melkein merkitsevä. Syitä tähän voi olla monia. Luvussa 3 käsitellyn Jakku-Sihvosen tutkimuksen mukaan perusopetuksessa tytöt kokevat, että he joutuvat tekemään enemmän töitä hyvien arvosanojen eteen kuin poikien. Sama ilmiö saattaa olla näkyvissä myös yliopistossa.

Naiset saivat tutkimuksen mukaan myös keskimäärin parempia arvosanoja kuin miehet riippumatta opetusmenetelmästä. Sukupuolen vaikutusta opintomenestykseen matematiikassa voi selittää tässä tutkimuksessa pieni otos verrattuna naisen ja miesten määrään yleisesti matematiikan opintojaksoilla. Tutkimuksen pohjalta ei siis vielä voida yleistää, että naiset pärjäävät miehiä paremmin kaikilla matematiikan opintojaksoilla. Mikäli sukupuolen vaikutusta opintomenestykseen matematiikassa halutaan tutkia lisää, voisi sukupuolten välistä eroa jatkossa tutkia muillakin matematiikan kursseilla, jolloin tuloksesta saadaan luotettavampi. Jatkossa voi olla hyvä myös etsiä syitä, miksi naiset saavat parempia arvosanoja kuin miehet, mikäli tulos toistuu myöhemmissä tutkimuksissa. Opetusmenetelmällä ei ollut tämän tutkimuksen mukaan vaikutusta opintomenestykseen.

Tutkimukseen olisi saanut lisää näkökulmia teettämällä opiskelijoille kyselyn. Kun mietitään videoiden katselun ja niiden hyödyntämisen syitä, voidaan vain arvailla mikä on syynä tilastoissa näkyviin vaikutuksiin. Kyselyn avulla olisi voinut selvittää, millaisiin käyttötarkoituksiin opiskelija on videoita hyödyntänyt. Lisäksi kyselyn kautta voisi olla kiinnostavaa tietää, millaiset opetusvideot ovat hyödyllisimpiä opiskelijan näkökulmasta. Tällöin videoita pystytään kehittämään tulevia vuosia varten opiskelijoiden mahdolliset toiveet huomioiden - aivan kuten käänteisen oppimisen ideologiassa on perusajatuksena. Tutkimuksen tulosten perusteella voidaan olettaa, että opetusvideoilla on positiivinen vaikutus oppimiseen ja ne ovat hyvä oppimisen väline opetusmenetelmästä riippumatta.

LÄHTEET

[1] R. P. Agarwal, K. Perera ja S. Pinelas. *An Introduction to Complex Analysis*. Springer Science Business Media, LLC, 2011.

[2] S. M. Aguillon, G.-F. Siegmund, R. H. Petipas, A. G. Drake, S. Cotner, C. J. Ballen ja S. L. Eddy. *Gender Differences in Student Participation in an Active-Learning Classroom*. 2. CBE life sciences education, 2020.

[3] H. Alaniska. *Aktivoivia menetelmiä oppimiseen*. URL: `https://oamk.fi/amok/emateriaalit/files/4115/8807/0207/Aktivoivat_menetelmat_oppimiseen.pdf` (viitattu 13. 02. 2021).

[4] K. Astala. *Kompleksianalyysi I*. Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2016.

[5] J. Bergmann ja A. Sams. *Flip your classroom: reach every student in every class every day*. International Society for Technology in Education, 2012.

[6] *Flipped learning network*. URL: `https://flippedlearning.org/` (viitattu 13. 02. 2021).

[7] J.-C. Garcia-Rosell. *From Passive to Active Learning: an Application of Hybrid-PBL to Business Education*. Laatua Opiskeluun: Oppiminen ja opetus yliopistossa, 2008.

[8] S. Hartikainen, L. Pylväs, P. Nokelainen ja H. Rintala. *Aktiivisen oppimisen menetelmät ja niiden vaikutus oppimiseen STEM-aloilla*. URL: `https://www.univaasa.fi/fi/sites/pedaforum2017/programme/rinnakkaissessiot-teemaryhmat_ja_tyopajat_1/1c_1_hartikainens.pdf` (viitattu 23. 01. 2021).

[9] K. Ikonen. *Sosio-cultural factors contributing to Aadolescents' gendered education and career exploration in STEM*. Itä-Suomen yliopisto, Luonnontieteiden ja metsätieteiden tiedekunta, 2020.

[10] R. Jakku-Sihvonen. *Sukupuolen mukaista vaihtelua koululaisten oppimistuloksissa ja asenteissa*. Opetushallitus, 2013.

[11] R. Jakku-Sihvonen. *Sukupuolten tasa-arvo*. Niemi, Eero K. (toim.) Aihekokonaisuuksien tavoitteiden toteutumisen seuranta-arviointi 2010. Koulutuksen seurantaraportti 2012:1. Helsinki: Opetushallitus, 2020.

