Tampereen yliopisto

Tytti Kosola

Kultainen leikkaus ja sen historia

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Kesäkuu 2021

TIIVISTELMÄ

Tytti Kosola: Kultainen leikkaus ja sen historia
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2021

Tässä tutkielmassa käsitellään kultaista leikkausta ja sen historiaa. Kultainen leikkaus on geometrinen suhde, jolla on monia matemaattisia ominaisuuksia. Tämä tutkielma pyrkii kuvailemaan näitä ominaisuuksia.

Tutkielmassa esitellään kultaisen leikkauksen historiallisia lähtökohtia ja sen vaikutusta matematiikan kehitykseen. Lisäksi tutkielmassa käsitellään tapoja luoda kultainen leikkaus, sekä sen ominaisuuksia. Tutkielmassa esitellään Fibonaccin luvut, ketjumurtoluvut sekä äärettömät juurilausekkeet ja näiden yhteys kultaiseen leikkaukseen. Lopuksi käsitellään kultaisen leikkauksen geometrisia ominaisuuksia kahden kuvion, pentagrammin ja Keplerin kolmion, avulla.

Tutkielmassa on käytetty lähteitä laajalti, joista tärkeimmät ovat Carl Boyerin Matematiikan historia osa 1, Alexey Stakhovin The mathematics of harmony sekä Eukleideen Alkeet.

Avainsanat: Kultainen leikkaus, pythagoralaiset, Fibonaccin luvut, pentagrammi, Keplerin kolmio
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Alkusanat

Tämän tutkielman tarkoitus on esitellä kultaista leikkausta ja sen historiaa, sekä pyrkiä näyttämään erilaisia tapoja tutkia sitä. Pyrin esittelemään kultaista leikkausta mahdollisimman selvästi, jotta lukija pystyisi seuraamaan ja ymmärtämään tutkielman kulkua.

Luvussa 2 esittelen kultaisen leikkauksen historialliset lähtökohdat ja kuinka se vaikuttaa maailmaan ympärillämme. Luvussa 3 esittelen erilaisia geometrisia ja algebrallisia tapoja luoda kultainen leikkaus. Luku 4 keskittyy kultaisen leikkauksen erilaisiin algebrallisiin ominaisuuksiin ja on siten matemaattisin kappale. Luvussa 5 esittelen kultaisen leikkauksen geometrisia ominaisuuksia.

Valitsin tutkielmani aiheeksi kultaisen leikkauksen monesta syystä. Olen aina ollut kiinnostunut asioiden alkuperästä ja matematiikan historia on mielestäni hyvin mielenkiintoista. Lisäksi kultainen leikkaus liitetään usein taiteeseen, joten se on monelle entuudestaan hiukan tuttu aihe. Kultaisella leikkauksella on todella monia ominaisuuksia, joka tekee siitä hyvin erityisen ja mielenkiintoni kasvoi entuudestaan.

Lukijalta toivon kiinnostusta aihetta kohtaan. Monissa kohdissa ei tarvita muuta aiempaa matematiikan osaamista kuin yhtälönratkaisua. Tutkielmalla ei ole pääasiallista lähdettä, sillä monet teokset sivuavat kultaista leikkausta. Nostan kuitenkin erikseen esille kolme seuraavaa lähdettä: Carl Boyerin Matematiikan historia osa 1, Alexey Stakhovin The mathematics of harmony sekä Eukleideen Alkeet.

2 Historiaa

Tässä luvussa käyn läpi kultaisen leikkauksen historialliset lähtökohdat: miten arvellaan sen löytyneen ja miten se on vaikuttanut matematiikan kehitykseen.

2.1 Pythagoras

Pythagoras on yksi avainhenkilöistä kultaisen leikkauksen historissa. Hän on yksi vaikutusvaltaisimpia antiikin Kreikan filosofeja, joita matematiikan historiasta löytyy. Hänen saavutuksensa ovat todella suuria, mutta todisteet hänen olemassaolostaan ovat hataria. Kaikki alkuperäiset kirjoitukset hänen ajaltaan ovat tuhoutuneet ja kaikki tietämys hänestä on antiikin ajan tarinoita. Emme siis voi ikinä olla täysin varmoja, mitkä kaikki ovat todella hänen saavutuksiaan. Vaikka hänestä kirjoitettiin monia elämänkertoja antiikin ajalla, eivät ne ole valitettavasti säilyneet. [2, s. 80-84]

Perimätiedon mukaan Pythagoras syntyi noin 580 eaa. Samoksella, eräällä Dodekanesian saarella. Hänen väitetään elämänsä aikana matkustaneen Egyptissä ja Kaksoisvirranmaassa omaksuen sieltä matematiikan tietämystä. Pythagoraan on väitetty olleen muun muassa ihmeidentekijä, profeetta ja pyhimys, mutta myös taikuri ja huijari. Hän oli myös aktiivinen politiikassa. Hän oli taitava puhuja, ja hän ajoi omaa poliittista näkemystään vahvasti ja halusi uudistaa senaikaista yhteiskuntaa omien moraalisten ihanteidensa ja näkemystensä pohjalta. Luultavasti sen pohjalta hän perusti koulukunnan oman nimensä mukaisesti. [2, s. 80-84] [18, s. 37] [6, s.173-176]

2.2 Pythagoralaisuus

Pythagoralaiset, eli Pythagoraan koulukunta, oli salaseura, joka muistutti ehkä enemmän kulttia. Seuralla oli paljon salaisuuksia, eivätkä ulkopuoliset päässeet osallistumaan salaseuran kokouksiin. Vaikka Pythagoras esiintyi myös suurelle yleisölle, oli paljon, mitä ei ulkopuolisille kerrottu. Alkoi myös liikkua paljon huhuja rituaaleista, joita seuran jäsenet toimittivat. Monet niistä olivat kuitenkin ristiriidassa Pythagoraan filosofian kanssa. Esimerkiksi oli huhuja eläinten veren vuodattamisesta ja uhraamisesta, vaikka Pythagoras oli kasvissyöjä. [2, s. 83-90]

Koulukunnalla oli suuri merkitys matematiikan kehityksen kannalta. He halusivat kehittää itse matematiikka ja pitivät sitä kauniina. Pythagoralaiset oli aikansa suurimpia matemaattisia seuroja ja heille uuden löytäminen oli tärkeää. Matematiikkaa ei pidetty pelkkänä työkaluna, toisin kuin Egyptissä, jossa sillä oli ollut vain arkinen merkitys. Pythagoralaiset olivat hyvin kiinnostuneita myös muista tieteistä ja he tutkivat muun muassa maailmankaikkeutta sekä luontoa. Pythagoralaisten tunnuslauseen väitetään olleen ”Kaikki on lukua”. Pythagoralaisten salaisena symbolina ajatellaan olleen pentagrammi, jonka mittasuhteet ovat kytköksissä kultaiseen leikkaukseen. [2, s. 83-90] [18, s. 39]

2.3 Kultainen leikkaus

Kultaisen leikkauksen juurien ajatellaan olevan Pythagoraan koulukunnassa. On myös todennäköistä, että Pythagoras olisi oppinut sen babylonialaisilta, egyptiläisiltä tai intialaisilta. 400-luvulla eaa. kreikkalaiset olivat jo tietoisia kultaisesta leikkauksesta ja osasivat käyttää sen harmonista vaikutusta rakennuksissa ja taiteissa. Ateenan Parthenon on yksi vanhimmista ja tunnetuimmista rakennuksista, joissa on käytetty kultaista leikkausta. Kultainen leikkaus esiintyy monissa muissakin luonnon kappaleissa ja taideteoksissa. Esimerkiksi kukkakaali toteuttaa kultaisen leikkauksen muodostaessaan kukintoja ja viisiterälehtiset kukat. Taiteilijoista muun maussa Leonardo da Vinci, Michelangelo ja Rafael Santi ovat käyttäneet apunaan kultaista leikkausta luoden harmonisen vaikutelman. [18, s.42-52] [13, s. 114-118] [15]

Oleellista kultaisessa leikkauksessa on sen yhteismitattomuus eli rationaalisuus. Sitä ei siis pysty esittää murtolukuna. Tämä on hyvin olennainen osa matematiikan historiaa, sillä on ollut hyvin suuri edistysaskel löytää yhteismitattomuus. On mahdollista, että se on havaittu kultaisen leikkauksen avulla. Kuitenkin todennäköisemmin se on havaittu neliön sivun ja sen lävistäjän välisen suhteen yhteismitattomuuden avulla. Joka tapauksessa kultainen leikkaus kuuluu yhteismitattomuuden alkutaipaleelle ja on edistänyt matematiikan kehitystä. [5] [2, s. 118-119].

