

Simo Selinummi

JOSEPHSONIN LIITOS SUPRAJOHTAVIEN KUBITTIEIN PERUSKOMPONENTTINA

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastajat: Yliopistonlehtori Jouko Nieminen
Toukokuu 2021

TIIVISTELMÄ

Simo Selinummi: Josephsonin liitos suprajohtavien kubittien peruskomponenttina
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2021

Tavallisen bitin tila voi olla joko 0 tai 1, mutta kvanttimekaniikkaan perustuva kubitti voi saada näiden lisäksi myös tilojen superpositiotilan. Tällaisia kubitteja löytyy luonnosta, mutta niitä voidaan myös valmistaa keinotekoisesti. Tällaisia keinotekoisesti valmistettuja kubitteja ovat esimerkiksi työssä käsiteltävät suprajohtavat kubitit, jotka ovat sähköisistä komponenteista koostuvia makroskooppisia piirejä. Suprajohtavassa tilassa elektronit muodostavat Cooperin pareja ja aineen resistiivisyys katoaa. Resisttiivisyyden katoaminen mahdollistaa makroskooppisen piirin kvanttimekaanisen toiminnan. Suprajohtavat kubitit perustuvat sähköiseen komponenttiin nimeltään Josephsonin liitos, joka koostuu kahdesta suprajohtavasta elektrodista ja näiden välissä olevasta ohuesta eristekerroksesta. Josephsonin liitos tuo piiriin epälineaarisuutta, jotta energiatiloista erottuu kubitilta vaaditut kaksi energiatilaa, joiden välinen energiaerotus poikkeaa riittävästi muiden energiatilojen energiaeroituksista.

Suprajohtavien kubittien toimintaan liittyy parametreja, jotka perustuvat Schrödingerin yhtälössä esiintyvään kytkentäkertoimeen. Työn tarkoituksena on löytää Josephsonin liitoksen mikrokooppisten ominaisuuksien yhteys kyseiseen kytkentäkertoimeen ja näin myös suprajohtavien kubittien toimintaan vaikuttaviin parametreihin.

Työssä tehtiin MATLAB-mallinnusta yksiuolotteiselle Josephsonin liitokselle, jonka eristekerros jaettiin viipaleisiin. Mallinnuksessa muutettiin eristekerroksen paksuutta eli eristeviipaleiden määrää sekä liitoksen suprajohtavien elektrodien ja eristeen kytkentävoimakkuutta. Saatujen tulosten perusteella liitoksessa tapahtuva Cooperin parien tunneleutuminen heikkenee eksponentiaalisesti viipalemäärään nähden, mutta heikkenemisnopeus on riippumaton kytkentävoimakkuudesta.

Tuloksista voitiin päätellä, että eksponentiaalinen tunneleutumisen heikkeneminen pienentää huomattavasti myös liitoksen Schrödingerin yhtälössä esiintyvää kytkentäkerrointa. Suprajohtavan kubitin energiatiloihin on kytköksissä parametri nimeltään Josephsonin energia, joka on suoraan verrannollinen kytkentäkertoimeen, joten kubitin energiatiloihin on mahdollista vaikuttaa muokkaamalla liitoksessa esiintyvää eristekerrosta.

Avainsanat: suprajohtavuus, Cooperin pari, kubitti, Josephsonin liitos, Josephsonin ilmiö

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto	1
2.	Suprajohtavuus	2
2.1	Resistiivisyys	2
2.2	Cooperin pari	2
3.	Kubitit	4
3.1	Toimintaperiaate	4
3.2	Luonnolliset kubitit	5
3.3	Suprajohtavat kubitit	6
3.3.1	Kvanttimekaaninen LC-piiri	6
3.3.2	Perustyytit	7
4.	Josephsonin liitos	10
4.1	Liitoksen rakenne.	10
4.2	Josephsonin ilmiö	11
5.	Josephsonin liitoksen mallinnus	14
5.1	Mallinnuksen teoria	14
5.2	Mallinnustulokset ja tulosten analyysi	15
6.	Yhteenveto	20
	Lähteet	21
	Liite A: Pääohjelma	22
	Liite B: Coupling-aliohjelma	26
	Liite C: Supercoupling-aliohjelma	28

1. JOHDANTO

1980-luvun alkupuolella amerikkalaiset fyysikot Richard Feynman ja Paul Benioff toivat esille ideaa kvanttimekaniikkaan perustuvista tietokoneista. Kvanttitietokoneiden toiminta perustuu tavallisten bittien sijaan niin kutsuttuihin kvanttibitteihin eli kubitteihin. Bitti saa tilanteesta riippuen joko arvon 0 tai 1, mutta koska kubitit perustuvat kvanttimekaanisiin ilmiöihin, voivat ne saada arvokseen myös näiden tilojen superpositioita. [1] Kubitteja voidaan valmistaa keinotekoisesti, mutta niitä löytyy myös luonnosta [2]. Keinotekoisien kubitien etu on ominaisuuksien muokattavuus. Tällaisten kubitien valmistusprosessin aikana, kubitin ominaisuuksia voidaan muokata eri käyttötarkoituksia varten. Keinotekoisina kubitteina voi toimia työssä käsiteltävät suprajohtavat kvanttipiirit, joiden toiminta perustuu komponenttiin nimeltään Josephsonin liitos. [3]

Suprajohtavien kubitien toimintaan liittyy parametreja, jotka perustuvat Schrödingerin yhtälössä esiintyvään kytkentäkertoimeen. Työn tarkoituksena on löytää Josephsonin liitoksen mikroskooppisten ominaisuuksien yhteys kyseiseen kytkentäkertoimeen ja näin myös suprajohtavien kubitien toimintaan vaikuttaviin parametreihin.

Työn toisessa luvussa kerrotaan yleisesti suprajohtavuudesta ja kyseisen ilmiön yhteydestä keinotekoisiiin kubitteihin. Seuraavassa luvussa perehdytään kubitien toimintaan ja erilaisiin kubitityyppeihin. Neljännessä luvussa tarkastellaan suprajohtavien kubitien tärkeää komponenttia, Josephsonin liitosta, ja sitä kuinka Josephsonin liitoksen materiaalivalinnoilla voidaan vaikuttaa valmistettaviin kubitteihin. Viidennessä luvussa tehdään mallinnusta Josephsonin liitokselle ja analysoidaan mallinnuksen tuloksia.

2. SUPRAJOHTAVUUS

Vuonna 1911 hollantilainen fyysikko Heike Kamerlingh Onnes huomasi kokeellisesti elohopean resistiivisyyden putoavan mittaamattoman pieneksi alle 4.2 kelvinin lämpötilassa. Kokeissa kävi ilmi, että tämän lämpötilan läheisyydessä resistiivisyyden väheneminen tapahtui äkillisesti ja elohopea oli päätenyt uudelle tilalle, jota Kamerlingh Onnes kutsui suprajohtavaksi tilaksi. Lämpötilaa, jonka alapuolella resistiivisyys on hävinnyt, kutsutaan kriittiseksi lämpötilaksi. Myöhemmin huomattiin, että suprajohteet toimivat myös täydellisinä diamagneetteina eli ne eivät päästä ulkoista magneettikenttää sisälleen. [4] Tässä luvussa keskitytään kuitenkin resistiivisyyden katoamiseen, sillä se on suprajohtaville kubitteille välttämätön ominaisuus [3].

2.1 Resistiivisyys

Resistiivisyys tarkoittaa ominaisuutta, jolla aine vastustaa sähkövirran kulkua. Metalleissa varauksenkuljettajina toimivat elektronit, jotka esiintyvät elektronipilvenä positiivisten ytimien ympärillä. Kun metallien elektronit altistuvat ulkoiselle sähkökentälle, ne joutuvat kiihtyvään liikkeeseen. Elektronien liikettä metallissa vaikeuttavat atomien ytimet ja mahdolliset epäpuhtaudet, joihin liikkuvat elektronit voivat törmätä.

Elektronien etenemiseen vaikuttaa myös lämpötila. Lämpötilan kasvaessa atomiytimien värähtely voimistuu ja todennäköisyys elektronien ja ytimien törmäyksille kasvaa. Tällöin suuremmilla lämpötiloilla aineen resistiivisyys on myös suurempi. [4] Jotta resistiivisyyden katoaminen voitaisiin siis saavuttaa, on tilan oltava sellainen, jossa elektronien ja ytimien törmäyksiä ei tapahtuisi tai yksittäiset törmäykset eivät vaikuttaisi virran kulkuun.

