Tampereen yliopisto

Emilia Pirhonen

Nuolilogiikasta

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Kesäkuu 2021

TIIVISTELMÄ

Emilia Pirhonen: Nuolilogiikasta
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2021

Tässä tutkielmassa tutustutaan nuolilogiikkaan, joka on modaalilogiikan osa-alue, jossa nuolet eivät ole pelkästään siirtymiä mahdollisten maailmojen välillä, vaan ne ovat itse mahdollisia maailmoja. Nuolilogiikkaa on tutkittu laajasti ja sen tutkimus jakautuu useaan alueeseen, tässä tutkielmassa keskitytään niistä kahteen. Toinen tarkastelusuunta on modaalisen nuolilogiikan laajennus, missä nuoli on itsenäinen kokonaisuus ja toinen suunta on kaksiulotteinen nuolilogiikka, jossa nuoli on järjestetty pari.

Ensiksi työssä käydään läpi hieman nuolilogiikan historiaa ja sen jälkeen tutustutaan nuolilogiikan malliteoriaan, jossa määritellään nuolilogiikalle syntaksi ja semantiikka sekä mallien tasolla tärkeitä peruskäsitteitä. Peruskäsitteisiin sisältyy myös bisimulaatio, joka määritellään ja todistetaan bisimulaatiolause eli että bisimulaatio säilyttää totuuden sekä modaalisessa että kaksiulotteisessa nuolilogiikan mallissa.

Yleisesti mallien tasolla saatuja tuloksia laajennetaan käymällä läpi kaksiulotteisten kehysten malliteoriaa. Sen jälkeen monia malleista saatuja tuloksia laajennetaan koskemaan myös kehyksiä. Tutkituimpia kehyksiä nuolilogiikassa ovat kaksiulotteiset kehykset ja niitä on helppoa havainnollistaa geometrisesti. Työssä lähestytään näitä kaksiulotteisia kehyksiä multigraafien ja graafien kautta ja annetaan havainnollistavia esimerkkejä kaksiulotteisesta nuolilogiikasta.

Tutkielman loppupuolella käydään läpi määriteltävyyttä ja siihen liittyen todistetaan vastaavuustuloksia modaaliselle nuolilogiikalle. Kaksiulotteisen nuolilogiikan kaikki kehykset eivät ole sellaisenaan määriteltävissä samoilla kaavoilla kuin modaalisen nuolilogiikan, mutta tietyin lisäehdoin saadaan muodostettua kaavat, joilla kaksiulotteiselle nuolilogiikalle saadaan vastaavuustuloksia.

Lopuksi annetaan vielä nuolilogiikalle aksiomaattinen muotoilu ja todistetaan tämän systeemin luotettavuus. Todistetaan lisäksi täydellisyys modaaliselle nuolilogiikalle ja esitetään myös muutama kaksiulotteisen nuolilogiikan täydellisyystulos.

Avainsanat: modaalilogiikka, nuolilogiikka, nuolet, mallit, kehykset, määriteltävyys, luotettavuus, täydellisyys
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

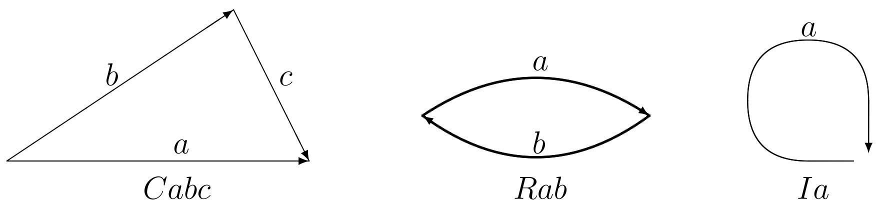
Johdanto

Nuolilogiikka on modaalilogiikan osa-alue, joka tutkii objekteja, jotka voidaan esittää kuvissa nuolina. Perinteisesti modaalilogiikassa nuolilla kuvataan relaatioita ja alueilla mahdollisia maailmoja, nuolilogiikassa sen sijaan nuolet itsessään ovat mahdollisia maailmoja ja relaatiot on liitetty yhteen mahdollisten maailmojen kanssa. Tällöin tarvitaan vain yksi olio kuvaamaan relaatioita ja mahdollisia maailmoja, perinteisesti modaalilogiikassa tähän tarvitaan kaksi. Syntaktisesti nuolilogiikkaa voidaan pitää modaalilogiikan laajennuksena, mutta semanttisesti tarkasteltuna kaikki nuolilogiikan mallit eivät vastaa perinteistä käsitystä modaalilogiikan mallista.

Nuolilogiikalla on paljon erilaisia sovelluksia matematiikassa, tietojenkäsittelytieteessä, filosofiassa ja kielitieteissä ja monissa muissa tieteissä, joissa käytetään nuolia kuvaamaan tilojen muutoksia, yhteyksiä ja siirtymiä. Nuolilogiikka kehitettiinkin alunperin tutkimaan siirtymiä ja niiden logiikkaa. Nuolilogiikassa nuolet itsessään ovat mahdollisia maailmoja ja totuutta tutkitaan nuolissa. Nuolilogiikan totuusehto merkitään seuraavasti:

$$\mathfrak{M}, a \Vdash \phi,$$

missä $\mathfrak{M}$ on nuolimalli eli struktuuri ja universumin maailmat a ovat nuolia. Jokaisen nuolimallin taustalla on nuolikehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$, jonka universumi koostuu nuolista ja jossa on kolme relaatiota, kompositio C, kääntö R, ja identiteetti I.



Kuva 1. Nuolilogiikan relaatiot

Kompositio, C, on helpoimmin ymmärrettävä relaatio, sillä kompositiolla $Cabc$ voidaan yksi nuoli a hajottaa kahdeksi nuoleksi b ja c tai kahdesta nuolesta b ja c saadaan yhdistettyä yksi nuoli a. Kääntö, R, tarkoittaa nuolen kulkusuunnan kääntämistä eli jos nuoli a kulkee vasemmalta oikealle, niin nuoli b kulkee päinvastaiseen suuntaan. Identiteetti, I, on niiden nuolten joukko, joiden loppupiste on sama kuin alkupiste. Nuolilogiikassa on käytössä kolme operaattoria $\iota\delta, \otimes$ ja $\circ$. Operaattori $\iota\delta$, identiteetti, on modaalinen vakio eli sillä ei ole lainkaan propositionaalisia muuttujia, kääntö $\otimes$ on yksipaikkainen operaattori, kuten tavallisen modaalilogiikan timanttikin, ja kompositio $\circ$ on kaksipaikkainen operaattori.

Nuoliin voi suhtautua kahdella tavalla, itsenäisinä olioina tai pariesityksenä (a_0, a_1), jolloin nuolen a ajatellaan alkavan tietystä alkupisteestä a_0 ja päättyvän tiettyyn loppupisteeseen a_1, tälläistä nuolikehystä kutsutaan kaksiulotteiseksi. Kaksiulotteisessa kehyksessä kompositio C_U määritellään ehdolla

$$C_U abc \text{ joss } a_0 = b_0,\ a_1 = c_1 \text{ ja } b_1 = c_0,$$

kääntö R_U määritellään ehdolla

$$R_U ab \text{ joss } a_0 = b_1 \text{ ja } a_1 = b_0$$

ja identiteetti I_U määritellään ehdolla

$$I_U a \text{ joss } a_1 = a_0.$$

Useissa kaksiulotteisissa kehyksissä kompositio C_U on itse asiassa osittaisfunktio ja myös kääntö R_U on osittaisfunktio, jota merkitään symbolilla f, ja se määritellään ehdolla

$$fa = (a_1, a_0), \text{ kun } fa \text{ on määritelty.}$$

Kuriositeettina mainittakoon, että tietyin ominaisuuksin varustettuja graafeja voidaan myös pitää eräänlaisina nuolimalleina ja mikä tahansa ryhmä $\mathfrak{G} = (G, \cdot, (\cdot)^{-1}, e)$ on eräänlainen nuolikehys, jos relaatiot ovat:

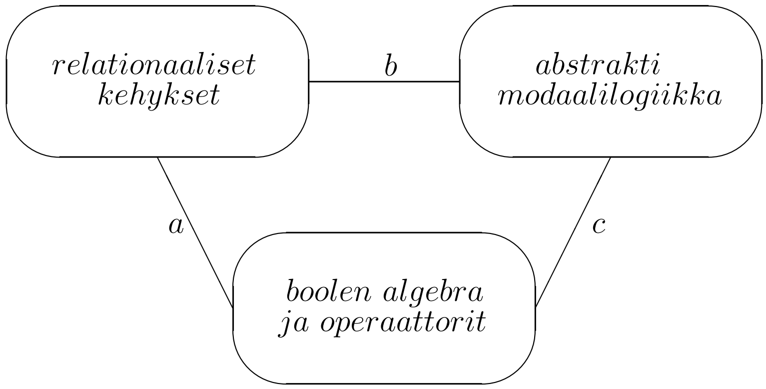
$$\begin{aligned}
C_G &= \{(x, y, z) \mid x = y \cdot z\}, \\
R_G &= \{(x, y) \mid y = x^{-1}\}, \\
I_G &= \{e\}.
\end{aligned}$$

Nuolilogiikalla voi todellakin olla hyvinkin erilaisia semantiikoita, mutta kaikkien näiden taustalla on kuitenkin sama syntaksi. Tämä johtuu osaksi siitä, että nuolilogiikka on kehittynyt alunperin algebrallisista lähtökohdista ja siksi sillä on vahva algebrallinen tausta. Nuolilogiikka nykymuodossaan on vasta 30 vuotta vanha tutkimusala, kun taas algebrallisesta näkökulmasta nuolilogiikkaan liittyviä asioita on tutkittu jo reilusti yli sata vuotta. Tämä nuolilogiikan moninaisuus kuvaa hyvin myös sitä seikkaa, että loppujen lopuksi monet matematiikan haarat yhdistyvät yhdeksi suureksi kokonaisuudeksi ja usein raja eri osa-alueiden välillä on vähintäänkin keinotekoinen.

Historiaa

Nykypäivän version nuolilogiikasta kehittivät Johan van Benthem ja Yde Venema vuoden 1990 tietämillä. Nuolilogiikka syntyi ajatuksesta tutkia siirtymien logiikkaa yleisesti. Tämä uusi lähestymistapa siirtymiin johti sovelluksiin, jotka liittyvät matematiikan lisäksi filosofiaan, tietojenkäsittelytieteeseen ja kielitieteisiin. Nuolilogiikka ei kuitenkaan ole mikään uusi tutkimusala, sillä sen juuret lepäävät syvällä historiassa. Jo 1800-luvulla de Morgan, Peirce ja Shröder tutkivat relaatioalgebraa (eng. relation albegra), joka auttoi myöhemmin kehittämään nuolilogiikkaa.

Relaatioalgebra on algebrallinen struktuuri, johon on lisätty Boolen operaatioiden ja vakioiden lisäksi nuolilogiikan relaatioita C ja R vastaavat operaatiot sekä identiteetti, joka vastaa neutraalialkiota. Relaatioalgebra on vanha matematiikan osa-alue, joten sitä on tutkittu laajasti ja monet oivallukset ja työkalut, joita relaatioalgebrassa käytetään ovat edistäneet nuolilogiikan kehittämistä. Käydään lyhyesti läpi relaatioiden algebrallista teoriaa ja sen yhteyksiä modaalilogiikkaan, jonka osa-alue nuolilogiikkakin on. Tätä voidaan kuvata seuraavalla alun perin C. Brinkin (vrt. Brink: Power Structures, 1993) laatimalla kaaviolla.



Kuva 2. Yhteyskaavio

Paljon aiemmin kuin mahdollisten maailmojen käsite yhdistettiin relaatioihin, Jónsson ja Tarski tutkivat laajennetun Boolen algebran (BAO) esitysteoriaa, jota kutsutaan myös modaalialgebraksi. Käytännössä se tarkoittaa mallien taustalla olevia kehyksiä, kuvassa 2 yhteys a. Modaaliset kielet ja relationaaliset kehykset voidaan yhdistää korrespondenssiteorian avulla, sillä muodostamalla standardikäännös saadaan muodostettua yhteys näiden välille. Tämä näkökulma on mielenkiintoinen, sillä Jónsson ja Tarski saivat tutkimuksillaan osoitettua miten modaalialgebraa voidaan esittää juuri niinä struktuureina, joita nykyään kutsutaan malleiksi, mutta tämä huomattiin kuitenkin vasta paljon myöhemmin tarkasteltaessa asiaa uudesta suunnasta.

Abstrakti modaalilogiikka tarkoittaa joukkoa kaavoja, joille on määritelty tietty relaatio, totuusrelaatio ja laajennus- ja bisimulaatioehdot. Abstraktin modaalilogiikan täytyy toteuttaa nämä ehdot. Modaalilogiikan semantiikan keskeisiä struktuureja ovat relationaaliset kehykset, kuvassa 2 yhteys b, ja näin on ollut siitä lähtien, kun Kripke kehitti modaalilogiikan Kripke-kehyksen eli struktuurin (W, R), missä W on epätyhjä joukko ja R on kaksipaikkainen relaatio.

Abstrakti modaalilogiikka liittyy Adolf Lindenbaumin ja Alfred Tarskin kehittämään Lindenbaum-Tarski algebraan, jonka alkuperäisenä tarkoituksena oli luoda vastaavuus lauselogiikan ja boolen algebran välille. Tämä uusi algebra kuitenkin johti algebralliseen logiikkaan, mutta tätä kautta yhteys löytyy abstraktin modaalilogiikan ja BAOn välillä. Voidaan siis sanoa, että matemaattisesta näkökulmasta nuolilogiikan kehitys on ollut ylläolevan kaavion täydentymistä kokonaisuudeksi, jossa strukturaalinen ja algebrallinen osuus jo esiintyivät.

Nuolilogiikkaa tutkitaan edelleen monipuolisesti ja laajasti, koska sillä on monia sovelluksia matematiikassa, tietojenkäsittelytieteessä, filosofiassa, kielitieteessä ja kognitiotieteessä. Nuolilogiikan tutkimus jakautuu useaan eri osa-alueeseen, sillä nuolilogiikkaa voi lähestyä monelta eri kannalta: perinteisen modaalilogiikan ja Kripke-semantiikan näkökulmasta, esitettävien relaatioalgebrojen suunnasta tai graafeina eli liittyen kaksiulotteiseen nuolilogiikkaan.

Työn sisältö

Nuolilogiikka on laaja tutkimusala ja tässä työssä tutustutaan kahteen erilaiseen nuolilogiikkaan, tavallisen modaalilogiikan kaltaiseen ja kaksiulotteiseen, jossa nuoli kuvataan parina (a_0, a_1). Algebrallinen lähestymistapa, vaikka mielenkiintoinen onkin, on rajattu työn ulkopuolelle huomioon ottamatta muutamaa mainintaa.

Työssä käytetään nimityksiä modaalinen nuolilogiikka ja kaksiulotteinen nuolilogiikka. Puhuttaessa pelkästä nuolilogiikasta kontekstista käy ilmi kumpaan nuolilogiikkaan viitataan.

Ensimmäisessä luvussa määritellään nuolilogiikan syntaksi ja modaalinen semantiikka. Annetaan täsmälliset määritelmät modaaliselle similariteettityypille, nuolilogiikan kielelle ja määritellään duaalit ja sijoitus. Tämän jälkeen määritellään modaalisen nuolilogiikan kehys ja malli. Lopuksi annetaan määritelmät kaavan ja kaavajoukon validisuudelle.

Toisessa luvussa perehdytään kaksiulotteiseen nuolilogiikkaan. Lähdetään liikkeelle multigraafeista ja päädytään sitä kautta graafikehyksiin eli kaksiulotteisiin kehyksiin. Annetaan määritelmät myös kaksiulotteiselle nuolimallille ja kaavojen totuudelle mallissa. Kuvataan miten kaksiulotteista nuolilogiikkaa voidaan helposti esittää geometrisesti. Todistetaan erään kaavan validisuus kaksiulotteisessa kehyksessä ja tutkitaan tämän kaavan validisuutta kuvan avulla.

Kolmannessa luvussa tutustutaan malleihin. Esitellään ensin mallien tasolla p-morfismi, erilliset yhdisteet ja generoitu alimalli sekä todistetaan, että nämä säilyttävät kaavojen totuuden. Seuraavaksi annetaan määritelmät bisimulaatiolle ja myös kaksiulotteiselle bisimulaatiolle ja todistetaan, että kaavojen totuus säilyy näissä relaatioissa. Lopuksi määritellään ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikieli ja standardikäännös.

Neljännessä luvussa määritellään mitä tarkoittaa määriteltävyys ja tutustutaan kehyskieliin ja kehysvastaavuuteen. Määritellään myös kehystason erillinen yhdiste, generoitu alikehys ja p-morfismi ja todistetaan, että edelliset kehysoperaatiot säilyttävät validisuuden.

Viidennessä luvussa käydään läpi ja todistetaan nuolilogiikan vastaavuustuloksia ja huomataan, että kaksiulotteisille kehyksille saadaan vastaavuustuloksia, kun käytetään modaalisen nuolilogiikan kaavoista poikkeavia kaavoja ja tiettyjä lisäehtoja.

Viimeisessä eli kuudennessa luvussa esitellään todistusteoriaan liittyviä peruskäsitteitä ja määritellään normaali modaalilogiikka ja todistetaan nuolilogiikan luotettavuus. Todistetaan myös modaalisen nuolilogiikan täydellisyys ja annetaan muutama kaksiulotteisen nuolilogiikan täydellisyystulos.

Lukijalta edellytetään perehtymistä predikaattilogiikkaan ja modaalilogiikkaan. Tämän tutkielman päälähteinä on käytetty pääasiassa teoksia Modal Logic (Blackburn, Patrick & de Rijke, Maarten & Venema, Yde) ja Arrow Logic and Multi-Modal Logic (Toim. Marx & Pólos & Masuch).

1 Peruskäsitteitä

Nuolilogiikan peruskäsitteet ovat helpoimmin ymmärrettävissä perinteisen modaalilogiikan laajennuksena. Perinteisesti modaalilogiikassa nuolet kuvaavat relaatioita ja mahdolliset maailmat kuvataan pyöreinä alueina, mutta nuolilogiikassa nuolet itsessään ovat mahdollisia maailmoja. Kripke-mallissa tarvitaan siis kaksi erillistä oliota kuvaamaan maailmoja ja nuolia, kun taas nuolilogiikassa tähän tarvitaan ainoastaan yksi. Nuoli voidaan käsittää yhtenä kokonaisuutena tai pariesityksenä, mutta kummassakin tapauksessa kyseessä on nuolimalli.

1.1 Nuolilogiikan syntaksi

Määritelmä 1.1. Modaalinen similariteettityyppi on pari $S = (O, \rho)$, missä O on joukko modaalioperaattoreita ja ρ on kuvaus $O \to \mathbb{N}$, joka liittää jokaiseen modaalioperaattoriin äärellisen paikkaluvun. Modaalioperaattoreita, joiden paikkaluku on 0 kutsutaan modaalisiksi vakioiksi. Nuolilogiikan similariteettityyppi on S, jossa $O = \{\iota\delta, \otimes, \circ\}$. Modaalioperaattori $\iota\delta$, identiteetti, on modaalinen vakio, kääntö $\otimes$ on yksipaikkainen operaattori ja kompositio $\circ$ on kaksipaikkainen operaattori.