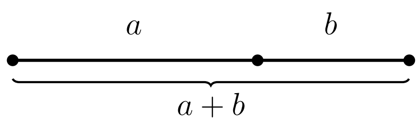
Kultainen leikkaus on saanut nimensä myöhemmällä ajalla, vaikka se on kiinnostanut monia matemaatikkoja lähes aina. Aluksi kultaista leikkausta kutsuttiin ”janan jako jatkuvaan suhteeseen”, joka sitten yksinkertaistettiin sanaksi ”leikkaus” antiikin Kreikassa. Aikojen saatossa sitä on kutsuttu monilla eri nimillä, esimerkiksi Luca Pacioli kutsui sitä jumalalliseksi suhteeksi. Uskotaan, että Martin Ohm on käyttänyt sanaparia ”kultainen leikkaus” (Goldener Schnitt) ensimmäisenä 1800-luvun alkupuolella, mutta myös käsitteet kultainen keskiarvo ja kultainen luku ovat olleet käytössä. Nykyään matematiikassa termi on vakiintunut. [2, s. 87] [18, s.4-5] [11] [12]

3 Kultaisen leikkauksen määritelmä, konstruointi ja irrationaalisuus

Tässä luvussa tarkastelen erilaisia tapoja konstruoida, eli luoda geometrisesti, kultainen leikkaus. Aluksi käsittelen kultaisen leikkauksen määritelmän ja konstruoin sen kahdella yksinkertaisella tavalla. Esittelen myös Eukleideen Alkeissa olevan tavan muodostaa kultainen leikkaus. Lopuksi käyn läpi kultaisen leikkauksen irrationaalisuutta ja sen historiallista merkitystä.

3.1 Konstruointi

Määritelmä 3.1.1. [18, s. 3] *Kultainen leikkaus* on geometrinen suhde, joka saadaan jakamalla jana kahteen osaan niin, että koko janan $a+b$ suhde pidempään osaan a on yhtä suuri kuin pidemmän osan a suhde lyhyemmän janan pituuteen eli janaan b.



Suhteista saadaan yhtälö, joka voidaan muuttaa toisen asteen yhtälöksi.

$$
\begin{aligned}
&\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \\
\iff &a^2 = b(a+b) \\
\iff &a^2 - ab - b^2 = 0
\end{aligned}
$$

Yhtälöä voidaan yksinkertaistaa sopimalla, että $b = 1$. Tämä voidaan tehdä, koska halutaan yhden muuttujan yhtälö ja kyse on suhteista, jolloin pituuden lukitseminen ei vaikuta lopputulokseen. Nyt yhtälö on muotoa

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

jonka juuret ovat

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Koska kyseessä on geometrinen suhde, huomioimme juurista positiivisen vaihtoehdon. Tästä eteenpäin merkitsen kultaista leikkausta kreikkalaisella kirjaimella τ.

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Kultainen leikkaus τ on siis geometrinen suhde. Janan jakaminen on yksinkertaisin tapa saada kultainen leikkaus. Samalla tavalla voidaan konstruoida kultaisen leikkauksen käänteisluku.

Huomautus 3.1.2. *Kultaisen leikkauksen käänteisluku* on geometrinen suhde, mikä saadaan yhtälöstä $a^2 - ab - b^2 = 0$ sopimalla, että $a = 1$. Nyt yhtälö sieventyy muotoon $b^2 + b - 1 = 0$ ja sen juuret ovat

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

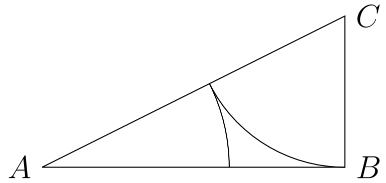
Huomioimme juurista vain positiivisen vaihtoehdon, eli kultaisen leikkauksen käänteisluku on

$$\frac{1}{\tau} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Mielestäni on hyvin mielenkiintoista huomata myös sellainen ominaisuus, että kultaisen leikkauksen käänteisluvun vastaluku on myös kultainen leikkaus.

Lause 3.1.3. [18, s.6] Kultainen leikkaus voidaan konstruoida harpin avulla suorakulmaisesta kolmiosta.

Todistus. Muodostetaan kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 1 ja 2. Pythagoraan lauseen mukaan hypotenuusan pituus on $\sqrt{5}$. Jos piirrämme harpilla ympyrän kaaren lyhyemmältä kateetilta hypotenuusalle, niin saamme jaettua hypotenuusan kahteen osaan, joiden pituudet ovat $\sqrt{5} - 1$ ja 1. Nyt harpilla voidaan piirtää uusi kaari pidemmälle kateetille, jolloin jana AB on jaettu osiin $\sqrt{5} - 1$ ja3 $- \sqrt{5}$. Tästä saadaan pituuksien suhde, joka on kultainen leikkaus, eli $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$.



□

Nämä kaksi edellistä tapaa ovat hyvin yksinkertaisia tapoja konstruoida kultainen leikkaus. Luultavasti tavat eivät kuitenkaan ole täysin ensimmäisiä, vaan todennäköisesti ensimmäinen on Eulkeideen Alkeissa esitelty tapa.

Alkeissa on lähdetty jakamaan janoja ja neliön sivuja osiin erilailla ja sitä kautta löydetty kultainen leikkaus. Ei siis voi olla varmaa, onko kultainen leikkaus löydetty pelkästään janojen suhteiden kautta vai seuraavalla tavalla. On tosin luultavaa, että asiaa on lähdetty tutkimaan tällä geometrisella tavalla, joka oli hyvin yleistä antiikin Kreikan aikaan.

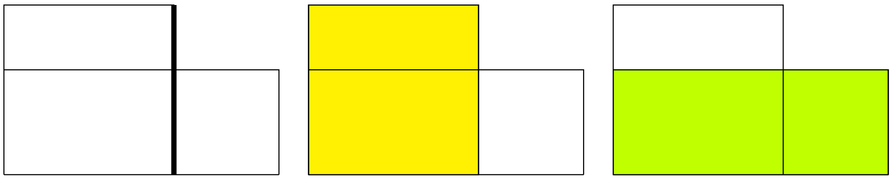
Eukleideen Alkeita pidetään vanhimpana säilyneenä matematiikan oppikirjana. Se painottuu geometrian ympärille ja vaikka kirjoittajana pidetään Eukleidesta, niin todellisuudessa Eukleides on koonnut siihen astisen matematiikan tietämyksen yksiin kansiin. Alkeiden kahta ensimmäistä lukua on pidetty pythagoralaisten luomana [2, s. 90] ja kultainen leikkaus löytyy Alkeiden toisesta kirjasta [1, s. 81].

Seuraavaksi esittelen tavan löytää kultainen leikkaus, joka esitellään Eukleideen Alkeissa ja on todennäköisesti ollut pythagoralaisten tapa konstruoida se.

