Tampereen yliopisto

Tommi Salonen

CVAR-RAJOITTEISEN PORTFOLIO-OPTIMOINNIN VAKAUS

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Tuomas Korhonen
Toukokuu 2021

TIIVISTELMÄ

Tommi Salonen: CVaR-rajoitteisen portfolio-optimoinnin vakaus
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tuotantotalous
Toukokuu 2021

Riskillisiä kohteita sisältäviä kokonaisuuksia, portfolioita, esiintyy useissa yhteyksissä esimerkiksi tekniikkaan ja rahoitukseen liittyvissä kysymyksissä. Portfolio-optimoinnissa pyritään kokonaisuudesta saatavan hyödyn maksimoimiseen, samalla altistuen mahdollisimman pienelle riskille. Jotta näiden ristiriitaisten tavoitteiden välillä voidaan saavuttaa optimitila, on niitä molempia pystyttävä mittaamaan objektiivisesti. Osakeportfolioissa hyötyä mitataan usein odotetulla tuotolla, mutta riskin mittaamiseen on useita vaihtoehtoja. Tässä työssä käsitellään *conditional value at risk -riskimittaa* (CVaR), siihen perustuvaa tuotto-CVaR-portfolio-optimointia, sekä optimoinnin tuottaman optimiportfolion epävakauteen liittyvää haastetta. Tavoitteena on kirjallisuuteen pohjautuen esittää yhden periodin tuotto-CVaR-portfolio-optimointimalli osakeportfoliolle ja vertailla sen vakauttamiseksi esitettyjä menetelmiä.

Työssä edetään riskin mittaamisesta optimointimallin muodostamiseen ja kirjallisuuskatsaukseen vakautta parantavista menetelmistä. Riskin mittaaminen aloitetaan esittelemällä *value at risk -mitta* (VaR), joka antaa teoreettisen pohjan CVaR-mitan muodostamiselle. Matemaattisessa mielessä johdonmukaiselta, eli koherentilta, riskimitalta vaadittujen ominaisuuksien avulla motivoidaan siirtyminen epäkoherentista VaR:sta koherenttiin CVaR:iin. CVaR-mitta esitetään yleisessä muodossa sekä eräissä tärkeissä erikoistapauksissa. Optimointimallin muodostaminen aloitetaan esittelemällä CVaR:n minimointia yksinkertaistava apufunktio. Apufunktiota minimoimalla saadaan tuotto-CVaR-optimointiongelma esitettyä parametriensa suhteen lineaarisesti. Kirjallisuuteen tukeutuen kuitenkin todetaan, että perusmuotoinen tuotto-CVaR-portfolio-optimointimalli tuottaa käytännössä hyvin epävakaita ratkaisuja sekä riskimitan ominaisuuksista että markkinatietoon liittyvästä epävarmuudesta johtuen.

Tuotto-CVaR-portfolio-optimoinnin vakautta parantavien menetelmien vertailuun valikoitui 14 aihealueen artikkelia. Artikkelit jaoteltiin niissä esitettyjen menetelmien perusteella kolmeen ryhmään: *ongelmaa muokkaaviin menetelmiin*, skenaarion muodostamista käsitteleviin *erillismenetelmiin* ja näitä yhdisteleviin *yhdistelmämenetelmiin*. Katsauksen perusteella aihealueen kirjallisuudessa korostuvat ongelmaa muokkaavat menetelmät ja erityisesti robustin optimoinnin *huonoimman tapauksen CVaR -menetelmä* (WCVaR). WCVaR:n hyödyntäminen vaatii kuitenkin soveltajalta merkittävän määrän lähtötietoja epävarmuudesta ja sen muodosta. Koneoppimismenetelmät vaativat vähemmän lähtötietoja, mutta niiden soveltaminen suureen portfolioon vaatii paljon dataa. Erillismenetelmät auttavat saatavilla olevan datan tehokkaassa hyödyntämisessä mutta eivät huomioi epävarmuutta. Yhdistelmämenetelmät huomioivat epävarmuuden ja auttavat datan hyödyntämisessä, joten ne saattavat olla soveltajalle hyviä vaihtoehtoja useimmissa tapauksissa. Vakautta parantavien menetelmien valinta ja soveltamisen yksityiskohdat ovat silti vahvasti tilannekohtaisia, joten aihealueen kirjallisuus saattaisi hyötyä vakautta parantavien menetelmien käyttöä ohjaavista päätöksentekomalleista.

Avainsanat: CVaR, portfolio, optimointi, koherentti, riskimitta

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Tommi Salonen: Stability of CVaR Bounded Portfolio Optimization
Bachelor's Thesis
Tampere University
Industrial Engineering and Management
May 2021

Collections of assets or other units involving risks, portfolios, are common in the fields of engineering and finance. Decisions considering portfolios are utility-maximizing and risk-minimizing. In order to make the decisions and optimize the trade–off between these conflicting objectives, both of them must be measured objectively. With financial portfolios, the utility is often measured using an expected return, whereas there are several risk measures presented in the literature. In this thesis, *Conditional Value at Risk measure* (CVaR), CVaR-based portfolio optimization, and the instability of optimum portfolio are considered. The objectives of this thesis are, by using existing literature, to present the return-CVaR portfolio optimization problem for share portfolio and compare stability-improving methods presented in the literature.

The thesis is organized as follows. In the second chapter, risk measures are introduced by starting with Value at Risk (VaR). Using CVaR over VaR is motivated by discussing the requirements for a risk measure to be coherent. Building on the theory of VaR, pivotal formulations of CVaR are presented. In the third chapter, the return-CVaR portfolio optimization problem is built by reformulating CVaR. The reformulation allows using the optimization shortcut presented in the literature, which makes it possible to present the CVaR problem in a linear form. The third chapter is concluded by obtaining that the return-CVaR portfolio optimization is unstable in practice due to features of CVaR and uncertainty of market data.

In the literature review part, 14 papers presenting stability improving methods are discussed. From this material, three groups of approaches are obtained: methods modifying the original problem, methods for producing scenarios, and methods combining both these approaches. According to the literature review, the methods modifying the original problem are emphasized in the field: especially, the robust optimization method *worst-case CVaR* (WCVaR) is used in several papers. However, applying WCVaR requires a lot of information on the shape of the uncertainty. Machine learning methods are less demanding on the initial information about the uncertainty, but they are more data-intensive. Methods which only produce scenarios are not as data-intensive, but they don't take the uncertainty into account. Methods, which both modify the initial model and consider scenario making, take uncertainty into account and allow using data more effectively. Thus, they might be a decent choice for a practitioner in most cases. However, the choice of stability improving method and details in applying it are highly case-dependent, so the literature of the field might gain from research of decision-making models for applying stability improving methods.

Keywords: CVaR, portfolio, optimization, coherent, risk, measure

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

> There's a lot of randomness in the decisions that people make.
>
> Daniel Kahneman

Työ on ollut allekirjoittaneelle mielenkiintoinen matka stokastisen optimoinnin maailmaan. Haluan kiittää kaikkia matkan aikana arjessa mukana olleita henkilöitä: erityisesti haluan kiittää perhettäni sekä ystäviäni tuesta, Tuomas Korhosta kannustavasta työn ohjaamisesta ja Martti Luotosta sekä Juho Kanniaista neuvoista opinnäytetyön kirjoittamiseen.

Tampereella, 8. toukokuuta 2021

Tommi Salonen

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

α	luottamustaso
$\arg\min\{\cdot\}$	minimiargumentti
CVaR	ehdollinen VaR-kvantiilin ylittävä tappio (engl. Conditional Value at Risk)
$E[\cdot]$	odotusarvo-operaattori
$\boldsymbol{e}$	yksikkövektori
ES	odotettu vaje (engl. Expected Shortfall)
$\mathcal{F}$	otosavaruuden sigma-algebra osajoukko
$f(\cdot)$	tappiofunktio
$F_\alpha(\cdot)$	apufunktio CVaR:n minimoinnissa
$\inf\{\cdot\}$	infimum, eli joukon suurin alaraja
$\lambda_\alpha(\cdot)$	VaR-tason ylittävään häntäjakaumaan liitetty todennäköisyys
MCVaR	yhdistelmä CVaR:sta eri luottamustasoilla (engl. mixed CVaR)
Ω	otosavaruus
$\mathbb{P}$	epävarmuusjoukko robustissa optimoinnissa
$p(\cdot)$	tiheysfunktio
PBR	suorituskykyynpohjainen sääntely (engl. performance-based regularization)
PCA	pääkomponenttianalyysi (engl. principal component analysis)
$P[\cdot]$	todennäköisyysmitta
$\Psi(\cdot)$	tappiojakauman kertymäfunktio
R	portfolion tuoton odotusarvon alaraja
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
RCVaR	suhteellinen robusti CVaR (engl. relative robust CVaR)
r_f	riskitön tuotto
$\sup\{\cdot\}$	supremum, eli joukon pienin yläraja
SVM	tukivektorikone (engl. Support Vector Machine)
$[\cdot]^+$	tasasuuntaaja-aktivointifunktio (engl. rectifier)

$\boldsymbol{u}$	apumuuttujavektori CVaR:n minimoinnissa
VaR	jakauman tappiokvantiili määrätyllä luottamustasolla (engl. Value at Risk)
WCVaR	huonoimman tapauksen CVaR (engl. worst-case CVaR)
$\mathbb{X}$	kaikkien mahdollisten päätösten joukko
$\boldsymbol{x}$	päätösvektori
$\boldsymbol{y}$	satunnaisvektori
ζ	portfolion tappiolle asetettu raja

1. JOHDANTO

Sijoituspäätöksiä tehtäessä tuotto ja riski ovat epäilemättä merkittävimpiä sijoittajaa pohdituttavia asioita. Nykykäsitykseen markkinoiden toiminnasta liittyy olennaisesti näiden välillä tehtävä kompromissi: tuotolla ja riskillä nähdään olevan tietty suhde, jonka mukaan suuremman tuoton tavoittelu vaatii usein myös suuremman riskin hyväksymistä. Yhteys sinänsä tuntuu täysin intuitiiviselta, mutta se formalisoitiin ensimmäistä kertaa vasta 50-luvulla Markowitzin (1952) portfolioteorian yhteydessä. Sittemmin Markowitzin portfolioteoria on pysynyt keskeisimpänä lähtökohtana portfolio-optimointia käsittelevässä kirjallisuudessa, jossa etsitään tuottojakauman odotusarvon maksimoivaa ja varianssin minimoivaa rakennetta portfoliolle (Kolm et al. 2014). Varianssi ei kuitenkaan ole täysin ongelmaton riskimitta: se kohtelee negatiivisia ja positiivisia tuottoja samalla tavalla. Lisäksi tuotot eivät ole osakemarkkinoilla normaalisti jakautuneita (Mandelbrot 1963), joten tuottojakauman kuvaaminen vain kahden ensimmäisen momentin, odotusarvon ja varianssin, perusteella voidaan kyseenalaistaa (De Athayde & Flôres Jr 2004).

Vaihtoehtoisia riskimittoja on kehitetty markkina- ja luottoriskin mittaamiseen. Näistä jakauman kvantiileihin perustuvat riskimitat ovat olleet paitsi soveltajien, myös sääntelijöiden suosiossa. Etenkin Value at Risk (VaR), joka kertoo määritetyllä aikavälillä ja luottamustasolla odotettavan rahamääräisen tappion, ehti 90-luvulla vakiinnuttamaan paikkansa paitsi investointipankkien regulaatiossa (Basak & Shapiro 2001) myös luottoriskin hallitsemisessa (Dowd & Blake 2006). VaR on suosiostaan huolimatta saanut melko suurta kritiikkiä osakseen muun muassa sen matemaattisista ominaisuuksista (Artzner et al. 1999) johtuen, ja 2000-luvun aikana mielenkiinto onkin siirtynyt *koherenttien* riskimittojen suuntaan. VaR-kvantiilin ylittävän tappion odotusarvon kertova Conditional Value at Risk (CVaR) on saanut paljon huomiota portfolio-optimointiin liittyvässä tutkimuksessa sen lineaarisen muotoilun ansiosta (Mansini et al. 2014).

Lisäksi *odotettu vaje* (engl. Expected Shortfall, ES), jota usein käytetään synonyymina CVaR:sta, on finanssialan sääntelyn osalta vakiinnuttamassa paikkansa VaR:n seuraajana: pankkialan Basel III -suosituksissa nimittäin korvattiin VaR markkinariskimittana ES:lla (Basel Committee on Banking Supervision 2013). Koska myös regulatorinen ympäristö tukee CVaR:n hyödyntämistä, on etenkin institutionaalisilla sijoittajilla motiivi tarkastella portfolion valintaa tuotto-CVaR-näkökulmasta perinteisen tuotto-varianssi-näkökulman sijaan. CVaR-rajoitteisen portfolio-optimoinnin hyödyntämistä motivoivatkin sekä alan sääntely, että optimointiin liittyvät tekniset seikat.

Vaikka CVaR-rajoitteinen portfolio-optimointi vaikuttaa teoreettisesti erittäin houkuttelevalta vaihtoehdolta, kärsivät sen käytännön sovellukset eräästä merkittävästä haasteesta: optimoinnin tuottamat ratkaisut ovat erittäin herkkiä estimointivirheille, eli optimiportfolio muuttuu merkittävästi, vaikka pohjatiedot muuttuisivat vain vähän (Lim et al. 2011). Sama pätee myös odotusarvo-varianssi-portfolioihin (Black & Litterman 1992), mutta CVaR:n pohjautuminen jakauman häntäpään tietoon kärjistää ongelmaa. Tässä työssä pureudutaankin CVaR-portfolioiden vakautta parantaviin menetelmiin.

