

Jussi Blomgren

LUOTTORISKILLISEN JOUKKOVELKA- KIRJALAINAPORTFOLION RISKIN MTTAAMINEN VAKUUTUSYHTIÖSSÄ

Diplomityö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Prof. Juho Kanninen
Tarkastaja: Prof. Teemu Laine
Lokakuu 2020

TIIVISTELMÄ

Jussi Blomgren: Luottoriskillisen joukkovelkakirjalainaportfolion riskin mittaaminen vakuutusyhtiössä
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Tuotantotalous
Lokakuu 2020

Diplomityön tavoitteena oli luoda käytännöllinen ja yksinkertainen malli vakuutusyhtiön luottoriskillisen joukkovelkakirjalainaportfolion riskin mittaamiseen tietyllä luottamustasolla ja vuoden aikahorisontilla. Työssä esitellään kirjallisuuteen perustuen riskifaktorit, joille luottoriskillinen joukkovelkakirjalainaportfolio altistuu. Tunnistettuja riskifaktoreita olivat riskittömän koron muutokset, riskipreemioiden muutokset, jotka ovat luonteeltaan systemaattisia sekä yksittäisiin arvopapereihin liittyvä absoluuttinen luottoriski. Riskittömän koron muutoksille sekä riskipreemioiden muutoksille löydettiin kirjallisuudesta stokastiset prosessit ja ne kalibroitiin havaitulla markkinadatalla. Lisäksi otettiin huomioon prosessien markkinoilta havaittu korrelaatio. Luottoriskille puolestaan löydettiin yleisesti hyväksytty ja analyttinen riskikaava.

Lopulta diplomityössä luotiin Value-at-Risk mallin mukainen riskimalli hyödyntämällä stokastisten prosessien Monte Carlo simulointia ja luottoriskin analyttistä kaavaa. Riskimallia sovellettiin käytäntöön esimerkkiportfoliolle ja tuloksia vertailtiin regulatorisen SCR mallin antamiin tuloksiin. Lisäksi mallille suoritettiin erinäisiä herkkyysoanalyseja stokastisten prosessien estimoitujen parametrien sekä esimerkkiportfolion suhteen. Mallin antama riski esimerkkiportfoliolle oli linjassa regulatorisen SCR mallin kanssa, mutta mallin todettiin olevan melko herkkä stokastisten prosessien parametriestimaattien muutoksille.

Esitelty riskimalli on monilta osin käytännön syistä yksinkertaistettu ja yksinkertaistuksia sekä mallin kehitystarpeita on esitelty diplomityön johtopäätöksissä.

Avainsanat: Value-at-Risk, luottoriskilliset joukkovelkakirjalainat, CIR, Monte Carlo, Basel II

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck –ohjelmalla.

ABSTRACT

Jussi Blomgren: Risk measurement of defaultable bond portfolio in insurance company
Master of Science Thesis
Tampere University
Industrial engineering and management
October 2020

The aim of this thesis was to create a practical and simple model to measure the risk of a defaultable bond portfolio in insurance company at a certain confidence level and one-year time horizon. Risk factors of a defaultable bond portfolio are introduced based on the literature in this thesis. Recognized risk factors include changes in risk free interest rate, changes in credit spreads that are mainly systematic of nature and the absolute credit risk of single securities. Stochastic processes for the changes in risk-free interest rates and credit spreads are introduced from literature and they were calibrated with observed market data. The correlation structure of risk-free rate and credit spreads was also observed and considered. Closed form formula for measuring absolute credit risk was found from literature.

Value-at-Risk based risk model was introduced in the thesis by applying Monte Carlo simulation of the stochastic processes and closed form formula of absolute credit risk. Risk model created was applied to practice with hypothetical defaultable bond portfolio and the results were compared to regulatory SCR model results. Various sensitivity analysis of the parameters of stochastic processes and of the hypothetical portfolio were conducted for the risk model. The risk measure of the hypothetical portfolio given by the model is well in line with the regulatory SCR. On the other hand, the model was found to be quite sensitive for the changes in parameter estimates of the stochastic processes.

Simplifications for practical reasons were used in the risk model in many respects and the simplifications and restrictions are widely considered in the conclusions together with further development needs of the model.

Keywords: Value-at-Risk, defaultable bonds, CIR, Monte Carlo, Basel II

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Diplomityöprosessi on ollut haastava ja mielenkiintoinen. Olen päässyt syventämään tietotaitojani monella osa-alueella sekä soveltamaan oppimiani tietoja ja taitoja käytäntöön. Haluan erityisesti kiittää perhettäni tuesta sekä nykyistä työnantajaani ja sen edustajia positiivisesta suhtautumisesta diplomityöprosessiin. Lisäksi haluan kiittää professori Juho Kanniaista ja professori Teemu Lainetta työn ohjauksesta.