[12] G. James, Y. Wei, P. Dyke, J. Searl ja M. Craven. *Modern engineering mathematics*. Harlow, England : Pearson, 2020.

[13] T. Long, J. Logan ja M. Waugh. *Students' Perceptions of the Value of Using Videos as a Pre-class Learning Experience in the Flipped Classroom*. TechTrends, 2016. DOI: `10.1007/s11528-016-0045-4`.

[14] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Opetushallitus, 2019.

[15] *Muistikolmiot*. URL: `https://matta.hut.fi/matta2/isom/html/pythagor2.html` (viitattu 14. 06. 2021).

[16] J. Nouri. *The Flipped Classroom: For Active, Effective and Increased Learning – Especially for Low Achievers*. International Journal of Educational Technology in Higher Education, 2016, 1–10. DOI: `10.1186/s41239-016-0032-z`.

[17] J. Parviainen. *Opettaja luopui luennoista – yhtäkkiä lähes kaikki opiskelijat läpäisivät vaikean yliopistokurssin*. Yle Kuopio, 2017. URL: https://yle.fi/uutiset/3-9529446 (viitattu 02. 07. 2021).

[18] D. Poole. *Linear algebra : a modern introduction*. Stamford, Connecticut : Cengage Learning, 2015.

[19] M. Prince. *Does Active Learning Work? A Review of the Research*. 3. Journal of Engineering Education, 2004, 223–231.

[20] B. Rodriguez. *Active learning vs. passive learning: What's the best way to learn?* 2018. URL: https://www.classcraft.com/blog/active-learning-vs-passive-learning/ (viitattu 13. 02. 2021).

[21] G. E. Shilov ja R. A. Silverman. *Elementary Real and Complex Analysis*. Newburyport: Dover Publications, 2012.

[22] *T-testi, Käsitteet, Tilastokeskus*. URL: https://www.stat.fi/meta/kas/t_testi.html (viitattu 14. 06. 2021).

[23] A. Taanila. *Mann-Whitney U -testi*. Blogiteksti, 2020. URL: https://tilastoapu.wordpress.com/2012/03/08/mann-whitney-u-testi/ (viitattu 30. 06. 2021).

[24] R. Talbert. *Flipped Learning: a Guide for Higher Education Faculty*. Stylus Publishing, 2018.

[25] *Tampereen yliopisto, Hervannan kampus. Opinto-opas 2019-2020, MAT-01130 Insinöörimatematiikka C 1, 5 op. 2019-2020*. URL: https://www.tuni.fi/archive/studyguide_tut/www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2019-2020/avoin/aineryhmat/Matematiikka/MAT-01130-1.html (viitattu 06. 01. 2021).

[26] *Tampereen yliopisto, Hervannan kampus. Opinto-opas 2019-2020, Matematiikka*. URL: https://www.tuni.fi/archive/studyguide_tut/www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2019-2020/avoin/aineryhmat/Matematiikka/index.html (viitattu 06. 01. 2021).

[27] *Tampereen yliopisto, Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta. Opinto-opas 2020-2021, MATH.APP.110 Insinöörimatematiikan perusteet, 5 op. 2020-2021*. URL: https://www.tuni.fi/opiskelijanopas/opintotiedot/opintojaksot/tut-cu-g-35897?year=2020 (viitattu 06. 01. 2021).

[28] *Taulukot: Trigonometria*. URL: https://www.taulukot.com/matematiikka/trigonometria/ (viitattu 06. 06. 2021).

[29] *Terveyden ja hyvinvoinnin laitos, Koulutuksen sukupuolen mukainen segregaatio*. 2020. URL: https://thl.fi/fi/web/sukupuolten-tasa-arvo/tasa-arvon-tila/koulutus-ja-kasvatus/koulutuksen-sukupuolen-mukainen-segregaatio (viitattu 15. 05. 2021).

[30] M. Toivola, P. Peura ja M. Humaloja. *Flipped learning: käänteinen oppiminen*. Edita Publishing Oy, 2017.

[31] J. Vainionpää. *SPSS-ohjelman käyttö tilastollisen aineiston käsittelyssä ja analysoinnissa*. Tampereen yliopisto, 2014.

[32] J. Yarbro, K. M. Arfstrom, K. McKnight ja P. McKnight. *Extension of a review of Flipped learning*. Flipped learning network, 2013. URL: https://flippedlearning.org/wp-

content/uploads/2016/07/Extension-of-FLipped-Learning-LIt-Review-June-2014.pdf (viitattu 13. 02. 2021).

[33] M. S. Young, S. Robinson ja P. Alberts. *Students Pay Attention!: Combating the Vigilance Decrement to Improve Learning during Lectures*. Active Learning in Higher Education, 2009, 41–55. DOI: 10.1177/1469787408100194.

[34] D. G. Zill ja P. D. Shanahan. *Complex Analysis: a First Course with Applications*. Jones & Bartlett Learning, 2015.