1.1 Työn tavoitteet ja rakenne

Työn tavoitteena on esittää CVaR-rajoitteinen portfolio-optimointimalli kirjallisuuteen pohjautuen ja vertailla sen vakautta parantavia menetelmiä. Työ toteutetaan kokonaisuudessaan kirjallisuuskatsauksena, joten olemassa oleva kirjallisuus muodostaa kaiken työssä käytettävän aineiston. Vakautta parantavia menetelmiä vertaillaan niissä tehtävien oletusten, CVaR-mallin muokkauksen ja oletettavien käyttökohteiden osalta. Vaikka tarkastelu rajataan osakeportfolion optimointiin, yleistyy valtaosa työssä käsitellystä teoriasta ja menetelmistä myös muihin portfoliotyyppeihin.

Työn toisessa luvussa tarkastellaan CVaR-pohjaista riskin mittaamista, joka on olennaista optimointimallin esittämisessä. Kolmannessa luvussa esitetään tutkimusongelman, eli CVaR-optimoinnin epävakauden ymmärtämiseksi vaadittava teoreettinen tausta ja optimointiongelman lineaarinen muotoilu. Neljännessä luvussa tarkastellaan kirjallisuudesta löydettyjä optimiratkaisun vakautta parantavia menetelmiä ja tutkimussuuntauksia. Lopulta päätelmissä pohditaan saavutettuja tuloksia ja niiden asettumista akateemisen tutkimuksen kontekstiin.

1.2 Tutkimusmetodologia

Koska työ perustuu täysin jo olemassa olevaan kirjallisuuteen, korostuu sen toteuttamisessa tiedonhankinnan menetelmät ja tiedon jäsentely. Tässä työssä käytettäviä hakutyökaluja ovat Elsevierin *Scopus* ja Googlen *Google Scholar*. Arvostetuilla alustoilla julkaistut tekstit ohjaavat alojen tutkimusta ja työssä käytetäänkin Julkaisufoorumin JuFo-luokitusta aineiston rajauksessa. Tavoitteena on saada mahdollisimman korkeatasoisia tekstejä mukaan tarkasteluun valitsemalla kahden korkeimman luokituksen alustoilla julkaistuja artikkeleita hakutuloksista. Esimerkiksi *Operations Research* ja *Management Science* ovat aihealuetta käsitteleviä lehtiä, jotka täyttävät tämän kriteerin. Tiedon jäsentely taas toteutetaan aihealueesta tehdyn tutkimuksen kannalta pitkälti kronologisessa järjestyksessä: riskin mittaamisen haasteiden kautta siirrytään portfolio-optimoinnin haasteisiin, joihin kirjallisuuskatsauksella pyritään vastaamaan.

Työn toisessa ja kolmannessa luvussa keskitytään teoreettisen taustan sekä portfolio-optimoinnin perusmallin luomiseen, joten myös tarkasteltavassa kirjallisuudessa painottuvat viittausmäärien perusteella alan keskeisimmät julkaisut. Toisessa luvussa rajataan näkökulma viittausmäärän perusteella keskeisimpään CVaR-rajoitteista portfolio-optimointia käsittelevään julkaisuun ja samalla määräytyy työssä käytettävät merkinnät sekä kolmannessa luvussa esitettävä malli. Myös toisessa luvussa käsiteltävä koherentti riskin mittaaminen perustuu aiheen viitatuimpaan artikkeliin.

Varsinainen kirjallisuuskatsaus painottuu neljänteen lukuun, jossa esitetään ja vertaillaan vakautta parantavia menetelmiä. Luvussa tarkasteltava aineisto on valikoitunut seuraavan periaatteen mukaan: Ensin muodostettiin katkaisumerkkiä * hyödyntämällä hakulausekkeet *stab* portfolio cvar* ja *robust* portfolio cvar*, joilla suoritettiin haut Scopus-tietokantaan. Osumia löytyi vastaavassa järjestyksessä 32 ja 80. Osumista valittiin seuraavaksi kaikki JuFo-luokituksen 2 tai 3 lehdissä julkaistut artikkelit, ja näistä rajattiin mukaan tiivistelmän perustella kaikki CVaR-portfolio-optimoinnin vakauttamiseen pyrkivät menetelmät: Olennainen valintaperuste oli, että menetelmät toivat jotain uutta CVaR-portfolio-optimointiin verrattuna aikaisemmin kirjallisuudessa esitettyihin menetelmiin. Täten aineistosta rajautui pois esimerkiksi yksittäisiin sovelluskohteisiin hyödynnettyjä menetelmiä, joiden teoria oli esitetty aikaisemmassa julkaisussa. Näillä periaatteilla aineisto rajautui edellä käytetyssä järjestyksessä 2 ja 11 artikkeliin hakulauseketta kohti.

Aineiston kattavuutta pyrittiin varmistamaan useilla menetelmillä: Ensinnäkin testihakuja suoritettiin ennen lopullisten hakulausekkeiden muodostamista. Esimerkiksi *cvar*-lyhenteen todettiin tuottavan paljon aiheeseen liittyviä osumia ja sen olevan käytössä portfolio-optimoinnissa useammin kuin *Expected Shortfall* -termin. Lisäksi Scholariin tehtiin täydentäviä hakuja, joilla pyrittiin varmistamaan, etteivät tietokannan tai hakulausekkeiden aiheuttamat rajoitteet jättäneet keskeisiä artikkeleita aineiston ulkopuolelle. Scopuksesta löytynyt aineisto osoittautui melko kattavaksi, sillä Scholarista aineisto kasvoi vain Stillin ja Kondorin (2010) artikkelilla, jota ei Scopuksesta löydy. Lisäksi tarkasteltiin löytyneen aineiston keskeisiä juurilähteitä, mutta tältäkään osin aineistossa ei havaittu merkittäviä puutteita. Työn rajauksista aiheutuvia ongelmia kirjallisuuskatsauksen luotettavuudelle pohditaan luvussa 5.

2. KOHERENTTI RISKIMITTA

Tässä luvussa esitellään CVaR-riskimitta ja motivoidaan sen käyttäminen verrattuna VaR-mittaan. Koska CVaR voidaan tietyissä tapauksissa esittää yksinkertaisesti VaR-mitan avulla (Rockafellar & Uryasev 2002), määritellään ensin VaR, ja perustellaan kirjallisuuteen tukeutuen sen matemaattiset heikkoudet. CVaR:n määrittelyn yhteydessä tarkastellaan mitan ominaisuuksia ja lopulta todetaan sen olevan koherentti. Luvussa käytettävät määritelmät ja merkinnät ovat suurilta osin peräisin Rockafellarin ja Uryasevin (2000; 2002) artikkeleista, sillä samoja määritelmiä hyödynnetään laajalti portfolio-optimointiin liittyvässä kirjallisuudessa (katso esimerkiksi Zhu & Fukushima 2009; Kolm et al. 2014; Anderson et al. 2020).

2.1 Value at Risk

Määritellään tappiofunktio portfoliolle, joka muodostetaan joukosta $\mathbb{X}$ vaihtoehtoja, esimerkiksi vaihtoehtoisia osakkeita, ja merkitään valintaa tästä joukosta *päätösvektorilla* $\boldsymbol{x}$. Osakeportfolion tapauksessa päätösvektori voisi sisältää esimerkiksi valitut painot $\boldsymbol{x}$ jokaiselle yksittäiselle osakkeelle valittuna kaikista mahdollisista painojen yhdistelmistä $\mathbb{X}$. Kun tehtäviä päätöksiä on n kappaletta, merkitään $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Kaikkien valittavien päätösten joukko $\mathbb{X}$ on reaalivektoreiden osajoukko, sillä joukkoon $\mathbb{X}$ voi kohdistua rajoitteita: voidaan esimerkiksi haluta, että portfoliossa ei sallita lyhyeksi myyntiä, jolloin joukko $\mathbb{X}$ sisältäisi vain ei-negatiivisia reaalivektoreita. Päätösvektorin lisäksi vaaditaan tappion kuvaamiseen satunnaisvektori $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, joka muodostaa päätöksestä riippumattomista tekijöistä aiheutuneen vaikutuksen tappioon. Oletetaan, että $\boldsymbol{y}$ kuuluu todennäköisyysavaruuteen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eli mitta P liittää todennäköisyyden otosavaruuden Ω sigma-algebran tapahtumiin $\mathcal{F}$ siten, että $\boldsymbol{y} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ (Anderson et al. 2020). Osakeportfolion tapauksessa $\boldsymbol{y}$ voisi sisältää esimerkiksi portfolion muodostavien yksittäisten osakkeiden tuoton, jonka voi ajatella muodostuvan satunnaisesti ja riippumattomasti tehdystä päätöksestä $\boldsymbol{x}$ (Rockafellar & Uryasev 2002). Nyt tappiofunktio on vektoriparametrinen funktio $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, joka saa osakeportfolion tapauksessa muodon $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$, koska tappio määritellään tuoton $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ vastalukuna (Rockafellar & Uryasev 2000).

Rockafellarin ja Uryasevin (2002) merkintöjen mukaisesti määritellään tappiolle raja ζ ja oletetaan, että tappiofunktio on jatkuva muuttujan $\boldsymbol{x}$ suhteen sekä mitattava satunnaisvektorin $\boldsymbol{y}$ suhteen. Nyt todennäköisyys, että raja ζ ei ylity valitulla $\boldsymbol{x}$:llä, voidaan esittää heidän mukaansa muodossa

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \zeta) = P[\boldsymbol{y} | f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \zeta]. \tag{2.1}$$

Mikäli oletetaan lisäksi, että $\boldsymbol{y}$ noudattaa jatkuvaa jakaumaa, voidaan todennäköisyys esittää Rockafellarin ja Uryasevin (2000) mukaan analyyttisessa muodossa

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \zeta) = \int_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \zeta} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) p(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y},$$

missä $p(\cdot)$ on $\boldsymbol{y}$:n jakauman tiheysfunktio.

On tärkeää huomata, että määritelmä 2.1 ei tosiaan vaadi satunnaisvektorin $\boldsymbol{y}$ jakauman olevan jatkuva. Käytännön sovelluskohteissa ei nimittäin useinkaan voida tarkastella jatkuvaa jakaumaa, vaan joudutaan turvautumaan rajalliseen otokseen $\boldsymbol{y}$:stä: tällöin jakauma on diskreetti ja $\Psi(\boldsymbol{x}, \cdot)$ porrasfunktio (Rockafellar & Uryasev 2002). Kuten seuraavaksi havaitaan, diskreetti tapaus aiheuttaa haasteita myös VaR:n määrittelyssä.

Koska funktion $\Psi(\boldsymbol{x}, \cdot)$ ei voida olettaa olevan jatkuva kaikkialla eikä myöskään aidosti kasvava, voi sen arvo olla jollain yhdistelmällä $\Psi(\boldsymbol{x}^*, \zeta^*)$ määrittelemätön, tai sillä olla useita ratkaisuja (Rockafellar & Uryasev 2002). Täten Value at Risk tietyllä luottamustasolla $\alpha \in (0, 1)$ määritellään yleisessä tapauksessa

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \min\{\zeta | \Psi(\boldsymbol{x}, \zeta) \geq \alpha\} \tag{2.2}$$

(Rockafellar & Uryasev 2002). VaR on siis pienin portfolion tappion raja ζ, jolle pätee, että sitä ei ylitetä vähintään luottamustasolla α. Yhtälössä 2.2 esiintyy $\geq$, koska on mahdollista, että $\Psi(\boldsymbol{x}, \zeta)$ ei ole määritelty valitulla luottamustasolla α: tällöin siis valittaisiin kertymäfunktion seuraavaksi matalin arvo. *Pienin* raja $\min\{\cdot\}$ vaaditaan, jotta VaR on yksikäsitteinen, kun yhtälöllä $\Psi(\boldsymbol{x}, \zeta) = \alpha$ on useita ratkaisuja (Rockafellar & Uryasev 2002). Koska ratkaisuja saattaa olla useita, on luontevaa määritellä niin sanottu *ylempi VaR*, joka saa Rockafellarin ja Uryasevin (2002) mukaan muodon

$$\mathrm{VaR}^+_\alpha(\boldsymbol{x}) = \inf\{\zeta | \Psi(\boldsymbol{x}, \zeta) > \alpha\}.$$

Kyseessä on siis suurin alaraja $\inf\{\cdot\}$ niille portfolion tappioille, joita vastaavat kertymäfunktion arvot ylittävät luottamustason α. Käytännössä ylempi VaR vastaa yhtälön $\Psi(\boldsymbol{x}, \zeta) = \alpha$ toteuttavien tappioiden suurinta arvoa, kun VaR vastaa pienintä arvoa.

Mikäli $\Psi(\boldsymbol{x}, \cdot)$ voitaisiin olettaa jatkuvaksi ja aidosti kasvavaksi, olisi yhtälöllä $\Psi(\boldsymbol{x}, \zeta) = \alpha$ aina yksikäsitteinen ratkaisu ja VaR olisi tämän yhtälön toteuttava tappio ζ (Rockafellar & Uryasev 2002). Tässä tapauksessa havaitaan, että VaR on yksinkertaisesti tappiojakauman kertymäfunktion käänteisfunktion $\Psi^{-1}(\boldsymbol{x}, \alpha)$ arvo eli α-kvantiili. Kertymäfunktion käänteisfunktiota kutsutaankin myös kvantiilifunktioksi (Bassett Jr & Koenker 1982).

