

Muodonmuutoksen mitat kontinuumimekaniikassa

Juha Hartikainen, Reijo Kouhia¹, Martti Mikkola, Jari Mäkinen

Tiivistelmä. Yksi kontinuumimekaniikan peruskysymyksistä liittyy suhteellisen muodonmuutoksen mittaukseen, joka geometrisena konstruktiona on määriteltävissä usealla eri tavalla. Artikkelin tarkoituksena on selvittää erilaisten muodonmuutosmittojen käsitteitä.

Avainsanat: suhteellinen muodonmuutos, geometrinen epälineaarisuus, kontinuumimekaniikka

Vastaanotettu 25.10.2016. Hyväksytty 8.12.2016. Julkaistu verkossa 9.12.2016.

Professori Juhani Kosken muistolle

Johdanto

Karkeasti jaotellen kontinuumimekaniikka koostuu (i) liikkeen ja muodonmuutoksen kuvauksesta (kinematiikka), (ii) jännityksen käsitteestä, (iii) kontinuumia koskevien fysiikan taselakien matemaattisesta formuloinnista sekä (iv) aineen käyttäytymistä kuvaavien konstitutiivisten yhtälöiden muotoilusta. Tässä artikkelissa keskitytään liikkeen ja erityisesti muodonmuutoksen kuvauksen käsittelyyn klassista tensorianalyysiä käyttäen. Siten esityksen seuraaminen ei vaadi modernin differentiaaligeometrian tuntemusta.

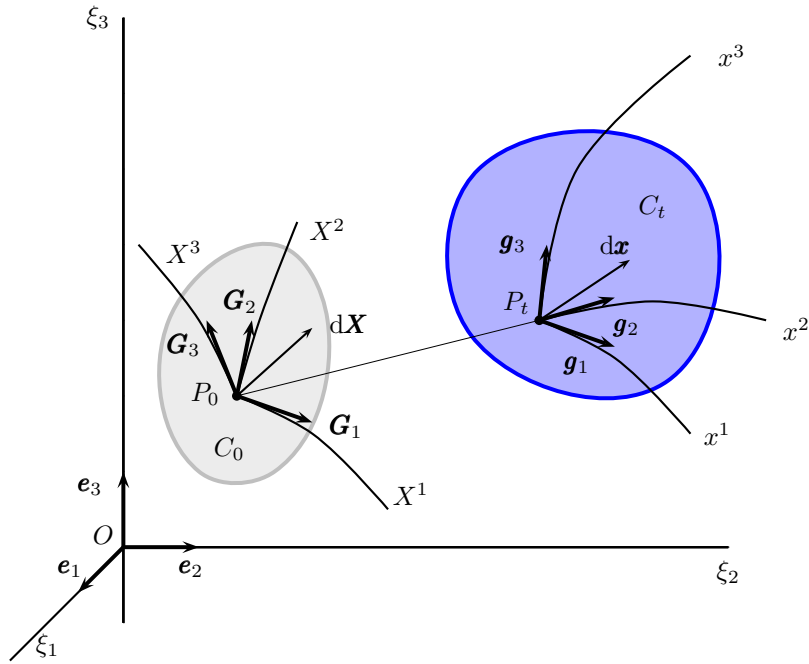
Suhteellinen muodonmuutos on geometrisena konstruktiona määriteltävissä mielivaltaisen monella tavalla. Valittua venymämittaa vastaa kuitenkin tietty jännityksen määrittely, sillä ainealkioon kohdistuvan jännityksen tehon tulee olla sama riippumatta käytetystä venymä-jännitys -määrittelystä.

Kirjallisuudesta

Clifford Truesdell on yksi epälineaarisen kontinuumimekaniikan uranuurtajista. Hänen yhdessä Walter Nollin kanssa kirjoittama ensyklopedia-artikkeli vuodelta 1965², jonka päivitetty versio on julkaistu omana kirjanaan [24]. Kontinuumimekaniikan klassikko on Malvernin kirja vuodelta 1969 [16], jonka aikalaisia ovat Eringenin [6], Fungin [8], Jaunze-miksen [13] ja Leighin [15] teokset. Uudemmissa esityksistä mainittakoon Ogdenin [19] ja Holzapfelin [12] erinomaiset kirjat, jotka keskittyvät pelkästään elastisiin ja viskoelastisiin materiaaleihin. Yleisempää lähestymistapaa edustavat Hauptin [10] ja Tadmorin,

¹Vastuullinen kirjoittaja. reijo.kouhia@tut.fi

²Encyclopedia of Physics, Volume III/3, toimittanut S. Flügge.



Kuva 1. Koordinaatisto ja kappaleen deformaatio.

Millerin ja Elliotin [23] teokset. Lyhyitä ja kompakteja kontinuumimekaniikan esityksiä ovat Chadwickin [4] ja Spencerin [22] kirjat.

Merkinnät

Tässä esityksessä vektoreille käytetään lihavoituja kursiivikirjaimia ja toisen kertaluvun tensoreille lihavoituja pystysymboleita. Esimerkiksi metrisiä tensoreita merkitään symboleilla \mathbf{G} ja \mathbf{g} kun taas niihin liittyviin kantavektoreihin käytetään symboleita \mathbf{G} ja \mathbf{g} . Dyaditulolle käytetään merkintää $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$.

Yleisen käyräviivaisen ei-suorakulmisen koordinaatiston kovariantteja kantavektoreita merkitään symboleilla \mathbf{G}_I ja \mathbf{g}_i . Karteesisen suorakulmisen koordinaatiston kantavektoreita merkitään symboleilla \mathbf{e}_i , katso kuvaa 1.