Tästä eteenpäin operaattoreiden paikkaluku oletetaan tunnetuksi eikä sitä enää erikseen mainita.

Huomautus. Operaattorit voidaan lukea seuraavasti:

Identiteetti $\iota\delta$: "ohita".

Kääntö $\otimes\phi$: "ϕ takaperin".

Kompositio $\phi \circ \psi$: "ensin ϕ, sitten ψ".

Määritelmä 1.2. Nuolilogiikan kieli on pari $NL = (S, Q)$, missä S on yllä määritelty similariteettityyppi ja Q on joukko propositiosymboleja. Nuolilogiikan aakkosto muodostuu joukosta propositiosymboleja $p \in Q$, boolen konnektiiveista $\neg$ ja $\vee$ ja modaalioperaattoreista $\circ$, $\otimes$ ja $\iota\delta$. Nuolilogiikan kaavajoukko $Form(S, Q)$ määritellään seuraavasti:

(i) Jokainen propositiosymboli $p \in Q$ on kaava ja niin on myös $\iota\delta$.

(ii) Jos ϕ on kaava, niin myös $\neg\phi$ ja $\otimes\phi$ ovat kaavoja.

(iii) Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja, niin myös $\phi \vee \psi$ ja $\phi \circ \psi$ ovat kaavoja.

(iv) Muita kaavoja ei ole.

Muut boolen konnektiivit, $\wedge, \to$ ja $\leftrightarrow$ voidaan ymmärtää lyhennysmerkinnöiksi. Sulkujen ja alikaavojen osalta pätevät perinteisessä modaalilogiikassa tavalliseen tapaan tutut säännöt.

Määritelmä 1.3. Operaattoreiden $\circ$ ja $\otimes$ duaaleille käytetään merkintöjä $\underline{\circ}$ ja $\underline{\otimes}$. Ne määritellään seuraavasti:

$$\underline{\otimes}\phi =_{def} \neg \otimes \neg\phi \quad \text{ja} \quad \phi \mathbin{\underline{\circ}} \psi =_{def} \neg(\neg\phi \circ \neg\psi).$$

Määritelmä 1.4. Sijoitus on kuvaus $\sigma : Q' \to Form(S, Q')$, missä S on nuolilogiikan similariteettityyppi, $Q' = Q \cup \{\iota\delta\}$ ja Q on propositiosymboleiden joukko. Substituutiolla σ saadaan nyt kuvaus $(\cdot)^\sigma : Form(S, Q') \to Form(S, Q')$, joka voidaan määritellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} p^\sigma &= \sigma(p), \\ \iota\delta^\sigma &= \sigma(\iota\delta), \\ (\neg\phi)^\sigma &= \neg\phi^\sigma, \\ (\phi \vee \psi)^\sigma &= \phi^\sigma \vee \psi^\sigma, \\ (\otimes\phi)^\sigma &= \otimes(\phi)^\sigma, \\ (\phi \circ \psi)^\sigma &= \phi^\sigma \circ \psi^\sigma. \end{aligned}$$

Kaavaa χ kutsutaan kaavan ψ instanssiksi, jos on olemassa sijoitus τ, siten että $\psi^\tau = \chi$.

1.2 Nuolilogiikan semantiikka

Määritelmä 1.5. S-kehys on pari $\mathfrak{F} = (W, I)$. Se on siis struktuuri, missä W on universumi ja ja I on tulkintafunktio, joka liittää jokaiseen operaattoriin vastaavalla paikkaluvulla varustetun relaation. Universumin W alkioita eli nuolia $a, b, c \ldots$ kutsutaan mahdollisiksi maailmoiksi. Kaikkien S-kehysten luokkaa merkitään Fr_S. Nuolikehys on monikko $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$, jossa W on epätyhjä joukko ja C, R, I relaatioita, joille pätee $C \subseteq W \times W \times W$, $R \subseteq W \times W$ ja $I \subseteq W$.

Määritelmä 1.6. Nuolimalli on sellainen pari $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, jossa $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$ on nuolikehys ja V on valuaatio eli kuvaus propositiosymboleiden joukolta Q universumin W osajoukoille. Kaavan ϕ totuus mallin $\mathfrak{M}$ nuolessa a määritellään seuraavasti:

$\mathfrak{M}, a \Vdash p$ joss $a \in V(p)$, missä $p \in Q$,

$\mathfrak{M}, a \Vdash \iota\delta$ joss Ia,

$\mathfrak{M}, a \Vdash \neg\phi$ joss $\mathfrak{M}, a \nVdash \phi$,

$\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \vee \psi$ joss $\mathfrak{M}, a \Vdash \phi$ tai $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi$,

$\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\phi$ joss on olemassa sellainen $b \in W$, että Rab ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \phi$,

$\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \circ \psi$ joss on olemassa sellaiset $b, c \in W$, että $Cabc$, $\mathfrak{M}, b \Vdash \phi$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi$.

1.3 Validisuus

Mallien tasolla ollaan kiinnostuneita yksittäisten kaavojen totuudesta, mutta kun halutaan tutkia mallien taustalla olevia kehyksiä, niin käytetään validisuutta. Kaavan validisuudella kehyksessä tarkoitetaan, että kaava on totta jokaisessa kehyksen nuolessa, riippumatta siitä mitä valuaatiota on käytetty.

Määritelmä 1.7. (Kaavan validisuus) Kaava ϕ on validi kehyksen $\mathfrak{F}$ nuolessa a, jos ϕ on totta nuolessa a jokaisella valuaatiolla V kehyksessä $\mathfrak{F}$, merkitään: $\mathfrak{F}, a \Vdash \phi$. Kaava ϕ on validi kehyksessä $\mathfrak{F}$, jos se on validi jokaisessa kehyksen $\mathfrak{F}$ nuolessa, merkitään: $\mathfrak{F} \Vdash \phi$. Kaava ϕ on validi kehysten luokassa K, jos se on validi jokaisessa kehyksessä $\mathfrak{F}$ luokassa K, merkitään $\mathsf{K} \Vdash \phi$. Kaava ϕ on validi, jos se on validi kaikkien kehysten luokassa, merkitään: $\Vdash \phi$. Kaikki ne kaavat, jotka ovat valideja kehysten luokassa K muodostavat logiikan, Λ_{K}. Merkitään sitä kehysten luokkaa, jossa ϕ on validi Fr_{ϕ}.

Edellisen määritelmän käsitteet voidaan yleistää koskemaan myös kaavojen joukkoa.

Määritelmä 1.8. (Kaavajoukon validisuus) Kaavajoukko Γ on validi kehyksessä $\mathfrak{F}$, jos jokainen joukon Γ kaava on validi kehyksessä $\mathfrak{F}$. Joukko Γ on validi kehysten luokassa K, jos joukko Γ on validi jokaisessa luokan K kehyksessä. Merkitään sitä kehysten luokkaa, jossa Γ on validi Fr_{Γ}.

Nuolilogiikan syntaksi vastaa siis perinteistä modaalilogiikkaa, mutta nuolilogiikan mallit sen sijaan voivat olla keskenään erilaisia. Nuolta voidaan ajatella itsenäisenä kokonaisuutena, jolloin nuolessa on samassa mahdollinen maailma ja relaatio, kuten johdannossa kuvassa 1. Toisaalta nuoli voi olla kaksiulotteinen, jolloin jokaisella nuolella on alkupiste ja loppupiste, näin on seuraavassa kappaleessa kuvassa 2. Edelliset tapaukset ovat intuitiivisesti selkeitä. Nuolilogiikka on alunperin kehitetty kuvaamaan siirtymiä ja näitä siirtymiä on mallinnettu graafeilla, joten on ymmärrettävää, että myös riittävät ehdot täyttävät graafit ovat nuolimalleja.

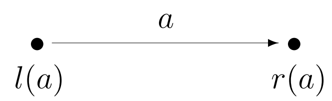
2 Kaksiulotteista nuolilogiikkaa

Kaksiulotteisessa nuolilogiikassa nuolta a tarkastellaan parina (a_0, a_1), jossa a_0 on alkupiste ja a_1 on loppupiste. Nuolilogiikan eniten tutkittuja nuolikehyksiä ovat juuri kaksiulotteiset kehykset eli toiselta nimeltään parikehykset. Näissä universumi koostuu karteesisesta tulosta $U \times U$ jollekin joukolle U tai sen sopivasti määritellystä osajoukosta. Relaatioilla varustettua multigraafia voidaan pitää nuolikehyksenä ja määritelmää tiukentamalla päästään graafikehyksiin, jotka ovat itse asiassa aivan sama asia kuin parikehykset.

2.1 Multigraafeista

Määritelmä 2.1. Multigraafi on nelikko (W, P, l, r), jossa W on joukko suunnattuja särmiä, P on joukko pisteitä (solmuja) ja l ja r ovat funktioita, jotka kuvaavat särmät pisteille (solmuille).

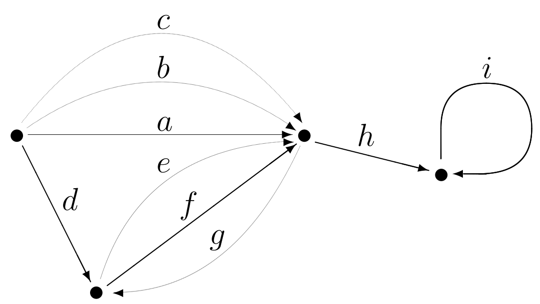
Yleisesti graafiteoriassa on tapana käyttää pisteistä nimitystä solmu, mutta nuolilogiikan luonteen takia käytetään tässä pistettä. Särmä a on siis nuoli, joka kulkee vasemmalla sijaitsevasta pisteestä $l(a)$ oikealla sijaitsevaan pisteeseen $r(a)$.



Määritelmä 2.2. Multigraafikehys on struktuuri $\mathfrak{F} = (W, C_M, R_M, I_M)$, jossa universumina on jonkin multigraafin (W, P, l, r) särmien joukko W ja joukossa W on määritelty seuraavat relaatiot:

$C_M abc$	joss	nuoli a kulkee pisteestä $l(b)$ pisteeseen $r(c)$ ja $r(b) = l(c)$,
$R_M ab$	joss	nuoli a kulkee pisteestä $r(b)$ pisteeseen $l(a)$,
$I_M a$	joss	$l(a) = r(a)$.

Esimerkki 2.3. Merkitsemällä multigraafin särmiä kirjaimilla saadaan nuolimalli.



Kuva 3. Multigraafi

Kun valuaatio on

$$\begin{aligned} V(p) &= \{a, b, e, i\} \\ V(q) &= \{i, g\} \\ V(r) &= \{h\}, \end{aligned}$$

ja tarkastellaan kuvaa 3, niin huomataan, että nuolen d alkupisteestä loppupisteeseen päästään myös vaihtoehtoisesti kulkemalla ensin nuoli a ja sitten nuoli g. Nuolessa a on totta p ja nuolessa g on totta q, joten nuolessa d on totta $p \circ q$. Nuoli g saadaan kulkemalla nuoli e tai nuoli f takaperin. Nuolessa e on totta p ja nuolessa f on totta $\neg p$, tällöin nuolessa g on totta sekä $\otimes p$ että $\otimes\neg p$. Nuolessa g on siis totta $\otimes p \wedge \otimes\neg p$. Kun kuljetaan nuoli h päästään samasta alkupisteestä samaan loppupisteeseen kuin kulkemalla nuolet h ja i. Nuolessa h on totta r ja nuolessa i on totta q ja koska nuoli i alkaa samasta pisteestä kuin mihin se loppuu niin nuolessa i on totta myös $\iota\delta$. Nuolessa i on siis totta $\iota\delta \wedge q$ ja tällöin nuolessa h on totta $r \circ (\iota\delta \wedge q)$. Saadaan siis seuraavat kaavat

$$\begin{aligned} d &\Vdash p \circ q \\ g &\Vdash \otimes p \wedge \otimes\neg p \\ h &\Vdash r \circ (\iota\delta \wedge q). \end{aligned}$$

Multigraafeissa voi siis olla useita nuolia, jotka johtavat samasta alkupisteestä samaan loppupisteeseen. Tällöin kummankaan relaation C_M tai R_M ei tarvitse olla funktionaalinen multigraafikehyksessä. Voi siis olla, että nuolelle a on kaksi eri nuolta b ja c siten, että Rab ja Rac, mutta nuolet b ja c ovat eri nuolia. Kuvassa 3 näin oli nuolten e, f ja g kohdalla.

2.2 Graafeista

Graafi on multigraafi, jossa on korkeintaan yksi särmä yhden pisteparin välissä. Tästä päädymme kohta määriteltävään kaksiulotteiseen semantiikkaan, sillä nyt on mahdollista identifioida nuoli (a_0, a_1) parin $(l(a), r(a))$ kanssa.

Määritelmä 2.4. Olkoon U epätyhjä joukko ja olkoon kehys $\mathfrak{F} = (W, C_U, R_U, I_U)$, missä universumi W on karteesisen tulon $U \times U$ osajoukko. Tällöin kehystä $\mathfrak{F}$ kutsutaan graafikehykseksi ja sen relaatiot ovat:

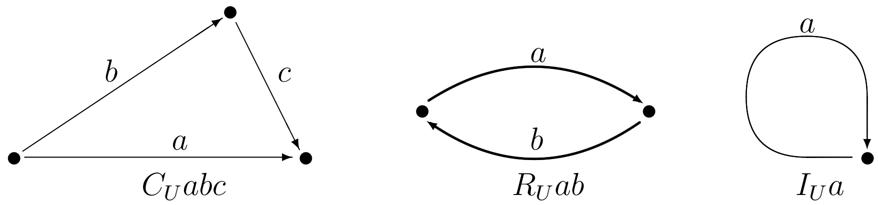
Kompositio: $C_U abc$ joss $a_0 = b_0, a_1 = c_1$ ja $b_1 = c_0$, missä C_U on osittaisfunktio.

Kääntö: $R_U a = (a_1, a_0)$, kun $(a_1, a_0) \in W$. Kääntö R_U on siis osittaisfunktio ja sitä merkitään myös f_U.

Identiteettirelaatio: $I_U a$ joss $a_0 = a_1$.

Graafikehyksistä voidaan myös käyttää nimiä parikehys, kaksiulotteinen kehys tai relativoitu neliö, sillä kaikki edelliset tarkoittavat samaa.

Kaksiulotteisia nuolia on helppoa kuvata graafisesti, sillä kaksiulotteisissa kehyksissä nuolet ovat pareja (a_0, a_1), jotka piirretään pisteestä a_0 pisteeseen a_1 kulkevina nuolina. Kaksiulotteisessa kehyksessä ei piirretä relaatioita erikseen, sillä ne sisältyvät nuoliin. Kuvassa 4 ovat kaksiulotteisen kehyksen relaatiot.



Kuva 4. Relaatiot kaksiulotteisessa kehyksessä

Määritelmä 2.5. Kaksiulotteista kehystä kutsutaan neliöksi, jos sen universumi W on karteesinen tulo eli $W = U \times U$, jollekin joukolle U. Kehystä, jonka universumi W on refleksiivinen ja symmetrinen relaatio kutsutaan lokaaliseksi neliöksi ja kehystä, jonka universumi W on mikä tahansa kaksipaikkainen relaatio kutsutaan relativoiduksi neliöksi. Näiden kehysten luokkia merkitään SQ, LSQ ja RSQ.

Kaksiulotteisia kehyksiä voidaan siis luokitella ja nimetä tarkemmin sen mukaan millainen universumi on kyseessä, kaikissa universumeissa on kuitenkin oltava täsmälleen yksi nuoli, joka kulkee pisteparin pisteiden välillä. Useassa kohdassa tästä eteenpäin kehystä ei luokitella tarkemmin ja näissä kohdissa käytetään nimitystä kaksiulotteinen kehys ja merkitään $\mathfrak{F}_U$. Universumi on tällöin $W_U \subseteq U \times U$ ja nuoli a on pistepari (a_0, a_1).

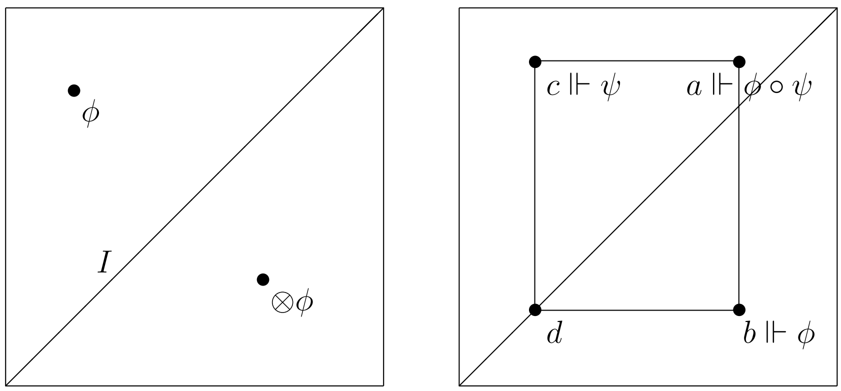
Määritelmä 2.6. Kaavan ϕ totuus kaksiulotteisen mallin $\mathfrak{M}_U$ nuolessa $a = (a_0, a_1)$ määritellään seuraavasti, kun oletetaan, että W_U on symmetrinen:

$\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \phi \circ \psi$ joss on olemassa sellainen $u \in U$, että $(a_0, u), (u, a_1) \in W_U$ ja $\mathfrak{M}_U, (a_0, u) \Vdash \phi$ ja $\mathfrak{M}_U, (u, a_1) \Vdash \psi$.

$\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \otimes\phi$ joss $\mathfrak{M}_U, (a_1, a_0) \Vdash \phi$.

$\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \iota\delta$ joss $a_0 = a_1$.

Nuolet voidaan esittää graafisesti johdannossa esitetyllä tavalla nuolina tai ne voidaan kuvata nuolina, joiden alkuun ja loppuun on lisätty pallot kuvaamaan alku- ja loppupisteitä, mutta kaksiulotteiset nuolet on mahdollista esittää myös geometrisesti tason pisteinä, joka kuvaa niiden kaksiulotteista luonnetta paremmin.



Kuva 5. Kaksiulotteiset nuolet geometrisesti esitettynä

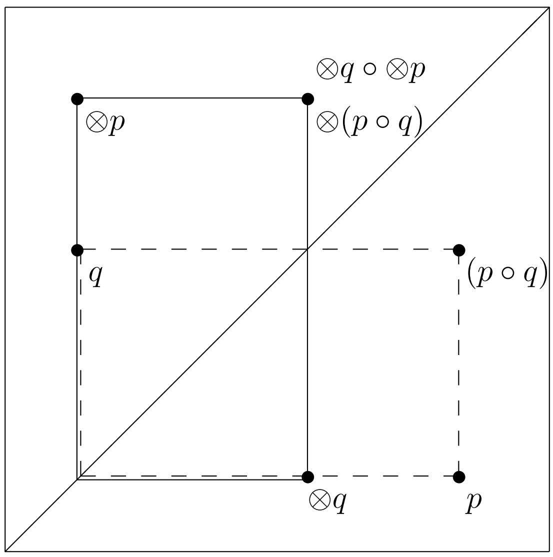
Kuvasta 5 nähdään, että identiteetti pätee selvästi diagonaalilla ja kääntö $\otimes\phi$ on totta joss ϕ pätee identiteetin kautta peilatussa pisteessä. Kompositio $a \Vdash \phi \circ \psi$ on totta joss on mahdollista piirtää sellainen nelikulmio $abdc$, että pisteestä a voidaan piirtää pystysuora jana pisteeseen b ja vaakasuora jana pisteeseen c, pisteessä b on totta ϕ ja pisteessä c on totta ϕ, ja pisteistä b ja c voidaan piirtää vaakasuora ja pystysuora jana diagonaalille, jonne muodostuu piste d. Pisteen d ei tarvitse kuulua mallin universumiin.