Kuten jo aikaisemmin todettiin, käytännön sovelluskohteissa $\Psi(\boldsymbol{x}, \cdot)$ on kuitenkin usein porrasfunktio, joten käänteisfunktio ei ole määritelty tai yksikäsitteinen kaikille yhdistelmille $\Psi(\boldsymbol{x}^*, \zeta^*)$. Täten hyvin pieni muutos esimerkiksi vaaditussa luottamustasossa α voi aiheuttaa suuren hyppäyksen VaR-tasossa (Acerbi & Tasche 2002), kun diskreetin jakauman portaalta hypätään seuraavalle. Ongelmaa kasvattaa tarkastelun painottuminen aivan jakauman häntään: esimerkiksi Baselin viitekehyksessä käytetty taso on ollut $\alpha = 99\%$ (Basel Committee on Banking Supervision 2013). Käytettäessä esimerkiksi historiaan pohjautuvaa jakaumaa VaR:n arvioinnissa voi hyvin suuria tappioita olla vain muutamia, jolloin hypyt näiden ja muun jakauman välillä saattavat olla äärimmäisiä. Epävakaus kyseenalaistaakin VaR-mitan käytön riskin mittaamisessa sekä vaikeuttaa sen hyödyntämistä optimoinnissa (Rockafellar & Uryasev 2002). Seuraavaksi havaitaan, että tämä ei kuitenkaan ole VaR:n ainoa ongelma.

2.2 Koherentit ominaisuudet

Yksi merkittävimmistä markkinariskiin liittyvistä kirjoituksista, jo pelkästään viittausmäärien perusteella, on Artznerin et al. (1999) artikkeli koherentista riskin mittaamisesta. Artikkelissaan he esittävät joukon ominaisuuksia, jotka matemaattisessa mielessä johdonmukaisen, eli koherentin, riskimitan tulisi toteuttaa. Tarkastellaan seuraavaksi näitä ominaisuuksia ja mitä ne portfolion riskin käyttäytymisen näkökulmasta tarkoittavat.

Olkoon $\mathbb{V}$ satunnaistappioiden reaaliarvoinen joukko sekä ρ riskimitta, joka on kuvaus $\rho : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Nyt riskimitta ρ on Artznerin et al. (1999) määritelmän mukaan koherentti, mikäli se toteuttaa seuraavat aksioomat:

(i) *Siirtoinvarianssi*: kaikille satunnaistappioille $Z \in \mathbb{V}$ ja vakioille $a \in \mathbb{R}$ pätee, että $\rho(Z + a) = \rho(Z) + a$.

(ii) *Subadditiivisuus*: jos $Z_1, Z_2 \in \mathbb{V}$, niin pätee $\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$.

(iii) *Positiivinen homogeenisuus*: kaikille $Z \in \mathbb{V}$ ja vakioille $b \geq 0$ pätee $\rho(bZ) = b\rho(Z)$.

(iv) *Monotonisuus*: kaikille $Z_1, Z_2 \in \mathbb{V}$, joille $Z_1 \leq Z_2$, pätee myös että $\rho(Z_1) \leq \rho(Z_2)$.

Aksioomien esitystapa eroaa hieman Artznerin et al. (1999) artikkelissa esitetystä, koska he eivät tarkastele taloudellisesta näkökulmasta tappioita, vaan voittoja. Esimerkiksi monotonisuuden ehto olisi voittojen näkökulmasta $\rho(Z_1) \geq \rho(Z_2)$, kun $Z_1 \leq Z_2$. Aksioomat esitetään tappioiden näkökulmasta, koska edellä määriteltiin VaR portfolion tappiofunktion avulla ja samaa esitystapaa käytetään Rockafellarin ja Uryasevin (2002) artikkelissa.

Aksioomien vaatimukset ovat portfolion riskien näkökulmasta varsin intuitiivisia: Siirtoinvarianssi tarkoittaa, että varman tappion lisääminen portfolioon kasvattaa portfolion riskiä juuri kyseisen tappion verran. Subadditiivisuus kannustaa hajauttamaan, koska kohteiden tuoma riski ei yhdessä portfoliossa voi olla suurempi kuin erillään. Positiivisesta homogeenisuudesta seuraa, että position koon muuttaminen muuttaa myös riskiä samassa suhteessa. Monotonisuuden mukaan myös kohteen riskin tulisi olla suurempi, mikäli se tuottaa aina vähintään yhtä suuren tappion kuin toinen kohde. (Bertsimas et al. 2011) Koherentteja ominaisuuksia voikin pitää portfolion riskin mittaamisen kannalta varsin perusteltuina vaatimuksina, jo ilman tarkempaa matemaattista tarkasteluakin. Toisaalta, Artznerin et al. (1999) aksioomia on myös kritisoitu esimerkiksi niiden tuottamista haasteista mallien ennustekyvyn arvioimiselle (Ziegel 2016) ja riskin vakaalle estimoinnille (Cont et al. 2010).

Edellisessä luvussa sivuttiin jo VaR-mitan käyttöön liittyvää vakausongelmaa. VaR:ia on kuitenkin kritisoitu erityisesti, koska se ei ole koherentti: VaR ei toteuta subadditiivisuuden ehtoa (katso esimerkiksi Artzner et al. 1999; Acerbi 2002). On siis mahdollista, että yhdistetyn portfolion VaR on suurempi kuin kohteista erillään laskettujen VaR:ien summa. Vaikka subadditiivisuuden ehdon merkittävyys käytännön sovelluksissa on kyseenalaistettu (Cont et al. 2010), näyttää ehdon rikkominen ainakin joissain tapauksissa tuottavan ongelmia portfolio-optimoinnissa (Frey & McNeil 2002). Koska VaR ei ole koherentti riskimitta, on myös portfolio-optimoinnissa keskitytty yhä enemmän muiden mittojen hyödyntämiseen.

2.3 Conditional Value at Risk

Vaihtoehtoisena riskimittana VaR:lle, Conditional Value at Risk (CVaR) on saanut huomiota paitsi sen parempien teoreettisten ominaisuuksien (Zhu & Fukushima 2009), myös sääntelyssä tapahtuneiden muutosten (Basel Committee on Banking Supervision 2013) ansiosta. Lisäksi mitalle on löytynyt käytännön sovelluskohteita esimerkiksi luottoriskin hallinnassa (Andersson et al. 2001). Esitetään seuraavaksi CVaR pohjautuen Rockafellarin ja Uryasevin (2002) artikkeliin.

Kuten jo VaR:n yhteydessä todettiin, portfolioon liitettävän tappiojakauman $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ kertymäfunktiota ei usein voida käytännön tapauksissa olettaa jatkuvaksi. Määritelläänkin myös CVaR ensin yleisessä tapauksessa.

Intuitiivisesti CVaR tarkoittaa VaR-tason ylittävien tappioiden odotusarvoa. Matemaattisesti tämä tulkinta ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen, joten se vaatii tarkemman muotoilun, jotta tulokset ovat hyödynnettävissä esimerkiksi portfolioiden riskien suuruuden vertailussa. Mukaillen Rockafellaria ja Uryasevia (2002), tiettyyn luottamustasoon α liittyvän CVaR:in voi kiteyttää seuraavasti:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) \text{ on odotusarvo tappiojakauman } \alpha\text{-hännästä,}$$

missä α-häntä määritellään häntäjakauman kertymäfunktion $\Psi_\alpha(\boldsymbol{x}, \zeta)$ avulla VaR:ia hyödyntäen:

$$\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{kun } \zeta < \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) \\ [\Psi(\boldsymbol{x},\zeta) - \alpha] \, / \, [1-\alpha] \, , & \text{kun } \zeta \geq \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x}). \end{cases} \tag{2.3}$$

Häntäjakauman kertymäfunktio 2.3 skaalaa kaavassa 2.1 esitetyn tappiojakauman alkuperäisen kertymäfunktion arvot VaR-tason ylittävältä väliltä $[\alpha, 1]$ välille $[0, 1]$. Skaalaus täytyy tehdä, koska kertymäfunktion $\Psi(\boldsymbol{x}, \cdot)$ sisältäessä hyppyjä voi sama VaR-taso vastata useampaa todennäköisyyden arvoa (Rockafellar & Uryasev 2002): tämä vastaa tilannetta, jossa diskreetin jakauman suuruusjärjestyksessään peräkkäisten tappioiden ζ^- ja ζ^+ välillä kertymäfunktion arvo hyppää. Oletetaan, että hyppy kertymäfunktion arvoissa tapahtuu välillä $[\alpha^-, \alpha^+]$ ja haluttu luottamustaso α sijaitsee näiden välissä, eli $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$. Nyt CVaR määritelmän mukaan *lohkaisee* osan ylemmästä tappiosta ζ^+ mukaan siten, että se tulee valittuun luottamustasoon α nähden oikeassa suhteessa painotetuksi CVaR:in arvossa.

Lohkaisuominaisuus nähdään suoremmin, kun määritellään CVaR_α painotettuna keskiarvona VaR:sta ja niin sanotusta *ylemmästä CVaR*:sta CVaR_α^+. Ylempi CVaR on yksinkertaisesti odotusarvo VaR-tason ylittävästä tappiosta, eli

$$\mathrm{CVaR}_\alpha^+(\boldsymbol{x}) = E\left[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) | f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})\right]. \tag{2.4}$$

Nyt CVaR luottamustasolla α voidaan esittää muodossa

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \lambda_\alpha(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) + [1 - \lambda_\alpha(\boldsymbol{x})] \, \mathrm{CVaR}_\alpha^+(\boldsymbol{x}), \tag{2.5}$$

missä painokerroin $\lambda_\alpha(\boldsymbol{x})$ on tappioon $z = \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})$ kaavan 2.3 avulla yhdistetty todennäköisyys

$$\lambda_\alpha(\boldsymbol{x}) = [\Psi(\boldsymbol{x}, \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})) - \alpha] \, / \, [1-\alpha] \, , \tag{2.6}$$

joka saa arvoja välillä $[0, 1]$. Mikäli VaR taso on kuitenkin jo valmiiksi suurimmalla mahdollisella tappiolla, eli todennäköisyys $\Psi(\boldsymbol{x}, \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})) = \lambda_\alpha(\boldsymbol{x}) = 1$, ei $\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x})^+$ ole määritelty, jolloin asetetaan $\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})$. (Rockafellar & Uryasev 2002)

Kaavasta 2.5 on helppo nähdä, että CVaR muodostuu painotettuna keskiarvona ja painot ovat kaavan 2.6 mukaisesti riippuvaisia luottamustason sekä kertymäfunktion arvon välisestä erotuksesta. Tämä niin sanottu lohkaisuominaisuus on yleisen tappiojakauman funktion tapauksessa tärkeä, koska CVaR käyttäytyy sen ansiosta vakaasti muutettaessa luottamustasoa α. Luvussa 2.1 todettiin että VaR ei käyttäydy vakaasti, vaan pieni muutos luottamustasossa saattaa heilauttaa VaR:n arvoa suuresti. Matemaattisesti ilmaistuna CVaR:n vakaus tarkoittaa, että se on jatkuva ja sillä on molemminpuoliset derivaatat α:n suhteen avoimella välillä $(0, 1)$ (Rockafellar & Uryasev 2002). Nämä ominaisuudet ovat myös optimoinnin kannalta tärkeitä.

Jos tiedetään, että tappiojakaumassa ei tapahdu hyppyä valitulla luottamustasolla α, ei lohkaisuominaisuutta tarvitse hyödyntää ja CVaR vastaa ylemmän CVaR:in arvoa. Tässä tapauksessa voidaan siis asettaa kaavan 2.4 avulla

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = E\left[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) | f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})\right], \tag{2.7}$$

mikä yksinkertaistaa CVaR:n tulkintaa huomattavasti. (Rockafellar & Uryasev 2002) Mikäli koko tappiojakauman kertymäfunktio $\Psi(\boldsymbol{x},\zeta)$ voidaan olettaa jatkuvaksi tappiorajan ζ suhteen, voidaan CVaR esittää analyyttisesti Rockafellarin ja Uryasevin (2000) mukaan muodossa

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})p(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}, \tag{2.8}$$

kun $\alpha \in (0,1)$. Jatkuvan tappiojakauman kertymäfunktion oletus voisi liittyä esimerkiksi tilanteeseen, jossa osakkeiden satunnaiset tuotot $\boldsymbol{y}$ noudattavat jotain tunnettua jakaumaa, kuten Studentin t-jakaumaa. Tällöin jakauman simulointia tai historiatietoja tappioista ei tarvita, vaan voidaan turvautua jakauman tunnettuun tiheysfunktioon $p(\boldsymbol{y})$. Kaava 2.8 hyödyntää tätä tiheysfunktiota ja ottaa määritelmällisesti odotusarvon[1] VaR-tason ylittävistä tappioista, joten yhteys kaavojen 2.8 ja 2.7 välillä on selvä.

Vakauden lisäksi CVaR:lla on myös toinen merkittävä ominaisuus: CVaR toteuttaa luvussa 2.2 esitetyt aksioomat, eli se on koherentti riskimitta (Acerbi & Tasche 2002; Rockafellar & Uryasev 2002). Erityisesti, CVaR toteuttaa subadditiivisuuden ehdon, jota VaR ei toteuta (Artzner et al. 1999). CVaR:ia voi pitää myös konservatiivisempana mittana riskille, kuin VaR:ia, koska kaikille luottamustasoille α pätee

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x}),$$

eli CVaR dominoi VaR:ia (Rockafellar & Uryasev 2002). Lisäksi CVaR *näkee* paremmin tappiojakauman häntään, sillä se ottaa huomioon myös VaR-tason ylittävät tappiot laskiessaan niiden odotusarvon. Tästä syystä riskin mittaaminen CVaR:lla toteutetaan yleensä käyttäen matalampaa luottamustasoa kuin VaR:lla (Anderson et al. 2020): esimerkiksi Baselin suosituksissa VaR luottamustasolla $\alpha = 0.99$ korvattiin CVaR:lla ja luottamustasolla $\alpha = 0.975$ (Basel Committee on Banking Supervision 2013). VaR:n käyttö vaatii korkean luottamustason, jotta se huomioisi riittävästi kaikkein suurimpia tappioita. Konservatiivisista ominaisuuksista johtuen CVaR:ia voi pitää myös riskienhallinnan kannalta perustellumpana mittana kuin VaR:ia.