Koordinaatistoinvariantissa tensorinotaatiossa kantavektorit eivät ole näkyvissä. Tällöin saattaa olla havainnollista indikoida kovariantti tai kontravariantti tensori. Kovarianttia tensoria merkitään yleisesti yläindeksillä \flat ja kontravarianttia tensoria vastaavasti yläindeksillä \sharp , ([12], s. 83), [17, luku 1.4], [19, luku 1.4.3].

Kontinuumin liike ja deformaatiogradientti

Tarkastellaan kontinuumikappaletta \mathcal{B} , joka sijaitsee kolmiulotteisessa Euklidisessa avaruudessa. Tarkastellaan ajanhetkellä $t = t_0$ pisteessä \mathbf{X} sijaitsevan materiaalipisteen P liikettä. Tarkasteluajanhetkellä t se on siirtynyt paikkaan \mathbf{x} . Oletetaan, että materiaalipisteen liikkeen kuvaus voidaan ilmaista vektoriarvoisella jatkuvalla funktiolla χ , joka on materiaalipisteen alkutilan koordinaattien \mathbf{X} ja ajan t funktio, ja että kuvaus on kääntyvä, eli

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad \text{ja} \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Deformaatio- eli muodonmuutosgradientti määritellään kuvauksena joka muuntaa alkuehtokellä pisteeseen \mathbf{X} liitetyn differentiaalisen vektorin $d\mathbf{X}$ lopputilan pisteeseen \mathbf{x} liite-tyksi differentiaalisiksi vektoriksi

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad (2)$$

jossa deformaatiogradientti \mathbf{F} on kuvauksen χ tangentti

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}. \quad (3)$$

Huomaa, että deformaatiogradientin määritelmässä on vain tavallinen osittaisderivaatta eikä kovariantti derivaatta, sillä kuvaus χ ei ole vektori vaan pistekuvaus, katso [17, sivut 47-48]. Tämä voidaan todeta helpoimmin kirjoittamalla deformoituneen tilan vektori (1) muodossa

$$\mathbf{x} = \chi^i(\mathbf{X}, t)\mathbf{g}_i. \quad (4)$$

Mikäli materiaalkoordinaatiston vektori ilmaistaan kannan \mathbf{G}_I ja deformoituneen tilan vektori vastaavasti kannan \mathbf{g}_i avulla, määritelmä (2) saa muodon

$$dx^i \mathbf{g}_i = F^i_J \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J dX^K \mathbf{G}_K = F^i_J dX^J \mathbf{g}_i, \quad (5)$$

jossa on käytetty kontravarianttien kantavektoreiden \mathbf{G}^I määritelmää $\mathbf{G}^I \cdot \mathbf{G}_J = \delta^I_J$. Deformaatiogradientin dyadiesitys on siten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi^i}{\partial X^J} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J = F^i_J \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J. \quad (6)$$

Deformaatiogradientin polaarihajotelma voidaan kirjoittaa muodoissa

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t)\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)\mathbf{R}(\mathbf{X}, t), \quad (7)$$

jossa \mathbf{R} on rotaatiotensori, \mathbf{U} ja \mathbf{V} ovat vastaavasti *oikean-* ja *vasemmanpuoleinen venytystensori* (engl. right- and left stretch tensor). Usein käytetään Euleriaanista vasemmanpuoleista venytystensoria, joka voidaan määrittellä yhdistetyn kuvauksen avulla seuraavasti

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \circ \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (8)$$

Dyadimuodossa polaarihajotelma voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$\mathbf{F} = F^i_J \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J = (R^i_K \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^K)(U^L_J \mathbf{G}_L \otimes \mathbf{G}^J) = R^i_K U^K_J \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J \quad (9)$$

$$= (V^i_k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^k)(R^l_J \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{G}^J) = V^i_k R^k_J \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J. \quad (10)$$

Materiaalisia muodonmuutoksen mittoja

Ehkä tunnetuin Lagrangen esitystavan muodonmuutosmitta on Greenin-Lagrangen³ venymätensori $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$, joka määritellään viiva-alkioiden pituuksien neliöiden erotuksen avulla seuraavasti

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}d\mathbf{X}, \quad (11)$$

jossa viiva alkioiden pituuksien neliöt ovat

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (dx^i \mathbf{g}_i) \cdot (dx_j \mathbf{g}^j) = dx^i dx_j \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = dx^i dx_i, \quad (12)$$

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (dX^I \mathbf{G}_I) \cdot (dX_J \mathbf{G}^J) = dX^I dX_J \mathbf{G}_I \cdot \mathbf{G}^J = dX^I dX_I. \quad (13)$$

³Kutsutaan myös Greenin-St. Venantin venymätensoriksi [24].