2.2 Cooperin pari

Tarkastellaan Cooperin parien muodostumista ensin klassisesta näkökulmasta. Coulombin lain mukaan saman merkkisen varauksen omaavat hiukkaset kokevat hylkivän vuorovaikutuksen. Ytimiä ei ole lukittu omille paikoilleen, vaan rakenne on elastinen ja ytimet pystyvät hieman liikkumaan lepoasemistaan. Alhaisissa lämpötiloissa metallien atomiydinten värähtely on vähäistä. Tästä johtuen negatiivisten elektronien kulkiessa positiivisten ydinten lähellä elektronin ympärillä olevat ytimet liikkuvat elektronia kohti luoden pai-

kallisen positiivisen varauksen. Toisen metallissa kulkevan elektronin lähestyessä positiivisesti varautunutta aluetta se kokee attraktiivisen vuorovaikutuksen kyseistä aluetta kohti. Koska systeemi pyrkii minimoimaan energiansa, muodostavat vuorovaikuttavat elektronit pareja, jotka toimivat suprajohteissa varauksenkuljettajina. Tällaisia elektronipareja kutsutaan Cooperin pareiksi. Parien välinen sidos on kuitenkin heikko ja lämpötilan kasvu riittää rikkomaan parit. [4][5] Kvanttimekaanisesta näkökulmasta tarkasteltuna Cooperin parien muodostumista voidaan kuvata hiukkasen vaihtona. Elektronit voivat vuorovaikuttaa keskenään niin kutsuttujen fononien avulla. Fononit ovat hilan värähtelyenergian kvantteja, jotka esiintyvät vuorovaikutuksen aikana vain virtuaalisina hiukkasina. [4]

Cooperin parien muodostumisen edellytyksenä on, että parin muodostavien elektronien spinien on oltava vastakkaisuuntaiset ja niiden liikemäärien yhtä suuret, mutta vastakkaiset. Cooperin parin muodostavat elektronit ovat lähtöisin fermienergian ympäristöstä, joten fermienergian ympärille muodostuu energia-aukko, jossa ei ole mahdollisia elektronitiloja yksittäisille elektroneille. Tällainen energia-aukko kuvaa suprajohtavuuden voimakkuutta, sillä Cooperin parien rikkominen vaatisi energia-aukon suuruisen energian. Parin muodostavat elektronit ovat yksinään fermioneja, mutta niiden muodostama Cooperin pari on puolestaan bosoni. Parien bosoniluonteen takia, ne voivat asettua samalle alhaisimmalle energiatilalle ja luoda tilan, jossa kaikki parit ovat vuorovaikutuksessa keskenään. Tällöin parit käyttäytyvät suuremman ryhmän tavoin, jolloin yksittäisten elektronien sironta atomiytimistä ei vaikuta virran kulkuun ja sähkövirta voi kulkea materiaalissa häviöittä. [4][5]

Kvanttimekaanisesti Cooperin paria voidaan kuvata aaltofunktiolla. Alhaisimmalla energiatilalla olevan parin aaltofunktio voidaan esittää muodossa

$$\psi(\mathbf{r}) = \rho^{1/2}(\mathbf{r})e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (2.1)$$

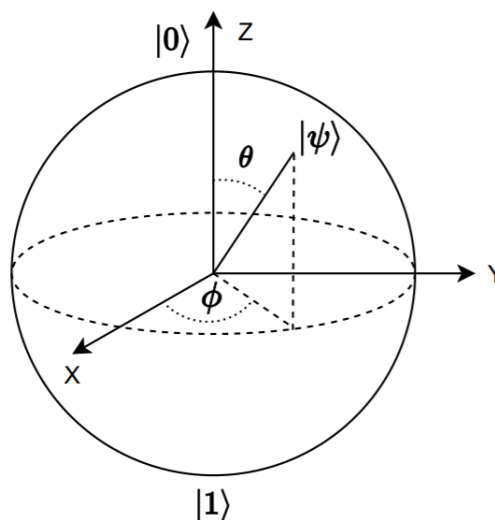
jossa ρ on varaustiheys ja θ on vaihe. Varaustiheys ja vaihe ovat molemmat reaalfunktioita paikan \mathbf{r} suhteen. [6] Edellä mainittuun aaltofunktioon palataan tarkemmin luvussa 4, kun käsitellään Josephsonin liitosta ja aallon tunneloitumista.

3. KUBITIT

Tavalliset tietokoneet perustuvat klassilliseen fysiikkaan, ja ne käsittelevät tietoa bittien avulla. Klassilliseen fysiikkaan rajoittumien kuitenkin rajoittaa tavallisten tietokoneiden laskentatehoa, sillä bitin eri tilojen superpositiot eivät ole klassillisesti sallittuja. Kvanttitietokoneet puolestaan hyödyntävät kvanttimekaanisia ilmiöitä, jolloin edellä mainitut superpositiotilat ovat mahdollisia. Tällaisilla kvanttimekaniikkaan perustuvilla tietokoneilla pystytään ratkaisemaan joitakin matemaattisia ongelmia klassista tietokonetta tehokkaammin. Esimerkiksi Shorin algoritmi, jossa kokonaislukuja jaetaan tekijöihinsä, toimii kvanttietokoneella tehokkaammin. [7]

3.1 Toimintaperiaate

Tavallinen bitti voi saada arvokseen joko arvon 0 tai 1. Klassinen tiedon käsittely perustuu tällaisiin klassiseen fysiikkaa perustuviin bitteihin. Kvanttimekaniikkaan perustuva kvanttibitti eli kubitti voi saada tavallisen bitin arvojen lisäksi myös jonkin näiden arvojen superposition. Kubittien tilat ovat kaksiulotteisia kompleksivektoreita ja tilalle käytetään merkintää $|\psi\rangle$. Kubitin mahdollisia tiloja voidaan havainnollistaa kuvan 3.1 Blochin pallolla. [8][9]



Kuva 3.1. Kubitin mahdolliset tilat Blochin pallolla esitettynä (mukailen lähdettä [8]).

Tila voidaan tällöin ilmaista pallokoordinaattien avulla käyttäen hyväksi elevaatiokulmaa θ ja atsimuuttikulmaa ϕ

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (3.1)$$

jossa $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Kubitin tilaa mitattaessa se käyttäytyy kuitenkin kuin tavallinen bitti, koska tilaa mitattaessa superpositio romahtaa tietyllä todennäköisyydellä joko tilaan $|0\rangle$ tai $|1\rangle$. Tästä johtuen kubitin tilan uudelleen mittaaminen johtaa täysin samaan tulokseen kuin aiemminkin. [8]

Kvanttitietokoneen toiminta perustuu monista kubiteista koostuviin kubittirekistereihin. Kubittirekisterien tilojen määrä kasvaa eksponentiaalisesti kubittien määrän kasvaessa. Tilojen superpositioluonteen takia useat rinnakkain tapahtuvat laskutoimitukset ovat myös mahdollisia. Tilojen suuren määrän ja rinnakkaisten laskutoimitusten takia kvanttitietokoneet pystyvät ratkaisemaan tietynlaisia laskutoimituksia klassista tietokonetta nopeammin. [8]

3.2 Luonnolliset kubitit

Kubittina voi toimia kvanttisysteemi, jolla on kaksi toisistaan erotettavaa tilaa [8]. Tällaisia systeemeitä löytyy luonnosta valmiina, mutta niitä voidaan myös valmistaa. Kubittien käsittely on klassisia bittejä hankalampaa, sillä kubittien kvanttitilat ovat herkkiä ympäristöstä aiheutuvalla dekoherenssille. Jotta kubitteja voitaisiin käyttää kvanttilaskentaan, on niiden kuitenkin oltava kytköksissä toisiinsa porttien avulla. [3]

Luonnossa esiintyviä kubiteiksi sopivia systeemeitä ovat esimerkiksi elektronin spin tai ionien siirtymädipolit [3]. Elektronin spin soveltuu kubitiksi, koska se voi olla ylöspäin, alas päin tai näiden tilojen superpositiossa. Elektronin spiniä hyödyntävä kubitti valmistetaan upottamalla elektroneja puolijohteeseen, jonka pinnalla on metallielektrodeja. Elektrodit tuottavat sähkömagneettisen kentän, jolla voidaan ohjata spinien magneettista dipolimomenttia. Ioneissa puolestaan tiloina $|0\rangle$ tai $|1\rangle$ voi toimia kaksi eri elektroniorbitaalitilaa. Ioneja pidetään paikallaan esimerkiksi optisten lasereiden avulla ja ympäristön aiheuttaman dekoherenssin minimoimiseksi, niitä joudutaan pitämään ultratyhjiöissä, joissa paine on erittäin matala. [7]

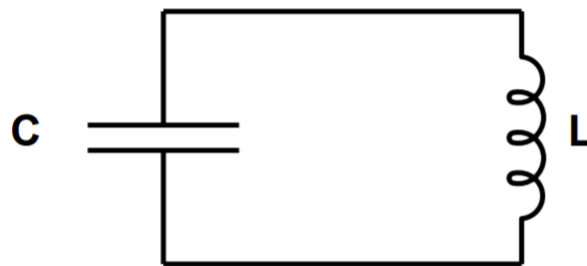
Luonnollisten kubittien etu on siinä, että niiden vapausasteet ovat luonnollisesti hyvin eristettyjä ulkopuolisesta ympäristöstä, mikä puolestaan vähentää mahdollista dekoherenssia. Haasteina tällaisilla kubiteilla kuitenkin on koherenssin säilyttäminen nopeita porttio-peraatioita edellyttävien liitosten muodostamisessa. [3]

3.3 Suprajohtavat kubitit

Suprajohtavat kubitit koostuvat elektronisista komponenteista. Tällaisten kubittien edellytyksenä on se, että komponenttien on oltava suprajohtavassa tilassa, jotta johde-elektronien sirontaa ei tapahtuisi. Häviötön virrankulku on vaatimus sille, että piiri voisi toimia kvanttimekaanisesti. Suprajohtavien kubittien tilat eroavat luonnollisista kubiteista siten, että suprajohtavien kubittien tilat ovat sähködynaamisia tiloja kun taas luonnollisilla kubitilla ne ovat mikroskooppisia vapausasteita. Oleellista kubiteille on, että energiatiloista erottuu kaksi tilaa, joiden energiaerotus poikeaa riittävästi ylempien tilojen välisistä energiaero- tuksista. [3]

3.3.1 Kvanttimekaaninen LC-piiri

Kvanttimekaaninen LC-piiri ei itsessään voi toimia kubittina, mutta se on tärkeä osa siirryt- täessä suprajohtaviin kubitteihin. Tällainen LC-piiri koostuu käämistä, kondensaattorista ja näitä yhdistävistä liittimistä. Piirin kaikki metalliosat ovat suprajohtavia kvanttikoherens- sin saavuttamiseksi. [3] Piirin rakenne on esitelty kuvassa 3.2.



Kuva 3.2. Kvanttimekaanisen LC-piirin rakenne.