[1] Jos $g(\boldsymbol{y})$ kuvaa satunnaisvektorista $\boldsymbol{y}$ riippuvaa suuretta, on tämän suureen odotusarvo

$$E[g(\boldsymbol{y})] = \int g(\boldsymbol{y})p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},$$

missä $p_{\boldsymbol{y}}(\cdot)$ on satunnaisvektorin tiheysfunktio (katso esimerkiksi Hyvärinen et al. 2001, s.20).

3. CVAR PORTFOLIO-OPTIMOINNISSA

Luvussa 2 keskitytttiin pääasiassa työssä käsiteltävien riskimittojen ominaisuuksiin ja niillä tapahtuvan riskin mittaamisen teoriaan. Riskin mittaaminen on jo itsessään usein käytetty sovelluskohde riskimitoille: esimerkiksi institutionaalisilla sijoittajilla voi olla velvoitteita pitää portfolion riski tietyssä tasossa (Artzner et al. 1999) ja raportoida mitatusta riskistä. Vaikka kyseinen sovelluskohde vaatii epäilemättä riskimittojen hyödyntämistä luvussa 2 käsitellyssä mittaustarkoituksessa, motivoi tilanne myös soveltavampia käyttötarkoituksia mitoille.

Mikäli portfolion riski tulee rajata tiettyyn tasoon, voidaan olettaa että hyötyään maksimoiva *rationaalinen sijoittaja* (lat. homo economicus) pyrkii maksimoimaan tuoton näissä rajoissa. Käsitys hyötyään maksimoivasta rationaalisesta toimijasta on lähtöisin jo John Stuart Millin (1874) esseestä vuodelta 1836. Vaikka oletus rationaalisista sijoittajista on myöhemmin kyseenalaistettu esimerkiksi Kahnemanin ja Tverskyn (1979) toimesta, on tämän työn kannalta perusteltua olettaa riskin ja tuoton välillä tehtävän päätöksen olevan hyötyä maksimoiva: oli toimijan kokema hyöty sitten neutraali suhteessa riskiin tai ei. Koska sääntely ohjaa vähentämään riskiä, voidaan hyödyn maksimointi ymmärtää myös riskin minimoimisena, kun tuotto on rajattu, vaikka sijoittaja itse ei olisikaan riskiä kaihtava. Tämä duaalinen muotoilu onkin yleisesti käytössä portfolio-optimoinnissa ja sitä hyödyntää myös tässä työssä tarkasteltava Rockafellarin ja Uryasevin (2000) malli.

Riskimitan soveltavan hyödyntämisen kannalta on keskeistä, että sen ominaisuudet tukevat sovellustarkoitusta. Portfolio-optimoinnin kannalta eräitä keskeisiä ominaisuuksia ovat muun muassa vakaus luottamustason suhteen ja muodostetun optimointiongelman konveksisuus, joka takaa, että lokaali minimiratkaisu on myös globaali minimi. Tuotto-CVaR-optimointiongelma toteuttaa nämä ominaisuudet ja se pystytään usein muotoilemaan tehokkaasti ratkaistavaan muotoon, kuten lineaariseksi optimointiongelmaksi (Rockafellar & Uryasev 2002). Tässä luvussa esitetään kirjallisuuteen tukeutuen tuotto-CVaR-portfolio-optimointiongelma edellisessä luvussa tarkastellun tappiofunktion tapauksessa.

Vaikka edellä todettiin CVaR:n olevan vakaa suhteessa *luottamustasoon*, vakaus ei kuitenkaan päde itse *mittaamiseen*. CVaR:ia onkin kritisoitu muun muassa sen herkkyydestä estimointivirheille (Lim et al. 2011). Optimointiin liittyvää vakausongelmaa tarkastellaan luvun lopussa.

3.1 CVaR:n minimointi

CVaR:n hyödyntäminen portfolio-optimoinnissa lähti liikkeelle Rockafellarin ja Uryasevin (2000) artikkelista "Optimization of Conditional Value-at-Risk". Artikkelissaan he näyttävät, että CVaR-rajoitteinen optimointiongelma voidaan apufunktion avulla saattaa yksinkertaiseen muotoon, jonka ratkaisemisen yhteydessä saadaan selville myös portfolion VaR. Artikkelissaan "Conditional value-at-risk for general loss distributions" (Rockafellar & Uryasev 2002) he yleistävät tulokset diskreeteille jakaumille. Esitetään näihin artikkeleihin tukeutuen CVaR-minimointiongelma ensin yleiselle tappiojakaumalle.

Tarkastellaan optimointiongelmaa, jossa tarkoituksena on minimoida CVaR. Formaalisti ongelma voidaan esittää muodossa

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}),$$

eli tavoitteena on valita kaikista joukon $\mathbb{X}$ vaihtoehdoista se päätös $\boldsymbol{x}^*$, joka minimoi CVaR:lla luottamustasolla α mitatun riskin suuruuden. Suoraan luvussa 2.3 esitettyjen CVaR:n määritelmien avulla tapahtuva minimointi olisi kuitenkin teknisistä syistä haastavaa, joten määritellään apufunktio, jonka avulla saatetaan ongelma helpommin ratkaistavaan muotoon. Rockafellarin ja Uryasevin (2002) mukaan CVaR luottamustasolla α voidaan esittää muodossa

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \min_\zeta F_\alpha(\boldsymbol{x},\zeta), \tag{3.1}$$

missä apufunktio on

$$F_\alpha(\boldsymbol{x},\zeta) = \zeta + \frac{1}{1-\alpha} E\left\{[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\zeta]^+\right\}. \tag{3.2}$$

Funktio $[\cdot]^+$ pitää positiiviset arvot ennallaan ja muuttaa negatiiviset nollaksi, eli $[t]^+ = \max\{0,t\}$. Koneoppimisen yhteydessä kyseinen aktivointifunktio tunnetaan nimellä *tasasuuntaaja* (engl. rectifier) (Glorot et al. 2011). Kaavassa 3.1 esitetty muoto CVaR:lle on tarpeellinen, koska nyt CVaR:n määrittely ei enää tapahdu VaR:n avulla, vaan se saavutetaan muuttujan ζ suhteen äärellisen ja muuttujien ζ sekä $\boldsymbol{x}$ suhteen konveksin apufunktion 3.2 minimiarvona. Lisäksi VaR:lle pätee

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \text{joukon } \arg\min_\zeta F_\alpha(\boldsymbol{x},\zeta) \text{ vasen ääripiste}, \tag{3.3}$$

eli se on ensimmäinen kohta, jossa apufunktio saavuttaa pienimmän arvonsa, eli CVaR:n. Suora määritelmällinen seuraus kaavoista 3.1 ja 3.3 on, että

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = F_\alpha\left[\boldsymbol{x}, \mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})\right]$$

(Rockafellar & Uryasev 2002). Tässä kappaleessa mainitut tulokset muodostavat yhdessä keskeisen pohjan optimointiongelman muotoilulle. Kyseisten tulosten todistukset sivuutetaan tässä työssä, mutta erityisesti konveksisuus on seuraus oletuksesta, että $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ on konveksi päätösvektorin suhteen ja äärellisyys siitä, että tappiot eivät voi olla äärettömiä. Todistukset löytyvät Rockafellarin ja Uryasevin (2002) artikkelista.

Rockafellarin ja Uryasevin (2000) tärkeä löydös on, että CVaR:n minimointi päätösvektorin $\boldsymbol{x}$ suhteen voidaan muuttaa apufunktion minimoimiseksi kaikkien yhdistelmien $(\boldsymbol{x}, \zeta) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}$ suhteen, eli

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \min_{(\boldsymbol{x}, \zeta) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}} F_\alpha(\boldsymbol{x}, \zeta). \tag{3.4}$$

Tulos on suora seuraus kaavassa 3.1 esitetystä CVaR:n määrittelystä apufunktion 3.2 avulla: CVaR on apufunktion minimi muuttujan ζ suhteen, joten CVaR:n minimi päätösvektorin suhteen on apufunktion minimi sekä päätösvektorin, että muuttujan ζ suhteen. Toisin sanoen, apufunktion minimoivalle pisteelle $(\boldsymbol{x}^*, \zeta^*)$ pätee

$$(\boldsymbol{x}^*, \zeta^*) \in \arg\min_{(\boldsymbol{x}, \zeta) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}} F_\alpha(\boldsymbol{x}, \zeta) \iff \boldsymbol{x}^* \in \arg\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{x}), \zeta^* \in \arg\min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(\boldsymbol{x}^*, \zeta),$$

eli kyseinen päätösvektori minimoi myös CVaR:n ja ζ^* apufunktion, kun päätösvektori on vakio (Rockafellar & Uryasev 2002). Tästä syystä voidaan suoraan operoida apufunktiota ja minimiratkaisun löytyessä tiedetään, että kyseinen ratkaisu minimoi myös CVaR:n. Havainto on merkittävä, sillä apufunktion minimointi ei vaadi jokaisen päätösvektori-CVaR-yhdistelmän ratkaisemista, kuten suora CVaR:n minimointi vaatisi, vaan voidaan minimoida numeerisesti huomattavasti kevyempi, konveksi apufunktio. Kyseessä on *stokastinen* optimointiongelma, koska apufunktio 3.2 sisältää odotusarvo-operaattorin, mutta konveksisuus pitää ongelman helposti ratkaistavana (Rockafellar & Uryasev 2000). Ratkaisun löytyessä, sitä vastaavat CVaR ja VaR saadaan suoraan selville kaavojen 3.1 ja 3.3 avulla.

3.2 Muotoilu lineaariseksi optimointiongelmaksi

Kaavassa 3.4 esitetty muotoilu CVaR:n minimointiin ei ole vielä suoraan käytettävissä optimoinnissa, koska apufunktion määritelmä 3.2 sisältää odotusarvo-operaattorin. Mikäli satunnaisvektori $\boldsymbol{y}$ noudattaa jatkuvaa jakaumaa, jonka muoto tunnetaan, voidaan odotusarvo ratkaista analyyttisesti, kuten kappaleessa 2.3. Tällöin apufunktio saa Rockafellarin ja Uryasevin (2000) mukaan muodon

$$F_\alpha(\boldsymbol{x}, \zeta) = \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m} [f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \zeta]^+ p(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}. \tag{3.5}$$

Käytännössä jakaumaa ei usein tunneta ja yksinkertaiset jakaumaoletukset eivät ole perusteltuja, esimerkiksi portfolion komponenttien riippuvuussuhteiden vuoksi. Tällöin odotusarvoa joudutaan approksimoimaan esimerkiksi simuloimalla satunnaisvektorin $\boldsymbol{y}$ jakaumaa. Tuloksena saadaan joukko $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_N$ satunnaisvektoreita, joiden avulla odotusarvoa voidaan approksimoida käyttäen otoskeskiarvoa[1] ja saadaan apufunktiolle approksimaatio

$$\widetilde{F}_\alpha(\boldsymbol{x}, \zeta) = \zeta + \frac{1}{N(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{N} [f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_k) - \zeta]^+, \tag{3.6}$$

missä N on simuloitujen satunnaisvektorien määrä (Rockafellar & Uryasev 2000). Suurten lukujen lain mukaan approksimaatio $\widetilde{F}_\alpha(\cdot)$ konvergoi kohti todellista apufunktion 3.5 arvoa, kun otoskoko N kasvaa riittävän suureksi (Zhu & Fukushima 2009).

Approksimaatiosta on helppo nähdä, että se on *lähes lineaarinen* tappiofunktion $f(\cdot)$ suhteen: erotukset $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_k) - \zeta$ vain skaalataan nolliksi, mikäli tappio ei ylitä tarkasteltavaa rajaa ζ. Edelleen approksimaatio 3.6 pysyy lähes lineaarisena päätösvektorin $\boldsymbol{x}$ suhteen, mikäli tappiofunktio on lineaarinen päätösvektorin suhteen. Luvussa 2.1 määriteltiin tässä työssä tarkasteltava yksinkertainen tappiofunktio vektoritulona $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = -(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)$, joka on lineaarinen, joten myös approksimaatio 3.6 pysyy lähes lineaarisena. Kyseisellä tappiofunktiolla approksimaatio saa muodon

$$\widetilde{F}_\alpha(\boldsymbol{x}, \zeta) = \zeta + \frac{1}{N(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{N} [-\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}_k - \zeta]^+, \tag{3.7}$$

joka on konveksi funktio (Rockafellar & Uryasev 2000), mutta ei vielä lineaarinen, koska kaavassa esiintyy aktivointifunktio $[\cdot]^+$. Funktion 3.7 minimointi voidaan kuitenkin muuttaa lineaariseksi optimointiongelmaksi muuttujien $\boldsymbol{x}$ ja ζ suhteen, kun merkataan $[-\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}_k - \zeta]^+ = u_k$ ja asetetaan rajoitteet

$$\begin{cases} u_k \geq 0 \\ \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}_k + \zeta + u_k \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \ldots, N\} \end{cases} \tag{3.8}$$

(Rockafellar & Uryasev 2000), jotka yhdessä apumuuttujavektorin $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ elementtien u_k avulla replikoivat epälineaarisen aktivointifunktion $[\cdot]^+$ toiminnan: jälkimmäinen rajoite rajaa apumuuttujan arvot vähintään yhtä suuriksi funktion $[\cdot]^+$ argumentin kanssa ja ensimmäinen rajoite takaa, etteivät nämä arvot ole negatiivisia.