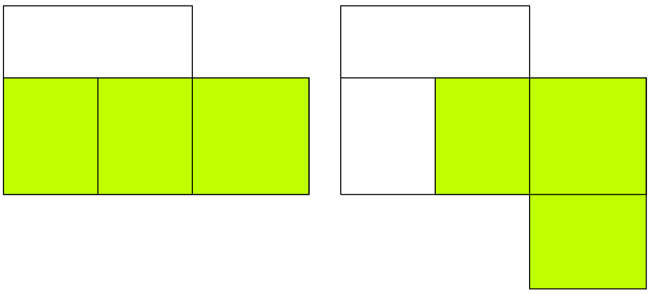
Lause 3.1.4. [1, s. 81] Neliön sivu a voidaan jakaa kahteen osaan b ja $a - b$ siten, että edellisen osan neliön pinta-ala on yhtä suuri kuin suorakulmion pinta-ala, jonka sivuina ovat toinen osa ja alkuperäinen sivu.

Todistus. [1, s. 81-82] Antiikin ajalla todistaminen ja konstruointi tapahtui geometrisesti. Ei voida tarkkaan tietää, kuinka Eukleides tai pythagoralaiset ovat lopputuloksen todistaneet, mutta päätelmät ovat voineet mennä seuraavalla tavalla. Tämä on siis geometrinen päättelyketju, joka pohjautuu Eukleideen Alkeissa olevaan ratkaisuun.

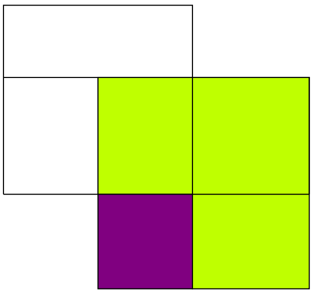
Neliön sivu pitää jakaa kahteen osaan niin, että keltainen neliö ja vihreä suorakulmio ovat yhtäsuuret.



Jotta päästään haluttuun lopputulokseen, on täytynyt huomata, että alkuperäisen neliön ja suorakulmion yhteisen osan voi jakaa kahteen yhtäsuureen osaan ja hyödyntää samoja tietoja ja taitoja kuin binomikaavojen löytämisessä. On myös hyvin luultavaa, että päättelyketju on mennyt näin, sillä binomikaavojen konstruoinnit ovat Alkeissa juuri ennen kultaisen leikkauksen konstruointia. Siis yhteisen osan suorakulmio pitää paloitella osiksi, jonka jälkeen toisen suorakulmioista on voinut siirtää, sillä pyrkimys on tehdä neliö.

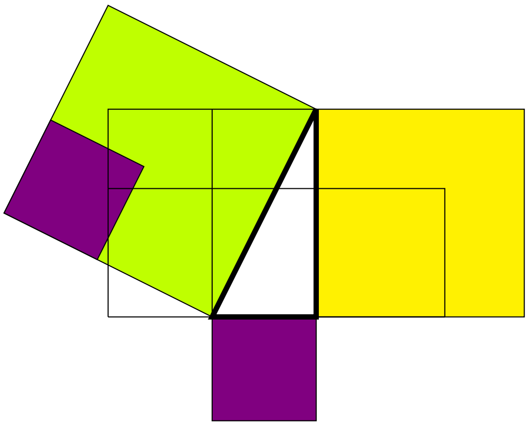


Jotta neliö saataisiin täydelliseksi, niin siihen täytyy vielä lisätä pienempi neliö (violetti alue).

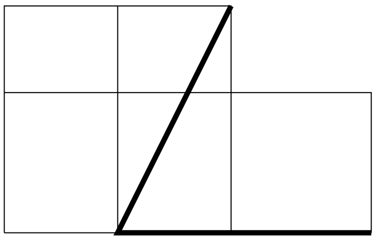


Seuraavassa vaiheessa käytetään apuna Pythagoraan lausetta, joka löytyy Alkeiden luvusta 1. Kultaisen leikkauksen konstruointi on siitä poikkeuksellinen todistus Alkeissa, että ratkaisua on lyhennetty toisen lauseen todistuksella. Mielestäni se on myös hyvin merkityksellinen kohta tätä todistusta, nimittäin se osoittaa hyvää soveltamiskykyä ja kekseliäisyyttä.

Koska oletetaan, että vihreä ja keltainen alue ovat yhtäsuuria niin huomataan, että tässä kohtaa voidaan käyttää Pythagoraan lausetta siirtämällä vain vihreä/violetti alue suorakulmaisen kolmion hypotenuusan kohtaan.



Nyt edellisistä kuvioista voidaan päätellä Pythagoraan lauseen perusteella, että seuraavat pituudet ovat samat.

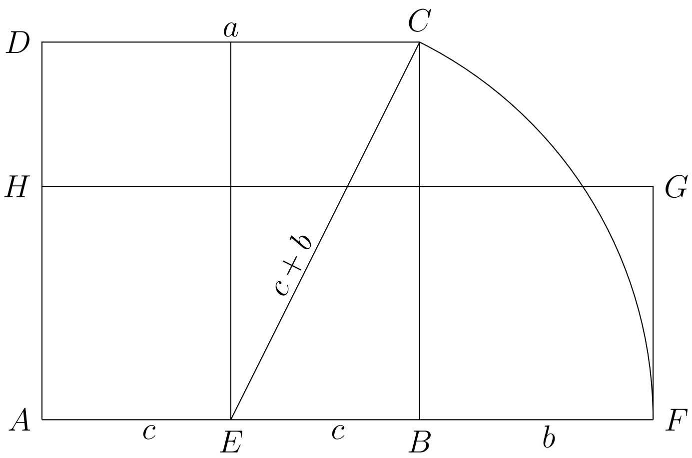


Tässä huomataan, että haluttuun lopputulokseen päästiin. Siis neliön sivu on mahdollista jakaa osiin niin, että neliön pinta-ala ja suorakulmion pinta-ala ovat yhtäsuuret. Kohta on myös konstruoitavissa helposti, kuten viimeisestä kuvasta voidaan huomata. Päättelyketju voidaan myös toteuttaa toisin päin, eli ensin määritellä sivun pituus, josta päättelemällä voidaan huomata pinta-alojen yhtäsuuruus. □

Tämä geometrinen päättelyketju pohjautui Eukleideen alkeiden todistukseen. Sama voidaan tehdä algebrallisesti, eli tässä vielä todistus sitä kautta.

Todistus. (tapa 2) [1, s. 81-82] Janat a ja b toteuttavat yhtälön

$$b^2 = a(a - b).$$



Puolitetaan aluksi jana $a = AB$ kohdassa E. Merkitään $c = \frac{1}{2}a$ ja konstruoidaan neliö $\square$(ABCD). Valitaan F janan AB jatkeelta siten, että $|FE| = |EC|$. Etsitty jana b on yhtä pitkä kuin BF.
Tarkastellaan kolmiota $\triangle(ECB)$. Pythagoraan lauseen mukaan saadaan:

$$\begin{aligned}
&c^2 + (2c)^2 = (c+b)^2 \\
\iff\ &c^2 + 4c^2 = c^2 + 2bc + b^2 \\
\iff\ &4c^2 = 2bc + b^2 \\
\iff\ &a^2 = ab + b^2 \\
\iff\ &b^2 = a^2 - ab \\
\iff\ &b^2 = a(a-b)
\end{aligned}$$

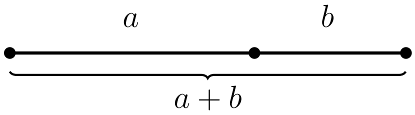
$\square$

3.2 Kultaisen leikkauksen irrationaalisuus

On itsestään selvää, ettei kultainen leikkaus ole kokonaisluku. Kultaisesta leikkauksesta on voinut helposti päätellä, että luku on jotain yhden ja kahden väliltä, sillä jana a on enemmän kuin puolet janan $a+b$ pituudesta. On hyvin mahdollista, että pythagoralaiset ovat tutkineet sen rationaalisuutta ja luultavasti huomanneet, ettei kyseessä ole myöskään rationaaliluku. Siitä, onko tämän huomanneet juuri pythagoralaiset, emme voi olla varmoja, sillä he olivat paljon kopioineet muualta. Kultaisen leikkauksen irrationaalisuus voidaan todistaa seuraavasti.