Deformaatiogradientin määritelmän (2) ja (5) mukaan

$$d\mathbf{x} = dx^i \mathbf{g}_i = (F_{\cdot K}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^K) \cdot dX^I \mathbf{G}_I = F_{\cdot K}^i dX^I (\mathbf{G}^K \cdot \mathbf{G}_I) \mathbf{g}_i = F_{\cdot K}^i dX^K \mathbf{g}_i, \quad (14)$$

$$d\mathbf{x} = dx_i \mathbf{g}^i = (F_i^{\cdot K} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_K) \cdot dX_I \mathbf{G}^I = F_i^{\cdot K} dX_I (\mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}^I) \mathbf{g}^i = F_i^{\cdot K} dX_K \mathbf{g}^i. \quad (15)$$

Täten Greenin-Lagrangen venymätensorin lausekkeeksi saadaan

$$\mathbf{E} = E_K^L \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}_L = \frac{1}{2} (F_{\cdot K}^i F_i^{\cdot L} - \delta_K^L) \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}_L. \quad (16)$$

Käyttämällä alku- ja lopputilan kovariantteja metrisiä tensoreita

$$\mathbf{G}^b = G_{IJ} \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J, \quad \mathbf{g}^b = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (17)$$

saadaan venymätensorin kovariantiksi muodoksi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^b &= E_{KL} \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L = \frac{1}{2} (F_{\cdot K}^i F_i^{\cdot L} G_{LM} - G_{KM}) \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^M \\ &= \frac{1}{2} (F_{\cdot K}^i g_{ij} F_L^j - G_{KL}) \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L. \end{aligned} \quad (18)$$

Koordinaatistoriippumattomin merkinnöin kovariantti Greenin-Lagrangen venymätensori (18) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{E}^b = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}^b). \quad (19)$$

Mikäli deformoituneen tilan kantana käytetään konvektiivista kantaa \mathbf{g}_K , saa deformaatiogradientti yksinkertaisen muodon $\mathbf{F} = \delta_L^K \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{G}^L$, jolloin Greenin-Lagrangen venymätensori yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{E}^b = \frac{1}{2} (g_{KL} - G_{KL}) \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L. \quad (20)$$

Termiä

$$\mathbf{C}^b = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (21)$$

kutsutaan oikeanpuoleiseksi Cauchyn-Greenin muodonmuutostensoriksi ja sen käyttö suurten muodonmuutosten konstitutiivisissa malleissa on yleisempää kuin Greenin-Lagrangen venymätensorin⁴.

Avaruudellisia muodonmuutosmittoja

Deformaatiota voidaan tarkastella myös deformoituneesta tilasta käsin yhtälön (2) osoittamalla tavalla. Yhtälöstä (2) seuraa

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}, \quad (22)$$

jossa \mathbf{F}^{-1} on deformaatiogradientin käänteistensori

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial X^K}{\partial x^i} \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{g}^i. \quad (23)$$

Viiva-alkion $d\mathbf{X}$ (22) neliö saa nyt muodon

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x}. \quad (24)$$

⁴Tässä esityksessä käytetään englanninkielisille termeille *strain*, *deformation*, *stretch* suomenkielisiä vastineita *venymä*, *muodonmuutos* ja *venytys*.

Tensoria $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ nimitetään *Cauchyn-Greenin vasemmanpuoleiseksi muodonmuutos-tensoriksi*. Viiva-alkioiden pituuksien neliöiden erotus (11) saa nyt muodon

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} d\mathbf{x} \quad (25)$$

jossa tensori \mathbf{e} on *Almansin venymätensori*, (myös *Almansin-Eulerin* tai *Almansin-Hamelin venymätensori*)

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2}[g_{ij} - (F^{-1})^K_{.i} G_{KL} (F^{-1})^L_{.j}] \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (26)$$

Konvektoituneita materiaalkoordinaatteja käytettäessä Almansin tensori on

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(g_{KL} - G_{KL}) \mathbf{g}^K \otimes \mathbf{g}^L. \quad (27)$$

Cauchyn-Greenin muodonmuutostensorit voidaan kirjoittaa muotoihin

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (28)$$

Tällöin voidaan todeta Greenin-Lagrangen ja Almansin venymätensoreiden väliset yhteydet

$$\mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} = \mathbf{E}. \quad (29)$$

Polaarihajoittelman perusteella nähdään, että

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{R}^T \mathbf{v}^2 \mathbf{R} \quad (30)$$

ja että⁵

$$\mathbf{b} = \mathbf{R} \mathbf{U}^2 \mathbf{R}^T = \mathbf{v}^2. \quad (31)$$

Yhtälöistä (30) ja (31) nähdään, että venytystensorit \mathbf{U} ja \mathbf{v} ovat lineaarisia venymän mittoja ja siten ns. insinöörivenymän $(l - l_0)/l_0$ kaltaisia.

Yleistettyjä muodonmuutoksen mittoja

Muodonmuutostensorit \mathbf{C} , \mathbf{U} , \mathbf{b} ja \mathbf{v} ovat positiivisesti definiittejä symmetrisiä tensoreita, joten niiden ominaisarvot ("päävenymät") ovat positiivisia. Merkitään \mathbf{C} :n päävenymiä λ_K^2 :lla ja niitä vastaavia ortonormeerattuja ominaisvektoreita (pääsuuntia) $\hat{\mathbf{N}}_K$:lla. Yhtälöiden (30) ja (31) perusteella voidaan päätellä, että \mathbf{U} :n ja \mathbf{v} :n ominaisarvot ovat λ_K . Lisäksi nähdään, että \mathbf{U} :lla on samat ominaisvektorit kuin \mathbf{C} :llä ja että \mathbf{v} :n ominaisvektorit ovat $\hat{\mathbf{n}}_k = \mathbf{R} \hat{\mathbf{N}}_K$.

Yleinen venymämitan muoto esitetään seuraavasti:

$$\mathbf{E} = f(\mathbf{U}) = \sum_{K=1}^3 f(\lambda_K) \hat{\mathbf{N}}_K \otimes \hat{\mathbf{N}}_K, \quad (32)$$

$$\mathbf{e} = f(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) \hat{\mathbf{n}}_k \otimes \hat{\mathbf{n}}_k. \quad (33)$$

⁵Vasemmanpuoleinen venytystensori \mathbf{b}^\natural on kontravariantti tensori.