Kvanttimekaaninen LC-piiri käyttäytyy harmonisen värähtelijän tavoin ja sen Hamiltonin funktio voidaan kirjoittaa muodossa

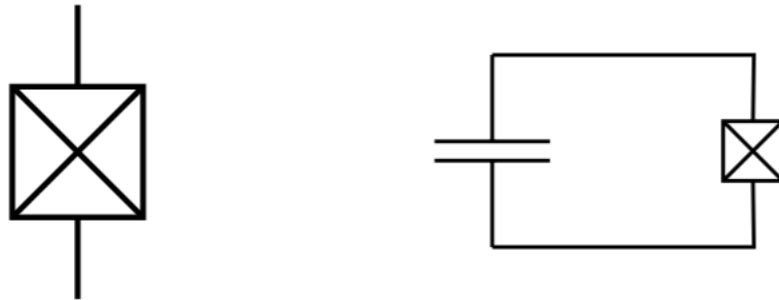
$$H = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C}, \quad (3.2)$$

jossa Φ on käämin magneettivuoto, L on käämin induktanssi, Q on kondensaattorin varaus ja C on kondensaattorin kapasitanssi. Yhtälö 3.2 voidaan kirjoittaa muotoon

$$H = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (3.3)$$

jossa termiä $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ kutsutaan värähtelijän resonanssitaajuudeksi. [3] Yhtälöstä 3.3

huomataan, että LC-piirin energiatilojen väliset erot ovat yhtäsuuria. Erojen yhtäsuuruus merkitsee sitä, että tilojen $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ välisiä siirtymiä ei pystytä erottamaan muiden vierekäisten energiatilojen siirtymistä, joten systeemi ei voi yksinään toimia kubittina. Systeemiin voidaan kuitenkin tuoda epälinearisuutta korvaamalla käämi vahvasti epälineaarilla komponentilla. Ainoa alhaisissa lämpötiloissa toimiva vahvasti epälineaarinen komponentti, jossa ei esiinny häviöitä, on nimeltään Josephsonin liitos. Josephsonin liitos koostuu kahdesta päällekkäin olevasta suprajohtavasta elektrodista sekä niiden välillä olevasta ohuesta eristekerroksesta. Josephsonin liitosta ja sen ominaisuuksia tarkastellaan tarkemmin luvussa 4. [3][7]



Kuva 3.3. Vasemmalla on Josephsonin liitoksen piirrosmerkki ja oikealla LC-piiri, jonka käämi on korvattu Josephsonin liitoksella (mukaillen lähdettä [3]).

Josephsonin liitoksen Hamiltonin funktio voidaan esittää muodossa

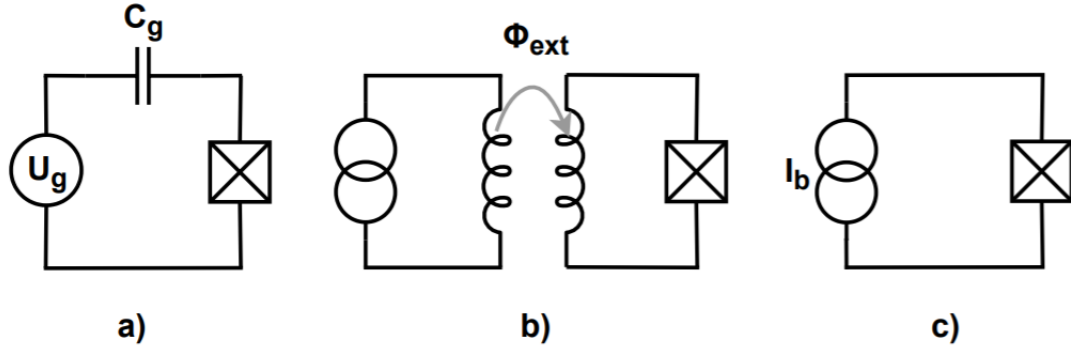
$$H = E_{CJ} \left(N - \frac{Q_r}{2e} \right)^2 - E_J \cos \theta, \quad (3.4)$$

jossa $E_{CJ} = \frac{(2e)^2}{2C_J}$ on Coulombin varausenergia yhdelle Cooperin parille liitoksen kapasitanssissa C_J , N on liitoksessa olevien Cooperin parien määrä, Q_r on liitoksen jäännösvaraus, E_J on liitoksen induktanssista aiheutuva Josephsonin energia ja θ on suprajohtavien elektrodien välinen vaihe-ero. [3] Hamiltonin funktiosta nähdään energiatilojen olevan epätasaisesti jakautuneet, joten tilojen $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ väliset siirtymät voidaan erottaa muista siirtymistä.

3.3.2 Perustyytit

Yhtälön 3.4 termeissä Q_r , E_C ja E_J havaitaan vaihteluita, jotka puolestaan aiheuttavat kubittien epätarkkuutta. Termien E_C ja E_J vaihteluita voidaan pienentää parantamalla kubitin valmistuksen laatua, mutta termin Q_r vaihtelut ovat satunnaisia. Jäännösvaraus Q_r on peräisin liitoksessa olleesta varauksesta ennen kuin se liitettiin osaksi piiriä. Jäännösvarauksen vaihteluista aiheutuvia vaikutuksia voidaan vähentää muuttamalla piirin raken-

netta. Yhden Josephsonin liitoksen omaavien kubittien tapauksessa on olemassa kolme perustyyppiä, joilla näitä vaikutuksia pyritään minimoimaan. Perustyyppihin kuuluvat varauskubitit, vuokubitit ja vaihekubitit. [3] Näiden piirien rakenteet on esitetty kuvassa 3.4.



Kuva 3.4. Peruskubittityypit. a) Varauskubitti, b) vuokubitti ja c) vaihekubitti (mukaillen lähde [3]).

Cooperin pari laatikoksi kutsuttu kuvan 3.4 varauskubitti on perustyypeistä yksinkertaisin. Siinä jäännösvarauksen Q_r vaihteluita kompensoidaan kytkemällä piiriin jännitelähde. Piirissä on kytketty sarjaan jännitelähde, porttikondensaattori ja Josephsonin liitos, jolloin piirin Hamiltonin funktioksi saadaan

$$H = E_{CJ}(N - N_g)^2 - E_J \cos \theta, \quad (3.5)$$

jossa $E_{CJ} = \frac{(2e)^2}{2(C_J + C_g)}$ ja $N_g = \frac{Q_r + C_g U}{2e}$. Kasvattamalla suhdetta $\frac{E_J}{E_C}$, voidaan systeemin herkkyyttä jäännösvarauksen vaihtelulle pienentää. Energioiden suhteen kasvaessa systeemin epälineaarisuus kuitenkin vähenee, joten suhteelle on löydettävä tasapaino. [3]

Kuvan 3.4 vuokubitti, jota kutsutaan myös nimellä RF-SQUID (engl. Radio frequency superconducting quantum interference device) [7], koostuu Josephsonin liitoksesta, jonka elektrodit on yhdistetty toisiinsa suprajohtavan silmukan avulla. Silmukkaan ohjataan erillisen apukäämin avulla tuotettu ulkoinen magneettivuo , jolloin piirin Hamiltonin funktioksi saadaan

$$H = \frac{q^2}{2C_J} + \frac{\phi^2}{2L} - E_J \cos \left[\frac{2e}{\hbar} (\phi - \Phi_{ext}) \right], \quad (3.6)$$

jossa q on Josephsonin liitoksen varaus, L on suprajohtavan silmukan induktanssi ja ϕ on magneettivuo suprajohtavan silmukan läpi. Suprajohtavan silmukan lisäyksellä ja energioiden suhteen $\frac{E_J}{E_C}$ kasvattamisella saadaan vuokubitissa jäännösvarauksen aiheuttamat ongelmat vähäisiksi. [3]

Vaihekubitissa jäännösvarauksen aiheuttaman ongelman ratkaisemiseksi käytetään tasavirtalähdettä. Myös tässä kubittityypissä varauksen vaihteluista aiheutuvia vaikutuksia pyritään vähentämään suurella energioiden suhteella $\frac{E_J}{E_C}$. Piirin epälineearisuutta kasvatetaan käyttämällä virtaa J , joka on hyvin lähellä Josephsonin liitoksen kriittistä virtaa J_0 . Piirin Hamiltonin funktioksi saadaan

$$H = E_{CJ}p^2 - J\varphi_0\delta - J_0\varphi_0 \cos \delta, \quad (3.7)$$

jossa $E_{CJ} = \frac{(2e)^2}{2C_J}$, φ_0 on skaalauskerroin ja δ on vaihe-eron operaattori, jolle pätee $\theta = \delta \pmod{2\pi}$. Nyt voidaan merkitä $2ep = Q$, jolloin yhtälö 3.7 saa muodon

$$H = \frac{Q^2}{2C_J} - J\varphi_0\delta - J_0\varphi_0 \cos \delta. \quad (3.8)$$

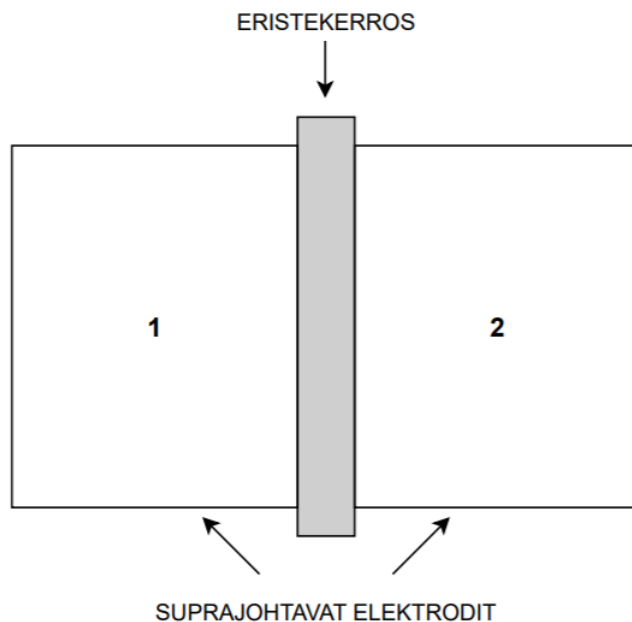
Tämän kubittityypin erikoisuutena on kubitissa itsessään oleva ominaisuus kubitin tilan lukemiseen, joka perustuu tilan tunneloitumiseen ulos systeemistä. Kyseinen ominaisuus puuttuu kahdesta aiemmin mainitusta kubittityypistä. [3]

4. JOSEPHSONIN LIITOS

Luvussa 3 esille tullut sähköinen komponentti, nimeltään Josephsonin liitos, mahdollistaa suprajohtavien kubittien toiminnan. Se on ainoa nykyisin tunnettu vahvasti epälineaarinen häviötön komponentti, joka toimii suprajohtavuuden mahdollistavissa alhaisissa lämpötiloissa.