2.3 Validisuus

Validisuuden osoittaminen kaksiulotteisessa kehyksessä on suoraviivaista ja selkeää, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 2.7. Osoitetaan, että kaava $\otimes(p \circ q) \to \otimes q \circ \otimes p$ on validi kaikissa kaksiulotteisissa kehyksissä. Olkoon $\mathfrak{F}_U$ kaksiulotteinen kehys ja V valuaatio ja nuoli $a \in W_U$, $a = (a_0, a_1)$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \otimes(p \circ q)$. Operaattorin määritelmän perusteella $\mathfrak{M}_U, (a_1, a_0) \Vdash p \circ q$. Nyt on oltava sellainen $u \in U$, että $\mathfrak{M}_U, (a_1, u) \Vdash p$ ja $\mathfrak{M}_U, (u, a_0) \Vdash q$. Tästä saadaan $\mathfrak{M}_U, (a_0, u) \Vdash \otimes q$ ja $(\mathfrak{M}_U, (u, a_1) \Vdash \otimes p$, joten $(\mathfrak{M}_U(a_0, a_1) \Vdash \otimes q \circ \otimes p$.

Tehdään esimerkin 2.7 tarkastelu myös kuvana.



Kuva 6. Validisuus kaksiulotteisessa kehyksessä

Ensin on siis ensin peilattu piste $\otimes(p \circ q)$ diagonaalin suhteen. Tämän on jälkeen merkitty katkoviivalla vaakasuora ja pystysuora viiva pisteisiin p ja q ja täydennetty nelikulmioksi. Seuraavaksi on peilattu pisteet p ja q diagonaalin suhteen ja saatu pisteet $\otimes p$ ja $\otimes q$. Näistä pisteistä on piirretty vaakasuorat ja pystysuorat viivat diagonaalille ja täydennetty nelikulmioksi. Nyt piste $\otimes q \circ \otimes p$ on sama kuin piste $\otimes(p \circ q)$. Näin nähdään myös kuvan 6 perusteella, että kaava $\otimes(p \circ q) \to \otimes p \circ \otimes q$ on validi kaikissa kaksiulotteisissa kehyksissä.

3 Malleista

Nuolilogiikassa, kuten modaalilogiikassa yleensäkin, on kiinnostavaa tutkia eri struktuurien ominaisuuksia ja relaatioita. Erillinen yhdiste, generoitu alimalli ja p-morfismi ovat kolme erilaista tapaa saada yhteys mallien välille niin, että mallit ovat edelleen erottamattomia modaalilogiikan kielen suhteen eli toteuttavat samat kaavat. Erillisen yhdisteen avulla saadaan yhdistettyä pienempiä erillisiä malleja yhdeksi isoksi, generoidun alimallin avulla voidaan supistaa mallia kuitenkaan muuttamatta totuusarvoja ja p-morfismi muodostaa kuvauksen kahden mallin välille. Bisimulaatio on logiikassa tärkeä, paljon tutkittu relaatio ja sekä modaalisen nuolilogiikan että kaksiulotteisen logiikan bisimulaatio säilyttää kaavojen totuuden.

Määritelmä 3.1. Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ nuolimalleja ja olkoot a ja a' niiden maailmoja eli nuolia. Nuolen a teoriaan kuuluvat kaikki ne kaavat, jotka ovat tosia nuolessa a. Tätä joukkoa merkitään $Th(\mathfrak{M}, a) = \{\phi \mid \mathfrak{M}, a \Vdash \phi\}$. Sanotaan, että a ja a' ovat modaalisesti ekvivalentit, merkitään $a \leftrightsquigarrow a'$, jos niillä on samat teoriat. Mallin $\mathfrak{M}$ teoria on joukko, johon kuuluvat kaikki ne kaavat, jotka ovat valideja mallissa $\mathfrak{M}$. Malleja $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ kutsutaan modaalisesti ekvivalenteiksi, merkitään $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$, jos niiden teoriat ovat identtiset.

3.1 Erillinen yhdiste, generoitu alimalli ja p-morfismi

Määritelmä 3.2. (Erillinen yhdiste) Nuolimallien sanotaan olevan erilliset, jos niiden mahdollisten maailmojen joukossa ei ole yhteisiä maailmoja. Erillisten nuolimallien $\mathfrak{M}_i = (W_i, C_i, R_i, I_i, V_i), (i \in J)$ erillinen yhdiste on $\uplus_i \mathfrak{M}_i = (W, C, R, I, V)$, missä $W = \cup_{i \in J} W_i$, $C = \cup_{i \in J} C_i$, $R = \cup_{i \in J} R_i$, $I = \cup_{i \in J} I_i$ ja jokaiselle propositiosymbolille p pätee $V(p) = \cup_{i \in J} V_i(p)$.

Lause 3.3. (vrt. [1, s. 53]) *Olkoot mallit $\mathfrak{M}_i, i \in J$ nuolimalleja, tällöin kaikille kaavoille ϕ ja jokaiselle $i \in J$ ja jokaiselle $a \in \mathfrak{M}_i$ pätee:*

$$\mathfrak{M}_i, a \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \uplus_i \mathfrak{M}_i, a \Vdash \phi.$$

Siis kaavojen totuus säilyy erillisissä yhdisteissä.

Todistus. Todistetaan lause induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Olkoon $i \in J$ indeksi ja merkitään $\mathfrak{M} = \uplus_{i \in J} \mathfrak{M}_i$.

Oletetaan ensin, että kaava ϕ on propositiosymboli p ja oletetaan, että $\mathfrak{M}_i, a \Vdash p$. Tällöin $a \in V_i(p)$, joten erillisen yhdisteen valuaation määritelmän perusteella $a \in V(p)$, siis $\mathfrak{M}, a \Vdash p$. Oletetaan sitten, että $\mathfrak{M}, a \Vdash p$ pätee jollekin nuolelle $a \in \mathfrak{M}_i$. Erillisen yhdisteen valuaation määritelmän perusteella $a \in V_j(p)$, jollakin indeksillä j. Erillisten yhdisteiden maailmojen erillisyyden perusteella on oltava $i = j$, joten pätee $a \in V_i(p)$ ja $\mathfrak{M}_i, a \Vdash \phi$.

Oletetaan sitten, että kaava ϕ on modaalinen vakio $\iota\delta$ ja oletetaan, että on voimassa $\mathfrak{M}_i, a \Vdash \iota\delta$. Tällöin pätee $I_i a$, joten erillisen yhdisteen relaation määritelmän perusteella pätee Ia. Siis $\mathfrak{M}, a \Vdash \iota\delta$. Oletetaan sitten, että $\mathfrak{M}, a \Vdash \iota\delta$ pätee jollekin nuolelle $a \in \mathfrak{M}_i$. Edellisen perusteella $\mathfrak{M}, a \Vdash I_j$, jollakin indeksillä j. Erillisten yhdisteiden maailmojen erillisyyden perusteella on oltava $i = j$, joten pätee $\mathfrak{M}_i, a \Vdash I_i$, ja tällöin on $\mathfrak{M}_i, a \Vdash \iota\delta$.

Tehdään seuraavaksi induktio-oletus, että väite pätee, kun kaava ϕ on ψ_1 ja kun kaava ϕ on ψ_2. Oletetaan nyt, että kaava ϕ on $\neg\psi_1$, tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_i, a \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}_i, a \Vdash \neg\psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}_i, a \nVdash \psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \nVdash \psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \neg\psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \phi.
\end{aligned}$$

Kun kaava ϕ on $\psi_1 \vee \psi_2$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_i, a \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}_i, a \Vdash \psi_1 \vee \psi_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}_i, a \Vdash \psi_1 \text{ tai } \mathfrak{M}_i, a \Vdash \psi_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \text{ tai } \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \vee \psi_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \phi.
\end{aligned}$$

Todistetaan sitten tapaus $\phi = \otimes\psi_1$. Oletetaan ensin, että $\mathfrak{M}_i, a \Vdash \otimes\psi_1$. Tällöin on olemassa sellainen $b \in W_i$, että R_iab, $\mathfrak{M}_i, b \Vdash \psi_1$. Induktio-oletuksen perusteella pätee $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja maailman $\mathfrak{M}$ määritelmän perusteella Rab, joten $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$.

Todistetaan vielä toinen suunta. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$ on voimassa jollekin nuolelle $a \in \mathfrak{M}_i$. Modaalioperaattorin määritelmän mukaan on olemassa sellainen nuoli $b \in W$, että Rab ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$. Relaation R määritelmän mukaan R_jab jollekin indeksille j. Erillisten yhdisteiden maailmojen erillisyyden perusteella on oltava $i = j$. Siis $b \in \mathfrak{M}_i$, josta seuraa induktio-oletuksen perusteella, että $\mathfrak{M}_i, b \Vdash \psi_1$. Siis $\mathfrak{M}_i, a \Vdash \otimes\psi_1$.

Todistetaan vielä tapaus $\phi = \psi_1 \circ \psi_2$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}_i, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. On siis olemassa sellaiset $b, c \in W_i$, että C_iabc, $\mathfrak{M}_i, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}_i, c \Vdash \psi_2$. Induktio-oletuksen mukaan $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi_2$ sekä relaation C määritelmän perusteella $Cabc$. Siis saadaan $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$.

Todistetaan lopuksi toinen suunta. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$ pätee jollekin nuolelle $a \in \mathfrak{M}_i$. On siis olemassa sellaiset nuolet b, c, että $Cabc$, $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi_2$. Relaation C ja erillisten yhdisteiden määritelmien mukaan saadaan $b, c \in \mathfrak{M}_i$, eli siis $\mathfrak{M}_i, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}_i, c \Vdash \psi_2$. Saadaan siis $\mathfrak{M}_i, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. □

Määritelmä 3.4. (Generoitu alimalli) Olkoot mallit $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}$ nuolimalleja, siten että $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', C', R', I', V')$. Malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ alimalli, jos $W' \subseteq W$, $C' = C \cap (W' \times W' \times W')$, $R' = R \cap (W' \times W')$ ja $I' = I \cap W'$ sekä kaikille propositiosymboleille p pätee $V'(p) = V(p) \cap W'$. Malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ generoitu alimalli, merkitään $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$, jos malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ alimalli ja seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) Jos $a \in W'$ ja $Cabc$ niin $b, c \in W'$.

(2) Jos $a \in W'$ ja Rab niin $b \in W'$.

Kun $\mathfrak{M}$ on malli ja A on mallin $\mathfrak{M}$ määrittelyjoukon osajoukko, niin tällöin joukon A generoima alimalli on pienin mallin $\mathfrak{M}$ generoitu alimalli, jonka määrittelyjoukko sisältää joukon A. Pistegeneroitu malli on yksiön generoima eli sellaisen joukon, jossa on vain yksi alkio.

Lause 3.5. (vrt. [1, s. 56]) *Olkoot* $\mathfrak{M}$ *ja* $\mathfrak{M}'$ *sellaisia nuolimalleja, että malli* $\mathfrak{M}'$ *on mallin* $\mathfrak{M}$ *generoitu alimalli. Tällöin kaikille kaavoille* ϕ *ja maailmoille* $a \in \mathfrak{M}'$ *pätee:*

$$\mathfrak{M}', a \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}, a \Vdash \phi.$$

Siis kaavojen totuus säilyy generoiduissa alimalleissa.

Todistus. Lause todistetaan induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Olkoon malli $\mathfrak{M}'$ mallin $\mathfrak{M}$ generoitu alimalli. Tapauksissa $\phi = p$ ja $\phi = \iota\delta$ todistus on hyvin suoraviivainen, samoin Boolen kombinaatiot menevät totuttuun tapaan, joten todistetaan vain kohdat $\phi = \otimes\psi_1$ ja $\phi = \psi_1 \circ \psi_2$. Tehdään ensin induktio-oletus, että kaavoille $\phi = \psi_1$ ja $\phi = \psi_2$ ja kaikille nuolille $a \in \mathfrak{M}'$ pätee

$$\mathfrak{M}', a \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}, a \Vdash \phi.$$

Todistetaan tapaus $\phi = \otimes\psi_1$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}', a \Vdash \otimes\psi_1$. On siis olemassa sellainen $b \in W'$, että $R'ab$ ja $\mathfrak{M}', b \Vdash \psi_1$. Nyt induktio-oletuksen perusteella pätee $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja generoidun alimallin määritelmän mukaan on oltava Rab ja $a \in W$. Tällöin pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$.

Todistetaan toinen suunta. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$ on voimassa jollekin nuolelle $a \in \mathfrak{M}'$. Tällöin on olemassa sellainen nuoli $b \in W$, että Rab. Koska malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ generoitu alimalli, niin $b \in W'$ ja $R'ab$. Induktio-oletuksen perusteella on siis voimassa $\mathfrak{M}', b \Vdash \psi_1$, joten $\mathfrak{M}', a \Vdash \otimes\psi_1$.

Todistetaan sitten tapaus $\phi = \psi_1 \circ \psi_2$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}', a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. Tällöin on olemassa sellaiset $b, c \in W'$, että $C'abc$ ja $\mathfrak{M}', b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}', c \Vdash \psi_2$. Induktio-oletuksen perusteella $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi_2$ sekä generoidun alimallin määritelmän perusteella $Cabc$ ja $a \in W$. Saadaan siis $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$.

Todistetaan vielä toinen suunta. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$ pätee jollekin nuolelle $a \in \mathfrak{M}'$. On siis olemassa sellaiset nuolet $b, c \in W$, että $Cabc$. Generoidun alimallin ehdon perusteella on oltava $b, c \in W'$ ja $C'abc$. Nyt induktio-oletuksesta saadaan $\mathfrak{M}', b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}', c \Vdash \psi_2$, joten $\mathfrak{M}', a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. □

Määritelmä 3.6. (p-morfismi) Olkoot $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', C', R', I', V')$ nuolimalleja. Kuvaus $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ on p-morfismi, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) a ja $f(a)$ toteuttavat samat propositiosymbolit.

(2) $Ia \Leftrightarrow I'f(a)$.

(3)

 (i) Jos $Cabc$ niin $C'f(a)f(b)f(c)$.

 (ii) Jos Rab niin $R'f(a)f(b)$.

(4)

 (i) Jos $C'f(a)b'c'$ niin on olemassa sellaiset $b, c \in W$, että $Cabc$ ja $f(b) = b'$ ja $f(c) = c'$.

 (ii) Jos $R'f(a)b'$ niin on olemassa sellainen $b \in W$, että Rab ja $f(b) = b'$.

Jos on olemassa surjektiivinen p-morfismi mallilta $\mathfrak{M}$ mallille $\mathfrak{M}'$, niin malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ p-morfinen kuva, merkitään $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$.

Lause 3.7. (vrt. [1, s. 62]) *Olkoot mallit $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ sellaisia nuolimalleja, että kuvaus $f : \mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$. Tällöin kaikille kaavoille ϕ ja nuolille $a \in \mathfrak{M}'$ pätee:*

$$\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}', f(a) \Vdash \phi.$$

Siis kaavojen totuus säilyy p-morfismeissa.

Todistus. Todistetaan lause induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Kun kaava ϕ on propositiosymboli, niin väite seuraa suoraan p-morfismin määritelmän kohdasta (1). Kun kaava ϕ on modaalinen vakio tai Boolen kombinaatio niin todistus menee tutulla tavalla, riittää siis todistaa kohdat $\phi = \otimes\psi_1$ ja $\phi = \psi_1 \circ \psi_2$.

Tehdään induktio-oletus, että kaavoille $\phi = \psi_1$ ja $\phi = \psi_2$ ja kaikille nuolille $a \in \mathfrak{M}$ pätee

$$\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}', f(a) \Vdash \phi.$$

Todistetaan tapaus $\phi = \otimes\psi_1$. Oletetaan, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$. Tällöin on siis olemassa sellainen $b \in W$, että Rab ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$. Induktio-oletuksen perusteella on siis voimassa $\mathfrak{M}', f(b) \Vdash \psi_1$ ja määritelmän 3.6 kohdan (3ii) perusteella pätee $R' f(a)f(b)$, joten saadaan $\mathfrak{M}', f(a) \Vdash \otimes\psi_1$.

Todistetaan toinen suunta. Oletetaan, että pätee $\mathfrak{M}', f(a) \Vdash \otimes\psi_1$. Modaalioperaattorin määritelmän mukaan on siis olemassa sellainen nuoli $b' \in W'$, että on voimassa $R' f(a)b'$ ja $\mathfrak{M}', b' \Vdash \psi_1$. Nyt määritelmän 3.6 kohdan (4ii) perusteella on olemassa sellainen b, että pätee Rab ja $f(b) = b'$. Induktio-oletuksesta saadaan $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$, joten on voimassa $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$.

Todistetaan lopuksi tapaus $\phi = \psi_1 \circ \psi_2$. Oletetaan, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. Löytyy siis sellaiset nuolet $b, c \in W$, että $Cabc$ ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi_2$. Induktio-oletuksen mukaan pätee $\mathfrak{M}', f(b) \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}', f(c) \Vdash \psi$. Nyt määritelmän 3.6 kohdan (3iii) perusteella on voimassa $C' f(a)f(b)f(c)$, eli saadaan $\mathfrak{M}', f(a) \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$.