Lause 3.2.1. Kultainen leikkaus on irrationaalinen.

Todistus. Vastaoletus: Oletetaan, että kultainen leikkaus on rationaalinen. Olkoot a ja b kokonaislukuja, joiden suhde on kultainen leikkaus, eli $\tau = \frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$. Oletetaan lisäksi, että b on pienin tällainen positiivinen kokonaisluku. Luvut a ja b toteuttavat seuraavan yhtälön:



$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

Tarkastellaan kultaisen leikkauksen yhtälöä

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} \\
\iff &a^2 = b(a+b) \\
\iff &a^2 = ab + b^2 \\
\iff &b^2 = a^2 - ab \\
\iff &b^2 = a(a-b) \\
\iff &\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}
\end{aligned}$$

Nyt janojen pituuksista tiedämme seuraavat ominaisuudet

$$\begin{aligned}
&a > b \qquad \text{ja} \\
&b > a - b
\end{aligned}$$

Edellisten lisäksi pituuksista pystytään myös päättelemään, että luvun b on oltava enemmän kuin kolmasosa koko pituudesta. Lähdetään tarkastelemaan yhtälöä $b > a - b$ hiukan tarkemmin ja muokataan yhtälöä

$$\begin{aligned}
&b > a - b \\
\iff &2b > a \\
\iff &b > \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

Koska luvun b piti olla pienin mahdollinen luku niin tästä seuraa ristiriita, koska $\frac{a}{2}$ on pienempi. Täten kultainen leikkaus ei ole rationaalinen vaan irrationaalinen. □

Edellinen tapa on voinut olla yksi tapa antiikin Kreikassa todistaa kultaisen leikkauksen irrationaalisuus. Toinen vaihtoehto on ollut tutkia neliöjuuren esimerkiksi $\sqrt{2}$ tai $\sqrt{5}$ rationaalisuutta ja huomata sitä kautta kultaisen leikkauksen olevan irrationaalinen.

Todistus. (tapa 2) Vrt. [2, s. 119]
Tutkitaan, onko luku $\sqrt{5}$ irrationaalinen. Oletetaan vastoin väitettä, että luku $\sqrt{5}$ olisi rationaalinen.

$\sqrt{5}$ voidaan ilmaista kahden kokonaisluvun a ja b muodostamana murtolukuna $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, jossa a ja b ovat eri kokonaislukuja, eikä niillä ole epätriviaaleja yhteisiä tekijöitä ja $b \neq 0$.

Lähdetään muokkaamaan yhtälöä.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{5} = \frac{a}{b} \qquad ||()^2 \\
\iff &5 = \frac{a^2}{b^2} \\
\iff &a^2 = 5b^2
\end{aligned}$$

Koska luku 5 jakaa luvun a^2 niin huomataan, että myös luku 5 jakaa myös a:n. Eli voidaan merkitä, että $a = 5k$.

$$
\begin{aligned}
&(5k)^2 = 5b^2 \\
\iff &25k^2 = 5b^2 \\
\iff &5k = b^2
\end{aligned}
$$

Tästä huomataan, että luku 5 jakaa b:n, joten luku $\sqrt{5}$ ei ole rationaalinen luku. Koska oletuksen mukaan luvuilla a ja b ei ole yhteisiä tekijöitä, on lopputulos ristiriidassa oletuksen kanssa. Koska $\sqrt{5}$ on irrationaaliluku niin myös $1 + \sqrt{5}$ on irrationaalinen ja edelleen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on irrationaalinen. $\square$

4 Algebrallisia ominaisuuksia

Seuraavaksi esittelen erilaisia kultaisen leikkauksen algebrallisia ominaisuuksia. Aluksi käyn läpi, kuinka kultainen leikkaus voidaan ilmaista Fibonaccin lukujonon avulla. Sitten käsittelen kultaisen leikkauksen ääretöntä ketjumurtolukumuotoa. Viimeisenä näytän, että kultainen leikkaus voidaan esittää myös äärettömänä juurilausekkeena.

Fibonaccin lukujen eurooppalaiset juuret ovat kirjassa *Liber abaci.* Kirja on itse Fibonaccin kirjoittama ja se on vaikuttanut huomattavasti matemaatikkoihin. Epäillään kuitenkin, ettei Fibonacci itse tajunnut lukujen yhteyttä kultaiseen leikkaukseen. [2, s.364] [12]

4.1 Fibonaccin luvut

Määritelmä 4.1.1. [2, s.364] *Fibonaccin luvut* on rekursiivinen lukujono $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jossa

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad n = 0 \\ 1, & \text{kun} \quad n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{kun} \quad n > 1. \end{cases}$$

Fibonaccin lukujono on siis lukujono, jossa aina kaksi edellistä lukujonon termiä lasketaan yhteen, jotta saadaan seuraava. Fibonaccin lukujonon kymmenen ensimmäistä termiä ovat: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$.

Lause 4.1.2. [2, s.364] [8] Fibonaccin lukujonon peräkkäisten termien suhteen raja-arvo on kultainen leikkaus.

Todistus. [8] Oletetaan, että Fibonaccin lukujonon termien suhteella on raja-arvo, merkitään sitä kirjaimella L. Nyt siis $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L$. Kun ratkaistaan yhtälön raja-arvo, saadaan

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}). \end{aligned}$$

Huomataan, että jos merkitään raja-arvoa seuraavasti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L$$

niin saadaan raja-arvon käänteisluvuksi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{F_{n-1}}{F_n})$$

eli

$$L = 1 + \frac{1}{L}.$$

Koska $L > 0$, niin voimme kertoa puolittain yhtälön luvulla L. Tällöin saamme

$$L^2 = L + 1$$

ja edelleen yhtälöstä ratkaistuna saadaan kultainen leikkaus

$$L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau.$$

Siis jos raja-arvo on olemassa, sen täytyy olla kultainen leikkaus. Tutkitaan vielä, suppeneeko termien välinen suhde. Tarkastellaan aluksi Fibonaccin lukujonon ensimmäisten lukujen välisiä suhteita.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F_0}{F_1} &= 0 \qquad & \lim_{n\to\infty} \frac{F_1}{F_2} &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{F_2}{F_3} &= \frac{1}{2} \qquad & \lim_{n\to\infty} \frac{F_3}{F_4} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Fibonaccin lukujonon jäsenten suhteet vaikuttaisivat vuorottelevan kultaisen leikkauksen molemmin puolin. Tarkastellaan asiaa vielä yleisellä tasolla.

$$\begin{aligned} &\frac{F_{n+1}}{F_n} < \tau \\ \iff &\tau F_n > F_{n+1} \\ \iff &F_n > \frac{1}{\tau} F_{n+1}. \end{aligned}$$

Jos katsotaan jonon seuraavien termien osalta, niin

$$\begin{aligned} &F_n > \frac{1}{\tau} F_{n+1} \\ \iff &F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > (1 + \frac{1}{\tau}) F_{n+1} \\ \iff &\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} > 1 + \frac{1}{\tau} = \tau. \end{aligned}$$

Selvästi yhtälöt saavat kultaisen leikkauksen molemmin puolin arvoja. Jos lukujen välisellä suhteella on olemassa raja-arvo, sen täytyy olla kultainen leikkaus. Jotta raja-arvo on olemassa, lukujonon peräkkäisten lukujen suhteen täytyy myös olla suppeneva. Todistetaan Banachin kiintopistelauseen avulla, että raja-arvo on olemassa.