Kaavassa 3.8 esitetyt rajoitteet liittyvät CVaR:n minimoinnin yksinkertaistamiseen, mutta varsinainen tuotto-CVaR-portfolio-optimointi sisältää myös muita rajoitteita. Jos päätös-

[1] Funktion f odotusarvon harhaton estimaattori on otoskeskiarvo

$$E[f] = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} f(y_i),$$

missä y_i on satunnaismuuttujan simuloitu arvo ja N simulointien määrä (katso odotusarvon simuloinnista esimerkiksi Hastings 1970).

vektori $\boldsymbol{x}$ tulkitaan osakkeille annettuina painoina, eli prosentuaalisina osuuksina koko portfolion arvosta, niin saadaan päätösvektorille $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ joukkoa $\mathbb{X}$ rajaavat ehdot

$$\begin{cases} x_i \geq 0, & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

eli positioiden tulee olla positiivisia saatavilla oleviin kohteisiin, ja niiden tulee yhdessä muodostaa koko portfolio. Lisäksi vaaditaan vielä alaraja portfolion tuotolle, koska tuotto-riski-optimointi on usean tavoitteen optimointiongelma, mikä ei ratkea yksikäsitteisesti: kuten jo työn johdannossa todettiin, tuoton maksimointi ja riskin minimointi ovat markkinoilla ristiriitaiset tavoitteet. Rockafellar ja Uryasev (2000) esittävät tuoton rajaamisen pienimpään hyväksyttävään portfolion tuottoon R, jolloin saadaan rajoite-epäyhtälö

$$\boldsymbol{x}^T \overline{\boldsymbol{y}} - R \geq 0, \tag{3.10}$$

missä $\overline{\boldsymbol{y}}$ on otoskeskiarvovektori simuloiduista tuotoista. Tällöin hyväksyttävien portfolioiden odotusarvon $\boldsymbol{x}^T \overline{\boldsymbol{y}}$ tulee olla vähintään R. Rajoitteet 3.9 ja 3.10 ovat lineaarisia, joten alkuperäinen ongelma säilyy lineaarisena. Nyt lineaarinen odotusarvo-CVaR-portfolio-optimointiongelma voidaan kokonaisuudessaan esittää kaavojen 3.7, 3.8, 3.9 ja 3.10 avulla muodossa

$$\begin{aligned} \min_{(\boldsymbol{x},\zeta,\boldsymbol{u}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N} \quad & \zeta + \frac{1}{N(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{N} u_k, && \\ \text{siten että:} \quad & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}_k + \zeta + u_k \geq 0, && \forall k \in \{1, \ldots, N\}, \\ & \boldsymbol{x}^T \overline{\boldsymbol{y}} - R \geq 0, && \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, && \\ & x_i \geq 0, && \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\ & u_k \geq 0, && \forall k \in \{1, \ldots, N\}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

missä minimoitava funktio 3.11 on saatu sijoittamalla apumuuttuja kaavaan 3.7. Koska koko ongelma voidaan esittää parametriensa suhteen lineaarisesti, voidaan ratkaisemiseen käyttää tehokkaita lineaaristen ongelmien ratkaisumenetelmiä, kuten Karmarkarin (1984) sisäpistealgoritmia tai duaali-simplex-menetelmää, jotka ovat toteutettuna esimerkiksi Matlabissa.

Ongelman ratkaisu on tuotto-riski-näkökulmasta *pareto-optimaalinen*, eli se tarjoaa annetuilla tiedoilla muodostetun tuotto-CVaR-yhdistelmän, jota parempaa yhdistelmää ei mahdollisten portfolioiden joukosta löydy. Toisin sanoen, ei ole olemassa portfoliota, jolla olisi yhtä hyvä tuotto ja matalampi CVaR tai parempi tuotto ja yhtä hyvä CVaR, kuin ratkaisuportfoliolla. Käytännössä odotetulle tuotolle asetettu alaraja 3.10 takaa, että ratkaisu minimoi riskin, kun odotetun tuoton täytyy olla tietyn suuruinen. Täten muuttamalla odotetun tuoton alarajaa R, saadaan uusia ratkaisuja painoille $\boldsymbol{x}$, joiden riski on kääntäen verrannollinen alarajaan R: tällä tavalla saadut ratkaisut ovat kaikki pareto-optimaalisia ja ne muodostavat niin sanotun *tehokkaan rintaman* saatavilla oleville portfoliovaihtoehdoille. Odotettavaa on, että tuoton alarajan ollessa riittävän suuri, ei epäyhtälön 3.10 toteuttavaa ratkaisua $\boldsymbol{x}$ enää löydy, koska tuottojen otoskeskiarvovektorin $\overline{\boldsymbol{y}}$ kaikki elementit $\overline{y}_j$ ovat pienempiä, kuin vaadittu tuotto R.

Vaikka tässä luvussa esitetyssä portfolio-optimointiongelman muotoilussa tehdään melko epärealistisia oletuksia, kuten jätetään riskittömän koron vaikutus huomioimatta, apufunktion approksimointiin käytettävä menetelmä 3.6 ei ole riippuvainen näistä oletuksista. Esimerkiksi riskitön korko sijoituskohteena voidaan huomioida tappiofunktiolla

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -[\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} + r_f(1 - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e})],$$

missä r_f on riskitön korkotaso ja $\boldsymbol{e}$ yksikkövektori (Lotfi & Zenios 2018). Apufunktion hyödyntäminen yleistyy myös muille portfolio-optimoinnin tyypeille, joille on muodostettavissa tappiofunktio $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kuten johdannaisportfolioille (Rockafellar & Uryasev 2000) ja indeksin replikointiin (Rockafellar & Uryasev 2002). Apufunktion 3.6 avulla CVaR:ia voidaan käyttää optimointiongelmissa kohdefunktion lisäksi myös rajoitteena (Rockafellar & Uryasev 2002). Ongelmien tarkempi muotoilu ja ominaisuudet, kuten konveksisuus tai lineaarisuus, riippuvat asetetuista rajoitteista ja tappiofunktion muodosta. Varsinainen haaste CVaR-optimoitujen portfolioiden hyödyntämisessä on kuitenkin ratkaisujen käyttäytyminen optimointiin käytetyn datan ulkopuolella. Tätä ongelmaa tarkastellaan seuraavaksi.

3.3 Ratkaisun epävakaus

Taloudellisesta näkökulmasta tiedon puute ja epävarmuus eivät ole sama asia, sillä tiedon puute aiheuttaa mittausvirhettä, kun taas epävarmuus liittyy satunnaisen ilmiön määrittelemättömään jakaumaan: Knight (1921) teki eron käsitteiden välille jo viime vuosisadan alussa. Määritelmät eivät ole yksikäsitteisiä ja Lotfi sekä Zenios (2018) huomauttavatkin, että optimointia käsittelevässä kirjallisuudessa käytetään epävarmuudesta usein termiä *uncertainty*, vaikka tarkoitetaan Knightilaisessa mielessä termiä *ambiguity*. Tässä työssä epävarmuus ei tarkoita parametrien mittausvirheestä aiheutuvia ongelmia, joita voidaan pienentää tarkemmilla estimointimenetelmillä ja suuremmalla otoksella, vaan koko todennäköisyysmallin muotoon liittyvää monitulkintaisuutta.

Portfolio-optimoinnin näkökulmasta epävarmuutta tai tiedon puutetta ei olisi, jos tuotot generoiva jakauma tunnettaisiin täysin, eli satunnaisvektorin $\boldsymbol{y}$ jakauman todellinen muoto tiedettäisiin. *Riski* olisi silti olemassa, koska $\boldsymbol{y}$ on satunnainen, ja täten sen yksittäistä realisoituvaa arvoa ei voida varmuudella tuntea. *Tiedon puutteen* tapauksessa jakauman määritteleviä parametreja ei enää tunneta tarkasti vaan, ne ovat satunnaismuuttujia, mutta tilanne ei vielä sisällä *epävarmuutta*. Jos data sisältää myös epävarmuutta, jakaumaa ei edes voida tuntea, vaan se vaihtelee esimerkiksi tietyissä rajoissa parametriensa suhteen ja saattaa muuttaa muotoaan täysin. Knightin (1921) mukaan markkinadata sisältääkin juuri epävarmuutta. Portfolio-optimoinnin kannalta sekä tiedon puute että epävarmuus ovat ongelmallisia, koska ne heikentävät optimointiin käytetyn tiedon edustavuutta suhteessa markkinoiden käyttäytymiseen kyseisen tietojoukon ulkopuolella, eli aiheuttavat ratkaisuiden *epävakautta*.

Tähän asti työssä käsitellyt asiat ovat liittyneet CVaR:iin perustuvaan riskin määrittelemiseen, mittaamiseen ja minimointiin. Edellisessä luvussa johdetun optimointiongelman käytännön hyödyntämisessä on kuitenkin huomioitava markkinadataan liittyvät realiteetit, kuten epävarmuus, joille kaikki tuotto-riski-muotoiset optimointiongelmat ovat alttiita. CVaR:n kannalta ongelma on erityisen merkittävä, sillä se ei ole riskimittana vakaa (engl. robust) suhteessa pieniin muutoksiin sen arvioinnissa käytetyssä datassa (Kou et al. 2013): koska optimoinnissa minimoidaan CVaR:lla mitattua riskiä, on epävakaus myös optimoinnin ongelma. Lisäksi portfolio-optimointiongelmat ovat yleisesti herkkiä epävarmuudelle jakauman parametreissa (Black & Litterman 1992; Goldfarb & Iyengar 2003; Delage & Ye 2010), joten ratkaisun epävakaus on tuotto-CVaR-portfolio-optimoinnissa merkittävä ongelma (katso esimerkiksi Kaut et al. 2007; Lim et al. 2011).

4. RATKAISUN VAKAUTTA PARANTAVAT MENETELMÄT

Tässä luvussa esitetään kirjallisuuskatsauksessa löytyneet vaihtoehdot tutkimusongelman, eli tuotto-CVaR-optimoinnin epävakauden, ratkaisemiseksi. Käsiteltävät artikkelit on rajattu hakusanoilla löytyneestä laajemmasta joukosta ja niitä käsitellään vain työn laajuuteen ja tuotto-CVaR-malliin tehtyihin rajauksiin nähden mielekkäässä laajuudessa. Aineiston ja työn rajauksista tarkemmin luvussa 1.

Kirjallisuuskatsauksessa löytyneet lähestymistavat optimoinnin vakauden parantamiseen voidaan karkeasti jakaa kolmeen ryhmään: ongelmaa muokkaaviin menetelmiin, tappiojakauman simuloimista käsitteleviin menetelmiin ja näitä yhdisteleviin menetelmiin. Jako ei ole täysin yksikäsitteinen ja esimerkiksi optimointiongelman muokkaukseen keskittyvässä artikkelissa saatetaan ottaa empiirisessä osiossa kantaa myös simuloinnin toteuttamiseen. Seuraavaksi käsiteltävät menetelmät onkin jaettu tiivistelmän perusteella kyseisiin ryhmiin, mutta jaon voisi tehdä perustellusti myös jollain muulla tavalla.

4.1 Ongelmaa muokkaavat menetelmät

Ongelmaa muokkaavissa menetelmissä muutetaan luvussa 3.2 esitettyä tuotto-CVaR-optimointiongelmaa minimoitavan funktion, rajoitteiden tai molempien osalta siten, että optimiratkaisut sietäisivät datassa olevaa epävarmuutta. Kirjallisuuskatsauksen perusteella tämä on tutkituin lähestymistapa tuotto-CVaR-optimoinnin vakauden parantamiseksi ja erityisesti robustin optimoinnin menetelmät korostuvat myös yhdistelmämenetelmissä. Tarkastellaan seuraavaksi katsauksessa löytyneitä robustin optimoinnin ja koneoppimisen menetelmiä.

4.1.1 Robusti optimointi

Useissa käytännön päätöksentekotilanteissa, liittyivätpä ne sitten rakenteiden suunnitteluun tai portfolion muodostamiseen, voidaan ongelma esittää satunnaisen komponentin $\boldsymbol{y}$ ja päätöskomponentin $\boldsymbol{x}$ avulla. Ongelma voidaan ratkaista stokastisen optimoinnin menetelmin, kuten luvussa 3.2 esitetään, mikäli satunnaisuuden muoto, eli jakauma, tunnetaan täysin. Usein jakaumaa ei kuitenkaan tunneta eksaktisti ja vaikka tunnettaisiin, menetelmää ei voida välttämättä toteuttaa täsmälleen optimiratkaisun $\boldsymbol{x}$ vaatimassa muodossa (Ben-Tal & Nemirovski 1998). Epävarmuudesta johtuen ratkaisu ei ole välttämättä todellisuudessa käypällä alueella: ratkaisuportfolio esimerkiksi rikkoo asetettua tuottovaatimusta. Robusti optimointi pyrkii ratkaisemaan tämän ongelman tilanteessa, jossa epävarmuus voidaan rajata tietylle alueelle, eli *epävarmuusjoukkoon* (Ben-Tal & Nemirovski 1998).