Todistetaan vielä toinen suunta. Oletetaan, että pätee $\mathfrak{M}', f(a) \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. On siis olemassa sellaiset nuolet $b', c' \in W'$, että $C' f(a)b'c'$ ja $\mathfrak{M}', b' \Vdash \psi_1$ sekä $\mathfrak{M}', c' \Vdash \psi_2$. Määritelmän 3.6 kohdan (4iii) mukaan on olemassa sellaiset nuolet b ja c, että on voimassa $Cabc$, $f(b) = b'$ ja $f(c) = c'$. Induktio-oletuksen perusteella pätee $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi_2$, eli saadaan siis $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. □

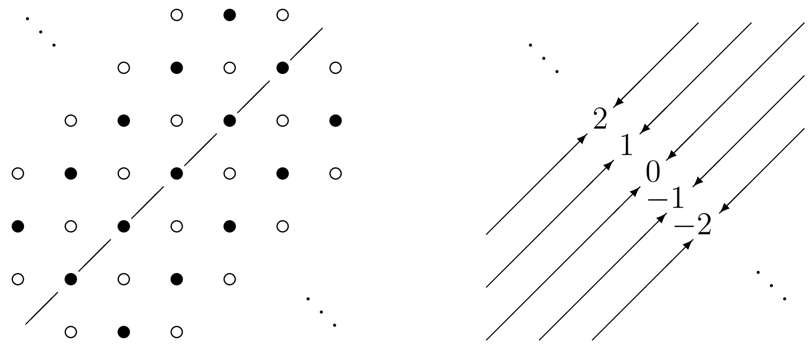
Esimerkki 3.8. (ks. [1, s. 61]) Määritellään p-morfismi mallilta $\mathfrak{M}_U$ mallille $\mathfrak{M}'$. Malli $\mathfrak{M}_U$ on kaksiulotteinen malli ja malli $\mathfrak{M}'$ perustuu kokonaislukujen yhteenlaskuun. Merkitään nuolta $a \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, siten että $a = (a_0, a_1)$, missä nuolen alkupiste on a_0 ja loppupiste a_1. Olkoot $\mathfrak{M}_U = (W_U, C_U, R_U, I_U, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', C', R', I', V')$ malleja, joissa pätee

$W_U = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $C_U abc$ joss $a_0 = b_0$, $b_1 = c_0$ ja $a_1 = c_1$, $R_U ab$ joss $a_0 = b_1$ ja $a_1 = b_0$, $I_U a$ joss $a_0 = a_1$ ja valuaatio $V_U(p) = \{(a_0, a_1) \mid a_1 - a_0 \text{ on parillinen}\}$

ja

$W' = \mathbb{Z}$, $C' xyz$ joss $x = y + z$, $R' xy$ joss $x = -y$, $I' x$ joss $x = 0$ ja valuaatio $V'(p) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ on parillinen}\}$.

Kuvassa 7 vasemmalla on osa mallista $\mathfrak{M}_U$, siinä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kuuluvat pisteet ovat mustia, jos p on totta ja renkaita jos p ei ole totta. Oikealla on funktio $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) = z_1 - z_0$.



Kuva 7. Mallit $\mathfrak{M}_U$ ja $\mathfrak{M}'$

Osoitetaan nyt, että funktio f on p-morfismi. Propositiosymboleja koskeva kohta on triviaali. Identiteettirelaatiolle I_U pätee selvästi, että kaikille $a \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $a_0 = a_1$ joss $a_1 - a_0 = 0$.

Kääntörelaatiolle R_U tarkastetaan kohta (3ii) määritelmästä 3.6. Oletetaan, että relaatio $R_U ab$ pätee joillekin $a, b \in W$ eli $a_0 = b_1$ ja $a_1 = b_0$. Tällöin saadaan

$$f(a) = a_1 - a_0 = b_0 - b_1 = -f(b),$$

joten relaation R' määritelmän mukaan pätee $R' f(a) f(b)$.

Tutkitaan määritelmän 3.6 kohta (4ii). Oletetaan, että relaatio $R' f(a) y$ pätee jollekin $a \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja $y \in \mathbb{Z}$ eli siis $a_1 - a_0 = -y$. Kun pari $b = (a_1, a_0)$, niin Rab, joten $f(b) = a_0 - a_1 = -(a_1 - a_0) = -(-y) = y$ Tällöin $y \in W$ ja toteuttaa siis kohdan (4ii).

Tarkastetaan kompositiorelaatiolle C_U kohta (3i) määritelmästä 3.6. Oletetaan, että relaatio $C_U abc$ pätee $a, b, c \in W_U$. Siis $a_0 = b_0$, $b_1 = c_0$ ja $c_1 = a_1$. Saadaan siis

$$f(a) = a_1 - a_0 = c_1 - b_0 = c_1 - c_0 + b_1 - b_0 = f(b) + f(c).$$

Relaation C' määritelmän perusteella pätee $C' f(a) f(b) f(c)$.

Tarkastetaan vielä määritelmän 3.6 kohta (4i). Oletetaan, että $a \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja joillekin $y, z \in \mathbb{Z}$ pätee $C' f(a) yz$. Eli $a_1 - a_0 = y + z$. Parit $y = (a_0, a_0 + y)$ ja $z = (a_0 + y, a_1)$ toteuttavat selvästi relaation $Cxyz$. Nyt $f(y) = (a_0 + y) - a_0 = y$ ja $f(z) = a_1 - (a_0 + y) = (a_1 - a_0) - y = z$. Tällöin y ja z ovat maailman W alkioita, jotka toteuttavat kohdan (4i).

3.2 Bisimulaatio

Tavallisesti bisimulaatio määritellään tilojen välisenä relaationa, mutta nuolilogiikassa vertaillaan siirtymiä. Nuolimallien välinen bisimulaatio määritellään nuolten välillä ja kaksiulotteinen parien välillä.

3.2.1 Modaalinen bisimulaatio

Määritelmä 3.9. Olkoot mallit $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ kaksi nuolimallia, siten että $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', C', R', I', V')$. Epätyhjä relaatio $Z \subseteq W \times W'$ on nuolibisimulaatio, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) Jos aZa', niin a ja a' toteuttavat samat propositiosymbolit.

(2) Jos aZa', niin $Ia \Leftrightarrow I'a'$.

(3) (a) Jos $Cabc$ ja aZa', niin on olemassa sellaiset $b', c' \in W'$, että bZb', cZc' ja $C'a'b'c'$,

(b) Jos Rab ja aZa', niin on olemassa sellainen $b' \in W'$, että bZb' ja $R'a'b'$.

(4) (a) Jos $C'a'b'c'$ ja aZa', niin on olemassa sellaiset $b, c \in W$, että bZb', cZc' ja $Cabc$,

(b) Jos $R'a'b'$ ja aZa', niin on olemassa sellainen $b \in W$, että bZb' ja Rab.

Jos mallien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välillä on nuolibisimulaatio Z ja aZa' niin sanotaan, että nuolet a ja a' ovat bisimilaariset ja merkitään

$$\mathfrak{M}, a \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathfrak{M}', a'.$$

Kahden nuolimallin välinen bisimulaation olemassaolo viittaa siihen, että nämä mallit ovat hyvin samankaltaisia. Seuraava lause osoittaa, että nuolilogiikan kielessä ei voida erottaa kahta bisimilaarista nuolta toisistaan eli kaavojen totuus säilyy bisimulaatiossa.

Lause 3.10. (vrt. [1, s. 67]) *Olkoot mallit $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', C', R', I', V')$ nuolimalleja. Jos $\mathfrak{M}, a \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathfrak{M}', a'$ niin jokaiselle nuolikaavalle ϕ pätee*

$$\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}', a' \Vdash \phi.$$

Siis kaavojen totuus säilyy bisimulaatiossa.

Todistus. Todistetaan lause induktiolla kaavan ϕ pituuden suhteen. Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ malleja, joiden välillä on nuolibisimulaatio Z. Kun kaava ϕ on propositiosymboli, niin väite seuraa suoraan määritelmän 3.9 kohdasta (1). Kun kaava ϕ on modaalinen vakio $\iota\delta$, oletetaan, että $\mathfrak{M}, a \Vdash \iota\delta$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että Ia. Nyt bisimulaation määritelmän 3.9 kohdan (2) perusteella on yhtäpitävää, että $I'a'$, joka taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathfrak{M}, a' \Vdash \iota\delta$.

Tehdään nyt induktio-oletus, että kaavoille $\phi = \psi_1$ ja $\phi = \psi_2$ ja kaikille nuolille $a \in W$ ja $a' \in W'$ pätee

$$\mathfrak{M}, a \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathfrak{M}', a' \;\Rightarrow\; (\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}', a' \Vdash \phi.)$$

Olkoon kaava $\phi = \neg\psi_1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \neg\psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \nVdash \psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a' \nVdash \psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a' \Vdash \neg\psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a' \Vdash \phi.
\end{aligned}$$

Olkoon kaava $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}, a \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \vee \psi_2 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \text{ tai } \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_2 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a' \Vdash \psi_1 \text{ tai } \mathfrak{M}', a' \Vdash \psi_2 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M},' , a' \Vdash \psi_1 \vee \psi_2 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a' \Vdash \phi.\end{aligned}$$

Olkoon nyt kaava $\phi = \otimes\psi_1$. Oletetaan, että aZa' ja $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$. On siis olemassa sellainen $b \in W$, että Rab ja $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1$. Koska aZa' ja Rab niin bisimulaation määritelmän 3.9 kohdan (3b) perusteella on olemassa sellainen $b' \in W$, että bZb' ja $R'a'b'$. Induktio-oletuksen perusteella $\mathfrak{M}', b' \Vdash \psi_1$, joten $\mathfrak{M}', a' \Vdash \otimes\psi_1$. Toinen suunta menee vastaavasti kohdan (4b) mukaan.

Olkoon vielä kaava $\phi = \psi_1 \circ \psi_2$. Oletetaan, että aZa' ja $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. On siis olemassa sellaiset $b, c \in W$, että $Cabc$ ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi_2$. Nuolibisimulaation kohdan (3a) perusteella on olemassa sellaiset $b', c' \in W'$, että bZb', cZc' ja $C'a'b'c'$. Koska bZb' ja cZc' niin induktio-oletuksen mukaan $\mathfrak{M}', b' \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}', c' \Vdash \psi_2$ ja koska $C'a'b'c'$ niin $M', a' \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$. Toinen suunta vastaavasti. □

3.2.2 Kaksiulotteinen bisimulaatio

Kaksiulotteinen bisimulaatio määritellään kaksiulotteisten nuolten välillä eli sellaisten nuolten, jotka voidaan esittää pareina (a_0, a_1).

Määritelmä 3.11. Olkoot mallit $\mathfrak{M}_U$ ja $\mathfrak{M}'_U$ kaksiulotteisia nuolimalleja, siten että $\mathfrak{M}_U = (W_U, C_U, R_U, I_U, V)$ ja $\mathfrak{M}'_U = (W'_U, C'_U, R'_U, I'_U, V')$. Epätyhjä relaatio Z pareilta $(a_0, a_1) \in W_U$ pareille $(a'_0, a'_1) \in W'_U$ on kaksiulotteinen nuolibisimulaatio toteuttaessaan seuraavat ehdot:

(1) Jos $(a_0, a_1)Z(a'_0, a'_1)$, niin (a_0, a_1) ja (a'_0, a'_1) toteuttavat samat propositiosymbolit,

(2) Jos $(a_0, a_1)Z(a'_0, a'_1)$, niin $a_0 = a_1 \Leftrightarrow a'_0 = a'_1$,

(3) Jos $(a_0, a_1)Z(a'_0, a'_1)$, niin $(a_1, a_0)Z(a'_1, a'_0)$,

(4) Jos $(a_0, a_1)Z(a'_0, a'_1)$, niin kaikilla $u \in U$ on olemassa sellainen $u' \in U'$, joilla pätee $(a_0, u)Z(a'_0, u')$ ja $(u, a_1)Z(u', a'_1)$,

(5) Jos $(a_0, a_1)Z(a'_0, a'_1)$, niin kaikilla $u' \in U'$ on olemassa sellainen $u \in U$, joilla pätee $(a_0, u)Z(a'_0, u')$ ja $(u, a_1)Z(u', a'_1)$.

Muotoillaan seuraavaksi lause totuuden säilymiseen bisimulaatiossa kaksiulotteisille malleille.

Lause 3.12. *Olkoot mallit $\mathfrak{M}_U = (W_U, C_U, R_U, I_U, V)$ ja $\mathfrak{M}'_U = (W'_U, C'_U, R'_U, I'_U, V')$ kaksiulotteisia nuolimalleja. Jos $\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'_U, (a'_0, a'_1)$ niin jokaiselle nuolikaavalle ϕ pätee:*

$$\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \phi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}'_U, (a'_0, a'_1) \Vdash \phi.$$

Siis kaavojen totuus säilyy bisimulaatiossa.

Todistus. Todistetaan lause induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Olkoot $\mathfrak{M}_U$ ja $\mathfrak{M}'_U$ kaksiulotteisia malleja, joiden välillä on nuolibisimulaatio Z. Kun kaava ϕ on propositiosymboli p, niin väite seuraa suoraan määritelmän 3.11 kohdasta (1).

Kun kaava ϕ on modaalinen vakio $\iota\delta$, niin $\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \iota\delta$, mikä on määritelmän 2.6 perusteella yhtäpitävää sen kanssa, että $a_0 = a_1$. Bisimulaation määritelmän 3.11 kohdasta (2) saadaan yhtäpitäväksi $a_0' = a_1'$, joka taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathfrak{M}'_U, (a_0', a_1') \Vdash \iota\delta$.

Tehdään nyt induktio-oletus, että väite pätee kaavoille ψ_1 ja ψ_2 ja kaikille nuolille $(a_0, a_1) \in W_U$ ja $(a_0', a_1') \in W_U'$. Kun kaava ϕ on $\neg\psi_1$ tai $\psi_1 \vee \psi_2$ niin todistus menee suoraviivaisesti totuttuun tapaan.

Oletetaan seuraavaksi, että $\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \otimes\psi_1$. Määritelmän 2.6 mukaan on yhtäpitävää, että $\mathfrak{M}_U, (a_1, a_0) \Vdash \psi_1$, mikä on induktio-oletuksen perusteella yhtäpitävää $\mathfrak{M}'_U, (a_1', a_0') \Vdash \psi_1$ kanssa. Kaksiulotteisen bisimulaation määritelmän kohdan (3) perusteella on oltava $(a_0, a_1)Z(a_0', a_1')$, joten määritelmän 2.6 perusteella saadaan yhtäpitäväksi $\mathfrak{M}'_U, (a_0', a_1') \Vdash \otimes\psi_1$.

Olkoon kaava $\phi = \psi_1 \circ \psi$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}_U, (a_0, a_1) \Vdash \psi_1 \circ \psi$. Tällöin määritelmän 2.6 mukaan on yhtäpitävää, että olemassa sellainen piste $u \in W_U$, siten että $\mathfrak{M}_U, (a_0, u) \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}_U, (u, a_1) \Vdash \psi$. Määritelmän 3.11 kohdan (4) ja induktio-oletuksen perusteella on nyt olemassa sellainen $u' \in W_U'$, että $\mathfrak{M}'_U, (a_0', u') \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}'_U, (u', a_1') \Vdash \psi$. Tämä puolestaan on määritelmän 2.6 perusteella yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathfrak{M}'_U, (a_0', a_1') \Vdash \psi_1 \circ \psi$.

Todistuksen toinen suunta menee vastaavasti määritelmän 3.11 kohdan (5) mukaan. □

Edellisessä alaluvussa 3.1 määriteltiin erillinen yhdiste, generoitu alimalli ja p-morfismi. Bisimulaatio säilyy näissä kaikissa mallikonstruktioissa sekä modaalisilla että kaksiulotteisilla nuolimalleilla.

Lause 3.13. *Olkoot mallit* $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ *ja* $\mathfrak{M}' = (W', C', R', I', V')$ *ja* $\mathfrak{M}_i = (W_i, C_i, R_i, I_i, V_i), (i \in J)$ *nuolimalleja. Tällöin pätee:*

(1) *Kaikilla* $i \in J$ *ja* $a \in \mathfrak{M}_i$*,* $\mathfrak{M}_i, a \underline{\leftrightarrow} \biguplus_i \mathfrak{M}_i, a$*.*

(2) *Jos* $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$*, niin* $\mathfrak{M}', a \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}, a$*, kaikilla* $a \in \mathfrak{M}'$*.*

(3) *Jos* $f : \mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$*, niin* $\mathfrak{M}, a \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', f(a)$ *kaikilla* $a \in \mathfrak{M}$*.*

Todistus. Sivuutetaan. □

3.3 Standardikäännös

Jokaisella modaalisella kielellä on sitä vastaava korrespondenssikieli, ensimmäisen tai toisen kertaluvun kieli, joka luo sillan modaalisen maailman ja klassisen logiikan välille. Tämän vuoksi myös nuolilogiikan kaavat voidaan kääntää standardikäännöksellä ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikielelle $\mathcal{L}_1(Q)$, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 3.14. Olkoon $NL = (S, Q)$ sellainen nuolilogiikan kieli, missä S on ensimmäisessä luvussa määritelty similariteettityyppi ja Q on äärellinen joukko propositiosymboleja. Korrespondenssikieli $\mathcal{L}_1(Q)$ on kieli, jossa jokaista propositiosymbolia p vastaa yksipaikkainen relaatiosymboli P, identiteettirelaatiota vastaa yksipaikkainen relaatio I ja kaksipaikkainen relaatio R sekä kolmipaikkainen relaatio C siirtyvät sellaisenaan. Merkitään $\alpha(x)$ tarkoittamaan sellaista ensimmäisen kertaluvun kaavaa α, jossa on yksi vapaa muuttuja x.

Nuolilogiikan malleja voidaan siis pitää korrespondenssikielen $\mathcal{L}_1(Q)$ malleina, sillä mallin $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V))$ relaatiot C, R ja I voidaan tulkita nuolimallin vastaaviksi relaatioiksi C, R ja I ja valuaatiota $V(p_i)$ voidaan käyttää tulkitsemaan predikaattisymboli P_i.

Määritellään seuraavaksi standardikäännös, jolla voidaan kääntää nuolilogiikan kaavat kielen $\mathcal{L}_1(Q)$ kaavoiksi.

Määritelmä 3.15. (Standardikäännös) Olkoon x ensimmäisen kertaluvun muuttuja. Standardikäännös ST_x, joka kääntää nuolilogiikan kaavat kielen $\mathcal{L}_1(Q)$ ensimmäisen kertaluvun kaavoiksi määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
ST_x(p) &= Px \\
ST_x(\iota\delta) &= Ix \\
ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi) \\
ST_x(\phi \vee \psi_1) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi_1) \\
ST_x(\otimes\phi) &= \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi)) \\
ST_x(\phi \circ \psi_1) &= \exists y \exists z(Cxyz \wedge ST_y(\phi) \wedge ST_z(\psi_1)),
\end{aligned}$$

missä y ja z ovat uusia muuttujia, joita ei ole vielä käytetty käännöksessä. Standardikäännökset ST_y ja ST_z määritellään vastaavasti.

Esimerkki 3.16. Kaavojen $\otimes\phi$ ja $\phi \circ \psi_1$ duaalien $\underline{\otimes}\phi$ ja $\phi \mathbin{\underline{\circ}} \psi_1$ standardikäännökset kielelle $\mathcal{L}_1(Q)$ ovat seuraavat:

$$\begin{aligned}
ST_x(\underline{\otimes}\phi) = ST_x(\neg \otimes \neg\phi) &= \neg ST_x(\otimes\neg\phi) \\
&= \neg\exists y(Rxy \wedge ST_y(\neg\phi)) \\
&= \neg\exists y(Rxy \wedge \neg ST_y(\phi)) \\
&= \forall y \neg(Rxy \wedge \neg ST_y(\phi)) \\
&= \forall y(Rxy \rightarrow ST_y(\phi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ST_x(\phi \mathbin{\underline{\circ}} \psi_1) = ST_x(\neg(\neg\phi \circ \neg\psi_1)) &= \neg ST_x(\neg\phi \circ \neg\psi_1) \\
&= \neg\exists y \exists z(Cxyz \wedge ST_y(\neg\phi) \wedge ST_z(\neg\psi_1)) \\
&= \neg\exists y \exists z(Cxyz \wedge \neg ST_y(\phi) \wedge \neg ST_z(\psi_1)) \\
&= \forall y \forall z \neg(Cxyz \wedge \neg((ST_y(\phi) \vee ST_z(\psi_1))) \\
&= \forall y \forall z(Cxyz \rightarrow ((ST_y(\phi) \vee ST_z(\psi_1)))
\end{aligned}$$

Modaalisten mallien ja ensimmäisen kertaluvun mallien välillä ei ole matemaattista eroa, koska molemmat ovat yksinkertaisesti relationaalisia struktuureita. Tämän vuoksi voidaan merkitä $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[a]$, joka tarkoittaa, että ensimmäisen kertaluvun kaava $ST_x(\phi)$ on totta mallissa $\mathfrak{M}$, kun vapaa muuttuja x tulkitaan nuoleksi a.