4.1 Liitoksen rakenne

Liitos koostuu kahdesta suprajohtavasta elektrodista ja näiden välissä olevasta ohuesta eristekerroksesta. Liitoksen elektrodeja valmistetaan usein alumiinista ja elektrodien väliin jäävä eristekerros voidaan valmistaa hapettamalla elektrodin metallia, jolloin alumiinin tapauksessa eristekerros muodostuu alumiinioksidista. [3] Josephsonin liitoksen rakenne on esitetty kuvassa 4.1.



Kuva 4.1. Josephsonin liitoksen rakenne (mukaillen lähdettä [6]).

Liitoksen eristekerroksen on oltava riittävän ohut, yleensä yhden nanometrin luokkaa, jotta Cooperin parien tunneloituminen kerroksen läpi olisi mahdollista [3]. Tästä johtuen

liitoksen käyttäytyminen muuttuu, kun eristekerroksen paksuutta vaihdellaan ja tämä ominaisuus on työssä tehtävän mallinnuksen ideana.

4.2 Josephsonin ilmiö

Tässä luvussa palataan takaisin luvussa 2 esiteltyyn Cooperin parien aaltofunktioon 2.1 ja tällaisen aaltofunktion tunneloitumiseen Josephsonin liitoksessa esiintyvän ohuen eristekerroksen läpi. Tunneloituminen on tärkeä osa Josephsonin liitoksen toimintaa ja tämän idean pohjalta voidaan johtaa kaksi liitoksen toimintaa kuvaavaa relaatiota, joita kutsutaan Josephsonin relaatioiksi.

Tutkimalla amplitudia löytää elektroni puolen 1 elektrodissa, ψ_1 , ja vastaavaa amplitudia puolen 2 elektrodissa, ψ_2 , voidaan muodostaa kuvan 4.1 mukaisen Josephsonin liitoksen puolille 1 ja 2 Schrödingerin yhtälöt

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = U_1\psi_1 + K\psi_2, \quad (4.1)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = U_2\psi_2 + K\psi_1, \quad (4.2)$$

joissa U_1 ja U_2 kuvaavat energioita. Jos puolien välillä on potentiaaliero V , voidaan kirjoittaa energioille yhteys $U_1 - U_2 = qV$. KytKentäkerroin K on puolestaan liitokselle ominainen tunneloitumisen voimakkuutta kuvaava termi, joka on tärkeässä osassa liitoksen ominaisuuksia tutkittaessa. [6] Asettamalla energian nollakohdan liitoksen puoleenväliin voidaan aiemmat yhtälöt kirjoittaa muodossa

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = +\frac{qV}{2}\psi_1 + K\psi_2, \quad (4.3)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2}\psi_2 + K\psi_1. \quad (4.4)$$

Liitoksen puolien 1 ja 2 elektroneille voidaan muodostaa yhtälön 2.1 mukaiset aaltofunktiot

$$\psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1}, \quad (4.5)$$

$$\psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}, \quad (4.6)$$

joissa θ_1 ja θ_2 ovat liitoksen eri puolien vaiheet ja ρ_1 ja ρ_2 ovat puolien elektronitiheydet.

Sijoittamalla yhtälöt 4.5 ja 4.6 aiempiin Schrödingerin yhtälöihin 4.1 ja 4.2, sekä kirjoittamalla liitoksen puolien välisen vaihe-eron muodossa ($\theta_1 - \theta_2 = \theta$) saadaan muodostettua yhtälöt

$$\dot{\rho}_1 = +\frac{2}{\hbar}K\sqrt{\rho_2\rho_1}\sin\theta, \quad (4.7)$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2}{\hbar}K\sqrt{\rho_2\rho_1}\sin\theta, \quad (4.8)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos\theta - \frac{qV}{2\hbar}, \quad (4.9)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\cos\theta + \frac{qV}{2\hbar}. \quad (4.10)$$

Yhtälöiden 4.7 ja 4.8 avulla voidaan puolelta 1 puolelle 2 kulkeva virta kirjoittaa muodossa

$$J = \frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\theta. \quad (4.11)$$

Liitoksen ollessa osana virtapiiriä ρ_1 ja ρ_2 pysyvät vakioina ja vastaavat normaalia suprajohtavan materiaalin elektronitiheyttä ρ_0 . Nyt voidaan merkitä $\frac{2K\rho_0}{\hbar} = J_0$, jolloin saadaan muodostettua ensimmäinen Josephsonin relaatio

$$J = J_0\sin\theta, \quad (4.12)$$

jossa termi J_0 on edellisessä luvussa esille tullut liitoksen kriittinen virta. [6] Kriittisen virran yhtälössä huomataan, että myös se riippuu arvosta K eli kriittinen virta on tietylle liitokselle ominainen ja sen arvoa on mahdollista muokata. Ensimmäisestä relaation mukaan liitoksessa saadaan kulkemaan virta ilman ulkoista jännitettä ja virran suuruus on välillä $-J_0$ ja $+J_0$.

Yhtälöiden 4.9 ja 4.10 avulla saadaan kirjoitettua Josephsonin toinen relaatio

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{qV}{\hbar}, \quad (4.13)$$

josta huomataan, että jos liitokseen kytketään tasajännite V , vaihe-ero vaihtelee lineaarisesti ajan suhteen ja liitoksessa kulkee sinimuotoinen vaihtovirta, jonka taajuus on

$$\omega = \frac{qV}{\hbar}. \quad (4.14)$$

Tutkitaan seuraavaksi liitokseen varautunutta energiaa. Tämä energia voidaan ilmaista yhtälöllä

$$\Delta E = \int P dt = \int V J dt . \quad (4.15)$$

Yhtälöstä 4.13 voidaan ratkaista jännite

$$V = \frac{\hbar d\theta}{q dt} = \frac{\hbar d\theta}{2e dt} \quad (4.16)$$

ja nyt voidaan sijoittaa yhtälöt 4.12 ja 4.16 liitokseen varautuneen energian yhtälöön 4.15, jolloin saadaan yhtälö

$$\Delta E = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J_0 \sin(\theta) \frac{\hbar}{2e} d\theta . \quad (4.17)$$

Kun yhtälön integraali lasketaan auki, saadaan yhtälö muotoon

$$\Delta E = -\frac{\hbar J_0}{2e} \Delta \cos \theta, \quad (4.18)$$

josta huomataan, että energia riippuu pelkästään liitoksen alku- ja lopputilasta. Tällöin voidaan kirjoittaa yhtälö

$$E(\theta) = -\frac{\hbar J_0}{2e} \cos \theta. \quad (4.19)$$

Yhtälössä 4.19 esiintyvää energian amplitudin määrittävää kerrointa $\frac{\hbar J_0}{2e}$ kutsutaan Josephsonin energiaksi E_J ja se on sama kuin liitoksen Hamiltonin funktiossa 3.4 esiintyvä E_J . [5] Kun Josephsonin energian yhtälöön sijoitetaan kriittisen virran J_0 määritelmä, voidaan Josephsonin energia kirjoittaa muodossa

$$E_J = \frac{\hbar}{2e} \frac{2K\rho_0}{\hbar} = \frac{\rho_0}{e} K. \quad (4.20)$$

Yhtälöstä huomataan, että Josephsonin energia on suoraan verrannollinen kytkentäkerrotimeen K . Koska Josephsonin energia E_J on liitoksen Hamiltonin funktiossa esiintyvä parametri, Josephsonin energiaa muuttamalla voidaan vaikuttaa suprajohtavan kubitin energiatiloihin. Josephsonin energian yhtälössä esiintyvä kytkentäkerroin K on liitokselle ominainen ja sen arvoa on mahdollista muuttaa muokkaamalla liitoksen ominaisuuksia. Yksinkertainen tapa liitoksen muokkaamiseen on eristekerroksen paksuuden muuttaminen, joka onkin pääosassa seuraavassa luvussa tehdyssä liitoksen mallinnuksessa.

5. JOSEPHSONIN LIITOKSEN MALLINNUS

5.1 Mallinnuksen teoria

Työssä tehtävän mallinnuksen tarkoituksena on selvittää Josephsonin liitoksen mikrokooppisten ominaisuuksien vaikutusta liitoksen toimintaan. Mallinnusta tehtiin MATLAB-ohjelmistolla yksiulotteiselle Josephsonin liitokselle. Mallinnus perustui artikkelien [10], [11] ja [12] kaltaisiin mallinnustapoihin, joissa käyttäytymistä tutkitaan Greenin funktioiden avulla.

Työn mallinnuksessa käytettiin työn ohjaajan, yllä esitettyihin referensseihin perustuvia, Greenin funktioita ja työn ohjaajan kirjoittamia peruskriptejä sekä työssä muodostettua pääohjelmaa, joka käyttää peruskriptejä hyödykseen. Mallinnuksessa Josephsonin liitoksen eristekerros jaettiin tasapaksuihin viipaleisiin, jotka puolestaan yhdistettiin toisiinsa. Yksittäisille viipaleille voidaan muodostaa omat Greenin funktiot, jotka voidaan rekursiivisesti yhdistää koko eristeen kattavaksi funktioksi. Yhdistetyt viipaleet muodostavat yhteisen eristekerroksen, jonka paksuutta voidaan muuttaa käyttämällä eri määriä eristeviipaleita. Eristeen lisäksi myös suprajohdaville elektrodeille muodostetaan Greenin funktiot, jotka voidaan yhdistää eristeen Greenin funktion kanssa koko liitoksen kattavaksi funktioksi. Greenin funktiot toimivat mallinnuksessa hiukkasten propagaattoreina, jotka kuvaavat hiukkasten mahdollisia siirtymiä paikasta toiseen.