Venytystensorit \mathbf{U} ja \mathbf{v} ovat Lagrangen ja Eulerin esitystapojen mukaiset venymät. Funktiota f nimitetään skaalausfunktiksi, joka on monotonisesti kasvava ja toteuttaa ehdot $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$. Seth [21] ja Hill [11] ovat esittäneet skaalausfunktiksi

$$f(\lambda) = \frac{1}{m}(\lambda^m - 1), \quad m \neq 0 \quad \text{ja} \quad f(\lambda) = \ln \lambda, \quad m = 0. \quad (34)$$

Tätä skaalausfunktia käyttäen kaavat (32) ja (33) johtavat muotoihin

$$\mathbf{E}^{(m)} = \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}), \quad (35)$$

$$\mathbf{e}^{(m)} = \frac{1}{m}(\mathbf{v}^m - \mathbf{i}). \quad (36)$$

Tämän mukaan Lagrangen esitystavan mukaiset venymämitat ovat

$$\text{Lagrangen venymä:} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \quad (37)$$

$$\text{Almansin venymä:} \quad \mathbf{e} = \mathbf{R}\mathbf{E}^{(-2)}\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{E}^{(-2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-2}), \quad (38)$$

$$\text{Biot'n venymä:} \quad \mathbf{U}_B = \mathbf{U} - \mathbf{I} = \mathbf{E}^{(1)}, \quad (39)$$

$$\text{Henckyn venymä:} \quad \mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U} = \sum_{K=1}^3 (\ln \lambda_K) \hat{\mathbf{N}}_K \otimes \hat{\mathbf{N}}_K. \quad (40)$$

Uusi venymämitta, *Henckyn venymä* $\mathbf{E}^{(0)}$, on siis *logaritminen* vastaten yksidimensioista muotoa $e_{\log} = \ln(l/l_0)$. Eulerin esitystavassa edellä esitetyt venymät ovat

$$\text{Lagrangen venymä:} \quad \mathbf{E} = \mathbf{R}^T \mathbf{e}^{(2)} \mathbf{R}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^2 - \mathbf{i}), \quad (41)$$

$$\text{Almansin venymä:} \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{(-2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{v}^{-2}), \quad (42)$$

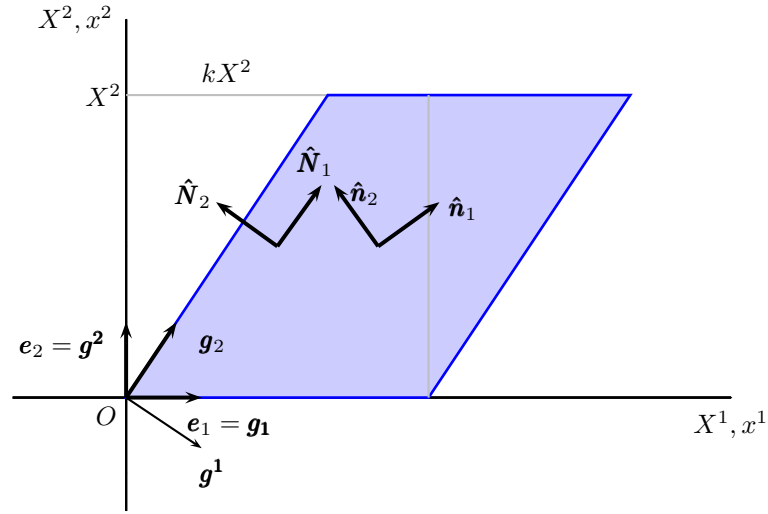
$$\text{Biot'n venymä:} \quad \mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{v} - \mathbf{i} = \mathbf{R}\mathbf{U}_B\mathbf{R}^T, \quad (43)$$

$$\text{Henckyn venymä:} \quad \mathbf{e}^{(0)} = \ln \mathbf{v} = \sum_{k=1}^3 (\ln \lambda_k) \hat{\mathbf{n}}_k \otimes \hat{\mathbf{n}}_k = \mathbf{R}\mathbf{E}^{(0)}\mathbf{R}^T. \quad (44)$$

Logaritmista venymää kutsutaan myös luonnolliseksi tai todelliseksi venymäksi. Tämä johtunee siitä, että vetokokeessa todellisen jännityksen σ ja venymänopeuden \dot{e}_{\log} tulo $\sigma \dot{e}_{\log}$ on jännityksen todellinen teho. Logaritminen muodonmuutostensori on käyttökelpoinen konstitutiivisten mallien yhteydessä, sillä se voidaan jakaa additiivisesti tilavuudenmuutos- ja deviatoriseen osaan.

Biot'n venymämitta on "kiertymäneutraloitu insinöörivenymä", eli se yhtyy infinitesimaalisen venymämitan määrittelyyn, kun materiaali ei kierry, jolloin $\mathbf{R} = \mathbf{I}^6$. Biot'n venymää tai sen kaltaisia venymämittoja käytetään dimensioreduktiomalleissa kuten palkkien ja kuorten suurten siirtymien formulaatioissa, joissa Greenin-Lagrangen tapaisten muodonmuutosmittojen käyttö johtaa ristiriitaan kinemaattisten otaksumien kanssa. Tällaiset mallit tunnetaan Cosseratin ja Reissnerin nimillä [1, luku VIII]. Katso myös esimerkkiä luvussa *Geometrisesti tarkka tasopalkkimalli* sivulla 96.