Kaavaa $L_{n+1} = 1 + \frac{1}{L_n}$ vastaa kuvaus $f\colon R \to R$, missä $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ja $R = [\frac{3}{2}, 2]$. Nimittäin $L_{n+1} = f(L_n)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Funktio f on selvästi vähenevä funktio ja tarkastellaan, millaisia arvoja fuktio saa annetulla välillä R.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(2) &= \frac{3}{2} \\ f(\frac{3}{2}) &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Nyt kuvaus f on todellakin kuvaus $f\colon R \to R$ eli kuvauksen f määrittely- ja maalijoukko ovat samoja. Koska R on suljettu väli, niin se on täydellinen metrinen avaruus. Tarkastellaan, onko kuvaus f kontraktio derivaatan avulla.

Funktion derivaatta on $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Derivaatta on selvästi kasvava funktio. Tarkastellaan derivaatan arvoja annetun välin R päätepisteissä.

$$\begin{aligned} f'(\frac{3}{2}) &= -\frac{4}{9} \\ f'(2) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Koska $f'(3/2) = -4/9$ ja f' on kasvava, niin $|f'(x)| \leq 4/9$ kaikilla $x \in R$. Koska derivaatan itseisarvot ovat annetulla välillä $R = [\frac{3}{2}, 2]$, niin siitä seuraa, että kuvaus f on kontraktio.

Koska R on täydellinen metrinen avaruus ja kuvaus $f\colon R \to R$ avaruuden R kontraktio niin Banachin kiintopistelauseen mukaan raja-arvo on olemassa.

□

Kultaisen leikkauksen potenssit toteuttavat saman rekursioehdon kuin Fibonaccin lukujonon termit. Jos tarkastellaan yhtälöä $\tau^2 = \tau + 1$ ja yhtälöä kerrotaan puolittain τ:lla, saadaan seuraavat.

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \tau + 1 \\ \tau^3 &= \tau^2 + \tau \\ \tau^4 &= \tau^3 + \tau^2 \end{aligned}$$

Tätä voitaisiin jatkaa loputtomiin. Potenssit kuitenkin noudattavat täysin Fibonaccin lukujonon rekursioehtoa eli $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, missä $F_n = \tau^n$.

4.2 Ketjumurtoluku

Tässä luvussa keskityn kultaisen leikkauksen ketjumurtolukumuotoon. Ketjumurtoluvut ovat sellaisia murtolukuja, joissa on useampi jakolasku sisäkkäin. Ketjumurtoluvussa on siis nimittäjässä murtoluku. Esittelen, mitä ovat kvadraattiset irrationaaliluvut, niiden liittymisen jaksollisuuteen sekä Lagrangen lauseen. Esittelen myös monia muita käsitteitä, joita tarvittaisiin Lagrangen lauseen todistamisessa. Sen avulla totean, että kultainen leikkaus on ääretön ja jaksollinen ketjumurtoluku.

Määritelmä 4.2.1. *Äärellisellä ketjumurtoluvulla* tarkoitetaan lauseketta

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

missä a_0 on reaaliluku ja $a_1, a_2, \dots, a_n$ ovat positiivisia reaalilukuja.

Määritelmä 4.2.2. Äärellistä ketjumurtolukua sanotaan *yksinkertaiseksi*, jos a_0 on kokonaisluku ja $a_1, \dots, a_n$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Yksinkertaista äärellistä ketjumurtolukua merkitään $[a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Määritelmä 4.2.3. [14] [16] [18, s.63] *Ääretön ketjumurtoluku* on muotoa

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}$$

oleva lauseke, missä $a_0, \dots, a_n, \dots$ ja $b_1, \dots, b_m, \dots$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Jos $b_i = 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin ketjumurtolukua kutsutaan *yksinkertaiseksi äärettömäksi murtolukuketjuksi.*

Määritelmä 4.2.4. [16] Ääretön ketjumurtoluku on *jaksollinen*, jos on olemassa sellainen kokonaisluku N, että kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots,$ pätee $a_k = a_{N+k}$. Tällöin siis ketjumurtoluku on muotoa

$$[a_0; a_1, a_2 \dots] = [a_0; a_1, \dots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+k}}].$$

Kvadraattiset irrationaaliluvut on olennainen käsite, kun puhutaan jaksollisista ketjumurtoluvuista. Käsitteen avulla voin luoda kultaisen leikkauksen ketjumurtolukumuodon. Seuraavaksi siis käyn läpi tähän liittyviä käsitteitä.

Määritelmä 4.2.5. [16] Reaaliluku α on *kvadraattinen irrationaaliluku*, jos se on kokonaislukukertoimisen toisen asteen yhtälön juuri eli

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0,$$

jossa A,B ja C ovat kokonaislukuja, $A \neq 0$ ja α on irrationaaliluku.

Lause 4.2.6. [16] Reaaliluku α on kvadraattinen irrationaaliluku, jos ja vain jos on olemassa sellaiset kokonaisluvut a, b ja c, että $b > 0$, $c \neq 0$, b ei ole kokonaisluvun neliö ja

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c}.$$

Todistus. Ks.[16, s.491]
Jos α on kvadraattinen irrationaaliluku, niin silloin α on irrationaalinen ja on olemassa kokonaisluvut A, B ja C, jotka toteuttavat yhtälön $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ ja $A \neq 0$. Toisen asteen ratkaisukaavasta tiedämme, että

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Koska α on reaaliluku, tiedämme, että $B^2 - 4AC \geq 0$. Koska α on irrationaalinen, $B^2 - 4AC$ ei ole kokonaisluvun neliö. Nyt voidaan valita $a = -B$, $b = B^2 - 4AC$ ja $c = 2A$ tai vaihtoehtoisesti $a = B$, $b = B^2 - 4AC$ ja $c = -2A$. Nyt meillä on haluttu esitys luvulle α.

Jos puolestaan oletaan luvun α olevan muotoa

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c},$$

missä a, b ja c ovat kokonaislukuja ja $b > 0$, $c \neq 0$, eikä b ole kokonaisluvun neliö, niin saadaan yhtälöä muokkaamalla haluttu tulos.

$$\begin{aligned}
& \alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c} \\
\iff \quad & c\alpha = a + \sqrt{b} \\
\iff \quad & c\alpha - a = \sqrt{b} \\
\implies \quad & c^2\alpha^2 - 2ac\alpha + a^2 = b \\
\iff \quad & c^2\alpha^2 - 2ac\alpha + a^2 - b = 0
\end{aligned}$$

Nyt siis $A = c^2$, $B = -2ac$ ja $C = a^2 - b$. □

Määritelmä 4.2.7. [16, s.471] Ketjumurtolukua $[a_0; a_1, \ldots, a_k]$, missä $0 \leq k \leq n$, kutsutaan ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ k:nneksi konvergentiksi ja sitä merkitään symbolilla C_k.

Lause 4.2.8. [16, s.471] Olkoon $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ reaalilukuja siten, että $a_1, a_2 \ldots, a_n$ ovat positiivisia. Määritellään jonot $p_0, p_1, \ldots, p_n$ ja $q_0, q_1, \ldots, q_n$ rekursiivisesti

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0 & q_0 &= 1, \\
p_1 &= a_0 a_1 + 1 & q_1 &= a_1 \\
p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2},
\end{aligned}$$

kun $k = 2, 3, \ldots, n$. Silloin $C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ toteuttaa yhtälön

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}.$$

Todistus. Todistus ohitetaan. □

Määritelmä 4.2.9. [16, s.492] Olkoon $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{b}}{c}$ kvadraattinen irrationaaliluku. Silloin luvun α *konjugaatti* on $\alpha' = \dfrac{a - \sqrt{b}}{c}$.