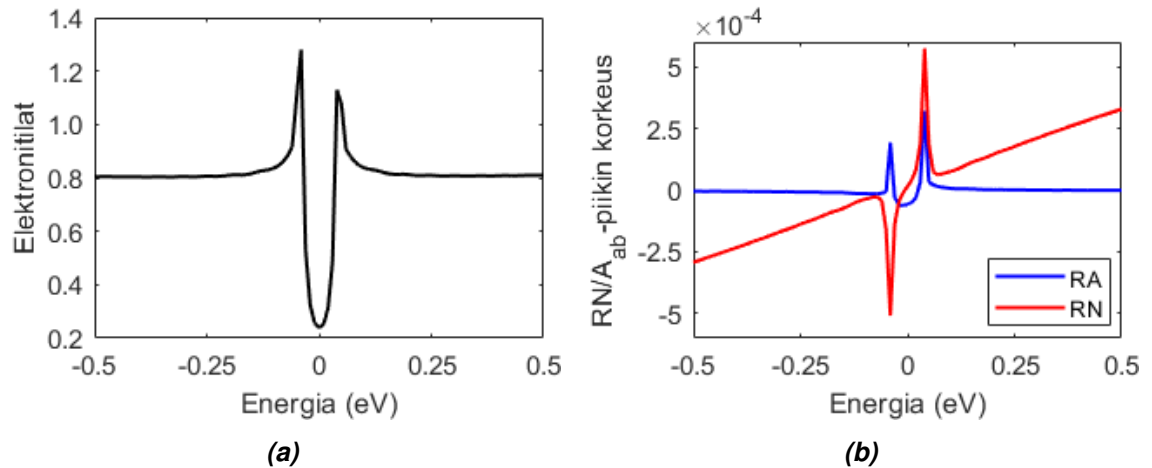
Cooperin parien syntyminen ja hajoaminen kytkevät elektronit ja aukot toisiinsa, joten Greenin funktiot on muodostettava elektronien lisäksi myös aukoille. Tällaista parien syntymistä ja hajoamista tapahtuu suprajohdavan materiaalin ja normaalin materiaalin rajapinnoissa, koska suprajohdavissa materiaaleissa varauksenkuljettajina toimivat Cooperin parit ja normaaleissa materiaaleissa yksittäiset elektronit. Greenin funktioiden avulla muodostetun tilatiheysmatriisin säännöllisen alkion RN_{ab} ja anomaalisen alkion RA_{ab} käyttäytymistä seuraamalla voidaan tutkia liitoksessa tapahtuvan tunneloitumisen voimakkuutta. RN_{ab} kuvaa yksittäisten elektronien tunneloitumista liitoksen puolelta 1 puolelle 2 ja RA_{ab} puolestaan kuvaa tilannetta, jossa puolelta 1 puolelle 2 tunneloitunut elektroni muodostaa Cooperin parin puolen 2 elektronin kanssa. Käytetyissä mallinnusohjelmissa puolesta 1 käytetään merkintää a ja puolesta 2 merkintää b .

Työssä muodostettiin MATLAB-ohjelma A.1, joka toimi mallinnuksen pääohjelmana. Pää-

ohjelman tarkoitus oli hyödyntää työn ohjaajan kirjoittamia aliohjelmia, joita olivat coupling-aliohjelma B.1 ja supercoupling-aliohjelma C.1. Mallinnus tapahtui suorittamalla pääohjelmaa eri parametrien arvoilla. Muutettavia parametreja olivat suprajohteiden energia-aukot $delgap_a$ ja $delgap_b$, suprajohteiden ja eristeen kytkentävoimakkuutta kuvaava v ja eristeviipaleiden määrä nsl_i . Pääohjelma kutsuu coupling-aliohjelmaa ja supercoupling-aliohjelmaa, joista ensimmäisessä muodostetaan eristeen kattava Greenin funktio ja jälkimmäisessä suprajohteen Greenin funktio. Jotta molemmille suprajohtaville elektrodeille saataisiin muodostettua omat Greenin funktionsa, on supercoupling-aliohjelmaa kutsuttava kahdesti ja käytettävä elektrodeille ominaisia parametreja. Eristeen ja suprajohteiden Greenin funktiot yhdistetään pääohjelmassa koko liitoksen kattaviksi Greenin funktioiksi. Muodostetuista Greenin funktiosta muodostetaan tiheysmatriisin säännölliset alkiot RN_{ab} ja anomaaliset alkiot RA_{ab} .

5.2 Mallinnustulokset ja tulosten analyysi

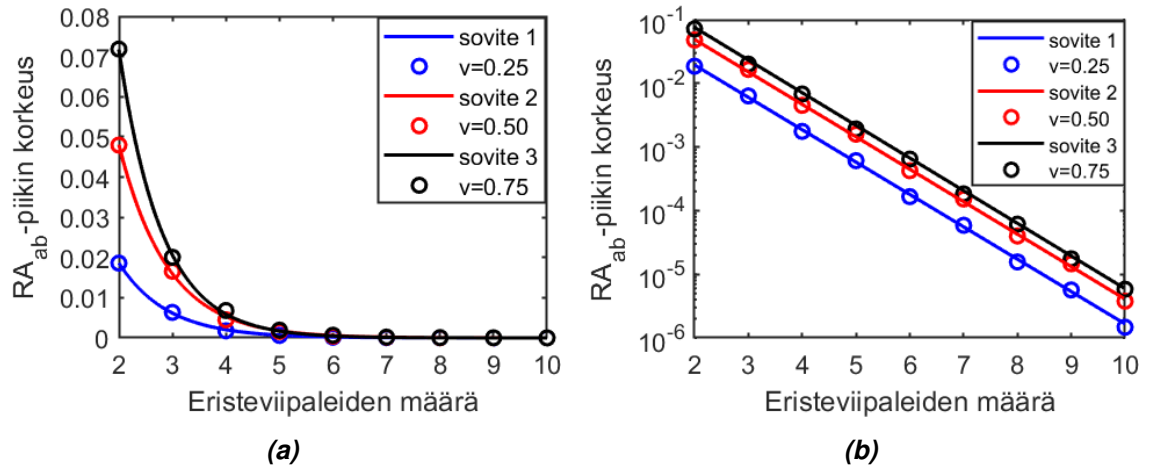
Mallinusajosta suoraan saatavat kuvaajat ovat kuvan 5.1 kuvaajien kaltaisia. Kuvassa 5.1a erottuu suprajohteille ominainen energia-aukko yksittäisten elektronien mahdollisille energiatiloille. Kuvassa 5.1b on esitetty tiheysmatriisin säännöllisen ja anomaalisen alkion käyttäytyminen energian funktiona. Alkioiden kuvaajien koherenssipiikit asettuvat kuvan 5.1a koherenssipiikkien kanssa yhteneville paikoille, mikä kuvastaa alkioiden yhteyttä energia-aukkoon.



Kuva 5.1. Mallinusajosta saatavat kuvaajat. Vasemmalla on kuvaaja elektronien Greenin funktion käyttäytymisestä, josta voidaan erottaa suprajohteelle ominainen energia-aukko. Oikealla on kuvaaja tiheysmatriisin säännöllisen ja anomaalisen alkion käyttäytymisestä, jossa alkioiden koherenssipiikit asettuvat energia-aukon piikkien sijainneille. Kuvaajat ovat tilanteesta, jossa molemmat elektrodit ovat suprajohtavia, $v = 0.5$ ja $nsl_i = 6$

Kuvan 5.1b kuvaajien koherenssipiikkien korkeuksista muodostetaan kuvaajia, jotta käyttäytymistä voitaisiin tutkia eristekerroksen paksuuden funktiona. Kuvasta huomataan, että koherenssipiikit voivat olla erikorkuisia ja vastakkaisilla puolilla, joten tulosten laskennas-

sa piikkien korkeuksiksi lasketaan piikkien korkeuksien itseisarvojen keskiarvo. Ensimmäiset tulokset eli kuvien 5.2 ja 5.3 tulokset muodostetaan tilanteelle, jossa vain ensimmäinen liitoksen elektrodi on suprajohtava. Tällaisessa tilanteessa $delgap_a = 0.05$ eV ja $delgap = 0$ eV, ja tällöin voidaan tarkastella niin kutsuttua proksimiteetti-ilmiötä, jossa suprajohteen Cooperin pareja kulkeutuu myös normaalissa tilassa olevaan materiaaliin.