Robusti optimointi on siis mallinnusmenetelmä optimointiongelmien käsittelyyn, missä optimoinnissa käytettävään dataan liittyy epävarmuutta ja epävarmuus voidaan rajata tiettyyn joukkoon (Ben-Tal & Nemirovski 2002). Menetelmässä olennaisia kysymyksiä ovat, mitä parametreja epävarmuus koskee ja miten niitä vastaava epävarmuusjoukko tulisi muodostaa. Ben-Tal et al. (2013) vastaavat jälkimmäiseen kysymykseen todeten, että epävarmuusjoukon tulisi olla sopusoinnussa kaiken parametreista saatavilla olevan tiedon kanssa. Lisäksi joukon tulisi olla heidän mukaansa tilastollisesti mielekäs ja sen avulla muodostetun optimointimallin ajallisesti ratkaistavissa oleva, tarkoittaen polynomista aikakompleksisuutta. Käytännössä parametrien ja epävarmuusjoukkojen muotoilun suhteen voidaan tehdä hyvinkin erilaisia valintoja, mikä näkyy hauilla löytyneissä artikkeleissa. Moninaisuudesta huolimatta, menetelmät voidaan lukea osaksi *robustin konveksin optimoinnin* menetelmiä, jotka saivat lähtölaukauksen Ben-Talin ja Nemirovskin (1998) artikkelista.

Aineiston perusteella voidaan sanoa, että robustin optimoinnin soveltaminen tuotto-CVaR-ongelmiin on lähtenyt liikkeelle Zhun ja Fukushiman (2009) artikkelista, jossa he esittävät *huonoimman tapauksen CVaR* (engl. worst-case CVaR, WCVaR) riskimitan. He olettavat, että datan generoiva jakauma $p(\cdot)$ kuuluu epävarmuusjoukkoon $\mathbb{P}$, jolloin WCVaR voidaan CVaR:n avulla esittää muodossa

$$\mathrm{WCVaR}_\alpha = \sup_{p(\cdot)\in\mathbb{P}} \mathrm{CVaR}_{\alpha,p(\cdot)}(\boldsymbol{x}),$$

eli satunnaisvektorin $\boldsymbol{y}$ mahdollisista jakaumista huomioidaan pienimmän ylärajan $\sup\{\cdot\}$ tuottava jakauma CVaR:n ratkaisemisessa. Toisin sanoen, epävarmuuden vallitessa WCVaR antaa epävarmoista vaihtoehdoista suurimman mahdollisen riskin arvon, mikä tekee mitasta melko konservatiivisen. Zhu ja Fukushima (2009) osoittavat, että myös WCVaR on koherentti riskimitta, joten CVaR:n tärkeästä edusta ei jouduta tinkimään. Huang et al. (2010) taas esittävät artikkelissaan *suhteellisen robustin CVaR* (relative robust CVaR, RCVaR) mitan, jossa ideana on huomioida myös parhaat mahdolliset jakaumat epävarmuusjoukosta. Menetelmä auttaa vähentämään WCVaR:n merkittävää konservatiivisuutta, mutta se ei ole koherentti (Huang et al. 2010) ja ei ole saavuttanut kirjallisuudessa vastaavaa suosiota, kuin WCVaR.

Robustia optimointia käsittelevät, kirjallisuuskatsauksessa löydetyt artikkelit ovat taulukossa 4.1. Artikkeleista löytyy kolme lähestymistapaa epävarmuuden käsittelemiseen: Ensimmäinen vaihtoehto on, että tuotot generoiva jakauma voi olla jokin tunnettujen jakaumien konveksi yhdistelmä, jolloin tunnettujen jakaumien uskottavuusfunktioiden avulla muodostetaan WCVaR-ongelma. Toinen vaihtoehto on, että tuotot generoivan jakauman parametreihin, kuten odotusarvoon ja varianssiin liittyy epävarmuutta. Kolmas vaihtoehto on, että datan generoivasta jakaumasta on vain simulointitulos, jonka muotoon liittyy epävarmuutta.

Taulukko 4.1. *Robustin tuotto-CVaR-optimoinnin menetelmät*

	Huomioitava epävarmuus	Muoto
RCVaR		
Huang et al. (2010)	Tunnettujen jakaumien yhdistelmä	
WCVaR		
Zhu ja Fukushima (2009)	Tunnettujen jakaumien yhdistelmä Diskreetin jakauman todennäköisyyksissä	Laatikko Elliptinen
Chen et al. (2011)	Jatkuvien jakaumien joukko	
Lotfi ja Zenios (2018)	Diskreetissä jakaumassa, odotusarvoissa ja kovarianssimatriisissa	Elliptinen Polytooppi
Van Parys et al. (2019)	Jatkuvien jakaumien joukko	Jakauma on yksihuippuinen tai monotoninen
Liu et al. (2019)	Odotusarvoissa ja kovarianssimatriisissa	
Du et al. (2020)	Diskreetin jakauman todennäköisyyksissä	Kartiomainen

Zhu ja Fukushima (2009) esittävät artikkelissaan tunnettujen jakaumien konveksiin yhdistelmään pohjautuvan WCVaR-optimointiongelman, missä epävarmuusjoukko $\mathbb{P}$ koostuu siis tunnettujen jakaumien, jatkuvien tai diskreettien, uskottavuusfunktioista. Vaikka menetelmässä implisiittisesti oletetaan, että epävarmuusjoukon muodostavien jakaumien parametrit tunnetaan, niin Lotfi ja Zenios (2018) huomauttavat, että sillä voitaisiin approksimoida myös momentteihin liittyvää epävarmuutta Marronin ja Wandin kernel-estimaattituloksiin nojautuen.

Jakaumien konveksin yhdistelmän erikoistapaus on, että jakaumia tarkastellaan erillään, jolloin epävarmuusjoukko $\mathbb{P}$ koostuu esimerkiksi ristiriitaisista ennusteista tulevalle tuottojen jakaumalle. Huang et al. (2010) esittävät tämän ongelman RCVaR mitalle, ja toteavat menetelmän soveltuvan esimerkiksi useiden asiantuntija-arvioiden huomioimiseen portfoliovalinnassa. Chen et al. (2011) taas tarkastelevat yleistetympää tilannetta esittäen robustin CVaR ongelman tilanteessa, jossa epävarmuusjoukko $\mathbb{P}$ sisältää kaikki jakaumat, joiden odotusarvovektori on $\boldsymbol{\mu}$ ja kovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Gamma}$, eli tuottojen jakaumasta tunnetaan kaksi ensimmäistä momenttia tarkasti. Van Parys et al. (2019) toteavat, että vain kahden ensimmäisen momentin asettaminen vakioiksi johtaa usein hyvin laajaan epävarmuusjoukkoon, joka sisältää epärealistisia jakaumatapauksia. He esittävätkin, miten kyseistä joukkoa voi rajata sisällyttämällä malliin rakenteellista tietoa jakaumasta, kuten *yksihuippuisuuden* tai *monotonisuuden*.

Toista aineistosta löytynyttä epävarmuuden käsittelytapaa, eli tuotot generoivan jakauman momentteihin sisältyvää epävarmuutta, käsittelevät Lotfi ja Zenios (2018) sekä Liu et al. (2019). Chen et al. (2011) ja Van Parysin et al. (2019) malleihin verrattuna asetelma on erilainen, koska nyt odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi eivät ole vakioituja, vaan ne sisältävät epävarmuutta ja niille muodostetaan yhteinen epävarmuusjoukko. Esimerkiksi Lotfi ja Zenios (2018) käsittelevät ellipsoidin muotoista epävarmuusjoukkoa, joka huomioi odotusarvojen ja kovarianssien mahdollisen yhteisvaihtelun. Heidän muodostamassaan ongelmassa huomioidaan myös jakauman epävarmuus ja se onkin epävarmuuden osalta yleistetyin kirjallisuuskatsauksessa löytynyt WCVaR-malli, jolle esitetään eksplisiittinen muotoilu. He tosin olettavat, että tappiofunktio on lineaarinen, mutta kyseinen oletus pätee tässä työssä käsiteltyyn tappiofunktioon.

Kolmas aineistosta löytynyt tapa käsitellä epävarmuutta robustissa optimoinnissa on muodostaa epävarmuusjoukko simulointituloksille. Zhu ja Fukushima (2009) tarkastelevat simuloidun jakauman todennäköisyyksiin liittyvää epävarmuutta, jolloin yksittäistä simulointitulosta y_k vastaa apufunktiossa 3.6 esitetyn vakiotodennäköisyyden $1/N$ sijaan yksilöllinen todennäköisyys $P[y_k] = \pi_k$. He näyttävät, että todennäköisyyksien rajaaminen ellipsoidiseen tai laatikon muotoiseen epävarmuusjoukkoon johtaa lineaariseen WCVaR-optimointiongelmaan tai muuhun helposti ratkaistavaan konveksiin ongelmaan, mikäli tappiofunktio on lineaarinen: tosin he toteavat, että erityisesti ellipsoidisen epävarmuusjoukon parametrien määrittely on käytännössä haastavaa. Du et al. (2020) muodostavat kartiomaisen (engl. conic) epävarmuusjoukon simuloitujen tuottojen ympärille. Zhun ja Fukushiman (2009) sekä Dun et al. (2020) lähestymistavat voisivat sopia tilanteisiin, joissa optimointiin halutaan käyttää vain saatavilla olevaa dataa, eikä oteta kantaa tuotot generoivan jakauman ominaisuuksiin.

4.1.2 Koneoppimismenetelmät

Koneoppiminen käsittää useita eri menetelmäkokonaisuuksia, joille yhteistä on koneen kehittyminen suorittamassaan tehtävässä tietoa hyödyntämällä (Jordan & Mitchell 2015). Koneoppimisella ja tuotto-CVaR-optimoinnilla on muutakin yhteistä, kuin tiedon hyödyntäminen parhaan ratkaisun etsimisessä: myös koneoppimisessa sietokyky datan sisältämille virheille ja ratkaisuiden yleistyminen datan ulkopuolelle ovat keskeisiä haasteita (Jordan & Mitchell 2015). Taulukossa 4.2 esitetään kirjallisuuskatsauksessa löytyneet artikkelit, joissa hyödynnetään koneoppimisessa käytettyjä menetelmiä datan ulkopuolisen suorituskyvyn parantamiseen.

Taulukko 4.2. *Koneoppimismenetelmiä hyödyntävät tuotto-CVaR-optimointimallit*

	Menetelmät	Tavoite
Still ja Kondor (2010)	SVM-muotoilu L2-normi	Lisätä hajauttamista vähentämällä mallin kapasiteettia
Ban et al. (2018)	PBR Ristiinvalidointi	Vähentää erityisen hyvin suoriutuvien kohteiden merkitystä ratkaisussa

Still ja Kondor (2010) esittävät päätösvektorin $\boldsymbol{x}$ L2-normin, eli neliösumman

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i}^{n} x_i^2$$

lisäämistä minimoitavaan lausekkeeseen 3.11 ja lausekkeen muun osan kertomista vakioparametrilla. Näin muodostettu ongelma on heidän mukaansa lähes samanlainen, kuin tukivektorikone (engl. support vector machine) υ-SVM. He toteavat, että normi lausekkeessa auttaa vakauttamaan ratkaisua, koska se vähentää mallin *kapasiteettia*, asettaen paineen elementeille x_i olla suurempia kuin nolla. Tämä hajauttaa portfoliota ja vaikutusta kontrolloidaan muun lausekkeen vakioparametrilla. He esittävät, että muitakin normeja kuten L1, eli itseisarvojen summa, voitaisiin käyttää lausekkeessa, mutta niiden vaikutus ei välttämättä olisi vakautta lisäävä. Lisäksi he muistuttavat, että vakioparametrin asettaminen on uusi ongelma, minkä ratkaisemista he eivät tarkastele syvemmin.

Ban et al. (2018) lähestyvät vakauden parantamista varianssin pienentämisen näkökulmasta. He lisäävät ongelman muotoiluun rajoitteet tuoton ja CVaR:n otosvariansseille sekä esittävät ristiinvalidointiin (engl. cross validation) pohjautuvan algoritmin näiden rajoitteiden asettamiseen. Rajoitteiden avulla he pyrkivät vähentämään otoksessa olevien ääripäiden vaikutusta optimiratkaisuun, mikä heidän mukaansa parantaa ratkaisuiden käyttäytymistä myös otoksen ulkopuolella. He kutsuvat menetelmää suorituskykypohjaiseksi sääntelyksi (engl. performance-based regularization, PBR) ja osoittavat, että sille löytyy vastaava robusti ongelma, ellipsoidien muotoisilla epävarmuusjoukoilla odotusarvoille ja kovarianssimatriisille. Lisäksi he tarkastelevat päätösvektorille asetettujen L1- ja L2-normin rajoitteiden vaikutusta menetelmään, mutta he eivät havaitse niillä merkittävästi suorituskykyä parantavaa vaikutusta.

Tuotto-CVaR-optimoinnin kannalta Banin et al. (2018) artikkelissa esitetään myös eräs keskeinen todistus: he osoittavat, että käytettäessä apufunktion approksimaatiota 3.7, optimointiongelman minimoiva vektori $\boldsymbol{x}^*$ konvergoi otoskoon kasvaessa todelliseen arvoonsa. Täten kyseinen estimaattori on harhaton. Yleisesti portfolio-optimoinnin haaste kuitenkin on, että saatavilla oleva data on parhaimmillaankin melko suppeaa verrattuna mahdollisten kohteiden x_i määrään n, ja siksi optimoinnin vakaus kärsii (Still & Kondor

2010). Ban et al. (2018) eivät pystykään osoittamaan tilastollisesti merkitsevää eroa menetelmänsä ja luvussa 3.2 esitetyn perusmuotoisen tuotto-CVaR-menetelmän suorituskyvyn välille, kun valittavien kohteiden määrää kasvatetaan.