Helsingissä, 30.9.2020

Jussi Blomgren

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO	1
2. RISKIN MITTAAMINEN	3
2.1 Value-at-Risk	3
2.2 Expected shortfall (CVaR).....	5
3. YRITYSTEN JOUKKOVELKAKIRJALAINOJEN RISKIFAKTORIT	6
4. RISKITTÖMÄT KOROT	9
4.1 Vasicek 1977	10
4.2 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 1985	11
5. RISKILLISET KOROT	13
5.1 Luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen hinnoittelumallit	13
5.2 CIR intensiteettimalli	14
6. LUOTTORISKIN MITTAAMINEN BASEL KEHIKOSSA	16
7. JVK PORTFOLION RISKI	19
8. PARAMETRIEN ESTIMOINTIMENETELMÄT	23
8.1 CIR mallin parametrien estimointi.....	23
8.2 Vasicekin mallin parametrien estimointi.....	25
8.3 Parametriestimoinnin virhetarkastelu	26
8.4 Stokastisten prosessien väliset korrelaatiot.....	27
9. PARAMETRIEN ESTIMOINTI HISTORIAALLISELLA DATALLA.....	28
9.1 Estimointiaineisto	28
9.2 Korrelaatiot	30
9.3 Riskittömän koron prosessi	33
9.3.1 Vasicek	33
9.3.2 CIR	35
9.4 Riskipreemion prosessi	37
10. VAR MALLIN TULOKSET	40
10.1 Stokastisten prosessien simulaatio	40
10.2 Esimerkkiportfolion VaR.....	42
10.3 VaR mallin herkkyytarkastelut	45
11. JOHTOPÄÄTÖKSET	50

LYHENTEET JA MERKINNÄT

VaR	engl. Value-at-Risk, rahallinen tappion määrä tietyllä aikahorisontilla, joka ylittyy tietyllä todennäköisyydellä
CVaR	engl. Conditional Value-at-Risk tai Expected Shortfall, Expected shortfall luottamustasolla $\alpha\%$ on portfolion odotettu tappio silloin, kun portfolion tappio koostuu $\alpha\%$ ylittävistä tappioista tai huonoimmista lopputulemista
ES	sama kuin CVaR
CIR	lyhyen korkoprosessin mallintamiseen käytetty stokastinen malli, joka on nimetty kehittäjiensä Cox-Ingersoll-Ross mukaan
EL	engl. Expected Loss, odotettu luottotappio Basel II mallissa
UL	engl. Unexpected Loss, odottamaton luottotappio Basel II mallissa
IFRS 9	Kansainvälinen tilinpäätösstandardi rahoitusinstrumenttien käsitteeseen kirjauksissa
JVK	Joukkovelkakirjalaina
PNS	Pienimmän neliösumman menetelmä
MLE	engl. Maximum Likelihood Estimation, suurimman uskottavuuden menetelmä
SCR	engl. Solvency Capital Requirement, vakuutusyhtiöiden Solvenssi II sääntelykehikon mukainen pääomavaade. Laskettu vuoden aikahorisontilla 99,5% luottamustasolla

1. JOHDANTO

Vakuutusyhtiöiden toiminta perustuu vakuutettavien riskien kantamiseen maksua vastaan. On vakuutuksen ottajan ja edunsaajan intressien mukaista, että mahdollisen vakuutustapahtuman sattuessa vakuutusyhtiö myös kykenee maksamaan vakuutussopimuksen mukaisen korvauksen edunsaajalle. Vakuutussopimuksille on myös luonteenomaista, että vakuutusmaksut maksetaan vakuutusyhtiölle ajallisesti huomattavastikin mahdollisia vakuutustapahtumista aiheutuvia korvauksia aiemmin. Näin ollen vakuutusyhtiöiden taseeseen kertyy huomattava määrä varallisuutta eli vakuutuksen ottajien enakkoon maksamia vakuutusmaksuja. Vakuutusyhtiön on pidettävä huomattavaa varallisuusmäärää taseessaan, jotta se kykenee maksamaan tulevaisuudessa mahdollisesti realisoituvat odotetut ja odottamattomat korvaukset. (Kivisaari & Kahola 2017) Vakuutusyhtiösääntelyn mukaisesti (Solvenssi II) vakuutusyhtiöiden tulee selviytyä myös odottamattomista, kerran 200 vuodessa tapahtuvista shokeista eli vakuutusyhtiöiden oman perusvarallisuuden tulee kaiken aikaa olla korkeampi kuin kerran 200 vuodessa mahdollisesti realisoituvat tappiot. (2009/138/EY; Vakuutusyhtiölaki 2008/521)