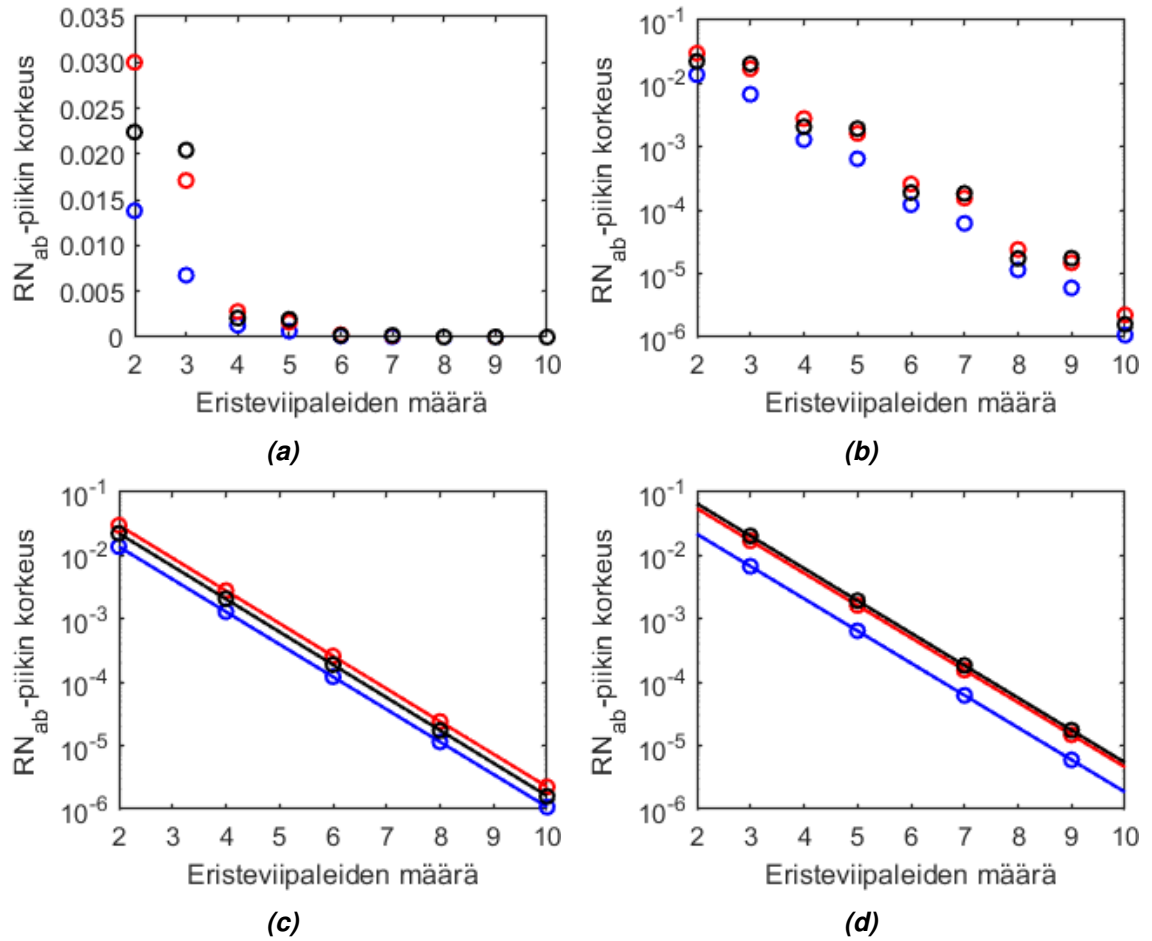
Kuva 5.2. RA-piikkien korkeuden riippuvuus eristeviipaleiden määrästä ja kytkentävoimakkuudesta, kun vain ensimmäinen elektrodi on suprajohtava

Kuvan 5.2a tuloksesta huomataan, että eristekerroksen paksuuden kasvattaminen pienentää anomaalisen termin piikin korkeutta. Tulokset näyttäisivät laskevan lähes eksponentiaalisesti, joten kuvan kuvaajiin sovitetaan eksponentiaaliset sovitteet. Kuvassa 5.2b kuvaajat on esitetty logaritmisella asteikolla, josta on helpompi nähdä piikin korkeuden eksponentiaalinen lasku.

Kuvassa 5.3 on puolestaan tiheysmatriisin säännöllisen alkion piikin korkeudet. Säännöllisten alkioiden piikkien korkeudet näyttäisivät käyttäytyvän lähes samalla tavalla kuin anomaalisten, mutta tällä kertaa tuloksissa esiintyy symmetrisyyttä parillisilla ja parittomilla eristeviipaleiden määrillä. Kun parillisten ja parittomien viipalemäärien piikkien korkeudet sijoitetaan omiin kuvaajiinsa, huomataan korkeuksien asettuvan logaritmisella asteikolla suoralle. Symmetriaominaisuus saattaa aiheutua siitä, että yksiuolotteisen Josephsonin liitoksen malli olisi mahdollisesti herkkä käytetylle Greenin funktio -mallille.

Seuraavat mallinnukset suoritetaan asettamalla molemmat elektrodit suprajohtaviksi eli $delgap_a = 0.05$ eV ja $delgap = 0.05$ eV. Näistä mallinnoista saadut tulokset on esitetty kuvissa 5.4 ja 5.5. Tulokset muistuttavat paljon aiempia tuloksia, mutta tällä kertaa jo anomaalisen alkion tuloksissa esiintyy aiempi symmetriaominaisuus. Molempien alkioiden piikkien korkeudet laskevat näissäkin tuloksissa eksponentiaalisesti viipalemäärään nähden.

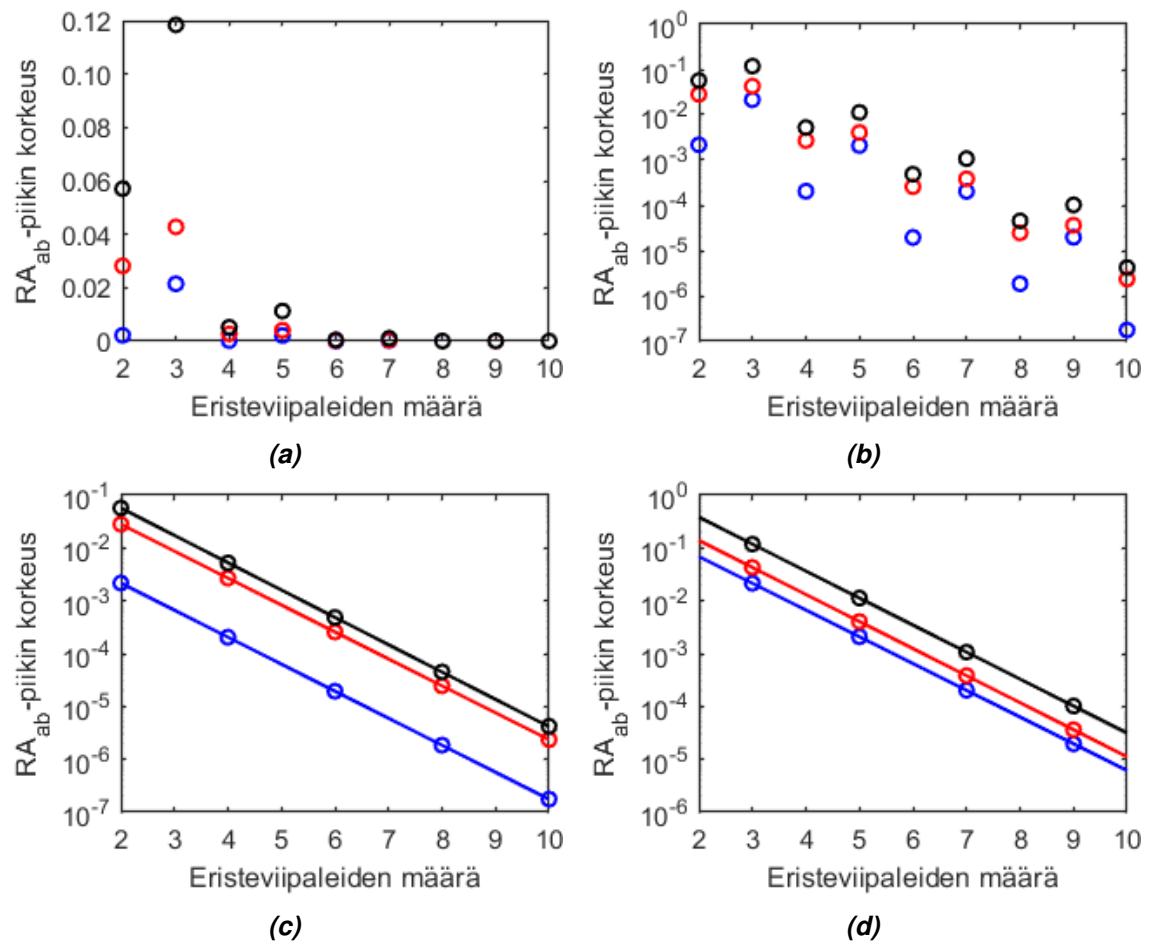
Tuloksia tutkimalla voidaan havaita, että logaritmisella asteikolla piikin korkeuksiin sovitettun suoran kulmakertoimen ei ole riippuvainen termistä v eli eristeen ja suprajohteen kytken-