⁶Biot'n venymätensorille on käytetty myös nimeä Cauchyn venymätensori [14, 21].



Kuva 2. Yksinkertainen leikkaus ($k = 2/3$, $\theta = -18,4^\circ$).

Esimerkkejä

Yksinkertainen leikkaus

Tarkastellaan kuvassa 2 havainnollistettua muodonmuutosta, jota kuvaavat yhtälöt

$$x^1 = X^1 + kX^2, \quad x^2 = X^2, \quad x^3 = X^3. \quad (45)$$

Kysymyksessä on X^1X^2 -tasossa tapahtuva deformaatio, joten käsitellään sitä kaksidimensioisena. Valitaan suorakulmainen karteesinen koordinaatisto ja siihen kuuluva ortonormeerattu kanta sekä alku- että lopputilan kannaksi.

Deformaatiogradientin lauseke on

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + k\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (46)$$

Konvektiivisen koordinaatiston kovariantit kantavektorit ovat

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{g}_2 = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2. \quad (47)$$

Kontravariantit vektorit ratkaistaan helposti yhtälöstä $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$, josta nähdään, että ne ovat

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{e}^1 - k\mathbf{e}^2, \quad \mathbf{g}^2 = \mathbf{e}^2. \quad (48)$$

Cauchyn-Greenin oikeanpuoleinen muodonmuutostensori on

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + k\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + k\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 + (1 + k^2)\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (49)$$

Greenin-Lagrangen venymätensori on silloin

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = (k/2)(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1) + (k^2/2)\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (50)$$

Cauchyn-Greenin vasemmanpuoleinen muodonmuutostensori on

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = (1 + k^2)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (51)$$

Almansin venymätensori on

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{b}^{-1}) = (k/2)(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1) - (k^2/2)\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (52)$$

Tasotapauksessa rotaatiotensori on muotoa

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \sin \theta (-\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1) + \cos \theta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2, \quad (53)$$

jossa θ on kiertymäkulma x_3 -akselin ympäri. Tällöin venytystensori \mathbf{U} on

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{R}^T \mathbf{F} \\ &= \cos \theta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + (k \cos \theta + \sin \theta) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 - \sin \theta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1 + (\cos \theta - k \sin \theta) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Koska venytystensori \mathbf{U} on symmetrinen, saadaan ehto $k \cos \theta + \sin \theta = -\sin \theta$, josta seuraa $\tan \theta = -k/2$. Venytystensorin \mathbf{U} lauseke saa silloin muodon

$$\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 - \sin \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1) + [(1 + \sin^2 \theta) / \cos \theta] \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (55)$$

Trigonometrinen suureiden paikalle voidaan sijoittaa niiden lausekkeet k :n avulla lausuttuna

$$\sin \theta = -(k/2) / \sqrt{1 + (k/2)^2}, \quad \cos \theta = 1 / \sqrt{1 + (k/2)^2}. \quad (56)$$

Vastaavalla tavalla saadaan venytystensori \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = [(1 + \sin^2 \theta) / \cos \theta] \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 - \sin \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1) + \cos \theta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (57)$$

Logaritmissen venymän määrittämiseksi on laskettava aluksi muodonmuutostensorin \mathbf{C} ominaisarvot ja ominaisvektorit. Lausekkeen (49) avulla saadaan yhtälö

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 & k \\ k & 1 + k^2 - \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{N}_1 \\ \hat{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

josta seuraa yhtälö

$$\lambda^4 - (2 + k^2)\lambda^2 + 1 = 0, \quad \text{josta saadaan} \quad \lambda_{1,2}^2 = 1 + \frac{k^2}{2} \pm k \sqrt{1 + (k/2)^2} \quad (59)$$

ja edelleen

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + (k/2)^2} + k/2, \quad \lambda_2 = \sqrt{1 + (k/2)^2} - k/2 = \lambda_1^{-1}. \quad (60)$$

Ominaisvektoreiksi saadaan yhtälöstä (58)

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = a \mathbf{e}_1 + b \mathbf{e}_2, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 = -b \mathbf{e}_1 + a \mathbf{e}_2, \quad (61)$$

jossa lyhenteet a ja b ovat

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - (k/2) / \sqrt{1 + (k/2)^2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (k/2) / \sqrt{1 + (k/2)^2}}. \quad (62)$$

Jos ominaisarvot ja ominaisvektorit lausutaan kulman θ funktioina, saadaan

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \lambda_1^{-1} \quad (63)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sin \theta}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sin \theta}. \quad (64)$$

Silloin logaritminen venymä saa muodon

$$\begin{aligned}\ln \mathbf{U} &= (\ln \lambda_1)(\hat{\mathbf{N}}_1 \otimes \hat{\mathbf{N}}_1 - \hat{\mathbf{N}}_2 \otimes \hat{\mathbf{N}}_2) \\ &= (\ln \lambda_1) [\sin \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \cos \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)].\end{aligned}\quad (65)$$

Ominaisvektorit antavat päävenymien suunnat. Lagrangen mukaiset suunnat X^1 -akselin suhteen ovat

$$\cos \psi_1^L = \hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sin \theta}, \quad \cos \psi_2^L = \hat{\mathbf{N}}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sin \theta}.\quad (66)$$

Vastaavasti Eulerin mukaiset päävenymäsuunnat ovat

$$\cos \psi_1^E = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sin \theta}, \quad \cos \psi_2^E = \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sin \theta}.\quad (67)$$