Yleisesti vakuutusyhtiöt hakevat varallisuudelleen myös tuottoa sijoitusmarkkinoilta (Kivisaari & Kahola 2017). Myös sijoitettuun varallisuuteen liittyy riskiä, sillä sijoitetun varallisuuden arvo voi myös laskea, jolloin vakuutusyhtiön tulee vakavaraisuuttaan säädelläkseen ottaa huomioon myös sijoitettuun varallisuuteen liittyvä riski varallisuuden arvon laskusta. Näin ollen sijoitetun varallisuuden riskiä on kyettävä mittaamaan ja kvantifioimaan. (Kivisaari & Kahola 2017)

Valtaosa vakuutusyhtiöiden sijoittamasta varallisuudesta on sijoitettu korkoinstrumentteihin eli valtioiden ja yritysten joukkovelkakirjalainoihin. (Finanssivalvonta 2020) Yritysten joukkovelkakirjalainoista koostuva sijoitusportfolio voidaan tunnistaa altistuvan ainakin kolmen tyyppisille riskifaktoreille (Barnhill Jr & Maxwell 2002):

- 1) Riskittömien korkojen muutokset
- 2) Korkomarginaalien muutokset jälkimarkkinoilla
- 3) Vastapuoleen liittyvä absoluuttinen luottoriski

Tämän diplomityön tavoitteena on pyrkiä arvioimaan joukkovelkakirjalainaportfolion riskiä tietyllä luottamustasolla yhden vuoden aikahorisontilla siten, että luotettava riskimalli

on riittävän yksinkertainen, jotta sitä voidaan hyödyntää käytännössä ja toisaalta riskimallin tulisi antaa perusteltu kuva joukkovelkakirjalainaportfolion riskistä ja sen määrästä. Mallia voidaan siten hyödyntää osana vakuutusyhtiön vakavaraisuuden mallintamista.

Diplomityö etenee siten, että aluksi tarkastellaan riskin mittaamiseen käytettäviä menetelmiä ja niiden tarkoituksenmukaisuutta diplomityön tavoitteeseen peilaten. Tämän jälkeen esitellään luottoriskillisen joukkovelkakirjalainaportfolion riskifaktorit sekä riskifaktorien mallintamisen teoriaa. Teoriaosuus päättyy portfolion riskimallin esittelyyn sekä parametriestimoinnin teoriaan. Empiirinen osuus koostuu tarvittavista parametrien estimoinneista ja mallin kalibroinnista sekä riskimallin soveltamisesta hypoteettiseen joukkovelkakirjalainaportfolioon. Kehitetyle riskimallille esitetään myös useita herkkyysanalyysyjä. Lopuksi johtopäätöksissä esitetään kattavasti malliin liittyviä rajoitteita sekä vertaillaan mallia ja sen antamia tuloksia regulatoriseen riskimalliin ja esitetään mallin kehitysehdotuksia ja ehdotuksia tulevaisuuden tutkimuksen aiheiksi.

2. RISKIN MITTAAMINEN

2.1 Value-at-Risk

Value-at-Risk (VaR) on rahoituslalla pitkään käytössä ollut riskin mittaamiseen käytetty työkalu. VaR:sta on tullut toimialan standardi pitkälti sen myötä, että se on aikoinaan valittu pääasialliseksi riskin mittaamiseen käytettäväksi työkaluksi regulaattorin ja yksittäisten toimijoiden toimesta (Jorion 1997; Basak & Shapiro 2001). Laajemmin ymmärrettynä VaR on osa riskienhallintaa ja VaR mahdollistaa siihen nojautuvan riskienhallinnan ja siihen liittyvät riskienhallintapolitiikat (engl. VaR based management). Yhtenä syynä VaR:in lähes ylivoimaiseen suosioon riskienhallintatyökaluna ja osana laajempaa riskienhallintaa rahoituslalla on pidetty sitä, että VaR tarjoaa helposti ymmärrettävän ja summautuvan estimaatin portfolion tai liiketoiminnan riskistä. Tärkeää on myös ymmärtää, että VaR ei ole ainoastaan päättäjille tarjottava summa riskin määrästä vaan myös työkalu, jota voidaan käyttää riskienhallintaan ja kontrolliin sekä päätöksentekoon. (Basak & Shapiro 2001)

VaR:in määritelmäksi rahoituslalla on muodostunut seuraava lause (Jorion 1997; Choudhry 2006): *VaR on rahallisen tappion määrä tietyllä aikahorisontilla, joka ylittyy tietyllä todennäköisyydellä α* . Matemaattisesti VaR voidaan esittää seuraavasti,

$$VaR_X(\alpha) = \min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\} \quad (2.1)$$

jossa X on tappiojakauma ja F_X on kyseisen tappiojakautaman kertymäfunktio. Kuvassa 1 on havainnollistettu VaR 95% luottamustasolla siten, että siinä x-akselilla esitetään portfolion arvon kehitys ja y-akselilla arvon kehityksen todennäköisyysjakauma. Tässä tapauksessa VaR:n määritelmän mukaisesti 95% todennäköisyydellä tappio ei ylitä VaR arvoa.