Lause 4.2.10. [14][16] (Lagrangen lause) Irrationaaliluvun α esitys äärettömänä ketjumurtolukuna $[a_0; a_1; \ldots ; a_n]$ on *jaksollinen* silloin ja vain silloin, kun α on kvadraattinen irrationaaliluku.

Seuraava todistus on tiivistetty muoto kokonaisesta Lagrangen lauseen todistuksesta.

Todistus. [16, s.493-498] Olkoon yksinkertainen ketjumurtoluku α jaksollinen ja lukua α voidaan merkitä

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k}}]$$

Nyt jaksollista osaa voidaan merkata $\beta = [\overline{a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k}}]$, ja edelleen $\beta = [a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k}, \beta]$. Konvergenttien yhtälö on muotoa

$$\beta = \frac{\beta p_k + p_{k+1}}{\beta q_k + q_{k+1}}$$

saataisiin ratkaistua muotoon

$$q_k \beta^2 + (q_{k-1} - p_k)\beta - p_{k-1} = 0,$$

joka on kvadraattinen irrationaaliluku. Nyt myös alkuperäinen luku

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{N-1}, \beta]$$

voidaan esittää konvergenttien yhtälönä (todistus ohitetaan)

$$\alpha = \frac{\beta p_{N-1} + p_{N-2}}{\beta q_{N-1} + q_{N-2}}.$$

Koska β on kvadraattinen irrationaaliluku, niin myös α on kvadraattinen irrationaaliluku (α on irrationaalinen, koska yksinkertainen ketjumurtolukuesitys on ääretön).

Lause täytyy todistaa myös toiseen suuntaan [16, s.497-498]. Eli oletetaan, että α on kvadraattinen irrationaaliluku ja se voidaan esittää muodossa

$$\alpha = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0},$$

ja määritellään rekursiivisesti, että [16, s.495]

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}, \\ a_k &= [\alpha], \\ P_{k+1} &= a_k Q_k - P_k, \\ Q_{k+1} &= \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k}, \end{aligned}$$

kaikilla $k = 0, 1, 2 \ldots.$
Nyt lause 4.2.7 kertoo, että

$$\alpha = \frac{p_{k-1}\alpha_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2}}$$

Seuraavaksi voi ottaa konjugaatit molemmilta puolilta saadaan ja käyttää kvadraattisten irrationaalilukujen laskutoimituksia [16, s.492]

$$\alpha' = \frac{p_{k-1}\alpha'_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha'_k + q_{k-2}}$$

Jos seuraavaksi ratkaistaan konjugaatti α_k, jonka jälkeen yhtälöstä huomaa, että kun $k \to \infty$ niin $\alpha' \to 1$. On siis olemassa sellainen kokonaisluku N, että $\alpha'_k < 0$ silloin kun $k \geq N$. Koska $\alpha_k > 0$ kun $k > 1$, pätee

$$\alpha - \alpha' = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k} - \frac{P_k - \sqrt{d}}{Q_k} = \frac{2\sqrt{d}}{Q_k} > 0,$$

joten $Q_k > 0$, kun $k > N$. Nyt $Q_k Q_{k+1} = d - P_{k+1}^2$, joten silloin kun $k \geq N$, saadaan

$$Q \leqslant Q_k Qk + 1 = d - P_{k+1}^2 \leqslant d.$$

Lisäksi tiedetään, että

$$P_{k+1}^2 < d = P_{k+1}^2 - Q_k Qk + 1,$$

josta saadaan, että

$$-\sqrt{d} < P_{k+1} < \sqrt{d}.$$

Edellisistä ehdoista voi havaita, että on olemassa mahdollisia arvoja vain äärellinen määrä kokonaislukuparille P_k ja Q_k. Koska kokonaislukuindeksejä k on puolestaan äärettömän monta, on väistämätöntä, että on olemassa sellaiset kokonaislukuindeksit i ja j, että $P_i = P_J$ ja $Q_i = Q_j$, kun $i < j$. Näistä seuraa, että $\alpha_i = \alpha_j$, eli

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{i+1} \ldots] \\ &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \overline{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}}]. \end{aligned}$$

Tämä osoittaa sen, että luvulla α on yksinkertainen ja jaksollinen murtolukumuoto olemassa. □

Lause 4.2.11. [14] Kultainen leikkaus voidaan esittää jaksollisena ja äärettömänä ketjumurtolukuna.

Todistus. Kultainen leikkauksen yhtälö $a^2 - a - 1 = 0$ on kokonaislukukertoiminen toisen asteen yhtälö, jonka juuri on $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja tiedämme ettei $\sqrt{5}$ ole kokonaisluvun neliö. Tiedämme myös aikaisempien luvun 2 perusteella kultaisen leikkauksen olevan irrationaalinen. Siis kultainen leikkaus on kvadraattinen irrationaaliluku määritelmän 4.2.4 mukaan. Lagrangen lauseen mukaan se on myös ääretön ja jaksollinen ketjumurtoluku ja se voidaan esittää ketjumurtolukumuodossa. □

Katsotaan, miltä kultainen leikkaus näyttäisi ketjumurtoluku muodossa. Kun lähdemme muokkaamaan alkuperäistä kultaisen leikkauksen yhtälöä $\tau^2 = \tau + 1$ niin, että jos ensin jaamme puolittain τ:lla

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \tau + 1 \\ \implies \tau &= 1 + \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

niin huomaamme voivamme aina sijoittaa τ:n yhä uudestaan ja uudestaan yhtälöön

$$\begin{aligned}\tau &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\tau}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.\end{aligned}$$

Yhtälö alkaa hyvin nopeasti näyttämään yksinkertaiselta äärettömältä murtolukuketjulta, jossa myös $a_n = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Myös kultaisen leikkauksen käänteisluvusta voidaan luoda ketjumurtolukumuoto. Merkitään yhtälössä $\frac{1}{\tau} = b$ ja käytetään apuna huomautusta 3.1.2.

$$\begin{aligned}& b^2 + b - 1 = 0 \\ \iff & b^2 + b = 1 \\ \iff & b(b+1) = 1 \\ \iff & b = \frac{1}{1+b} \\ \iff & b = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+b}}\end{aligned}$$

Nyt sijoittamalla takaisin $b = \frac{1}{\tau}$ saadaan käänteisluvun ketjumurtolukumuoto luotua

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\tau} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\tau}} \\ \implies & \frac{1}{\tau} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.\end{aligned}$$

Käänteisluvun ketjumurtoluku muoto ei siis eroa millään muulla tavalla itse kultaisesta leikkauksesta kuin ensimmäisen termin a_0 osalta.

4.3 Juurilauseke

Tässä luvussa käsitellään kultaisen leikkauksen esitystä jaksollisena ja äärettömänä juurilausekkeena. Luultavasti François Viète on ensimmäisenä esittänyt irrationaalilukuja äärettöminä juurilausekkeina. [9]

Määritelmä 4.3.1. *Äärettömällä juurilausekkeella* tarkoitetaan jonoa $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jonka jäsenet ovat muotoa

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 \cdots + \sqrt{a_n}}},$$

missä $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on reaalilukujoukko.