Suoran palkin taivutus tasossa

Puhtaassa taivutuksessa alkutilassa suora sauva deformoituu ympyränkaaren muotoiseksi. Palkin akselin venymättömyyden takia keskuskulma on $\theta = X^1/R$, jossa R on akselin kaarevuussäde. Tarkasteltavan ainepisteen paikkavektorit alku ja lopputilassa ovat, katso kuvaa 3

$$\mathbf{X} = X^K \mathbf{e}_K = X^1 \mathbf{e}_1 + X^2 \mathbf{e}_2,\quad (68)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= R \sin(X^1/R) \mathbf{e}_1 + R(1 - \cos(X^1/R)) \mathbf{e}_2 - X^2 \sin(X^1/R) \mathbf{e}_1 + X^2 \cos(X^1/R) \mathbf{e}_2 \\ &= (R - X^2) \sin(X^1/R) \mathbf{e}_1 + [R + (X^2 - R) \cos(X^1/R)] \mathbf{e}_2.\end{aligned}\quad (69)$$

Alkutilan kantavektorit deformoituvat konvektiivisen koordinaatiston kantavektoreiksi \mathbf{g}_K , jotka voidaan lausua myös karteesisen alkutilan kannan \mathbf{e}_K avulla seuraavasti:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^1} = (1 - X^2/R) \cos(X^1/R) \mathbf{e}_1 + (1 - X^2/R) \sin(X^1/R) \mathbf{e}_2,\quad (70)$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^2} = -\sin(X^1/R) \mathbf{e}_1 + \cos(X^1/R) \mathbf{e}_2.\quad (71)$$

Kontravariantit kantavektorit \mathbf{g}^K voidaan määrittää ehdosta $\mathbf{g}_K \cdot \mathbf{g}^L = \delta_K^L$. Deformaatio-gradientin lauseke on

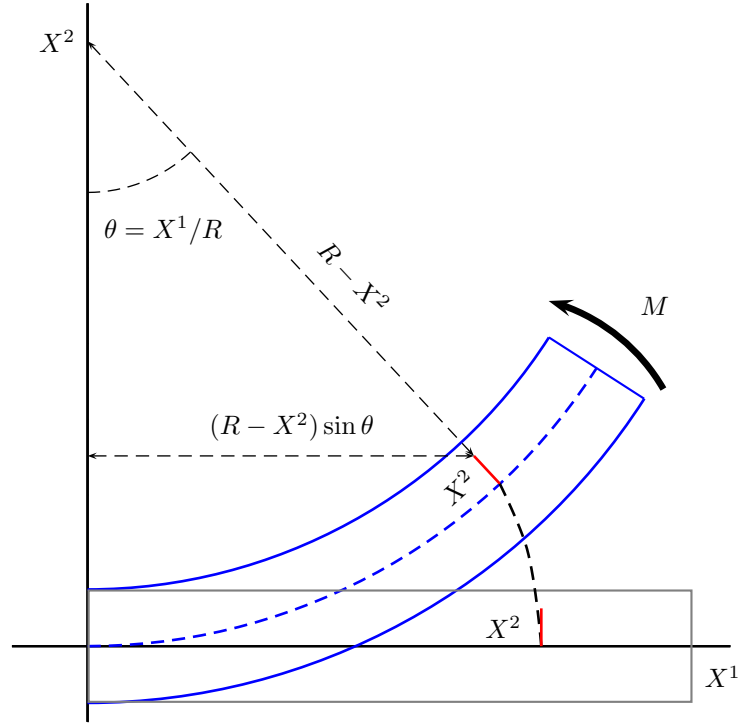
$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \delta_{.L}^K \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{e}^L = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{e}^2 \\ &= [(1 - X^2/R) \cos(X^1/R) \mathbf{e}_1 + (1 - X^2/R) \sin(X^1/R) \mathbf{e}_2] \otimes \mathbf{e}^1 + \\ &\quad + [-\sin(X^1/R) \mathbf{e}_1 + \cos(X^1/R) \mathbf{e}_2] \otimes \mathbf{e}^2 \\ &= (1 - X^2/R) \cos(X^1/R) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 - \sin(X^1/R) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \\ &\quad + (1 - X^2/R) \sin(X^1/R) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1 + \cos(X^1/R) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2.\end{aligned}\quad (72)$$

Deformaatio-gradientin \mathbf{F} matriisi on siten

$$F = \begin{bmatrix} (1 - X^2/R) \cos(X^1/R) & -\sin(X^1/R) \\ (1 - X^2/R) \sin(X^1/R) & \cos(X^1/R) \end{bmatrix}.\quad (73)$$

Oikeanpuoleinen Cauchyn-Greenin muodonmuutostensorin $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ matriisi on

$$C = \begin{bmatrix} (1 - X^2/R)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad (74)$$



Kuva 3. Palkin puhdas taivutus tasossa.

josta seuraa Greenin-Lagrangen muodonmuutostensoriksi

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = E_{11}\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1, \quad (75)$$

jossa

$$E_{11} = -X^2/R + \frac{1}{2}(X^2/R)^2. \quad (76)$$

Mikäli deformaatiogradientille käytetään konvektiivista esitysmuotoa $\mathbf{F} = \delta_{KL}^K \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{e}^L$, Greenin-Lagrangen muodonmuutostensori saa muodon $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(g_{KL} - \delta_{KL})\mathbf{e}^K \otimes \mathbf{e}^L$, jossa metrinen tensori on $\mathbf{g} = g_{KL}\mathbf{g}^K \otimes \mathbf{g}^L$, ja jonka matriisi on sama kuin \mathbf{C} :n matriisi (74)

$$g = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - X^2/R)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C. \quad (77)$$

Huomaa, että tulos on sopusoinnussa napakoordinaatiston (r, θ) metrisen tensorin kanssa, jonka nolasta eroavat alkiot ovat

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2. \quad (78)$$

Biot'n ja logaritmisen muodonmuutostensorin ainoaksi nolasta eroavaksi termiksi saadaan

$$E_{11}^{(1)} = -X^2/R, \quad E_{11}^{(0)} = \ln(1 - X^2/R). \quad (79)$$

Huomaa, että Biot'n venymä on lineaarinen koordinaatin X^2 -suhteen, joten sen jakauma palkin korkeuden suhteen on sopusoinnussa palkkimallien yleisesti käytetyn siirtymäotakuman kanssa.