Lause 3.17. (Korrespondenssi malleissa)(vrt. [1, s. 85]) *Olkoon ϕ nuolilogiikan kaava ja $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ nuolimalli. Tällöin kaikille nuolille $a \in \mathfrak{M}$ pätee:*

(i) $\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[a]$.

(ii) $\mathfrak{M} \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \forall x ST_x(\phi)$.

Todistus. Todistetaan induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Olkoon $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ nuolimalli ja $a \in \mathfrak{M}$.

(i) Oletetaan ensin, että kaava ϕ on propositiosymboli p. Tällöin on yhtäpitävää, että $\mathfrak{M}, a \Vdash p$, mikä on yhtäpitävää $a \in V(p)$ kanssa. Kielessä $\mathcal{L}_1(Q)$ predikaattisymbolin P tulkinta saadaan valuaatiosta $V(p)$, joten edellinen on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathfrak{M} \vDash Px[a]$. Standardikäännöksen määritelmästä saadaan edellinen yhtäpitäväksi $\mathfrak{M} \vDash ST_x(p)$ kanssa.

Oletetaan sitten, että kaava ϕ on modaalinen vakio $\iota\delta$. Nyt määritelmän 1.6 perusteella on yhtäpitävää, että $\mathfrak{M}, a \Vdash Ia$. Nuolimallin identiteettirelaatiota vastaa relaatio I, joten edellisen kanssa yhtäpitävää on $\mathfrak{M} \vDash ST_x Ix[a]$, mikä saadaan standardikäännöksen määritelmän perusteella yhtäpitäväksi $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\iota\delta)$ kanssa.

Tehdään nyt induktio-oletus, että kun vapaa muuttuja x tulkitaan nuoleksi a, niin väite pätee kaavoille ψ_1 ja ψ_2 ja kaikille nuolille $a \in \mathfrak{M}$.

Kun kaava ϕ on $\neg\psi_1$, niin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \neg\psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \nVdash \psi_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \nvDash ST_x(\psi_1)[a] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \neg ST_x(\psi_1)[a] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\neg\psi_1)[a] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[a].
\end{aligned}$$

Kun kaava ϕ on $\psi_1 \vee \psi_2$, niin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \vee \psi_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \text{ tai } \mathfrak{M}, a \Vdash \psi_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\psi_1)[a] \text{ tai } \mathfrak{M} \vDash ST_x(\psi_2)[a] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash (ST_x(\psi_1)[a] \vee ST_x(\psi_2)[a]) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\psi_1 \vee \psi_2)[a] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[a].
\end{aligned}$$

Todistetaan tapaus $\phi = \otimes\psi_1$. Oletetaan, että on voimassa $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\psi_1$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että on olemassa nuoli $b \in W$, siten että Rab ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$. Induktio-oletuksen perusteella tällöin on yhtäpitävää, että $\mathfrak{M} \vDash ST_y(\psi_1)[b]$, missä muuttuja y tulkitaan nuoleksi b ja koska nuolille a ja b pätee relaatio Rab, niin kaava Rxy pätee. Standardikäännöksen määritelmän mukaan nyt saadaan edellisen kanssa yhtäpitäväksi, että pätee $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\otimes\phi)[a]$.

Lopuksi todistetaan vielä tapaus $\phi = \psi_1 \circ \psi_2$. Oletetaan, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \psi_1 \circ \psi_2$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että on olemassa nuolet $b, c \in W$, siten että $Cabc$ ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \psi_1$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi_2$. Nyt induktio-oletuksen mukaan saadaan yhtäpitäväksi edellisen kanssa, että pätee $\mathfrak{M} \vDash ST_y(\psi_1)[b]$ ja $\mathfrak{M} \vDash ST_z(\psi)[c]$. Tällöin siis muuttujat y ja z tulkitaan nuoliksi b ja c ja koska nuolet a, b ja c kuuluvat relaatioon C, niin kaava $Cxyz$ on voimassa. Nyt standardikäännöksen määritelmän mukaan on yhtäpitävää, että on voimassa $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\psi_1 \circ \psi_2)[a]$.

(ii) Oletetaan, että on voimassa $\mathfrak{M} \Vdash \phi$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kaava ϕ on voimassa kaikissa mallin $\mathfrak{M}$ nuolissa a, mikä tarkoittaa, että kaikilla nuolilla $a \in W$ pätee $\mathfrak{M} \Vdash \phi$. Tämä voidaan kohdan (i) perusteella kirjoittaa muotoon $\mathfrak{M} \vDash \forall x ST_x(\phi)$.

$\square$

4 Kehysmääriteltävyys

Validisuuden käsite, joka määriteltiin luvun 1 kohdassa 1.7 ja 1.8, auttaa pääsemään käsiksi kehyksiin ja niiden ominaisuuksiin. Nuolilogiikan kaava tai kaavajoukko voi määritellä kehysten luokan, mikä tarkoittaa, että kaava tai kaavajoukko on validi täsmälleen niissä kehyksissä, jotka kuuluvat siihen luokkaan.Tätä kutsutaan kehysmääriteltävyydeksi. Määriteltäessä kehysten luokkia jokainen nuolilogiikan kaava vastaa toisen kertaluvun kaavaa. Vaikka toisen kertaluvun kaavalla on joskus ensimmäisen kertaluvun vastine, niin suhteellisen yksinkertaiset nuolilogiikan kaavat voivat määritellä kehysluokkia, joita ensimmäisen kertaluvun kaavat eivät voi.

Määritelmä 4.1. Nuolilogiikan kaava ϕ määrittelee (karakterisoi) luokan K kehyksiä, jos kaikille kehyksille $\mathfrak{F}$ pätee, että kehys $\mathfrak{F}$ kuuluu luokkaan K jos ja vain jos $\mathfrak{F} \Vdash \phi$. Kaavajoukko Γ määrittelee luokan K, jos kehys $\mathfrak{F}$ kuuluu luokkaan K jos ja vain jos $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$. Kehysten luokka on määriteltävissä jos on olemassa sellainen joukko kaavoja, joka määrittelee sen.

Määritelmä 4.2. Nuolilogiikan kaava ϕ määrittelee (karakterisoi) luokan K kehyksiä suhteessa kehysluokkaan C, jos kaikille kehysluokkaan C kuuluville kehyksille $\mathfrak{F}$ pätee, että kehys $\mathfrak{F}$ kuuluu luokkaan K jos ja vain jos $\mathfrak{F} \Vdash \phi$.

Kaavajoukko Γ määrittelee kehysluokan K suhteessa kehysluokkaan C, jos kaikille kehyksille $\mathfrak{F}$, jotka kuuluvat kehysluokkaan C pätee, että kehys $\mathfrak{F}$ kuuluu luokkaan K jos ja vain jos $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$.

Määritelmä 4.3. (Kehyskielet) Ensimmäisen kertaluvun kehyskieli $\mathcal{L}_1$ on sellainen korrespondenssikieli kehyksille, jossa identiteettirelaatiota vastaa yksipaikkainen relaatio I ja kaksipaikkaista relaatiota R sekä kolmipaikkaista relaatiota C käytetään sellaisenaan. Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. Monadinen toisen kertaluvun kieli $\mathcal{L}_2(\Phi)$ saadaan lisäämällä kieleen $\mathcal{L}_1$ joukko Φ, joka on kokoelma monadisia predikaattimuuttujia. Yleisesti kieltä $\mathcal{L}_2(\Phi)$ kutsutaan toisen kertaluvun korrespondenssikieleksi tai toisen kertaluvun kehyskieleksi.

Määritelmä 4.4. (Kehysvastaavuus) Jos kehysten luokka voidaan määritellä nuolilogiikan kaavalla ϕ ja kehyskielen kaavalla t niin tällöin kaavat ϕ ja t ovat toistensa globaaleja kehysvastineita.

Kehysten tasolla nuolilogiikka voidaan ymmärtää klassisen monadisen toisen kertaluvun logiikan osana. Validisuus on määritelty kvantifioimalla kaikki universumin maailmat ja kaikki mahdolliset valuaatiot ja koska valuaatio liittää jokaiseen propositiomuuttujaan osajoukon kehyksestä, niin kun kvantifioidaan kaikki valuaatiot niin itseasiassa kvantifioidaan kaikki kehyksen osajoukot. Eli monadinen toisen kertaluvun kvantifiointi on selvästi yhteenliitetty jo validisuuden määritelmän kanssa.

4.1 Toisen kertaluvun käännös

Edellisen luvun kappaleessa 3.3 määriteltiin standardikäännös, jolla voidaan kääntää nuolilogiikan kieli ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikieleksi. Standardikäännös määriteltiin mallien välillä ja nyt tarkastelemalla tilannetta kehysten tasolla voidaan propositiosymbolia p vastaavaa predikaattisymbolia P pitää toisen kertaluvun muuttujana, joka voidaan kvantifioida. Tällöin standardikäännöksellä saadaan käännös toisen kertaluvun predikaattilogiikan kielelle $\mathcal{L}_2(Q)$.

Lause 4.5. (vrt. [1, s. 135]) *Olkoon ϕ nuolilogiikan kaava. Tällöin kaikille kehyksille $\mathfrak{F}$ ja kaikille nuolille a kehyksessä $\mathfrak{F}$ pätee:*

(i) $\mathfrak{F}, a \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)[a]$.

(ii) $\mathfrak{F} \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(\phi)$.

Toisen kertaluvun kvanttorit sitovat toisen kertaluvun muuttujia P_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, jotka vastaavat kaavassa ϕ esiintyviä propositiomuuttujia p.

Todistus. Todistetaan ensimmäinen kohta ensin toiseen suuntaan ja sitten toiseen. Toinen kohta todistetaan ensimmäistä apuna käyttäen.

(i) Olkoon malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ kehykseen $\mathfrak{F}$ perustuva malli ja olkoon a nuoli kehyksessä $\mathfrak{F}$. Oletetaan ensin, että pätee $\mathfrak{F}, a \Vdash \phi$. Tällöin kaikilla valuaatiolla V on voimassa $(\mathfrak{F}, V), a \Vdash \phi$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon $\mathfrak{M}, a \Vdash \phi$. Lauseen 3.17 perusteella on siis voimassa $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[a]$. Tässä toisen kertaluvun mallissa propositiosymbolia p_i vastaa predikaattisymboli P_i, jonka tulkinta saadaan valuaatiosta $V(p_i)$ ja samoin kuin mallien kohdalla muuttuja x tulkitaan nuoleksi a. Nyt siis kaikilla malleilla $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja kaikilla valuaatioilla V pätee $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V), a \Vdash \phi$, joten kaikilla valuaatiota vastaavilla muuttujilla P_i pätee $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, P_1, \ldots, P_n) \vDash ST_x(\phi)[a]$. Edellinen voidaan kirjoittaa muotoon $\mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)[a]$.

Oletetaan sitten, että pätee $\mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)[a]$. Olkoon valuaatio V sellainen, että $V(p_i) = P_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin kaikilla malleilla $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, P_1, \ldots, P_n)$ pätee $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[a]$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V) \vDash ST_x(\phi)[a]$. Nyt lauseen 3.17 perusteella on voimassa $\mathfrak{M}, a \Vdash \phi$. Tässä nuolilogiikan mallissa predikaattisymbolia P_i vastaa propositiosymboli p_i, siten että pätee $V(p_i) = P_i$ ja muuttuja x tulkitaan nuoleksi a. Nyt kaikilla malleilla $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, P_1, \ldots, P_n)$ ja kaikilla tulkinnoilla $P_i = V(p_i)$ on voimassa $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, P_1, \ldots, P_n) \vDash ST_x(\phi)[a]$, joten kaikilla valuaatioilla V pätee $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V), a \Vdash \phi$. Saadaan siis $\mathfrak{F}, a \Vdash \phi$.

(ii) Oletetaan, että pätee $\mathfrak{F} \Vdash \phi$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kaava ϕ on voimassa kaikissa kehyksen $\mathfrak{F}$ nuolissa a eli kaikilla nuolilla $a \in W$ pätee $\mathfrak{F} \Vdash \phi$. Kohdan (i) perusteella tämä voidaan kirjoittaa muotoon $\mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)[a]$. Koska edellinen pätee kaikilla nuolilla ja nuolen a tulkinta toisen kertaluvun kehyksessä on x, niin $\mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)$ pätee kaikilla muuttujan x tulkinnoilla. Saadaan siis $\mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(\phi)$.

□

Toisen kertaluvun kielen $\mathcal{L}_2(Q)$ kaavaa $\forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)$ olisi vaivatonta kutsua kaavan ϕ standardikäännökseksi, koska on yleensä selvää liikutaanko mallien vai kehysten tasolla. On kuitenkin parempi käyttää kaavasta $\forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)$ nimitystä toisen kertaluvun käännös ja jättää termi standardikäännös tarkoittamaan standardikäännöksellä saatua korrespondenssikielen $\mathcal{L}_1(Q)$ kaavaa.

Oikeastaan määritelmän 4.4 vastaavuus on määritelty globaalisti. Kaavat ovat kehysvastineita, jos ne ovat valideja täsmälleen samoissa kehyksissä, mutta on luonnollisempaa määritellä, että validisuus pätee lokaalisti.

Määritelmä 4.6. (Lokaali kehysvastaavuus) Olkoon kaava ϕ nuolilogiikan kaava ja olkoon kaava $\alpha(x)$ vastaavan ensimmäisen tai toisen kertaluvun kielen kaava, jossa muuttuja x on ainoa vapaa muuttuja kaavassa α. Tällöin kaavat ϕ ja $\alpha(x)$ ovat toistensa lokaaleja kehysvastineita, jos mille tahansa kehykselle $\mathfrak{F}$ ja mille tahansa nuolelle a pätee:

$$\mathfrak{F}, a \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{F}, a \vDash \alpha(x).$$

Määritelmä 4.7. Jos kaava $\alpha(x)$ on kaavan ϕ lokaali kehysvastine niin $\forall x\ \alpha(x)$ on kaavan ϕ globaali kehysvastine. Jos siis kaavalla ϕ on ensimmäisen kertaluvun lokaali vastine, niin sillä on myös ensimmäisen kertaluvun globaali vastine.

Usein toisen kertaluvun käännökselle on ensimmäisen kertaluvun vastine. Nuolilogiikassa on kaavoja, joita kutsutaan Sahlqvist-kaavoiksi. Näillä kaavoilla on juuri sellainen ominaisuus, että toisen kertaluvun käännöksellä saadut toisen kertaluvun kaavat voidaan muuttaa algoritmilla vastaaviksi ensimmäisen kertaluvun kaavoiksi. Tällöin jokainen Sahlqvist-kaava määrittelee ensimmäisen kertaluvun ominaisuuden. Lisäksi logiikalle, joka on aksiomatisoitu käyttäen Sahlqvist-muodossa olevia kaavoja saadaan suoraan täydellisyystulos.

4.2 Erilliset yhdisteet, generoitu alikehys ja p-morfismi

Edellisessä luvussa määriteltiin mallien tasolla erillinen yhdiste, generoitu alimalli ja p-morfismi. Ne voidaan määritellä myös kehysten tasolla, jolloin ne säilyttävät validisuuden. Näitä kehysominaisuuksia käytetään testaamaan määriteltävyyttä, sillä jos validisuus ei säily kehysoperaatioissa, niin tällöin ominaisuus ei ole modaalisesti määriteltävissä. Kehyksiä koskevat määritelmät erillisille yhdisteille, generoidulle alikehykselle ja p-morfismille saadaan helposti määritelmistä 3.2, 3.4 ja 3.6 jättämällä pois valuaatioita koskevat kohdat.

Määritelmä 4.8. (Erillinen yhdiste) Erillisten kehysten $\mathfrak{F}_i = (W_i, I_i, R_i, C_i)$, $(i \in J)$ erillinen yhdiste on $\uplus_i \mathfrak{F}_i = (W, C, R, I)$, missä $W = \cup_{i \in J} W_i$, $C = \cup_{i \in J} C_i$, $R = \cup_{i \in J} R_i$ ja $I = \cup_{i \in J} I_i$.

Määritelmä 4.9. (Generoitu alikehys) Kehyksen $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$ generoitu alikehys on kehys $\mathfrak{F}' = (W', C', R', I')$, merkitään $\mathfrak{F}' \rightarrowtail \mathfrak{F}$, jos kehys $\mathfrak{F}'$ on kehyksen $\mathfrak{F}$ alikehys ja seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) Jos $a \in W'$ ja $Cabc$ niin $b, c \in W'$,

(2) Jos $a \in W'$ ja Rab niin $b \in W'$.

Kun $\mathfrak{F}$ on kehys ja A on kehyksen $\mathfrak{F}$ universumin osajoukko, niin tällöin joukon A generoima alikehys, jota merkitään $\mathfrak{F}_A$, on sellainen kehyksen $\mathfrak{F}$ generoitu alikehys, jonka universumi W' on pienin joukko, joka sisältää joukon A ja toteuttaa lisäksi edellä esitetyt ehdot. Yksiön generoimaa kehystä merkitään $\mathfrak{F}_a$ ja kutsutaan pistegeneroiduksi kehykseksi.

Määritelmä 4.10. (p-morfismi) P-morfismi kehykseltä $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$ kehykselle $\mathfrak{F}' = (W', C', R', I')$ on kuvaus $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $Ia \Leftrightarrow I' f(a)$

(2) (i) Jos $Cabc$ niin $C^{'}f(a)f(b)f(c)$.
(ii) Jos Rab niin $R^{'}f(a)f(b)$.

(3) (i) Jos $C^{'}f(a)b'c'$ niin on olemassa sellaiset $b, c \in W$, että $Cabc$ ja $f(b) = b'$ ja $f(c) = c'$.
(ii) Jos $R^{'}f(a)b'$ niin on olemassa sellainen $b \in W$, että Rab ja $f(b) = b'$.

Kehys $\mathfrak{F}^{'}$ on kehyksen $\mathfrak{F}$ p-morfinen kuva, merkitään $\mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}^{'}$, jos on olemassa surjektiivinen p-morfismi kehykseltä $\mathfrak{F}$ kehykselle $\mathfrak{F}^{'}$.

Edellisten määritelmien kaavojen validisuus säilyy erillisissä yhdisteissä, generoiduissa alikehyksissä ja p-morfisissa kuvissa.