4.2 Menetelmät skenaarioiden muodostamiseen

Edellä käsitellyt menetelmät tuotto-CVaR-portfolio-optimoinnin vakauttamiseen keskittyvät luvussa 3.2 esitetyn optimointiongelman uudelleenmuotoiluun, esimerkiksi uuden riskimitan tai lisättyjen rajoitteiden avulla. Mallin lisäksi portfolio-optimoinnissa on kuitenkin myös toinen keskeinen elementti, optimoinnissa käytettävä tieto, jota taulukossa 4.3 esitettävät menetelmät hyödyntävät.

Taulukko 4.3. *Skenaarioiden muodostamista käsittelevät menetelmät*

	Menetelmä	Tavoite
ERILLISMENETELMÄT		
Topaloglou et al. (2002)	PCA	Hyödyntää tärkeimpiä korrelaatiorakenteita
Ponomareva et al. (2015)	Momentteja vastaava skenaario	Simulointi noudattaa määrättyjä momentteja
YHDISTELMÄMENETELMÄT		
Zhu et al. (2014)	Sekoitemalli ja WCVaR	Tunnettujen jakaumien yhdistelmän arviointi ja vakautus
Kakouris ja Rustem (2014)	Copulat ja WCVaR	Tuottojen riippuvuuksien mallintaminen
Goel et al. (2019)	Aikasarjamalli, copulat ja MCVaR	Tuottojen aikasarjojen ja riippuvuuksien mallintaminen

Tässä luvussa käsiteltävät menetelmät keskittyvät malleille syötettävän tiedon muodostamiseen ja käsittelyyn, jakaumista tehtyjen oletusten ja markkinahavaintojen perusteella. Menetelmät on jaettu tiedon käsittelyä tarkasteleviin *erillismenetelmiin*, sekä sitä mallin muokkaukseen yhdisteleviin *yhdistelmämenetelmiin.*

4.2.1 Erillismenetelmät

Topaloglou et al. (2002) lähestyvät skenaarioiden, eli otantojen muodostamista puhtaasti historiallisten tuottojen avulla. Hyödyntäen pääkomponenttianalyysia (engl. principal component analysis, PCA) he pyrkivät tunnistamaan kohteiden tuotoista merkittävimmät korrelaatiorakenteet muiden kohteiden kanssa ja käyttämään niitä hyödyksi simuloitavien skenaarioiden muodostamisessa. PCA:ssa ideana on tunnistaa datalle lineaaritransformaatio, joka muuttaa sen korreloimattomaksi vektoriksi, mikä käytännössä tapahtuu ratkaisemalla datan kovarianssimatriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit. Nyt korreloimattoman vektorin suurinta vaihtelua selittävät *pääkomponentit* saadaan suurimpia ominaisarvoja vastaavien ominaisvektorien avulla. (Topaloglou et al. 2002) He valitsevat pääkomponenteista eniten datan vaihtelua selittävät komponentit ja muodostavat niille historiallisen datan perusteella otokset. Käyttämällä pääkomponenttien otoksia he voivat simuloida uutta dataa, jolla on samat keskeisimmät korrelaatiorakenteet, kuin historiallisella datalla. Vaikka Topaloglou et al. (2002) käyttävät menetelmää portfolion valuuttasuojauksen yhteydessä, voisi sitä käyttää myös muiden useita arvopaperityyppejä sisältävien portfolioiden kanssa.

Toisinaan voidaan perustellusti tehdä oletuksia datan generoivan jakauman ominaisuuksista: esimerkiksi tuottojen odotusarvot ja kovarianssimatriisi saatetaan tuntea historiallisen tiedon perusteella tarkasti. Lisäksi tietoa voi olla myös jakauman korkeammista momenteista, kuten *vinoudesta*, jonka tiedetään markkinatuotoissa olevan tyypillisesti tappiopainotteinen. Näitä tietoja voidaan hyödyntää optimoinnissa määrittelemättä yhteisjakauman muotoa tarkemmin, jos voidaan muodostaa skenaarioita, jotka noudattavat määrättyjä momentteja. Ponomareva et al. (2015) esittävät menetelmän, jolla voidaan muodostaa täsmällisesti määrättyjä odotusarvoa ja kovarianssimatriisia sekä keskimääräistä vinoutta ja huipukkuutta vastaavia skenaarioita tuottojen yhteisjakaumasta. Heidän mukaansa menetelmä vaikuttaa johtavan vakaisiin tuloksiin tuotto-CVaR-optimoinnissa, jo pienellä skenaariomäärällä. He toteavat, että menetelmä voisi sopia erityisesti asiantuntija-arvioiden hyödyntämiseen, kun tuotoista on saatavilla historiatietoa vain vähän.

4.2.2 Yhdistelmämenetelmät

Edellä käsiteltiin aineistosta löytyneet skenaarionmuodostusmenetelmät, joiden vakautta parantava vaikutus perustuu optimoinnissa käytettävän datan laadun parantamiseen. Toisaalta, kuten luvussa 3.3 käy ilmi, epävakausongelma liittyy olennaisesti itse tuotto-CVaR-optimointimalliin, joten pelkän datan laatuun keskittyminen voidaan kyseenalaistaa. Katsauksessa löytyikin yhdistelmämenetelmiä, joissa yhdistetään vakautettu optimointimalli ja tuottojakauman mallinnus.

Zhu et al. (2014) esittävät toimintamallin robustiin tuotto-CVaR-optimointiin, joka yhdistää luvussa 4.1.1 mainitun Zhun ja Fukushiman (2009) WCVaR-mallin tunnettujen jakaumien konveksille yhdistelmälle, eli *sekoitemallille* (engl. mixture model), ja vastaavien parametrien valitsemisen. Zhun et al. (2014) sekoitemallissa sekoitejakauma on muotoa

$$p(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(\boldsymbol{y}),$$

missä mahdolliset jakaumat $p_i(\boldsymbol{y})$ oletetaan tunnetuiksi, mutta painot λ_i sisältävät epävarmuutta. Heidän mukaansa jakaumat $p_1, \ldots, p_m$ voisivat kuvata esimerkiksi mahdollisia markkinatiloja ja painot $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ niiden esiintymistodennäköisyyksiä. Esimerkiksi Huangin et al. (2010) erillisten jakaumien joukkoon verrattuna kyseinen lähestymistapa on joustavampi, koska Zhun et al. (2014) mukaan heidän menetelmä mahdollistaa lähes minkä tahansa tuottojakauman approksimoimisen. He esittävät suurimman uskottavuuden menetelmään pohjautuvan algoritmin painojen arvioimiseksi ja miten ennakkotietoja painoista voidaan päivittää esimerkiksi asiantuntija-arvioiden avulla. Varsinainen WCVaR-malli muodostetaan painojen ellipsoidiselle ja laatikon muotoiselle epävarmuusjoukolle. Verrattuna luvussa 4.1.1 esitettyihin menetelmiin, Zhun et al. (2014) esittämä toimintamalli on kattavampi, koska he ottavat kantaa myös jakauman mallintamisen menetelmään ja vakauteen. Toisaalta, vaikka he esittävät myös jakaumien $p_1, \ldots, p_m$ valitsemiseen muutaman työkalun, menetelmän heikkoutena voidaan pitää lähtökohtaista oletusta siitä, että jakaumat ovat tunnettuja.

Myös Kakouris ja Rustem (2014) hyödyntävät Zhun ja Fukushiman (2009) sekoitemallia ja olettavat jakaumat tunnetuiksi. Tosin he käsittelevät juuri tiettyä jakaumatyyppiä, eli *copuloita*. Kakourisin ja Rustemin (2014) mukaan Sklar esitteli copulat vuonna 1959 ja määrittelee ne usean satunnaismuuttujan kertymäfunktioiksi, joiden marginaalijakaumat ovat tasajakautuneita. Marginaalijakaumien paikalla voidaan käyttää mitä tahansa kertymäfunktioita, mikä heidän mukaansa tekee copuloiden käytöstä joustavaa verrattuna tavallisiin usean satunnaismuuttujan kertymäfunktioihin: satunnaismuuttujien jakaumat voidaan määrittää erillään niiden välisiä riippuvuuksia kuvaavasta jakaumasta, eli copulasta. Osakeportfolion tapauksessa yksittäisten osakkeiden jakaumat voidaan siis sijoittaa copulaan marginaalijakaumiksi ja copulan muoto määrää osakkeiden välisen riippuvuussuhteen. Kakouris ja Rustem (2014) käsittelevät tietyt ehdot täyttävää copularyhmää, *Arkhimedeen copuloita*, ja muodostavat kolmesta ryhmään kuuluvasta copulasta sekoitemallin WCVaR:in käyttämiseksi. Esimerkissään he olettavat, että tuotot ovat log-normaalisti jakautuneet ja kalibroivat copuloiden parametrit historiadataa käyttämällä: näin he voivat simuloida tuottojen yhteisjakaumaa. Myös Goel et al. (2019) hyödyntävät copuloita, mutta he käyttävät eri copulatyyppiä, *köynnös copuloita* (engl. vine copula), ja pyrkivät aikasarjamallinnuksella huomioimaan vinoutuneet tuottojakaumat. He eivät käytä robustina riskimittana WCVaR:ia, vaan useilla eri luottamustasoilla mitatusta CVaR:sta (engl. mixed CVaR, MCVaR) muodostettua suhdemittaa. Täten heidän muodostamansa malli eroaa jo melko paljon luvussa 3.2 esitetystä ja siksi yhteys perinteiseen tuotto-CVaR-optimointiin voidaan kyseenalaistaa.

5. PÄÄTELMÄT

Kirjallisuuskatsauksen perusteella voidaan sanoa, että tuotto-riski-portfolio-optimoinnin epävakaus on laajalti tunnistettu ongelma portfolio-optimointia käsittelevässä kirjallisuudessa. Tässäkin aihealueessa Markowitzin (1952) käyttämä varianssi on edelleen suosittu valinta riskimitaksi. CVaR näyttää kuitenkin 2000-luvun aikana nousseen toiseksi merkittäväksi riskimittavaihtoehdoksi portfolio-optimoinnissa ja sen vakautta käsittelevässä kirjallisuudessa. CVaR:sta käytöstä tekee houkuttelevan Rockafellarin ja Uryasevin (2000) esittämä oikopolku, jolla optimointiongelma voidaan linearisoida. Lisäksi juuri vakautta käsittelevien menetelmien kannalta CVaR:n tarkastelu on mielenkiintoista, koska sillä on taipumus tehdä ratkaisuista epävakaita. Katsauksessa löytyikin useita eri menetelmiä ja menetelmäkokonaisuuksia, joilla epävakauteen pyritään vastaamaan samalla pitäen ongelmat tehokkaasti ratkaistavina.

Vahvin kirjallisuuskatsauksessa löytynyt tutkimussuunta on Zhun ja Fukushiman (2009) artikkelista alkanut robustin optimoinnin soveltaminen tuotto-CVaR-optimointiin käyttämällä WCVaR-riskimittaa. Tämä lähestymistapa ottaa selvästi huomioon Knightilaisen epävarmuuden, sillä epävarmuusjoukko koostuu vaihtoehtoisista jakaumista. Vakautta parantava vaikutus perustuu siihen, että optimiratkaisu ei hyödynnä vain yhtä simuloitua jakaumaa vaan määritellyn epävarmuuden rajoissa huomioi suurimman mahdollisen riskin. Siksi WCVaR-optimointi voikin olla melko konservatiivista, jos tuottorajoite on asetettu matalalle ja epävarmuusjoukko on lavea. Perusmuotoiseen WCVaR-optimointiin on esitetty useita vaihtoehtoja epävarmuusjoukkojen muodostamiseen, mutta epävarmuutta sisältävien parametrien valinta ja usein myös joukon laajuuden määrittäminen jäävät soveltajan harteille. Yleisesti Ben-Talin et al. (2013) neuvo, jonka mukaan kaikki saatavilla oleva informaatio tulisi hyödyntää, on todennäköisesti hyvä lähtökohta epävarmuusjoukon rajaamiseen: jos epävarmuus liittyy esimerkiksi vain tuottoihin, kannattaa muodostaa epävarmuusjoukko vain niille ja rajata sitä esimerkiksi asiantuntija-arvioiden avulla.

Katsauksessa löytyneet koneoppimismenetelmät eroavat filosofialtaan merkittävästi robustista optimoinnista. Kun WCVaR:lla pyritään varautumaan tietojoukon huonoimpaan mahdolliseen skenaarioon, SVM- ja PBR-menetelmät perustuvat kohinan, eli tietojoukon sisältämän *väärän tiedon*, vaikutuksen vähentämiseen. Robustiin optimointiin verrattuna koneoppimismenetelmien etuna voidaan pitää sitä, että epävarmuusjoukkoa ei tarvitse muodostaa. Toisaalta, koneoppimismenetelmät taas sisältävät omia parametrejaan, jotka täytyy määritellä. Vaikka Ban et al. (2018) esittävät dataohjautuvan menetelmän PBR-mallin parametrien valitsemiseen, on koneoppimismenetelmissä soveltajan kannalta ongelmallista tiedon vähäinen määrä verrattuna valittavien kohteiden määrään: suuri parametrimäärä ei identifioidu vakaasti pienellä tietojoukolla, mikä tekee täysin dataohjautuvan portfoliovalinnan haastavaksi (Still & Kondor 2010). Koneoppimismenetelmiin verrattuna robustin optimoinnin etuna voidaan pitää myös selvempää markkinatiedon sisältämän epävarmuuden huomioimista, kun koneoppimismenetelmät lähinnä poistavat kohinan vaikutusta.