Deformaatiogradientin käänteistensori on

$$\mathbf{F}^{-1} = (1 - X^2/R)^{-1}(\cos \theta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1) - \sin \theta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (80)$$

Sen avulla Almansin venymätensoriksi saadaan

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} = E_{11} \mathbf{g}^1 \otimes \mathbf{g}^1. \quad (81)$$

Yhtälöiden (70) ja (71) perusteella on helppo nähdä, että

$$\mathbf{g}^1 = (1 - X^2/R)^{-1}(\cos \theta \mathbf{e}^1 + \sin \theta \mathbf{e}^2), \quad \mathbf{g}^2 = -\sin \theta \mathbf{e}^1 + \cos \theta \mathbf{e}^2. \quad (82)$$

Almansin venymätensoriksi (81) saadaan silloin

$$\mathbf{e} = E_{11}(1 - X^2/R)^{-2}[\cos^2 \theta \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \cos \theta \sin \theta (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1) + \sin^2 \theta \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2]. \quad (83)$$

Tähän on loogista sijoittaa lopputilan koordinaatit x^1 ja x^2 , jolloin

$$1 - X^2/R = \sqrt{(x^1/R)^2 + (1 - x^2/R)^2}, \quad (84)$$

$$\cos \theta = \frac{1 - x^2/R}{\sqrt{(x^1/R)^2 + (1 - x^2/R)^2}}, \quad (85)$$

$$\sin \theta = \frac{x^1/R}{\sqrt{(x^1/R)^2 + (1 - x^2/R)^2}} \quad (86)$$

ja E_{11} on lausekkeen (76) mukainen.

Venytystensorin \mathbf{U} määrittämiseksi todetaan aluksi muodonmuutostensorin \mathbf{C} lausekkeesta (74) sen ominaisarvot $\lambda_1 = 1 - X^2/R$, $\lambda_2 = 1$ ja ominaisvektorit $\hat{\mathbf{N}}_1 = \mathbf{e}_1$, $\hat{\mathbf{N}}_2 = \mathbf{e}_2$. Venytystensori \mathbf{U} on silloin

$$\mathbf{U} = (1 - X^2/R) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (87)$$

Rotaatiotensori on

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \sin \theta (-\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1) + \cos \theta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2. \quad (88)$$

Sillä kertomalla saadaan venytystensori

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 \\ &- (X^2/R)[\cos^2 \theta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \sin \theta \cos \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1) + \sin^2 \theta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2]. \end{aligned} \quad (89)$$

Kuten Almansin venymässä tähänkin on loogista sijoittaa lopputilan koordinaatit x^1 ja x^2 . Sama tulos saadaan sijoittamalla ominaisarvot ja ominaisvektorit kaavoihin (33) ja (42)

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{i} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k \hat{\mathbf{n}}_k \otimes \hat{\mathbf{n}}_k. \quad (90)$$

Henckyn venymät saadaan samaan tapaan sijoittamalla ominaisarvot ja ominaisvektorit kaavoihin (40) ja (44).

Geometrisesti tarkka tasopalkkimalli

Geometrisesti lineaarisessa tapauksessa keskimääräisen poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioonottavaa palkkimallia kutsutaan Timoshenkon palkkimalliksi, jonka geometrisesti epälineaarinen yleistys tunnetaan Reissnerin palkkimallin nimellä. Siinä paikalliset muodonmuutokset määritellään Biot'n muodonmuutoksen kaltaisella venymämäärittelyllä, sillä esimerkiksi Greenin-Lagrangen muodonmuutoksen käyttö johtaa ristiriitaan palkkimallin kinemaattisten oletusten kanssa. Tunnetusti keskimääräisen poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioonottava palkkimalli perustuu seuraaviin oletuksiin: (i) palkin poikkileikkaukset säilyvät tasoina ja (ii) poikkileikkaussäikeet, jotka ovat

deformoitumattomassa alkutilassa kohtisuorassa palkin akselia vastaan eivät veny deformaation aikana. Nämä oletukset voidaan toteuttaa olettamalla siirtymille esitys

$$u^1(X^1, X^2) = u_0^1(X^1) - X^2 \sin \theta(X^1), \quad (91)$$

$$u^2(X^1, X^2) = u_0^2(X^1) - X^2(1 - \cos \theta(X^1)), \quad (92)$$

jossa $\theta(X^1)$ on poikkileikkaustason kiertymäkulma. Deformaatiogradientin matriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial X^1} & \frac{\partial u^1}{\partial X^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial X^1} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial X^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{du_0^1}{dX^1} - X^2 \cos \theta \frac{d\theta}{dX^1} & -\sin \theta \\ \frac{du_0^2}{dX^1} - X^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dX^1} & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Tasotapauksessa deformaatiogradientin polaarihajotelma voidaan laskea helposti kaavoilla [12, sivu 88]

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{I_1(\mathbf{C}) + 2J(\mathbf{C})}} [\mathbf{C} + J(\mathbf{C})\mathbf{I}], \quad (94)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}, \quad (95)$$

jossa $I_1(\mathbf{C})$ ja $J(\mathbf{C})$ ovat oikeanpuoleisen Cauchyn-Greenin venymätensoren invariantit $I_1(\mathbf{C}) = C_{11} + C_{22}$ ja $J(\mathbf{C}) = \sqrt{C_{11}C_{22}}$.