Lause 4.11. (vrt. [1, s. 139]) *Olkoon ϕ nuolilogiikan kaava.*

(i) *Olkoon $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in J\}$ kehysten joukko.*
Tällöin $\mathfrak{F}_i \Vdash \phi$ kaikilla $i \in J, \Rightarrow \biguplus_i \mathfrak{F}_i \Vdash \phi$.

(ii) *Oletetaan, että $\mathfrak{F}^{'} \rightarrowtail \mathfrak{F}$. Tällöin $\mathfrak{F} \Vdash \phi \Rightarrow \mathfrak{F}^{'} \Vdash \phi$.*

(iii) *Oletetaan, että $\mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}^{'}$. Tällöin $\mathfrak{F} \Vdash \phi \Rightarrow \mathfrak{F}^{'} \Vdash \phi$.*

Todistus.

(i) Oletetaan, että $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in J\}$ on kehysten joukko ja $\mathfrak{F}_i \Vdash \phi$, kaikilla $i \in J$. Merkitään $\mathfrak{F} = \biguplus \mathfrak{F}_i$. Oletetaan, että kaava ϕ ei ole validi kehyksessä $\mathfrak{F}$. On siis oltava sellaiset valuaatio V ja nuoli a_i, että $(\mathfrak{F}, V), a_i \nVdash \phi$. Määritellään valuaatio V_i seuraavasti:

$$V_i(p) = V(p) \mid W_i.$$

Määritellään nuolibisimulaatio $Z = \{(a, a_i) \in W_i \times W\}$ mallien $(\mathfrak{F}, V)$ ja $(\mathfrak{F}_i, V_i)$ välille. Lauseen 3.1 perusteella relaatio Z on bisimulaatio. Tällöin $(\mathfrak{F}_i, V_i), a \nVdash \phi$. Kontraposition perusteella tulos pätee.

(ii) Oletetaan, että kehys $\mathfrak{F}^{'}$ on kehyksen $\mathfrak{F}$ generoitu alikehys ja että $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ ja oletetaan, että valuaatio V on kehyksen $\mathfrak{F}$ valuaatio. Oletetaan, että kaava ϕ ei ole validi kehyksessä $\mathfrak{F}^{'}$. Tällöin on oltava sellainen valuaatio $V^{'}$ ja sellainen nuoli a', että $(\mathfrak{F}^{'}, V^{'}), a' \nVdash \phi$. Määritellään kehyksen $\mathfrak{F}$ valuaatio V seuraavalla tavalla:

$$V(p) = V^{'}(p).$$

Koska malli $(\mathfrak{F}^{'}, V^{'})$ on mallin $(\mathfrak{F}, V)$ generoitu alimalli, niin on voimassa, että nuoli $a \in W^{'}$, joten lauseen 3.5 perusteella $(\mathfrak{F}, V), a \nVdash \phi$. Kontraposition perusteella tulos pätee.

(iii) Oletetaan, että kuvaus f on surjektiivinen p-morfismi kehykseltä $\mathfrak{F}$ kehykselle $\mathfrak{F}^{'}$ ja $\mathfrak{F} \Vdash \phi$. Oletetaan, että kaava ϕ ei ole validi kehyksessä $\mathfrak{F}^{'}$. On siis oltava sellainen valuaatio $V^{'}$ ja sellainen nuoli a', että $(\mathfrak{F}^{'}, V^{'}), a' \nVdash \phi$. Määritellään valuaatio V kehyksessä $\mathfrak{F}$ seuraavasti:

$$V(p_i) = \{x \in W \mid f(x) \in V^{'}(p_i)\}$$

Tällöin kuvaus f on p-morfismi mallien $(\mathfrak{F}, V)$ ja $(\mathfrak{F}^{'}, V^{'})$ välillä. Nyt koska kuvaus f on surjektiivinen, niin on olemassa sellainen nuoli a, että $f(a) = a'$. Lauseen 3.7 perusteella $(\mathfrak{F}, V), a \nVdash \phi$, joten kontraposition perusteella tulos pätee.

$\square$

4.3 Vastaavuustuloksia

Luvussa 1 annettiin määritelmät kaavan ϕ ja kaavajoukon Σ validisuudelle ja aiemmin tässä luvussa määriteltiin kehysmääriteltävyys, joka siis tarkoittaa, että tietyssä kehyksessä validi kaava voi määritellä tietyn kehysten luokan. Jos kaava tai kaavajoukko määrittelee tietyn kehysluokan, niin tällöin tämä kehysluokka on modaalisesti määriteltävissä. Yleisesti puhutaan ominaisuuksista, joita tietyillä kehysluokilla on, ja sanotaan, että nuolilogiikan kaava ϕ tai kaavajoukko Σ määrittelee ominaisuuden $\mathcal{O}$, jos se määrittelee niiden kehysten luokan, jolla on tämä ominaisuus. Esimerkiksi kaava $\neg \otimes p \to \otimes\neg p$ määrittelee seriaalisten kehysten luokan.

Seuraavaksi tarkastellaan joukkoa aksioomia $(A1), \ldots (A9)$. Nämä aksioomat määrittelevät sellaisia nuolikehysten ominaisuuksia, joita nuolet näissä nuolikehyksissä toteuttavat.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(A1)} & \neg \otimes p & \to \ \otimes\neg p \\
\text{(A2)} & \otimes\neg p & \to \ \neg \otimes p \\
\text{(A3)} & \otimes \otimes p & \to \ p \\
\text{(A4)} & \otimes(p \circ q) & \to \ \otimes q \circ \otimes p \\
\text{(A5)} & p \circ \neg(\otimes p \circ q) & \to \ \neg q \\
\text{(A6)} & \iota\delta & \to \ \otimes\iota\delta \\
\text{(A7)} & \iota\delta \circ p & \to \ p \\
\text{(A8)} & p & \to \ \iota\delta \circ p \\
\text{(A9)} & p \circ (q \circ r) & \leftrightarrow \ (p \circ q) \circ r
\end{array}
$$

Kaava $(A1)$ määrittelee ne nuolikehykset $\mathfrak{F}$, joissa kääntörelaatio R on seriaalinen, kaava $(A2)$ määrittelee ne nuolikehykset, joissa relaatio R on funktionaalinen ja kaava $(A3)$ määrittelee ne nuolikehykset, joissa relaatio R on funktionaalinen ja involutiivinen. Itseasiassa relaatio R on tällöin funktio f, jolle pätee $f(f(x)) = x$.

Seuraavissa lauseissa annetaan aksioomia ja nuolikehysten ominaisuuksia, joita aksioomat karakterisoivat. Tällöin jokainen kaavoista $(A1), \ldots (A9)$ vastaa tiettyä nuolikehyksen ominaisuutta, merkitään tätä vastaavuutta symbolilla $(\mathcal{O})$.

Lause 4.12. (vrt. [3, s. 18]) *Olkoon* $\mathfrak{F} = (W, R, C, I)$, *tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:*

$(\mathcal{O}_1)$ $\mathfrak{F} \Vdash \neg \otimes p \to \otimes\neg p \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{F} \vDash \forall x \exists y Rxy,$

$(\mathcal{O}_2)$ $\mathfrak{F} \Vdash \otimes\neg p \to \neg \otimes p \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{F} \vDash \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Rxz) \to y = z),$

Oletetaan, että relaatio R *on seriaalinen ja funktionaalinen ja merkitään relaatiota* R *funktiosymbolilla* f*, tällöin on voimassa:*
$(\mathcal{O}_3)$ $\mathfrak{F} \Vdash \otimes \otimes p \to p \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{F} \vDash \forall x f(f(x)) = x.$

Todistus. Todistetaan kohta $(\mathcal{O}_1)$. Oletetaan, ensin, että pätee $\mathfrak{F} \vDash \forall x \exists y Rxy$. Olkoot malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$ sellaisia, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg \otimes p$. Nyt oletuksen perusteella on olemassa sellainen nuoli b, että Rab ja operaattorin määritelmän mukaan ei päde, että on olemassa sellainen $b \in W$, että $\mathfrak{M}, b \Vdash p$ eli jokaisella nuolella pätee $\mathfrak{M}, b \Vdash \neg p$. Tästä seuraa, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\neg p$.

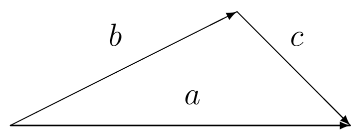
Todistetaan sitten toinen suunta. Oletetaan, että R ei ole seriaalinen. On siis olemassa nuoli $a \in W$, jolla ei ole sellaista nuolta $b \in W$, että Rab. Olkoon $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ sellainen malli, että $V(p) = \emptyset$. Tällöin pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg \otimes p$, mutta ei päde $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\neg p$, koska ei ole olemassa yhtään nuolta, jossa pätisi $\neg p$.

Todistetaan sitten ($\mathcal{O}_2$). Oletetaan, että R on funktionaalinen. Olkoot malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$ sellaisia, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\neg p$. Tällöin on siis olemassa sellainen nuoli b, että pätee Rab ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \neg p$. Tehdään vastaoletus, että $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes p$. Nyt on siis oltava sellainen nuoli c, että Rac ja $\mathfrak{M}, c \Vdash p$. Koska R on funktionaalinen, niin on oltava $b = c$, jolloin $\mathfrak{M}, b \Vdash \neg p$ ja $\mathfrak{M}, b \Vdash p$. Tämä on ristiriita, joten ei päde $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes p$ eli $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg \otimes p$.

Todistetaan toinen suunta. Oletetaan, että R ei ole funktionaalinen. Tällöin on olemassa sellaiset a, b ja $c \in W$, että Rab ja Rac mutta $b \neq c$. Olkoon $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ sellainen malli, että $V(p) = \{b\}$. Tällöin $\mathfrak{M}, b \Vdash p$ ja $\mathfrak{M}, c \nVdash p$. Totuusmääritelmän perusteella pätee nyt $\mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\neg p$, mutta $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg \otimes p$ ei päde.

Kohta ($\mathcal{O}_3$) saadaan vastaavalla tavalla. $\square$

Kehystä $\mathfrak{F}$ voidaan kutsua f-kehykseksi, jos sen relaatio on seriaalinen, funktionaalinen ja involutiivinen. Merkitään tälläistä kehystä $\mathfrak{F} = (W, C, f, I)$ eli korvataan relaatio R funktiolla f. Tutkitaan seuraavaksi nuolten a, b ja c muodostamaa C-kolmikkoa (a, b, c) kuvan 8 mukaisessa f-kehyksessä:



Kuva 8. Kolmikko abc

Kaikki seuraavat joukon CYC_{abc} kolmikot kuuluvat relaatioon C:

$$CYC_{abc} = \{(a, b, c), (fa, fc, fb), (b, a, fc), (fb, c, fa), (c, fb, a), (fc, fa, b)\}.$$

Tämä ominaisuus osoittaa hyvin konkreettisella tavalla nuolilogiikan yhteyden relaatioalgebraan, sillä jo vuonna 1950 Lyndon nimitti sykleiksi sellaisia kolmikkoja (a, b, c), jotka toteuttavat ehdon $CYC_{abc} \subseteq C$. Tämä ominaisuus $CYC_{abc} \subseteq C$ pätee kaikille nuolille a, b ja c, joille on voimassa $Cabc$ ja se voidaan muotoilla myös ominaisuuksina ($\mathcal{O}_4$) ja ($\mathcal{O}_5$).

Lause 4.13. (vrt. [3, s. 19]) *Olkoon $\mathfrak{F} = (W, C, f, I)$ f-kehys. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa kaikille nuolille a, b ja c, joille on voimassa $Cabc$:*

($\mathcal{O}_4$) $\mathfrak{F} \Vdash \otimes(p \circ q) \to \otimes q \circ \otimes p \Leftrightarrow \mathfrak{F} \vDash \forall xyz(Cfxyz \to Cxfzfy)$,

($\mathcal{O}_5$) $\mathfrak{F} \Vdash p \circ \neg(\otimes p \circ q) \to \neg q \Leftrightarrow \mathfrak{F} \vDash \forall xyz(Cxyz \to Czfyx)$.

Todistus. Todistetaan kohta ($\mathcal{O}_5$). Oletetaan ensin, että on voimassa $\mathfrak{F} \vDash \forall xyz(Cxyz \to Czfyx)$. Olkoot malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$ sellaisia, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash p \circ \neg(\otimes p \circ q)$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, a \Vdash q$ ja osoitetaan, että tästä seuraa ristiriita. On oltava sellaiset nuolet b ja $c \in W$, että pätee $Cabc$, $\mathfrak{M}, b \Vdash p$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash \neg(\otimes p \circ q)$. Täten $\mathfrak{M}, fb \Vdash \otimes p$, ja koska oletuksen perusteella pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash q$ ja $Ccfba$, niin saadaan $\mathfrak{M}, c \Vdash \otimes p \circ q$, mikä on ristiriita.

Todistetaan toinen suunta. Oletetaan, että $\mathfrak{F} \nvDash \forall xyz(Cxyz \to Czfyz)$. On siis oltava sellaiset nuolet a, b ja $c \in W$, että $Cabc$, mutta ei $Ccfba$. Kun valuaatio on $V(p) = \{b\}$ ja $V(q) = \{a\}$, niin tällöin nuoli fb on ainoa, missä $\otimes p$ on totta ja nuoli a on ainoa, missä

$\mathfrak{M}, a \Vdash q$. Nyt nuolessa c on oltava epätotta $\otimes p \circ q$, joten $\mathfrak{M}, a \Vdash p \circ \neg(\otimes p \circ q)$. Koska myös $\mathfrak{M}, a \Vdash q$, saadaan $\mathfrak{F} \models \forall x \forall y \forall z (Cxyz \to Czfyx)$.

Todistetaan vielä kohdan $(\mathcal{O}_4)$ toinen suunta, sillä kaava $(A4)$ on sama, jolle todistettiin validisuus kaksiulotteisessa kehyksessä. Oletetaan, että $\mathfrak{F} \Vdash \forall xyz(Cfxyz \to Cxfzfy)$. Olkoot malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $fa \in W$ sellaisia, että $\mathfrak{M}, fa \Vdash \otimes(p \circ q)$. Nyt on oltava nuoli $a \in W$, siten että $\mathfrak{M}, a \Vdash p \circ q$. Oletuksen perusteella pätee $Cafcfb$, joten on voimassa $\mathfrak{M}, fc \Vdash p$ ja $\mathfrak{M}, fb \Vdash q$. Tällöin on oltava sellaiset nuolet b ja $c \in W$, että pätee $\mathfrak{M}, c \Vdash \otimes p$ ja $\mathfrak{M}, b \Vdash \otimes q$ eli saadaan $\mathfrak{M}, fa \Vdash \otimes q \circ \otimes p$. □

Lause 4.14. (vrt. [3, s. 19]) *Olkoon $\mathfrak{F} = (W, f, C, I)$ f-kehys, tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:*

$(\mathcal{O}_6)$ $\mathfrak{F} \Vdash \iota\delta \to \otimes\iota\delta \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall x(Ix \to Ifx)$,

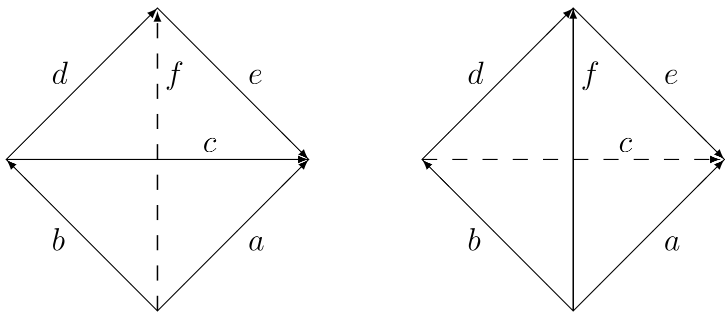
$(\mathcal{O}_7)$ $\mathfrak{F} \Vdash \iota\delta \circ p \to p \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyz((Cxyz \wedge Iy) \to x = z)$,

$(\mathcal{O}_8)$ $\mathfrak{F} \Vdash p \to \iota\delta \circ p \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall x \exists y(Iy \wedge Cxyx)$,

$(\mathcal{O}_9)$ $\mathfrak{F} \Vdash p \circ (q \circ r) \leftrightarrow (p \circ q) \circ r \Leftrightarrow$
$\mathfrak{F} \models \forall xyuv(\exists z(Cxyz \wedge Czuv) \leftrightarrow \exists w(Cxwv \wedge Cwyu)$.

Todistus. Sivuutetaan. □

Lauseen 4.14 kaikki kolme ensimmäistä kohtaa koskevat identiteettiä. F-kehysten luokassa kaava (A6) karakterisoi ne nuolikehykset, joissa identiteettinuolien käännöt ovat identiteettinuolia. Kaava (A7) määrittelee ehkä tärkeimmän identiteettinuolten ominaisuuden eli jos nuolen a voi jakaa kahteen osaan, identiteettinuoleen b ja nuoleen c, niin nuoli c onkin nuoli a itse. Ne kehykset, joissa jokaisen nuolen voi jakaa identiteettinuoleen ja itseensä määrittelee kaava (A8) ja kaava (A9) määrittelee liitännäisyyden, kuten kuvasta 9 voi nähdä.



Kuva 9: Liitännäisyys nuolikehyksessä

Johdannon kohdassa Historiaa kerrottiin nuolilogiikan läheisestä suhteesta relaatioalgebraan ja kaavat $(A1), \ldots (A9)$ on itseasiassa valittu siten, että tämä kaavajoukko määrittelee nuolikehysten muodostaman nk. kompleksialgebran relaatioalgebrojen joukossa.

Lauseen 4.11 kohdan (iii) mukaan kehysten luokka ei ole modaalisesti määriteltävissä, jos se ei ole suljettu p-morfisten kuvien suhteen. Relativioitujen neliöiden luokka, RSQ, ei ole suljettu p-morfisten kuvien suhteen, joten se ei ole määriteltävissä kaavoilla $(A1), \ldots (A9)$. Voidaan kuitenkin valita joukko kaavoja, jotka karakterisoivat luokan $\mathsf{H}_{\mathsf{RSQ}}$, joka koostuu relativioitujen neliöiden p-morfisista kuvista.