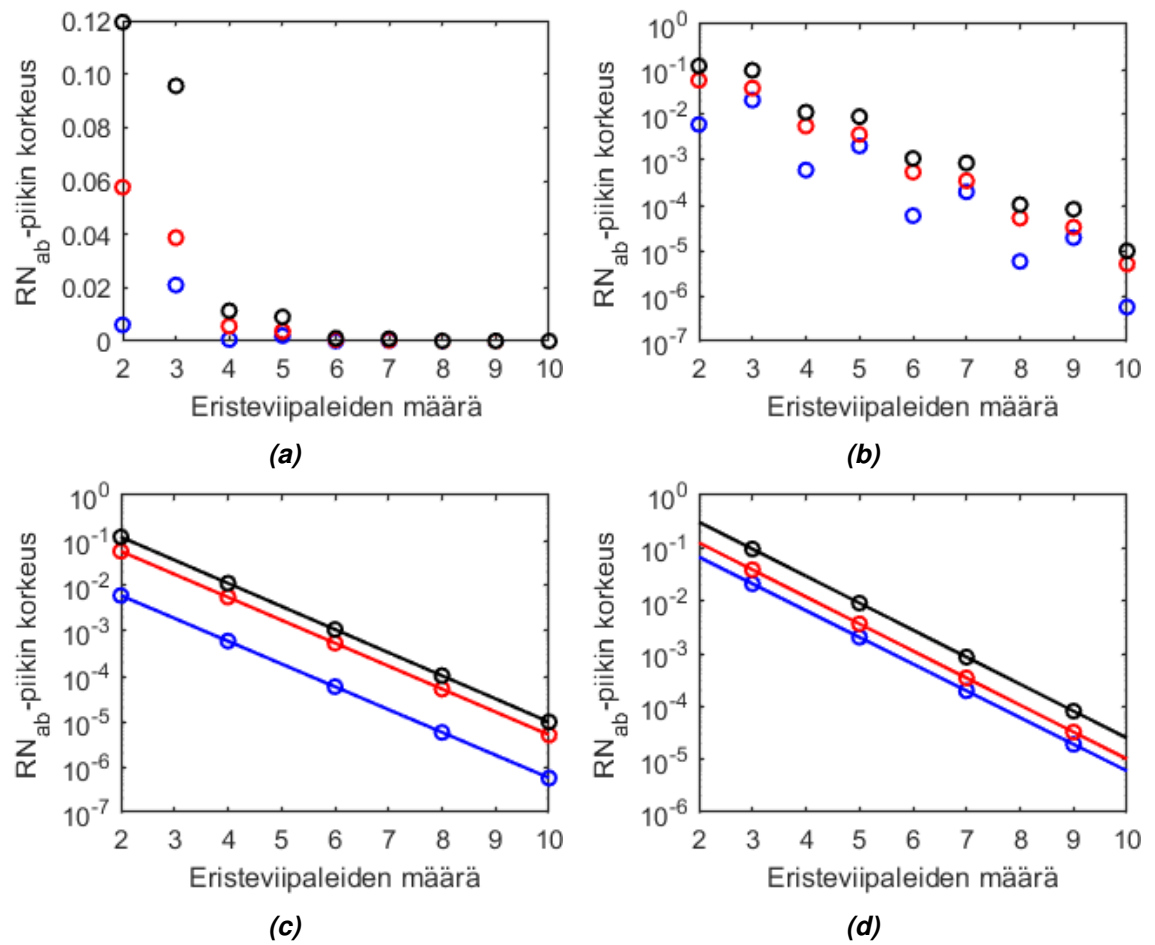
Kuva 5.3. RN -piikkien korkeuden riippuvuus eristeviipaleiden määrästä ja kytkentävoimakkuudesta, kun vain ensimmäinen elektrodi on suprajohtava. Kuvissa c ja d on otettu parillinen ja pariton viipalemäärä erikseen. Symbolit kuten kuvassa 5.2.

nän voimakkuudesta. Tästä voidaan päätellä, että tunneloituminen heikkenee yhtä nopeasti kytkennästä riippumatta. Eksponentiaalinen tunneloitumisen heikkeneminen vaikuttaa voimakkaasti edellisessä luvussa esiteltyyn K termiin ja tällöin myös Josephsonin energiaan. Tästä johtuen Josephsonin liitoksia hyödyntävien suprajohtavien kubittien toimintaan voidaan vaikuttaa muuttamalla liitoksien eristekerroksien paksuutta.

Työssä käytetty yksiulotteinen malli ei kuitenkaan ota erilaisten materiaalien rakenteellisia ominaisuuksia huomioon. Todellinen eristekerros voi hyvinkin olla epäjärjestynyt ja eristeen rakenne monimutkaisempi. Mahdollisesti tämän takia mallinnuksen tuloksissa havaittua parillisten ja parittomien viipalemäärien symmetriaominaisuutta ei todellisissa materiaaleissa havaita. Työn yksinkertaistettu malli on kuitenkin hyvin käyttökelpoinen työssä tutkittujen selkeiden riippuvuuksien selvittämiseen.



Kuva 5.4. RA-piikkien korkeuden riippuvuus eristeviipaleiden määrästä ja kytkentävoimakkuudesta, molempien elektrodien ollessa suprajohtavia. Kuvissa c ja d on otettu parillinen ja pariton viipalemäärä erikseen. Symbolit kuten kuvassa 5.2.



Kuva 5.5. RN-piikkien korkeuden riippuvuus eristeviipaleiden määrästä ja kytkentävoimakkuudesta, molempien elektrodien ollessa suprajohtavia. Kuvissa c ja d on otettu parillinen ja pariton viipalemäärä erikseen. Symbolit kuten kuvassa 5.2.

6. YHTEENVETO

Tässä kandidaatintyössä tutkittiin Josephsonin liitosta suprajohtavien kubittien komponenttina. Työn tavoitteena oli löytää Josephsonin liitoksen mikroskooppisten ominaisuuksien yhteys liitoksen Schrödingerin yhtälön kytkentäkertoimeen ja näin myös suprajohtavien kubittien toimintaan vaikuttaviin parametreihin. Mikroskooppisten ominaisuuksien yhteyttä tutkittiin Greenin funktioihin perustuvalla MATLAB-mallinnuksella yksiulotteiselle Josephsonin liitokselle, jonka eristekerros jaettiin viipaleisiin. Mallinnuksessa muutettiin eristekerroksen paksuutta eli eristeviipaleiden määrää sekä liitoksen suprajohtavien elektrodien ja eristeen kytkentävoimakkuutta.

Mallinnuksessa Cooperin parien tunneiloitumista tutkittiin tarkastelemalla Greenin funktioiden avulla muodostetun tiheysmatriisin säännöllisen ja anomaalisen alkion koherenssiipikkien korkeuksia. Tulosten perusteella liitoksessa tapahtuva Cooperin parien tunneiloituminen heikkenee eksponentiaalisesti eristekerroksen paksuuden kasvaessa. Työssä kuitenkin huomattiin, että heikkeneminen tapahtuu yhtä nopeasti eristeen ja suprajohteen kytkentävoimakkuudesta riippumatta.

Josephsonin liitoksen Schrödingerin yhtälössä esiintyvä kytkentäkerroin on riippuvainen Cooperin parien tunneiloitumisesta eli tunneiloitumisen eksponentiaalinen heikkeneminen pienentää kytkentäkerrointa huomattavasti. Tästä johtuen kytkentäkertoimeen suoraan verrannollinen Josephsonin energia vähenee samassa suhteessa. Josephsonin energia esiintyy liitoksen Hamiltonin funktiossa ja muuttamalla Josephsonin energiaa, on mahdollista muuttaa Josephsonin liitoksen omaavan suprajohtavan kubitin energiatiloja. Tämän perusteella voidaan päätellä, että työn tavoitteen mukainen tilanne on saavutettu, sillä Josephsonin liitoksen eristekerroksen paksuuden muokkaamisella voitaisiin muuttaa valmistettavan suprajohtavan kubitin ominaisuuksia.

Jatkotutkimuksia ajatellen olisi mahdollista tutkia myös liitoksen vaihe-eron vaikutusta Cooperin parien tunneiloitumiseen. Vaihe-ero olisi mahdollista toteuttaa esimerkiksi ulkoisen magneettikentän avulla. Tämän kaltaisen tilanteen mallinnusta voitaisiin tehdä tämän työn tapaisella MATLAB-mallinnuksella.

LÄHTEET

- [1] Berman, G. *Introduction to Quantum Computers*. Introduction to Quantum Computers. World Scientific, 1998. ISBN: 9789810235499.
- [2] Muhonen, J. T., Dehollain, J. P., Laucht, A., Hudson, F. E., Kalra, R., Sekiguchi, T., Itoh, K. M., Jamieson, D. N., McCallum, J. C., Dzurak, A. S. ja al., et. Storing quantum information for 30 seconds in a nanoelectronic device. *Nature Nanotechnology* 9.12 (lokakuu 2014), s. 986–991. ISSN: 1748-3395. DOI: 10.1038/nnano.2014.211. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nnano.2014.211>.
- [3] Devoret, M. H., Wallraff, A. ja Martinis, J. M. Superconducting Qubits: A Short Review (2004). URL: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0411174>.
- [4] Kleiner, R. *Superconductivity : an introduction*. 3rd ed. Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2016 - 2016.
- [5] Tinkham, M. *Introduction to superconductivity*. 2nd ed. Dover Publications, 2004 - 1996. ISBN: 1-62198-598-9.
- [6] Feynman, R., Leighton, R. ja Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. III: The New Millennium Edition: Quantum Mechanics*. The Feynman Lectures on Physics. Basic Books, 2011. ISBN: 9780465025015.
- [7] Sank, D. T. Fast, Accurate State Measurement in Superconducting Qubits. (2014). URL: <https://escholarship.org/uc/item/73m3g1h0> (visited on 04/26/2021).
- [8] Lala, P. K. *Quantum Computing: A Beginner's Introduction*. McGraw-Hill Professional, 2019. ISBN: 1-260-12312-X.
- [9] Nakahara, M. and Sasaki, Y. *Quantum information and quantum computing*. Kinki University series on quantum computing ; vol. 6. World Scientific, 2013. ISBN: 1-283-73944-5.
- [10] Nieminen, J., Suominen, I., Markiewicz, R., Lin, H. ja Bansil, A. Spectral decomposition and matrix element effects in scanning tunneling spectroscopy of Bi₂ Sr₂ CaCu₂ O₈₊. *Physical review. B, Condensed matter and materials physics* 80.13 (2009). ISSN: 1098-0121.
- [11] Trainer, D. J., Wang, B., Bobba, F., Samuelson, N., Xi, X., Zasadzinski, J., Nieminen, J., Bansil, A. ja Iavarone, M. Proximity-Induced Superconductivity in Monolayer MoS₂. eng. *ACS nano* 14.3 (2020), s. 2718–. ISSN: 1936-086X.
- [12] Sriram, P., Kalantre, S. S., Gharavi, K., Baugh, J. ja Muralidharan, B. Supercurrent interference in semiconductor nanowire Josephson junctions. eng. *Physical review. B* 100.15 (2019). ISSN: 2469-9950.