Palkkimallissa polaarihajotelmaa käyttökelpoisempi jako on

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{U}}, \quad \text{jossa} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (96)$$

josta saadaan

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} (1 + (u_0^1)') \cos \theta + (u_0^2)' \sin \theta - X^2 \theta' & 0 \\ -(1 + (u_0^1)') \sin \theta + (u_0^2)' \cos \theta & 1 \end{bmatrix}, \quad (97)$$

jossa on merkitty $()' = d()/dX^1$. Tästä saadaan Biot'n venymän (39) kaltaiselle venymämitalle $\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}$ lauseke

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} (1 + (u_0^1)') \cos \theta + (u_0^2)' \sin \theta - 1 - X^2 \theta' & 0 \\ -(1 + (u_0^1)') \sin \theta + (u_0^2)' \cos \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda + X^2 K & 0 \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad (98)$$

jossa

$$\Lambda = (1 + (u_0^1)') \cos \theta + (u_0^2)' \sin \theta - 1, \quad (99)$$

$$\Gamma = -(1 + (u_0^1)') \sin \theta + (u_0^2)' \cos \theta, \quad (100)$$

$$K = -\theta'. \quad (101)$$

Edellä olevissa lausekkeissa Λ on palkin keskiviivan venymä, Γ poikkileikkauksen liukuma ja suuretta K voitaneen kutsua palkin keskiviivan käyristymäksi⁷

Lopuksi

Epälinearisessa kontinuumimekaniikassa muodonmuutoksen mitalle voidaan määritellä mielivaltaisen monta suuretta. Artikkelin tarkoituksena on selvittää joidenkin useimmin käytettyjen muodonmuutosmittojen perusteita ja millaisissa tehtävissä niiden käyttö tuo etua muihin muodonmuutosmittoihin verrattuna.

⁷Tarkkaan ottaen K on keskiviivan käyristymä vain kun $\Gamma = 0$.

Viitteet

- [1] S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer-Verlag, 1. painos 1995.
- [2] R. Aris. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice Hall, 1962, Dover 1989.
- [3] R.M. Bowen. *Introduction to Continuum Mechanics for Engineers*. Plenum Press, 1989.
- [4] P. Chadwick. *Continuum Mechanics – Concise Theory and Problems*. George Allen & Unwin, 1967, (Dover 1999).
- [5] T.C. Doyle, J.L. Ericksen. Nonlinear elasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 4:1956, 53–115.
- [6] A.C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, 1962.
- [7] W. Flügge, *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer, 1972.
- [8] Y.C. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, 1. painos 1965.
- [9] A.E. Green, W. Zerna. *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press, 2. painos, 1968, (Dover 1992).
- [10] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer, 2000.
- [11] R. Hill. Aspects of Invariances in Solid Mechanics. Teoksessa *Advances in Applied Mechanics*, ed. Chia-Shun Yih, Vol.18, s. 1-75. Academic Press, 1978.
- [12] G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, 1. painos, 2000.
- [13] W. Jaunzemis. *Continuum Mechanics*. Macmillan, New York, 1967.
- [14] Z. Karni, M. Reiner. The generalized measure of deformation. *Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics*. M. Reiner, D. Abir (ed.), IUTAM Symposium, Haifa, Israel, 23-27.4.1962, Pergamon-Press 1964.
- [15] D.C. Leigh. *Nonlinear Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, 1968.
- [16] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [17] J.E. Marsden, T.J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, 1983, (Dover 1994).
- [18] M. Mikkola. Opintojakson 7.54.190, Rakenteiden analyysin erikoiskysymyksiä luentomoniste (TKK), 1982.
- [19] R.W. Ogden. *Non-linear Elastic Deformations*. Ellis Harwood Ltd., 1984, (Dover, 1997).
- [20] E.-M. Salonen. *Mekaniikan käsitteitä ja kaavoja*. TKK, Mekaniikan laboratorion opetusmoniste No 6, 1987.
- [21] B.R. Seth. Generalized strain measure with applications to physical problems. *Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics*. M. Reiner, D. Abir (ed.), IUTAM Symposium, Haifa, Israel, 23-27.4.1962, Pergamon-Press 1964.
- [22] A.J.M. Spencer. *Continuum Mechanics*. Longman, 1980, (Dover 2004).

- [23] E.B. Tadmor, R.E. Miller, R.S. Elliot. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [24] C. Truesdell, W. Noll. *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 3. painos, 2004.

Juha Hartikainen, Jari Mäkinen
Rakennustekniikan laitos
Tampereen teknillinen yliopisto
PL 600, 33101 Tampere
`juha.hartikainen@tut.fi`, `jari.m.makinen@tut.fi`

Reijo Kouhia
Kone- ja tuotantotekniikan laitos
Tampereen teknillinen yliopisto
PL 589, 33101 Tampere
`reijo.kouhia@tut.fi`

Martti Mikkola
Aalto-yliopisto
PL 12100, 00076 Aalto
`martti.mikkola@aalto.fi`