Lause 4.15. (ks. [3, s. 20]) *Olkoon kehys $\mathfrak{F}$ kaksiulotteinen nuolikehys. Tällöin kehys $\mathfrak{F}$ on relativioidun neliön p-morfinen kuva jos ja vain jos seuraavat kaavat ovat valideja kehyksessä $\mathfrak{F}$:*

$$\begin{array}{lll}
(A^r1) & \otimes\neg p & \to & \neg\otimes p \\
(A^r2) & p \wedge \iota\delta & \to & \otimes p \\
(A^r3) & \iota\delta & \to & \iota\delta \circ \iota\delta \\
(A^r4) & \iota\delta \circ p & \to & p \\
(A^r5) & p \circ \iota\delta & \to & p \\
(A^r6) & p \circ \neg\otimes p & \to & \neg\iota\delta \\
(A^r7) & ((p \wedge \iota\delta) \circ q) \circ r & \leftrightarrow & (p \wedge \iota\delta) \circ (q \circ r) \\
(A^r8) & (p \circ (q \wedge \iota\delta)) \circ r & \leftrightarrow & p \circ ((q \wedge \iota\delta) \circ r) \\
(A^r9) & (p \circ q) \circ (r \wedge \iota\delta) & \leftrightarrow & p \circ (q \circ (r \wedge \iota\delta))
\end{array}$$

Kaikilla lauseen 4.15 kaavoilla on ensimmäisen kertaluvun vastineet, koska ne ovat Sahlqvist-muodossa, (ks. [1, s. 164]). Jokainen näistä kaavoista karakterisoi siis tietyn kehysominaisuuden. Kaava (A^r1) on sama kuin kaava $(A1)$ ja se karakterisoi siis seriaaliset kaksiulotteiset kehykset. Kaavat (A^r2) ja (A^r3) määrittelevät ne kaksiulotteiset kehykset, joissa identiteettinuoli on oma kääntönsä ja voidaan jakaa kahteen osaan eli kahteen identiteettinuoleen. Kaavat (A^r4) ja (A^r5) karakterisoivat sellaiset kaksiulotteiset kehykset, joissa jokaisen nuolen voi jakaa identiteettinuoleen ja itseensä tai toisin päin. Kaava (A^r6) määrittelee ne kehykset, joissa identiteettinuoli voidaan jakaa kahteen osaan b ja c ja tällöin b ja c ovat toistensa kääntöjä. Kaavat $(A^r7), (A^r8)$ ja (A^r9) määrittelevät sellaiset kehykset, joissa nuolet, jotka osuvat samaan kohtaan jakavat saman identiteettinuolen.

Lause 4.16. (ks. [3, s. 40]) *Olkoon kehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$ kaksiulotteinen nuolikehys. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa, siten että ominaisuudet* 3 *ja* 7 − 9 *ovat voimassa vain, kun oletetaan ensin, että ominaisuudet* 4 *ja* 5 *pätevät.*

$(\mathcal{O}_1)^r$ $\mathfrak{F} \models \otimes\neg p \to \neg\otimes p \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyz((Rxy \wedge Rxz) \to y = z)$.

$(\mathcal{O}_2)^r$ $\mathfrak{F} \models p \wedge \iota\delta \to \otimes p \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall x(Ix \to Rxx)$.

$(\mathcal{O}_3)^r$ $\mathfrak{F} \models \iota\delta \to \iota\delta \circ \iota\delta \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall x(Ix \to Cxxx)$.

$(\mathcal{O}_4)^r$ $\mathfrak{F} \models \iota\delta \circ p \to p \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyz(Cxyz \wedge Iy \to x = z)$.

$(\mathcal{O}_5)^r$ $\mathfrak{F} \models p \circ \iota\delta \to p \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyz(Cxyz \wedge Iz \to x = y)$.

$(\mathcal{O}_6)^r$ $\mathfrak{F} \models p \circ \neg\otimes p \to \neg\iota\delta \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyz(Cxyz \wedge Ix \to Rzy)$.

$(\mathcal{O}_7)^r$ $\mathfrak{F} \models ((p \wedge \iota\delta) \circ q) \circ r \leftrightarrow (p \wedge \iota\delta) \circ (q \circ r)$
$\Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyzv(Cxyz \wedge Cxvx \wedge Iv \Leftrightarrow Cxyz \wedge Cyvy \wedge Iv)$.

$(\mathcal{O}_8)^r$ $\mathfrak{F} \models ((p \circ (q \wedge \iota\delta)) \circ r \leftrightarrow p \circ ((q \wedge \iota\delta) \circ r)$
$\Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyzv(Cxyz \wedge Cyyv \wedge Iv \Leftrightarrow Cxyz \wedge Czvz \wedge Iv)$.

$(\mathcal{O}_9)^r$ $\mathfrak{F} \models ((p \wedge q) \circ (r \wedge \iota\delta) \leftrightarrow p \circ (q \circ (r \wedge \iota\delta)$
$\Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall xyzv(Cxyz \wedge Czzv \wedge Iv \Leftrightarrow Cxyz \wedge Cxxv \wedge Iv)$.

Todistus. Koska lauseen kaavat ovat Sahlqvist-muodossa, niin väite seuraa Sahlqvistin teoreeman täydellisyysosasta, (ks. esim [1, s. 318-325]). □

Neliöiden luokan kohdalla tilanne on monimutkaisempi, sillä neliöiden luokkaa SQ ei voida aksiomatisoida perinteisin keinoin, on siis löydettävä erilainen lähestymistapa, että saadaan vastaavuustuloksia neliöden luokalle. Määritellään ensiksi uusi kaksipaikkainen operaattori D.

Määritelmä 4.17. Lisätään nuolilogiikan kieleen NL kaksipaikkainen operaattori D ja merkitään tätä kieltä $NL(D)$. Määritellään operaattori D seuraavalla tavalla:

$$D\phi =_{def} \neg\iota\delta \circ (\phi \circ \top) \vee (\top \circ \phi) \circ \neg\iota\delta$$

Nyt operaattorille $D\phi$ voidaan määritellä relaatio R_D kehyksessä $\mathfrak{F} = (W, C, R, R_D, I)$:

$$R_D = \{(a, b) \mid \mathfrak{F} \Vdash \exists x_1 x_2 y((Cax_1x_2 \wedge \neg Ix_1 \wedge Cx_2by) \vee (Cax_1x_2 \wedge \neg Ix_2 \wedge Cx_1yb)\}$$

Tällöin kaikille nuolimalleille $\mathfrak{M}$ pätee

$$\mathfrak{M}, a \Vdash D\phi \Leftrightarrow \exists b : R_D ab \ ja \ \mathfrak{M}, b \Vdash \phi.$$

Neliönuolimallissa pätee tällöin

$$\mathfrak{M}_U, a \Vdash D\phi \Leftrightarrow \exists b : \ a \neq b \ ja \ \mathfrak{M}, b \Vdash \phi.$$

Edellä määriteltyä D-operaattoria kutsutaan eroavuusoperaattoriksi ja siihen liitetty relaatio R_D on erisuuruus. Nyt neliökehysten luokka SQ voidaan aksiomatisoida ja saadaan seuraava lause, jossa kaavat $(A1), \ldots, (A9)$ ovat alaluvun 4.3 alussa annetut kaavat.

Lause 4.18. *Neliökehysten luokka SQ koostuu niistä nuolikehyksistä, jotka toteuttavat seuraavat ehdot*

$\mathfrak{F} \models (A1), \ldots (A9)$

$\mathfrak{F} \models \forall xy(R_D xy \leftrightarrow x \neq y)$

Eroavuusoperaattorin kehittivät monet tutkijat yhtäaikaa ja sille on paljon käyttöä nuolilogiikassa, sillä sen avulla kielestä saadaan ilmaisuvoimaisempi.

5 Todistusteoriaa

Modaalilogiikan systeemejä voidaan muotoilla semanttisesti, jolloin systeemi määritellään kaikkien jossain tietyssä mallien tai kehysten osaluokassa validien kaavojen joukoksi. Toinen mahdollisuus on muotoilla systeemejä syntaktisesti eli todistusteoreettisesti, tällöin annetaan sopivat aksioomat ja päättelysäännöt ja systeemi määritellään näin muodostetun aksioomasysteemin teoreemojen joukoksi. Tällöin systeemi on aksiomatisoitu.

Määritelmä 5.1. Aksioomasysteemi on struktuuri $\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$, jossa $\mathcal{A}$ on kaikkien kaavojen joukon $\mathbf{L}$ osajoukko ja $\mathcal{R}$ on joukko funktioita $\mathbf{L}^n \to \mathbf{L}$, $n \in \{1, 2, 3 \dots\}$. Joukon $\mathcal{A}$ alkiot A ovat aksioomia ja joukon $\mathcal{R}$ alkiot r päättelysääntöjä.

Aksioomat voivat olla yksittäisiä kaavoja tai ne voidaan esittää aksioomaskeemoina, jolloin korvaamalla saadaan aksioomaskeemojen instansseja. Aksioomien on oltava loogisesti tosia ja joukon $\mathcal{A}$ täytyy olla ratkeava eli on oltava mekaaninen algoritmi, jolla voidaan selvittää päteekö $A \in \mathcal{A}$. Päättelysäännöt osoittavat miten skeemoista voidaan päätellä toisia skeemoja. Päättelysääntöjen joukon $\mathcal{R}$ on myös oltava ratkeava.

Vastaavalla tavalla kuin aksioomaskeemojen kohdalla voidaan lauselogiikan tautologioista saada sijoituksella modaalilogiikan tautologioita. Sijoituksessa jokainen kaavassa esiintyvä propositiosymboli korvataan tietyllä kaavalla. Esimerkiksi tautologiasta $p \vee \neg p$ saadaan sijoituksella $[p/(\otimes p \to q)]$ nuolilogiikan tautologia $\otimes p \to q \vee \neg(\otimes p \to q)$. Sijoituksella saatuja kaavoja kutsutaan kaavan instansseiksi. Sijoitus on määritelty täsmällisesti luvun 1 määritelmässä 1.4.

Määritelmä 5.2. Deduktio eli todistus aksioomasysteemissä $\mathcal{S}$ on äärellinen kaavajono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, siten, että jokainen kaavajonon kaava α_i on joko aksiooma, tautologia tai päätelty aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ päättelysäännnöllä sitä jonossa edeltävistä kaavoista α_j, missä $j < i$, ja jonon viimeinen kaava $\alpha_n = \alpha$. Kaavan α sanotaan olevan aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ teoreema ja tätä merkitään $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$.

Määritelmä 5.3. Kun joukko $\Gamma \cup \{\alpha\}$ on joukko kaavoja, niin kaava α voidaan johtaa aksioomasysteemissä $\mathcal{S}$ kaavajoukosta Γ, jos $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$ tai jos on olemassa sellaiset joukon Γ alkiot $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Gamma$, että $\vdash_{\mathcal{S}} (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n) \to \alpha$. Kun kaava α on johdettavissa, niin merkitään $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha$, jos ei ole, niin merkitään $\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}} \alpha$.

Määritelmä 5.4. Modaalilogiikka Λ on kaavajoukko, johon kuuluvat kaikki tautologiat, on suljettu modus ponensin (MP) suhteen eli

$$\text{jos } \alpha \in \Lambda \text{ ja } \alpha \to \beta \in \Lambda, \text{ niin } \beta \in \Lambda$$

ja universaalin substituution suhteen (US) eli

$$\text{jos } \alpha \in \Lambda, \text{ niin tällöin myös sen instanssit kuuluvat.}$$

Jos $\alpha \in \Lambda$, niin kaava α on kaavajoukon teoreema ja sitä merkitään $\vdash_\Lambda \alpha$. Aksioomasysteemin määräämällä logiikalla Λ tarkoitetaan aksioomasysteemin teoreemojen joukkoa eli $\Lambda = \{\alpha \mid \vdash_\Lambda \alpha\}$.

Huomautus. Modaalilogiikat sisältävät kaikki lauselogiikan tautologioista sijoittamalla saadut instanssit. Tautologiat ovat valideja kaikissa mallien ja kehysten luokissa.

Esimerkki 5.5.

(i) Jos joukko Λ_{K} on $\{\phi \mid \mathfrak{F} \Vdash \phi$, kaikille kehyksille $\mathfrak{F} \in \mathsf{K}\}$, missä K on kehysten luokka, niin tällöin joukko Λ_{K} on logiikka.

(ii) Jos joukko M on mallien luokka, niin joukon Λ_{M} ei tarvitse olla logiikka. Jos mallissa $\mathfrak{M}$ jokaisessa maailmassa propositiosymboli p on totta, mutta propositiosymboli q ei ole, niin tällöin propositiosymboli $p \in \Lambda_{\mathfrak{M}}$, mutta propositiosymboli $q \notin \Lambda_{\mathfrak{M}}$. Substituutiolla, joka määriteltiin 1 määritelmässä 1.4, saadaan kuitenkin propositiosymboli q propositiosymbolista p.

Määritelmä 5.6. Normaali modaalilogiikka Λ on kaavajoukko, joka sisältää kaikki klassisen logiikan tautologiat, on suljettu modus ponensin (MP) ja universaalin substituution (US) suhteen ja lisäksi sisältää kaavat:

(K) $\underline{\otimes}\,(p \to q) \to (\underline{\otimes} p \to \underline{\otimes} q)$

(DB1) $(p \to p') \,\underline{\circ}\, q \to (p \,\underline{\circ}\, q \to p' \underline{\circ}\, q)$,

(DB2) $p \,\underline{\circ}\, (q \to q') \to (p \,\underline{\circ}\, q \to p \,\underline{\circ}\, q')$,

ja on suljettu yleistyksen (G) suhteen eli

$$\text{jos } \vdash_\Lambda \phi, \text{ niin } \vdash_\Lambda \underline{\otimes}\phi,\ \vdash_\Lambda \phi \,\underline{\circ}\, \psi \text{ ja } \vdash_\Lambda \psi \,\underline{\circ}\, \phi.$$

Operaattoreiden $\otimes$ ja $\circ$ duaalit on määritelty luvun 1 määritelmässä 1.3 ja niitä voidaan pitää lyhennysmerkintöinä.

Määritelmä 5.7. Olkoon Λ normaali modaalilogiikka. Kaavajoukko Γ on Λ-ristiriitainen jos on olemassa sellainen joukko $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Lambda$, että $\vdash_\Lambda \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$, muutoin kaavajoukko Γ on ristiriidaton. Kaava α on Λ-ristiriitainen, jos $\{\alpha\}$ on ristiriitainen eli jos ja vain jos $\vdash_\Lambda \neg\alpha$, muutoin se on ristiriidaton. Kaavajoukko Γ maksimaalinen, jos kaikille kaavoille α pätee joko $\alpha \in \Gamma$ tai $\neg\alpha \in \Gamma$. Jos kaavajoukko on Λ-ristiriidaton ja maksimaalinen niin sitä kutsutaan maksimaalisesti Λ-ristiriidattomaksi kaavajoukoksi.

Määritelmä 5.8. Kaavajoukon Γ generoima tai aksiomatisoima normaali modaalilogiikka Λ on pienin normaali modaalilogiikka, joka sisältää joukon Γ, merkitään $\Lambda(\Gamma)$.

5.1 Validisuuden säilyminen

Aksioomista johdetaan teoreemoja päättelysääntöjen avulla. Päättelysäännöt säilyttävät validisuuden silloin, kun niitä on käytetty päättelemään valideista premisseistä validi johtopäätös. Tämä todistetaan osoittamalla, että validisuus säilyy.

Lause 5.9. (vrt. [5, s. 79],[3, s. 21]) *Seuraavat kaavat ovat valideja.*

(K) $\underline{\otimes}\,(p \to q) \to (\underline{\otimes} p \to \underline{\otimes} q)$

(DB1) $(p \to p') \,\underline{\circ}\, q \to (p \,\underline{\circ}\, q \to p' \underline{\circ}\, q)$

(DB2) $p \mathbin{\underline{\circ}} (q \to q') \to (p \mathbin{\underline{\circ}} q \to p \mathbin{\underline{\circ}} q')$

Todistus. Todistetaan ensin, että kaava (K) on validi. Olkoon kehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$, sen malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$. Oletetaan, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \underline{\otimes}\ (p \to q)$ ja $\mathfrak{M}, a \Vdash \underline{\otimes} p$ eli $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg\otimes\neg\ (p \to q)$ ja $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg\otimes\neg p$. Olkoon $b \in W$ sellainen nuoli, että Rab. Tällöin totuusmääritelmän määritelmän perusteella saadaan $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg\ (p \to q)$ ja $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg p$, eli pätee $\mathfrak{M}, b \Vdash (p \to q)$ ja $\mathfrak{M}, b \Vdash p$. Nyt implikaation totuusehdon perusteella on voimassa $\mathfrak{M}, b \Vdash q$ eli $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg q$. Tästä seuraa, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg\otimes\neg q$, joten $\mathfrak{M}, a \Vdash \underline{\otimes} q$. Saadaan

$$\Vdash \underline{\otimes}\ (p \to q) \to (\underline{\otimes} p \to p\ \underline{\otimes} q).$$

Todistetaan sitten kaavan (DB1) validisuus. Olkoon kehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$, sen malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$. Oletetaan nyt, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash (p \to p') \mathbin{\underline{\circ}} q$ ja $\mathfrak{M}, a \Vdash p \mathbin{\underline{\circ}} q$. Siis $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg(\neg(p \to p')\ \circ\ \neg q)$ ja $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg(\neg\ p \circ \neg q)$. Olkoot nuolet $b, c \in W$ sellaisia, että $Cabc$. Nyt totuusmääritelmän perusteella pätee $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg\ (p \to p^{'})$ ja $\mathfrak{M}, c \nVdash \neg q$ sekä $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg\ p$ ja $\mathfrak{M}, c \nVdash \neg q$. Saadaan siis $\mathfrak{M}, b \Vdash (p \to p^{'})$ ja $\mathfrak{M}, b \Vdash p$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash q$. Implikaation totuusehdon perusteella pätee $\mathfrak{M}, b \Vdash p^{'}$ eli $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg p^{'}$, joten saadaan $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg(\neg p^{'} \circ \neg q)$, koska $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg p^{'}$ ja $\mathfrak{M}, c \nVdash \neg q$. Saadaan siis $\mathfrak{M}, a \Vdash (p^{'} \mathbin{\underline{\circ}}\ q)$. Nyt on voimassa

$$\Vdash (p \to p') \mathbin{\underline{\circ}} q \to (p \mathbin{\underline{\circ}} q \to p' \mathbin{\underline{\circ}} q).$$

Todistetaan vielä kaavan (DB2) validisuus. Olkoon kehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$, sen malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$. Oletetaan, että pätee $\mathfrak{M}, a \Vdash p \mathbin{\underline{\circ}} (q \to q')$ ja $\mathfrak{M}, a \Vdash (p \mathbin{\underline{\circ}} q)$. Siis $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg(\neg p \circ \neg(q \to q')$ ja $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg(\neg\ p \circ \neg q)$. Olkoot nuolet $b, c \in W$ sellaisia, että $Cabc$. Totuusmääritelmän nojalla saadaan $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg p$, $\mathfrak{M}, c \nVdash \neg(q \to q^{'})$ ja $\mathfrak{M}, c \nVdash \neg q$. Tällöin pätee $\mathfrak{M}, c \Vdash q \to q^{'}$ ja $\mathfrak{M}, c \Vdash q$, joten pätee $\mathfrak{M}, c \Vdash q^{'}$. On siis voimassa $\mathfrak{M}, c \nVdash \neg q^{'}$ ja koska on voimassa $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg p$, niin saadaan $\mathfrak{M}, a \Vdash \neg(\neg p \circ \neg q^{'})$. On siis voimassa

$$\Vdash p \mathbin{\underline{\circ}} (q \to q') \to (p \mathbin{\underline{\circ}} q \to p \mathbin{\underline{\circ}} q').$$

□

Lause 5.10. (vrt. [5, s. 79],[3, s. 21]) *Päättelysäännöt modus ponens* (MP) *ja yleistys* (UG) *säilyttävät kehysvalidisuuden.*

Todistus. Todistetaan, että päättelysäännöt säilyttävät validisuuden kaikissa systeemin kehyksissä.