Määritelmä 4.3.2. [17] Jos äärettömän juurilausekkeen jäsenien $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kaikki arvot ovat samoja niin ääretön juurilauseke sanotaan olevan *jaksollinen.*

Lause 4.3.3. [17] Olkoon a mikä tahansa positiivinen reaaliluku. Silloin jono $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= \sqrt{a} \quad \text{ja} \\ u_{n+1} &= \sqrt{a + u_n} \end{aligned}$$

suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Todistus. [9, s.426] [17, s.307] Olkoon z jaksollinen ja ääretön juurilauseke. Nyt

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}}} \\ \iff z^2 &= a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}} \\ \implies z^2 &= a + z \end{aligned}$$

Jos $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ on olemassa, sen täytyy olla yhtälön $z^2 - z - a = 0$ juuri, jossa

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a + u_n}.$$

Olkoon u ja u^* yhtälön juuret

$$u = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}, \qquad u^* = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Lukujonon raja-arvon täytyy olla yksikäsitteinen, joten toinen yhtälön juurista olisi raja-arvo ja toinen ei. Tarkastellaan yhtälön juurta u^*. Koska lukujonon jäsenet ovat neliöjuuren tuloksia, täytyy raja-arvon silloin olla positiivinen. Tarkastellaan, millä a:n arvoilla u^* on positiivinen.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} &\geq 0 \\ \sqrt{1+4a} &\leq 1 \\ 1 + 4a &\leq 1 \\ a &\leq 0 \end{aligned}$$

Tästä syntyy ristiriita, sillä a:n täytyy olla positiivinen, koska luvusta a otetaan aina neliöjuuri. Ainut mahdollinen vaihtoehto olisi, että $a = 0$, joten u^* ei voi olla raja-arvo. Tiedetään, että lukujonolla on olemassa raja-arvo, jos se on kasvava ja ylhäältä rajoitettu.

Todistetaan induktion avulla, että lukujonolla on yläraja $u = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.
1. $u_1 = \sqrt{a} < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = u$.
2. Oletetaan, että $u_n < u$
Tutkitaan, onko myös $u_{n+1} < u$.

$$u_{n+1} = \sqrt{a + u_n} < \sqrt{a + u} = \sqrt{u^2} = u$$

Eli u on lukujonon yläraja.

Todistetaan induktion avulla, että lukujono on kasvava.
1. Selvästi $u_0 < u_1$.
2. Oletetaan, että $u_n < u_{n+1}$.
Tutkitaan, onko myös $u_{n+1} < u_{n+2}$.

$$u_{n+2} = \sqrt{a + u_{n+1}} < \sqrt{a + u_n} = u_{n+1}$$

Siis lukujono on aidosti kasvava.

Siis lukujonolla u_n on olemassa raja-arvo $u = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

□

Lause 4.3.4. [18, s.10] Kultainen leikkaus on erään yksinkertaisen äärettömän juurilausekkeen raja-arvo.

Todistus. Jos valitaan $a = 1$ niin silloin

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 1}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$$

Siis kultainen leikkaus voidaan esittää äärettömänä juurilausekkeena

$$\tau = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}.$$

□

Tähän samaan muotoon päästään myös helposti alkuperäisen yhtälön kautta. Yhtälöä muokkaamalla ja aina sijoittamalla τ yhtälöön aina uudestaan ja uudestaan päästään äärettömään juurilausekkeeseen helposti.

$$\begin{aligned} &\tau^2 = \tau + 1 \\ \iff &\tau^2 = 1 + \tau \\ \iff &\tau = \sqrt{1 + \tau} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \tau}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \tau}}} \end{aligned}$$

Kultaisen leikkauksen käänteisluvusta voidaan myös yhtälöä muokkaamalla saada päättymätön juurilauseke.[4, s.12]

$$
\begin{aligned}
&\tau^2 - \tau = 1 \\
\implies &\tau - 1 = \frac{1}{\tau} \\
\implies &\tau - 1 = \frac{\tau}{\tau^2} \\
\implies &\tau^2 = \frac{\tau}{\tau - 1} \\
\implies &\frac{1}{\tau^2} = \frac{\tau - 1}{\tau} \\
\implies &\frac{1}{\tau} = \sqrt{1 - \frac{1}{\tau}} \\
\implies &\frac{1}{\tau} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}
\end{aligned}
$$

5 Geometrisia ominaisuuksia

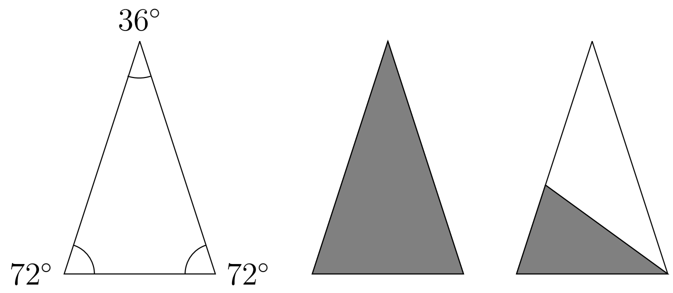
Tässä kappaleessa esittelen kultaisen leikkauksen geometrisia ominaisuuksia. Aluksi esittelen kuinka kultainen leikkaus löytyy säännöllisestä viisikulmiosta ja pentagrammista. Sitten esittelen Keplerin kolmion ja miten kultainen leikkaus ilmenee siitä kuviosta. Tässä luvussa en käy todistuksia läpi vaan tarkoitus on vain esitellä ominaisuuksia.

5.1 Säännöllinen viisikulmio ja pentagrammi

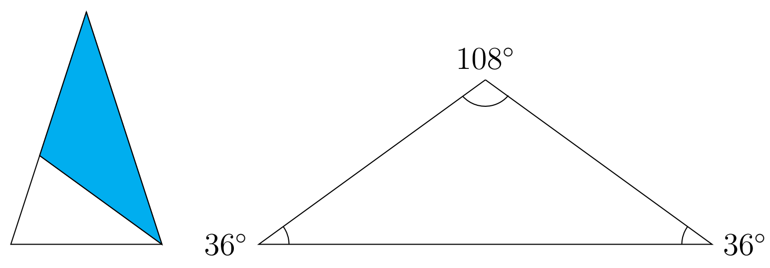
Säännöllisestä viisikulmiosta ja pentagrammista voi löytää kultaisen leikkauksen monesta kohtaa. Pentagrammi on viisikulmion lävistäjien muodostama kuvio, jota on käytetty symbolina monella eri tavalla ja monessa eri merkityksessä, mutta tässä tutkielmassa käsitellään vain matemaattista merkitystä. Kuvio on erittäin merkityksellinen historiallisessa mielessä siitä syystä, että sitä on pidetty pythagoralaisten tunnuksena [2, s.87].

Pentagrammi ei ole ensimmäinen tapa, jolla kultaista leikkausta on esitelty. Kuvion maineen takia on kuitenkin syytä olettaa, että pentagrammia on pidetty hyvin merkittävänä kuviona pythagoralaisten keskuudessa. Antiikin Kreikassa kuvio on muodostettu vaiheittain ja sen apuna on käytetty kultaisen leikkauksen lausetta. Tehtävänä on ollut luoda tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on puolet kantakulmiin verrattuna. Jotta ehto täyttyisi, on kulmien oltava 36° ja 72° suuruisia. Tämä on nykypäivänä selvää, mutta tämän kuvion konstruointiin on käytetty apuna kultaista leikkausta. Mielestäni on kuitenkin mielenkiintoista, että Alkeissa on ensin konstruoitu täsakylkinen kolmio näillä ehdoilla ja vasta sen kautta rakennettu säännöllinen viisikulmio. [1] [s.128-129]

Jos tasakylkisen kolmion sivun, jonka huippukulma on puolet kantakulmiin verrattuna, kyljen jakaa kultaisen leikkauksen suhteessa niin uusi pienempi kolmio yhdenmuotoinen alkuperäisen kolmion kanssa. Seuraavissa kuvissa tämä näkyy harmaissa kohdissa.