Optimointimallia muokkaavien menetelmien lisäksi kirjallisuuskatsauksessa löytyi skenaarioiden muodostamista siihen yhdistäviä menetelmiä ja täysin skenaarioiden muodostamiseen keskittyviä erillismenetelmiä. Erillismenetelmien vakauttava vaikutus perustuu luvussa 3.2 esitetylle mallille syötettävän datan laadun parantamiseen. Toinen löydetyistä erillismenetelmistä perustuu historiallisesta datasta tunnistettavien korrelaatiorakenteiden hyödyntämiseen simuloinnissa ja toinen simuloinnin saamista vastaamaan jakaumaltaan haluttuja ominaisuuksia. Menetelmät voisivat toimia erityisesti tarkkuuden parantamisessa, mutta ne eivät poista optimoinnin herkkyyttä epävarmuudelle. Katsauksessa löytyikin myös yhdistelmämenetelmiä, jotka pyrkivät vakauttamaan optimointia sekä skenaarioiden, että mallin kannalta. Näiden menetelmien käyttöä voisikin pitää perusteltuna, koska epävarmuus on yleinen markkinatiedon ominaisuus (Knight 1921) ja toisaalta tuotto-CVaR-optimoinnilla on taipumus tuottaa epävakaita ratkaisuja (Kaut et al. 2007; Lim et al. 2011). Vaikka nämäkin menetelmät sisältävät omia parametrejaan, jotka täytyy asettaa, soveltajan kannalta ne ovat helpommin hyödynnettävissä: menetelmissä on valmiiksi yhdistettynä markkinatiedon hyödyntäminen sekä optimoinnissa tapahtuva päätöksenteko ja molemmissa vaiheissa huomioidaan tuotto-CVaR-optimoinnin haasteet. Esimerkiksi Zhun et al. (2014) artikkelissa esitetään havainnollisesti, kuinka päätöksenteko portfolio-optimoinnissa voisi edetä ja miten eri vaiheissa huomioitaisiin mahdolliset tietolähteet sekä epävarmuuden muodot.

Kaiken kaikkiaan tuotto-CVaR-optimoinnin vakauttamista on lähestytty kirjallisuudessa useista eri kulmista, joista laajimmin on käsitelty robustin optimoinnin WCVaR-menetelmää ja sen mahdollisia muotoiluja. Nämä menetelmät huomioivat epävarmuuden, mutta toimivuus riippuu soveltajan rajaamasta epävarmuusjoukosta. Joukon rajaaminen voi olla varsin haastavaa ja vaihtoehtoiset menetelmät, kuten koneoppiminen, saattavatkin olla intuitiivisempia käyttää (Ban et al. 2018). Käytännössä menetelmän valinta on vahvasti tilannekohtaista, koska käytettävissä oleva tieto voi vaihdella lähes yhtenevistä asiantuntija-arvioista ja ennusteista ristiriitaisiin arvioihin tai pelkkään historiatietoon. Aihealueen kirjallisuus saattaisikin hyötyä laajempien toimintamallien tutkimuksesta, jossa otettaisiin kantaa kaikkiin mallien vaatimien parametrien asettamiseen ja optimoinnin toteuttamiseen.

Tämän työn keskeisin anti pohjautuen aihealueen kirjallisuuteen on seuraava: Luvussa

2 CVaR:n mittaamisen teorian esittäminen ja motivointi mitan käyttämiseen VaR:iin verrattuna. Luvussa 3 tuotto-CVaR-portfolio-optimointimallin ja siihen liittyvän epävakausongelman esittäminen yksinkertaistetun osakeportfolion tapauksessa. Ja tuotto-CVaR-portfolio-optimoinnin vakautta parantavien menetelmien tarkastelu luvussa 4. Näistä viimeisenä mainittu pyrkii vastaamaan tutkimusongelmaan, eli tuotto-CVaR-optimoinnin epävakauteen, kirjallisuudessa esitettyjen menetelmien avulla. Tässä muodossaan, eli *kaikkia* tuotto-CVaR-optimoinnin vakautta parantavia menetelmiä vertailevana kirjallisuuskatsauksena, työ on kirjoittajan käsityksen mukaan ainoa laatuaan: muusta kirjallisuudesta löytyneet kirjallisuuskatsaukset tuotto-CVaR-optimoinnin vakautta parantavista menetelmistä ovat sivuosassa kyseisissä julkaisuissa ja käsittelevät vain julkaisussa tarkasteltavan menetelmäalueen tutkimusta, kuten robustia optimointia. Luvuissa 2 ja 3 esitettävä teoria lähinnä tukee luvun 4 muodostamista, mutta myös teorialla voi itsessään olla merkitystä suomenkielisenä esityksenä CVaR-pohjaisesta riskin mittaamisesta ja portfolio-optimoinnista, missä merkinnät ovat yhtenäisiä.

Vaikka työssä ei ole rajauduttu vakautta parantavien menetelmien tarkastelussa tiettyyn tutkimusalueeseen, ei se ole silti kattava esitys kaikista kirjallisuudessa esitetyistä menetelmistä. Kirjallisuuskatsauksessa tehdyt valinnat voidaankin kyseenalaistaa: Esimerkiksi rajautuminen vain tason kaksi ja kolme JuFo-luokiteltuihin aineistoihin jättää suuren osan hakutuloksista tarkastelun ulkopuolelle. Rajaus tehtiin vain, jotta aineiston koko pysyisi kohtuullisena. Vaikka JuFo-luokitus ei kerro yksittäisen artikkelin laadusta, se indikoi muun muassa julkaisualustan asettamista vaatimuksista artikkeleille. Tässä mielessä luokitukseen perustuvaa rajausmenetelmää voidaan pitää perusteltuna, koska se voi auttaa sisällyttämään rajattuun joukkoon tarkimman prosessin läpäisseitä artikkeleita. Suurempi haaste tämän työn rajauksissa on käytettyjen hakusanayhdistelmien määrä, mikä ei välttämättä ole riittävä kaiken keskeisen aineiston löytämiseen. Toisaalta, valikoidussa aineistossa tehdyn juurilähdehaun perusteella ei ilmennyt, että jokin erityisen keskeinen artikkeli olisi rajautunut joukon ulkopuolelle.

Toinen työn keskeinen rajoite on tuotto-CVaR-optimointimallin muodostamisessa tehdyt valinnat. Työssä esitetty malli ei salli esimerkiksi lyhyeksi myyntiä ja kaikki käsitellyt menetelmät ovat olleet yhden periodin malleja, joissa markkinoille mennään tietyllä hetkellä, portfoliolle realisoituu satunnainen tuotto ja markkinoilta poistutaan. Käytännössä portfolion hallinta on kutenkin sarja useita peräkkäisiä päätöksiä, joita varten on kehitetty dynaamisia malleja. Usean periodin vakaiden portfolio-optimointimallien teoreettinen ja empiirinen vertaileminen voisikin olla tulevaisuuden tutkimusaihe.

LÄHTEET

Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance* 26.7, 1505–1518.

Acerbi, C. & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance* 26.7, 1487–1503.

Anderson, E., Xu, H. & Zhang, D. (2020). Varying confidence levels for CVaR risk measures and minimax limits. *Mathematical Programming* 180.1, 327–370.

Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D. & Uryasev, S. (2001). Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion. *Mathematical Programming* 89.2, 273–291.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical finance* 9.3, 203–228.

Ban, G.-Y., El Karoui, N. & Lim, A. E. (2018). Machine learning and portfolio optimization. *Management Science* 64.3, 1136–1154.

Basak, S. & Shapiro, A. (2001). Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices. *The review of financial studies* 14.2, 371–405.

Basel Committee on Banking Supervision (2013). *Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*. Bank for International Settlements.

Bassett Jr, G. & Koenker, R. (1982). An empirical quantile function for linear models with iid errors. *Journal of the American Statistical Association* 77.378, 407–415.

Ben-Tal, A., Den Hertog, D., De Waegenaere, A., Melenberg, B. & Rennen, G. (2013). Robust solutions of optimization problems affected by uncertain probabilities. *Management Science* 59.2, 341–357.

Ben-Tal, A. & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of operations research* 23.4, 769–805.

– (2002). Robust optimization–methodology and applications. *Mathematical programming* 92.3, 453–480.

Bertsimas, D., Brown, D. B. & Caramanis, C. (2011). Theory and applications of robust optimization. *SIAM review* 53.3, 464–501.

Black, F. & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal* 48.5, 28–43.

Chen, L., He, S. & Zhang, S. (2011). Tight bounds for some risk measures, with applications to robust portfolio selection. *Operations Research* 59.4, 847–865.

Cont, R., Deguest, R. & Scandolo, G. (2010). Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures. *Quantitative finance* 10.6, 593–606.

De Athayde, G. M. & Flôres Jr, R. G. (2004). Finding a maximum skewness portfolio—a general solution to three-moments portfolio choice. *Journal of Economic Dynamics and Control* 28.7, 1335–1352.

Delage, E. & Ye, Y. (2010). Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations research* 58.3, 595–612.

Dowd, K. & Blake, D. (2006). After VaR: the theory, estimation, and insurance applications of quantile-based risk measures. *Journal of Risk and Insurance* 73.2, 193–229.

Du, N., Liu, Y. & Liu, Y. (2020). A New Data-Driven Distributionally Robust Portfolio Optimization Method based on Wasserstein Ambiguity Set. *IEEE Access*.

Frey, R. & McNeil, A. J. (2002). VaR and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: conceptual and practical insights. *Journal of banking & finance* 26.7, 1317–1334.

Glorot, X., Bordes, A. & Bengio, Y. (2011). Deep sparse rectifier neural networks. *Proceedings of the fourteenth international conference on artificial intelligence and statistics*. JMLR Workshop and Conference Proceedings, 315–323.

Goel, A., Sharma, A. & Mehra, A. (2019). Robust optimization of mixed CVaR STARR ratio using copulas. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 347, 62–83.

Goldfarb, D. & Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of operations research* 28.1, 1–38.

Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika* 57.1, 97–109.

Huang, D., Zhu, S., Fabozzi, F. J. & Fukushima, M. (2010). Portfolio selection under distributional uncertainty: A relative robust CVaR approach. *European Journal of Operational Research* 203.1, 185–194.

Hyvärinen, A., Karhunen, J. & Oja, E. (2001). *Independent component analysis*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. New York: J. Wiley.

Jordan, M. I. & Mitchell, T. M. (2015). Machine learning: Trends, perspectives, and prospects. *Science* 349.6245, 255–260.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica* 47.2, 263–292.

Kakouris, I. & Rustem, B. (2014). Robust portfolio optimization with copulas. *European Journal of Operational Research* 235.1, 28–37.

Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, 302–311.

Kaut, M., Vladimirou, H., Wallace, S. W. & Zenios, S. A. (2007). Stability analysis of portfolio management with conditional value-at-risk. *Quantitative Finance* 7.4, 397–409.

Knight, F. (1921). *Risk, uncertainty, and profit*. Boston: Houghton Mifflin.

Kolm, P. N., Tütüncü, R. & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research* 234.2, 356–371.

Kou, S., Peng, X. & Heyde, C. C. (2013). External risk measures and Basel accords. *Mathematics of Operations Research* 38.3, 393–417.

Lim, A. E., Shanthikumar, J. G. & Vahn, G.-Y. (2011). Conditional value-at-risk in portfolio optimization: Coherent but fragile. *Operations Research Letters* 39.3, 163–171.

Liu, J., Chen, Z., Lisser, A. & Xu, Z. (2019). Closed-form optimal portfolios of distributionally robust mean-CVaR problems with unknown mean and variance. *Applied Mathematics & Optimization* 79.3, 671–693.

Lotfi, S. & Zenios, S. A. (2018). Robust VaR and CVaR optimization under joint ambiguity in distributions, means, and covariances. *European Journal of Operational Research* 269.2, 556–576.

Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business* 36.4, 394–419.

Mansini, R., Ogryczak, W. & Speranza, M. G. (2014). Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European Journal of Operational Research* 234.2, 518–535.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of finance (New York)* 7.1, 77–91.

Mill, J. S. (1874). *Essays on some unsettled questions of political economy*. Longmans, Green, Reader, and Dyer, 120–164.

Ponomareva, K., Roman, D. & Date, P. (2015). An algorithm for moment-matching scenario generation with application to financial portfolio optimisation. *European Journal of Operational Research* 240.3, 678–687.

Rockafellar, R. T. & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk* 2.3, 21–42.

– (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance* 26.7, 1443–1471.

Still, S. & Kondor, I. (2010). Regularizing portfolio optimization. *New Journal of Physics* 12.7, s. 075034.

Topaloglou, N., Vladimirou, H. & Zenios, S. A. (2002). CVaR models with selective hedging for international asset allocation. *Journal of Banking & Finance* 26.7, 1535–1561.

Van Parys, B. P., Goulart, P. J. & Morari, M. (2019). Distributionally robust expectation inequalities for structured distributions. *Mathematical Programming* 173.1-2, 251–280.

Zhu, S., Fan, M. & Li, D. (2014). Portfolio management with robustness in both prediction and decision: A mixture model based learning approach. *Journal of Economic Dynamics and Control* 48, 1–25.

Zhu, S. & Fukushima, M. (2009). Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management. *Operations research* 57.5, 1155–1168.

Ziegel, J. F. (2016). Coherence and elicitability. *Mathematical Finance* 26.4, 901–918.