(MP) Jos kehyksessä on voimassa $\mathfrak{F} \Vdash \alpha \to \beta$ ja $\mathfrak{F} \Vdash \alpha$ niin implikaation totuusehdon perusteella on voimassa myös $\mathfrak{F} \Vdash \beta$.

(UG) Todistetaan, että jos $\vdash_\Lambda \phi$, niin $\vdash_\Lambda \underline{\otimes}\phi$, $\vdash_\Lambda \phi \mathbin{\underline{\circ}} \psi$ ja $\vdash_\Lambda \psi \mathbin{\underline{\circ}} \phi$.

Todistetaan ensin kohta $\underline{\otimes}\phi$. Olkoon kehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$, malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$. Oletetaan, että $\mathfrak{M} \Vdash \phi$. Olkoon nuoli $b \in W$ sellainen, että Rab. Koska $\mathfrak{M} \Vdash \phi$, niin $\mathfrak{M}, b \Vdash \phi$ eli $\mathfrak{M}, b \nVdash \neg\phi$. Tällöin relaation määritelmän perusteella $\mathfrak{M}, a \Vdash \underline{\otimes}\ \phi$. Siis

$$\mathfrak{M} \Vdash \phi \Rightarrow \mathfrak{M} \Vdash \underline{\otimes}\phi.$$

Todistetaan sitten kohta $\phi \mathbin{\underline{\circ}} \psi$. Annetaan ensin totuusehto kaavalle $\phi \mathbin{\underline{\circ}} \psi$. Totuus nuolen a, mallissa $\mathfrak{M}$ on

(1) $\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \mathbin{\underline{\circ}} \psi$ joss kaikille $b, c \in W$, $Cabc$ pätee $\mathfrak{M}, b \Vdash \phi$ tai $\mathfrak{M}, c \Vdash \psi$.

Olkoon nyt kehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$, sen malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja nuoli $a \in W$. Oletetaan, että $\mathfrak{M} \Vdash \phi$. Olkoot nuolet $b, c \in W$ sellaisia, että $Cabc$. Nyt koska $\mathfrak{M} \Vdash \phi$, niin $\mathfrak{M}, b \Vdash \phi$. Totuusehdon (1) mukaan saadaan $\mathfrak{M}, a \Vdash \phi \underline{\circ} \psi$, joten

$$\mathfrak{M} \Vdash \phi \to \mathfrak{M} \Vdash \phi \underline{\circ} \psi.$$

Kohta $\psi \underline{\circ} \phi$ todistetaan vastaavasti edellisen kanssa. □

Päättelysääntö (US) eli universaali substituutio tarkoittaa, että kun validille kaavalle tehdään sijoitus, niin sijoittamalla saatu uusi kaava on myös validi. Ennen kun todistetaan, että päättelysääntö (US) säilyttää kehysvalidisuuden, määritellään totuusjoukon käsite ja todistetaan varsinaisessa todistuksessa tarvittava aputulos.

Määritelmä 5.11. Kaavan α totuusjoukko mallissa $\mathfrak{M}$ on niiden nuolten a joukko, jossa kaava α on totta. Totuusjoukolle $\{a \in W \mid \mathfrak{M}, a \Vdash \alpha\}$ käytetään merkintää $|| \alpha ||^{\mathfrak{M}}$.

$$\begin{aligned}
|| p_i ||^{\mathfrak{M}} &= V(p_i) \\
|| \neg\alpha ||^{\mathfrak{M}} &= W \setminus || \alpha ||^{\mathfrak{M}} \\
|| \alpha \vee \beta ||^{\mathfrak{M}} &= || \alpha ||^{\mathfrak{M}} \cup || \beta ||^{\mathfrak{M}} \\
|| \otimes\alpha ||^{\mathfrak{M}} &= \{a \mid \exists b \in W : Rab \ ja \ b \in || \alpha ||^{\mathfrak{M}}\} \\
|| \alpha \circ \beta ||^{\mathfrak{M}} &= \{a \mid \exists b, c \in W : Cabc \ ja \ b \in || \alpha ||^{\mathfrak{M}} \ ja \ c \in || \beta ||^{\mathfrak{M}}\}
\end{aligned}$$

Lause 5.12. (vrt. [5, s. 173],[6, s. 24]) *Olkoot $\beta_1, ..., \beta_k$ kaavoja ja $q_1, ..., q_k$ propositosymboleja. Olkoot mallit $\mathfrak{M} = (W, C, R, I, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W, C, R, I, V')$ sellaisia, että*

$$V(p) = \begin{cases} || \beta_i ||^{\mathfrak{M}'}, & jos \ \exists i \in \{1, 2, ..., k\} : p = q_i, \\ V'(p), & muulloin \end{cases}$$

tällöin

$$\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha \Leftrightarrow \mathfrak{M}', a \Vdash \alpha[q_1/\beta_1, ..., q_k/\beta_k]$$

aina, kun $a \in W$ ja α on modaalilogiikan kaava.

Todistus. Todistetaan induktiolla kaavan pituuden suhteen. Merkitään $\alpha' = \alpha[q_1/\beta_1, ..., q_k/\beta_k]$ ja oletetaan ensin, että α on lausemuuttuja p.

Jokaisella $p = q_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash p \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash q_i \\
&\Leftrightarrow a \in || \beta_i ||^{\mathfrak{M}'} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a \Vdash \alpha'
\end{aligned}$$

Jos α on $p \notin \{q_1, \ldots, q_n\}$, niin tällöin pätee

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash p \\
&\Leftrightarrow a \in V(p_j) \\
&\Leftrightarrow a \in V^{'}(p_j) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash p \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \alpha'
\end{aligned}
$$

Tehdään sitten induktio-oletus, että väite pätee kaikille nuolille a ja kaavoille γ_1 ja γ_2 eli pätee

$$\mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_1 \Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \gamma_1' \text{ ja } \mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_2 \Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \gamma_2'.$$

On huomattava, että pätee

$$
\begin{aligned}
(\neg\gamma_1)^{'} &= \neg\gamma_1^{'} \\
(\gamma_1 \wedge \gamma_2)^{'} &= \gamma_1^{'} \wedge \gamma_2^{'} \\
(\otimes\gamma_1)^{'} &= \otimes\gamma_1^{'} \\
(\gamma_1 \circ \gamma_2)^{'} &= \gamma_1^{'} \circ \gamma_2^{'}.
\end{aligned}
$$

Kun $\alpha = \neg\gamma_1$, saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \neg\gamma_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \nVdash \gamma_1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \nVdash \gamma_1^{'} \quad \text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \neg\gamma_1^{'} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \alpha'.
\end{aligned}
$$

Kun $\alpha = \gamma_1 \wedge \gamma_2$, saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_1 \wedge \gamma_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_1 \text{ ja } \mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_2 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \gamma_1^{'} \text{ ja } \mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_2^{'} \quad \text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \gamma_1^{'} \wedge \gamma_2^{'} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \alpha'.
\end{aligned}
$$

Kun $\alpha = \iota\delta$, saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \iota\delta \\
&\Leftrightarrow Ia \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \iota\delta \quad \text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{'}, a \Vdash \alpha'.
\end{aligned}
$$

Kun $\alpha = \otimes\gamma_1$, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \otimes\gamma_1 \\
&\Leftrightarrow \exists b : Rab \Rightarrow \mathfrak{M}, b \Vdash \gamma_1 \\
&\Leftrightarrow \exists b : Rab \Rightarrow \mathfrak{M}', b \Vdash \gamma_1' \quad \text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a \Vdash \otimes\gamma_1' \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a \Vdash \alpha'.
\end{aligned}$$

Kun $\alpha = \gamma_1 \circ \gamma_2$, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, a \Vdash \alpha &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_1 \circ \gamma_2 \\
&\Leftrightarrow \exists b, c : Rabc \Rightarrow \mathfrak{M}, b \Vdash \gamma_1 \text{ ja } \mathfrak{M}, a \Vdash \gamma_2 \\
&\Leftrightarrow \exists b, c : Rabc \Rightarrow \mathfrak{M}', b \Vdash \gamma_1' \text{ ja } \mathfrak{M}', c \Vdash \gamma_2' \quad \text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a \Vdash \gamma_1' \circ \gamma_2' \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}', a \Vdash \alpha'.
\end{aligned}$$

□

Nyt voidaan todistaa, että päättelysääntö (US) säilyttää validisuuden kaikissa systeemin kehyksissä.

Lause 5.13. (vrt. [5, s. 175]) *Päättelysääntö universaali substituutio (US) säilyttää kehysvalidisuuden.*

Todistus. Olkoon kehys $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$. Oletetaan, että $\mathfrak{F} \nVdash \alpha[p/\beta]$. Tällöin jossakin kehyksen mallissa $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{F}, V')$ on voimassa $\mathfrak{M}' \nVdash \alpha[p/\beta]$, joten pätee $|| \alpha[p/\beta] ||^{\mathfrak{M}} \neq W$. Olkoon nyt valuaatio V sellainen, että

$$V(q) = \begin{cases} || \beta ||^{\mathfrak{M}'}, & \text{jos } q = p, \\ V'(q), & \text{jos } q \neq p \end{cases}$$

ja olkoon $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ malli. Nyt lauseen 5.12 perusteella $|| \alpha ||^{\mathfrak{M}} = || \alpha[p/\beta] ||^{\mathfrak{M}'} \neq W$ eli $\mathfrak{M} \nVdash \alpha$, joten $\mathfrak{F} \nVdash \alpha$. On siis todistettu, että jos $\mathfrak{F} \Vdash \alpha$, niin $\mathfrak{F} \Vdash \alpha[p/\beta]$. □

5.2 Luotettavuus ja täydellisyys

Aksioomasysteemi määritellään suhteessa johonkin kehysten luokkaan K. Systeemi on luotettava suhteessa tähän kehysten luokkaan K, jos jokainen teoreema on validi kehysten luokassa K ja täydellinen jos jokainen K-validi kaava on aksioomasysteemin teoreema. Kaikkien luokassa K validien kaavojen joukkoa merkitään $Th(\mathsf{K})$ ja sitä kutsutaan luokan K determinoimaksi systeemiksi. Kun sekä luotettavuus että täydellisyys ovat voimassa sanotaan, että kehysten luokka K determinoi systeemin.

Lause 5.14. (Luotettavuus)(vrt. [3, s. 22], [5, s. 201]) *Kun kaavajoukko* Γ *koostuu kaavoista* $(A1), \ldots, (A9)$, *niin normaali modaalilogiikka* $\Lambda(\Gamma)$ *on luotettava suhteessa joukon* Γ *(kaavojen ensimmäisen kertaluvun vastineiden) määrittelemään kehysten luokkaan, jota merkitään* K_Γ*:*

$$\vdash_\Lambda \alpha \;\Rightarrow\; \Lambda \Vdash \alpha.$$

Todistus. Nuolilogiikan luotettavuus todistetaan vastaavasti kuin normaalin modaalilogiikan luotettavuus, (vrt. [5, s. 200-202]).

Todistetaan, että kun kaava α on teoreema, niin se on validi. Todistetaan tämä induktiolla kaavan ϕ pituuden suhteen. Olkoon $\mathfrak{F} = (W, C, R, I)$ jokin kehys ja malli $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ja kaava $a \in W$. Olkoon sitten kaava $\alpha = \alpha_n$ systeemin K_Γ mielivaltainen teoreema, ja sen todistus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Tehdään induktio-oletus, että $\mathfrak{M} \Vdash \alpha_j$ ja $\mathfrak{M} \Vdash \alpha_k$, kun $j, k < i$, ja osoitetaan, että $\mathfrak{M} \Vdash \alpha_i$.

Jos kaava α_i on tautologia, niin tällöin se on myös validi, (ks. [5, s. 175]). Jos kaava α_i on skeeman (K), $(DB1)$ tai $(DB2)$ instanssi, niin lauseen 5.9 perusteella kaava α_i on validi. Jos kaava α_i on päätelty päättelysäännön (MP), (UG) tai (US) avulla kaavasta kaavasta α_j tai kaavoista α_j ja α_k, missä $j, k < i$ niin lauseiden 5.10 ja 5.13 perusteella kaava α_j on validi, sillä päättelysäännöt säilyttävät validisuuden kehysten luokassa K_Γ. □

Eräs nuolilogiikan hyödyllisimmistä ominaisuuksista on se, että lähes kaikki nuolilogiikan kaavat ovat Sahlqvist-muodossa. Tämän vuoksi nuolilogiikalle on helppoa esittää täydellisyystuloksia, sillä Sahlqvistin teoreeman täydellisyysosan perusteella Sahlqvist-muotoisista kaavoista seuraa suoraan täydellisyys.

Lause 5.15. (Täydellisyys)(vrt. [1, s. 210],[3, s. 22]) *Kun kaavajoukko Γ koostuu kaavoista $(A1), \ldots, (A9)$, niin normaali modaalilogiikka $\Lambda(\Gamma)$ on täydellinen suhteessa joukon Γ (kaavojen ensimmäisen kertaluvun vastineiden) määrittelemään kehysten luokkaan K_Γ:*

$$\Lambda \Vdash \alpha \;\Rightarrow \vdash_\Lambda \alpha.$$

Todistus. Koska kaikki kaavat $(A1), \ldots, (A9)$ ovat Sahlqvist-muodossa, niin väite seuraa Sahlqvistin teoreeman täydellisyysosasta, (ks. esim [1, s. 318-325]). □

Kaksiulotteiselle nuolilogiikalle täydellisyystulosten osoittaminen on paljon haastavampaa kuin modaaliselle nuolilogiikalle, sillä kaikki kehysten luokat eivät ole samalla tavalla aksiomatisoitavissa vaan vaativat erilaisia lisämääritelmiä tai lisäehtoja.

Lokaalisten neliöiden luokalle LSQ saadaan lauseen 5.15 ja tiettyjen lisäehtojen (ks. [3, s. 14]) seurauksena seuraava lause.

Lause 5.16. (vrt. [3, s. 23]) *Kun joukko Γ koostuu kaavoista $(A1), \ldots, (A8)$ ja kaavasta*

(A10) $$((\iota\delta \wedge\ p) \circ \top) \circ \top \Leftrightarrow (\iota\delta \wedge\ p) \circ (\top \circ \top),$$

niin tällöin joukko Γ on luotettava ja täydellinen suhteessa kehysten luokkaan LSQ.

Lauseiden 5.15 ja 4.15 perusteella voidaan muotoilla seuraava lause relativioitujen neliöiden luokalle RSQ.

Lause 5.17. (vrt. [3, s. 23]) *Kun joukko Γ koostuu kaavoista $(A2)$, $(A^r1), \ldots, (A^r9)$ ja kaavoista*

(A^r10) $$\otimes p \circ \neg(p \circ q) \to \neg q$$

(A^r11) $$\neg(p \circ q) \circ \otimes p \to \neg p$$

niin tällöin joukko Γ on luotettava ja täydellinen suhteessa kehysten luokkaan RSQ.

Perinteisillä päättelysäännöillä ei saada neliöiden luokalle SQ validisuutta säilyttävää aksiomatisointia, mutta käyttämällä käyttämällä luvun 4 määritelmässä 4.17 määriteltyä D-operaattoria saadaan myös neliöiden luokalle täydellisyystulos.

Lause 5.18. (vrt. [3, s. 23]) *Olkooon joukko Ω päättelysysteemi, jonka aksioomat ovat kaavat $(A1), \ldots, (A9)$ ja päättelysäännöt perinteiset päättelysäännöt ja lisäksi*

$$((p \wedge \neg Dp) \to \phi) \to \phi, \quad p \textit{ ei esiinny kaavassa } \phi, \tag{2}$$

missä D on määritelmässä 4.17 määritelty operaattori. Tällöin joukko Ω on luotettava ja täydellinen suhteessa kehysten luokkaan SQ.

6 Lopuksi

Nuolilogiikka on mielenkiintoinen ja monipuolinen ala, jossa on riittänyt ja riittää edelleen tutkittavaa pitkäksi aikaa. Nuolilogiikkaa tutkitaan ja kehitetään edelleen monessa eri paikassa ja osin siksi nuolilogiikka jakautuu useaan eri osa-alueeseen. Syynä nuolilogiikan monipuolisuuteen on myös nuolilogiikan historia, johon tutustuttiin jo tutkielman alussa. Nuolilogiikan historiaan tutustuminen auttaa ymmärtämään nuolilogiikkaa syvällisesti, sillä se kuvaa niitä lähtökohtia, jotka johtivat nuolilogiikan kehittämiseen.

Tässä tutkielmassa nuolia on tarkasteltu itsenäisinä kokonaisuuksina ja pariesityksenä, mutta nuolilogiikkaa on mahdollista tutkia myös monella muullakin tavalla. Kaksiulotteisten nuolten tutkimista on mahdollista laajentaa myös moniulotteisiin nuoliin tai nuolia voi tutkia graafeina, jolloin nuolia on helpointa hahmottaa graafisesti. Dynaamisessa nuolilogiikassa yhtenä relaationa on niin kutsuttu Kleenen tähti, jonka avulla nuoli voidaan jakaa useaan peräkkäiseen nuoleen, jotka kaikki toteuttavat saman kaavan. Bulgarialaisessa nuolilogiikassa universumina on multigraafin särmien joukko ja tällöin relaatio R määritellään niiin, että nuolien täytyy kohdata samassa pisteessä, mutta niiden ei tarvitse yhtyä koko matkalta.

Aiemmin tutkielmassa on jo viitattu nuolilogiikan läheiseen yhteyteen relaatioalgebran kanssa ja relaatioalogebralla on monia mielenkiintoisia yhteneväisyyksiä nuolilogiikan kanssa. Esimerkiksi lauseessa 5.16 viitataan lisäehtoihin, joita tarvitaan, että saadaan esitettyä lokaalisten neliöiden luokalle LSQ täydellisyystulos. Nämä lisäehdot liittyvät nuolilogiikan algebralliseen osaan eli esitettäviin relaatioalgebroihin. Edellä esitetyt esimerkit valottavat hyvin sitä seikkaa, että nuolilogiikka sovelluksineen on laaja ja elävä aihe, joka tarjoaa kiinnostuneille valtavasti erilaisia tutkimuskohteita ja pohdittavaa.

Kirjallisuutta

[1] Blackburn, Patrick & de Rijke, Maarten & Venema, Yde. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.

[2] Marx, Maarten & Venema, Yde. *Multi-Dimensional Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[3] Venema, Yde. *A Crash Course in Arrow Logic.* Teoksessa *Arrow Logic and Multi-Modal Logic* (Toim. Marx, Maarten & Pólos, László & Masuch, Michael) Leland Stanford Junior University. 1996. s. 3-34.

[4] Marx, Maarten & Mikulás, Szabolcs & Németi, István & Sain, Ildikó. *Investigations in Arrow Logic.* Teoksessa *Arrow Logic and Multi-Modal Logic* (Toim. Marx, Maarten & Pólos, László & Masuch, Michael) Leland Stanford Junior University. 1996. s. 35-62.

[5] Rantala, Veikko & Virtanen, Ari. *Johdatus modaalilogiikkaan.* Gaudeamus, Helsinki, 2004.

[6] Salminen, Hannele & Väänänen, Jouko. *Johdatus logiikkaan.* Gaudeamus, Helsinki, 1992.