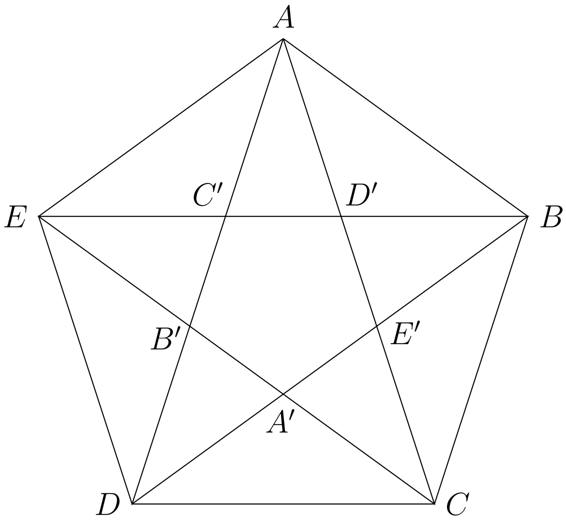


Edellisen kuvan pohjalta voi huomata, että myös toinen osa on tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on kolme kertaa niin suuri kuin kantakulma, eli kulmat ovat suuruudeltaan 36° ja 108°. Kuvassa sinisellä.



Säännöllisen viisikulmion ja pentagrammin yhdessä muodostamat kuviot ovat aina edellisiä kolmioita. Lävistäjät muodostavat uuden säännöllisen viisikulmion pentagrammin keskustaan, johon voitaisiin piirtää uudestaan lävistäjät. Eli kuviota voitaisiin jatkuvasti jatkaa aina pienemmäksi ja pienemmäksi ja se pysyisi aina täysin saman muotoisena.

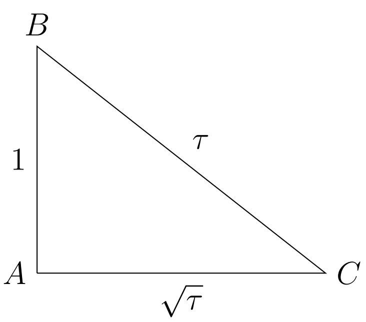
Seuraavaksi näkyy säännöllisen viisikulmion ja pentagrammin muodostama kuvio. Pentagrammin janojen leikkauspisteet jakavat aina janat kultaisen leikkauksen suhteessa. Esimerkiksi lävistäjällä AD on kaksi leikkauspistettä C' ja B' muiden lävistäjien kanssa ja janojen AD ja AB' pituuksien suhde on kultainen leikkaus. Samoin leikkauspiste C' jakaa janan AB' kultaisessa suhteessa.



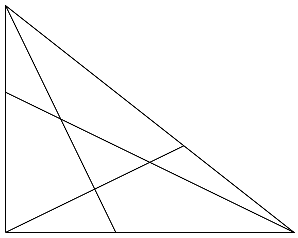
5.2 Keplerin kolmio

On monia muitakin kuvioita kuin pentagrammi, jotka toteuttavat kultaisen leikkauksen. Yksi esimerkki niistä on Keplerin kolmio. [10] [3]

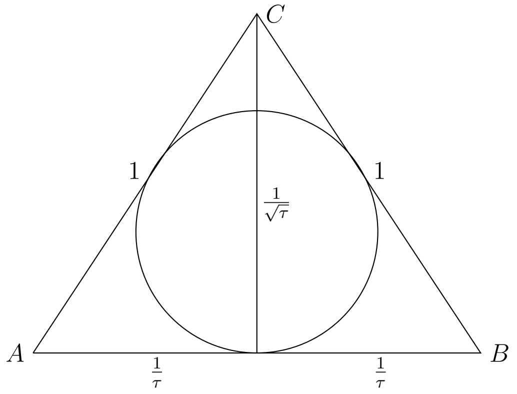
Keplerin kolmio on suorakulmainen kolmio, joka toteuttaa Pythagoraan lauseen mukaisesti kultaisen leikkauksen yhtälön. Seuraavan kolmion sivujen neliöt siis toteuttavat yhtälön $\tau^2 = \tau + 1$. Vastaavasti kolmion sivujen pituudet voisi olla $1, \frac{1}{\tau}$ ja $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ ja kolmion mittasuhteet pysyisivät täysin samoina eli kolmiot olisivat yhdenmuotoiset.



Kolmioon liittyy myös monia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Jos kolmion sivut jaettaisiin osiin kultaisessa suhteessa kuvan mukaan ja niistä pisteistä luotaisiin janat komion kärkiin, niin sisälle muodostuisi uusi kolmio (seuraava kuva), joka olisi myös Keplerin kolmio. [10]



Toinen mielenkiintoinen ominaisuus Keplerin kolmiolla on se, että jos meidän pitäisi saada mahdollisimman suuri ympyrä kolmion sisään, niin sen kolmion pitäisi olla sellainen tasakylkinen kolmio, jossa on kaksi Keplerin kolmiota vierekkäin. Niin saataisiin mahdollisimman suuri osa kolmion pinta-alasta ympyrän pinta-alaan kuuluvaksi. [3]



Kirjallisuutta

[1] Eukleides Aleksandrialainen, *Alkeet*, suomentanut Pekka Aschan, nykysuomentanut Lauri Kahanpää, 2. painos Grano Helsinki 2016

[2] Carl Boyer, *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia osa 1*, suomentanut Kimmo Pietiläinen, Merzbach, Uta C., Art House 1994

[3] Marcus Bizony, *The Golden Ratio Unexpectedly*, At Right Angles, Vol. 6, No. 1, Maaliskuu 2017
URL: http://publications.azimpremjifoundation.org/1358/

[4] Richard Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Skientific Publishing 2003

[5] Kurt Von Fritz, *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Annals of Mathematics Second Series, volume 46, No. 2, 1945, s.242-264
URL: https://www.jstor.org/stable/1969021?seq=1

[6] William K. C. Guthrie, *History of Greek Philosophy*, Cambridge University Press 1962, s.146-341

[7] Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Dover Publications Inc. 1981 (1921)

[8] David Henderson, *The Fibonacci Sequence and The Golden Ratio*, The University of Georgia
URL: http://128.192.17.191/EMAT6680Spring16/Henderson/writeup12/writeup12.html

[9] Aaron Herschfeld, *On Infinite Radicals*,The American Mathematical Monthly, volume 42, No. 7, 1935, s.419-429
URL: https://www.jstor.org/stable/2301294

[10] Jun Li, *Some properties of the Kepler triangle*, The Mathematical Gazette, Leicester, volume 101, num.552, s.494-495
URL: http://dx.doi.org.libproxy.tuni.fi/10.1017/mag.2017.137

[11] George Markowsky, *Misconceptions about the Golden Ratio*, College Mathematics Journal 23, s.2-19 Mathematical Association of America
URL: https://www.goldennumber.net/wp-content/uploads/George-Markowsky-Golden-Ratio-Misconceptions-MAA.pdf

[12] Gary Meisner, *History of the Golden Ratio*
URL: https://www.goldennumber.net/golden-ratio-history/

[13] Theoni Pappas, *Matematiikan ilot: Näe matematiikka ympärilläsi*

[14] Jukka Pihko, *Ketjumurtoluvuista*, Matematiikkalehti Solmu, 1/1997-1998
URL: https://matematiikkalehtisolmu.fi/1997/2/ketju/ketju.html

[15] Kaisa Pulakka, *5 tapaa nähdä kukkakaali uudessa valossa*, YLE, julkaistu 30.1.2015
URL: https://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/01/30/5-tapaa-nahda-kukkakaali-uudessa-valossa

[16] Kenneth H. Rosen, *Elementary Number Theory and Its Applicatons*, Addison Wesley Longman, 5. painos, 2005
URL: https://www.academia.edu/28692946/

[17] Georgellen Schuske, *On periodic infinite radicals*, University of Colorado
URL: http://www.acadsci.fi/mathematica/1962/no307pp01-08.pdf

[18] Alexey Stakhov, *The Mathematics of Harmony*, World Skientific Publishing 2009