LIITE A: PÄÄOHJELMA

Mainscript.m A.1. *Pääohjelma muodostaa aliohjelmien muodostamien Greenin funktioiden avulla liitoksen kattavat Greenin funktiot. Ohjelma tuottaa myös kuvaajat elektronien Greenin funktioista, sekä tiheysmatriisin säännöllisistä ja anomaalisista alkioista.*

```

1 % Globaalit muuttujat , joita voidaan käyttää pääohjelman
2 % ja aliohjelmien välillä
3 global nsl_i ;
4 global t ;
5 global E_main ;
6 global muu ;
7 global delgap ;
8
9 % Eristeviipaleiden määrää nsl_i muutettiin ajojen välillä
10 nsl_i=2;
11 t=1.0;
12 muu=0.0;
13
14 % Liitoksen elektrodien a- ja b-puolien , sekä eristeen
15 % kemialliset potentiaalit
16 muu_a=0.0;
17 muu_b=0.0;
18 muu_i=0.0;
19
20 % KytKentä suprajohteille ja eristeelle
21 % viipaleiden kytKentää varten
22 t_i=0.5;
23 t_s=1.0;
24
25 % Energia-alueen määritys
26 E_main=[ -0.5:0.01:0.5];
27 ne=length(E_main) ;
28

```

```

29 % Puolien a ja b vaiheet , sekä vaiheesta
30 % riippuvat energia-aukot. Energia-aukkoja
31 % muutettiin ajojen välillä, mutta vaihe-ero
32 % pidettiin nollana
33 pha_a=exp(0.0 i * pi);
34 pha_b=exp(0.0 i * pi);
35 delgap_a(1:ne)=0.05*pha_a;
36 delgap_b(1:ne)=0.00*pha_b;
37
38 % Kytkenäkertoimet , joista muodostetaan eristeen ja suprajohteen
39 % kytkenmatriisit. Näitä muutettiin ajojen välillä, mutta
40 % säilyttämällä v_ai=v_ib
41 v_ai=0.25;
42 v_ib=0.25;
43 V_ai=[v_ai 0; 0 -v_ai];
44 V_ib=[v_ib 0; 0 -v_ib];
45
46 % Liitoksen kattavien Greenin funktioiden alustus
47 G_aa(1:2,1:2,1:ne)=0.0+0.0 i;
48 G_bb(1:2,1:2,1:ne)=0.0+0.0 i;
49 G_ba(1:2,1:2,1:ne)=0.0+0.0 i;
50 G_ab(1:2,1:2,1:ne)=0.0+0.0 i;
51
52 % Aliohjelmista saatavia Greenin funktioita varten
53 global gn1;
54 global hn1;
55 global gnn;
56
57 % Globaali muuttuja , jolla saadaan puolien a ja b
58 % suprajohteiden Greenin funktiot tallennettua
59 global GT;
60 GT(1:2,1:2,1:ne)=0.0+0.0 i;
61
62 % Muodostetaan eristeen Greenin funktio coupling-aliohjelmassa
63 t=t_i;
64 muu=muu_i;
65 run coupling.m;
66
67 % Muodostetaan a- ja b-puolien suprajohteiden Greenin funktiot
68 % supercoupling-aliohjelmassa

```

```

69 t=t_s ;
70 muu=muu_a;
71 delgap=delgap_a;
72 run supercoupling.m;
73 G_a=GT;
74 gnn_a=gnn;
75 muu=muu_b;
76 delgap=delgap_b;
77 run supercoupling.m;
78 G_b=GT;
79
80 % A- ja b-puolien elektronien Greenin funktioiden , sekä
81 % tiheysmatriisin säännöllisen ja anomaalisen alkion alustus.
82 % Näistä muodostetaan mallituksen tuloksena saatavat kuvaajat.
83 GE_aa(1:ne)=0.0+0.0i ;
84 GE_bb(1:ne)=0.0+0.0i ;
85 RA_ab(1:ne)=0.0+0.0i ;
86 RN_ab(1:ne)=0.0+0.0i ;
87 I=eye(2) ;
88
89 % Silmukka energia-alueen yli
90 for in=1:ne
91     G_l=[gn1(in) 0; 0 hn1(in)];
92     G_l11=[gnn(in) 0; 0 hnn(in)];
93
94     % Muodostetaan itse-energiat , joilla yhdistetään eristeen
95     % Greenin funktiot suprajohteiden Greenin funktioihin
96     sigma_aa=V_ai*G_l11*ctranspose(V_ai) ;
97     sigma_bb=ctranspose(V_ib)*G_l11*V_ib ;
98     sigma_ab=V_ai*G_l*V_ib ;
99     sigma_ba=V_ib*G_l*V_ai ;
100
101     % Muodostetaan suprajohteiden Greenin funktioista
102     % väliaikaiset 2x2-matriisit
103     GT_a(1:2,1:2)= G_a(:, :, in) ;
104     GT_b(1:2,1:2)= G_b(:, :, in) ;
105
106     % Muodostetaan liitoksen kattavat Greenin funktiot
107     G_aa(:, :, in)=inv((I-GT_a*sigma_aa)-GT_a*sigma_ab*inv(I-GT_b*
        sigma_bb)*GT_b*sigma_ba)*GT_a;

```

```

108     G_bb(:, :, in) = inv((I - GT_b * sigma_bb) - GT_b * sigma_ba * inv(I - GT_a *
        sigma_aa) * GT_a * sigma_ab) * GT_b;
109     G_ba(:, :, in) = inv(I - GT_b * sigma_bb) * GT_b * sigma_ba * G_aa(:, :, in);
110     G_ab(:, :, in) = inv(I - GT_a * sigma_aa) * GT_a * sigma_ab * G_bb(:, :, in);
111
112     GE_aa(in) = G_aa(1, 1, in);
113     GE_bb(in) = G_bb(1, 1, in);
114
115     RA_ab(in) = (G_ab(1, 2, in) - conj(G_ba(2, 1, in))) / 2. i;
116     RN_ab(in) = (G_ab(1, 1, in) - conj(G_ba(1, 1, in))) / 2. i;
117 end
118
119 figure (7);
120 plot (E_main, -imag(GE_aa), 'r-.');
121 hold on
122 plot (E_main, -imag(GE_bb), 'k-.');
123 hold off
124 figure (8)
125 plot (E_main, RA_ab, 'b-.', E_main, RN_ab, 'r-.');

```

LIITE B: COUPLING-ALIOHJELMA

Coupling.m B.1. Aliohjelma muodostaa eristekerroksen Greenin funktion rekursiivisesti.

```

1 % Eristeen vakioparametrit
2 epsia=0.0;
3 W=2.0;
4 E=E_main-muu;
5 zeta=0.1 i ;
6
7 g00(1:ne)=0.0+0.0 i ;
8 g11(1:ne)=0.0+0.0 i ;
9 gn1(1:ne)=0.0+0.0 i ;
10 gnn(1:ne)=0.0+0.0 i ;
11 gn0n0(1:ne)=0.0+0.0 i ;
12
13 % Yhden viipaleen Greenin funktio
14 g00=1./(2*W)*log((E+zeta+W)./(E+zeta-W));
15
16 % Rekursiivisesti muodostettavien Greenin funktioiden
17 % gn1 and gnn alustaminen
18 gn1=g00;
19 gnn=g00;
20 gn0n0=g00;
21
22 % Silmukka viipaleiden yli
23 for isl=1:nsl_i-1
24     gbl1=t*gn0n0.*gn1;
25     gbln=t*gn0n0.*gnn;
26     gnn=gn0n0./(1-gbln);
27     gn1=gbl1./(1-gbln);
28 end
29
30 % Greenin funktiot aukoilte

```

```
31 hn1(ne:-1:1)=-conj(gn1(1:1:ne));  
32 hnn(ne:-1:1)=-conj(gnn(1:1:ne));
```

LIITE C: SUPERCOUPLING-ALIOHJELMA

Supercoupling.m C.1. Aliohjelma muodostaa suprajohteen Greenin funktion rekursiivisesti.

```

1 % Yksinkertainen malli suprajohtavuudelle. Aliohjelma
2 % muodostaa suprajohteelle Greenin funktion rekursiivisesti
3 % elektronien ja aukkojen Greenin funktioiden avulla.
4
5 % Suprajohteen vakioparametrit
6 nsl=500;
7 epsia=-0.1;
8 E=E_main-muu;
9 zeta=0.005 i ;
10
11 g00(1:ne)=0.0+0.0 i ;
12 g11(1:ne)=0.0+0.0 i ;
13 gna(1:ne)=0.0+0.0 i ;
14 gnn(1:ne)=0.0+0.0 i ;
15 I=eye(2);
16
17 % Elektronien ja aukkojen Greenin funktiot yhdelle viipaleelle.
18 ee00in=E-epsia+zeta;
19 hh00in=E+epsia+zeta;
20
21 % terme ja termh ovat terminaalifunktioita tasoittamaan
22 % elektronien ja aukkojen Greenin funktioita. Rekursio
23 % aloitetaan näillä.
24 terme=1./(2*t^2)*(E-epsia+zeta).*(1.-sqrt(1.0-4*(t./ee00in).^2));
25 termh=1./(2*t^2)*(E+epsia+zeta).*(1.-sqrt(1.0-4*(t./hh00in).^2));
26
27 % Viipaleiden kytkentä (elektronit ja aukot)
28 V=[t 0;0 -t];
29

```

```

30 % GN0 on Greenin funktio yhdelle viipaleelle.
31 % GN on Greenin funktio vuorovaikuttavalle systeemille,
32 % joka päivitetään jokaisella rekursiolla.
33 % Greenin funktion lohkot ovat [e-e e-h; h-e h-h];
34
35 % Silmukka enegia-alueen yli
36 for in=1:ne
37     dete = 1./ ( ee00in(in)*hh00in(in)-delgap(in)*conj(delgap(in)));
38     GN0 = dete * [hh00in(in) delgap(in); conj(delgap(in)) ee00in(in)];
39     GN = [terme(in) 0.0; 0.0 termh(in)];
40
41 % Silmukka viipaleiden yli
42 for isl=1:nsl-1
43     Tme = I - GN0*V*GN*transpose(V);
44     GN = inv(Tme)*GN0;
45 end
46 % Silmukka viipaleiden yli loppuu
47     gnn(in) = GN(1,1);
48     gna(in) = GN(1,2);
49     % Suprajohteen Greenin funktio muodostuu kolmiulotteiseksi
50     % matriisiksi
51     GT(:, :, in) = GN;
52 end

```