Kuva 1. Tappiojakauman VaR 95% luottamustasolla.

VaR menetelmän hyödyntäminen käytännössä vaatii tappioiden todennäköisyysjakauman estimointia. Käytännössä tämä voidaan tehdä kolmella eri menetelmällä (Choudhry 2006):

1. Analyttisesti: Analyttisessä menetelmässä oletetaan, että tappiot (ja tuotot) noudattavat jotain tilastollista jakaumaa, joka on määritettävissä analyttisesti.
2. Historiallisella simulaatiolla: Historiallisen simulaation menetelmässä määritetään tuotoille VaR tasot historialliseen toteumaan perustuen siten, että tuottofaktorit otetaan suoraan toteutuneesta historiasta ja lasketaan näin saadusta simulaatiosta portfolion VaR.
3. Monte Carlo simulaatiolla: Monte Carlo simulaatiossa simuloidaan portfolion kehitystä tulevaisuudessa valittuihin riskiparametreihin ja matemaattisiin prosesseihin perustuen. Monte Carlo simulaation etuna edellä mainittuihin verrattuna on sen soveltuvuus erilaisista rahoitustuotteista koostuvien portfolioiden VaR:in laskemiseen. Menetelmää on myös pidetty kahta edellä mainittua realistisempänä.

VaR menetelmän valintaan vaikuttavat niin mallinnettavat riskit ja portfolio, käytettävissä olevat resurssit ja käyttötarkoitus. Toisaalta vaikka Monte Carlo simulaatiota pidetään realistisimpänä ja usein myös parhaana vaihtoehtona, niin Choudhryn (2006) mukaan Monte Carlo simulointi suurella portfolioilla on usein hidasta.

Monte Carlo simulaatio etenee käytännössä seuraavalla tavalla (Choudhry 2006):

1. Luodaan tarvittava määrä skenaarioita simuloimalla riskifaktoriin muutoksia
2. Lasketaan riskifaktoriin muutosten perusteella portfolion tuotto tai tappio kussakin skenaariossa kunkin skenaarion päätepisteessä määritetyn aikahorisontin mukaisesti

3. Laitetaan skenaariot jonoon skenaarion antaman portfolion tappion perusteella, jolloin VaR on määritelmänsä mukaisesti asetetun luottamustason desiilin mukainen tappion määrä

Samasta simulaatioasetelmasta voidaan näin ollen määrittää VaR usealla eri luottamustasolla.

2.2 Expected shortfall (CVaR)

Toinen yleisesti rahoituslalla käytetty riskin mittaamisen työkalu on "Expected Shortfall" (ES), josta käytetään myös nimitystä CVaR. Se voidaan määritellä seuraavasti: *Expected shortfall luottamustasolla α on portfolion odotettu tappio silloin, kun portfolion tappio koostuu α ylittävistä tappioista tai huonoimmista lopputulemista*. Toisin sanoen, kun VaR antaa riskimitan, joka ylitetään todennäköisyydellä $1 - \alpha$, ES kertoo odotetun tappion määrän, kun tämä VaR arvo ylitetään. (Rockafellar & Uryasev 2000)

Näin ollen ES onnistuu kuvaamaan VaR arvoa paremmin häntäriskiä eli erityisen harvinaisia, mutta vaikutukseltaan suuria tapahtumia. Lisäksi ES:n on arvioitu omaavan ylivoimaisia matemaattisia ominaisuuksia portfolion riskien optimoinnin kannalta. (Sarykalin et al. 2008)

3. YRITYSTEN JOUKKOVELKAKIRJALAINOJEN RISKIFAKTORIT

Luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen hinnoitteluun markkinoilla vaikuttaa kaksi komponenttia, joista ensimmäinen on riskittömän koron taso ja toinen on sijoittajien riskittömän koron päälle vaatima riskipremio eli korkomarginaali (engl. spread). (Barnhill Jr & Maxwell 2002; Brigo & Mercurio 2006). Nämä komponentit hinnoitellaan markkinoilla ja niiden muutokset vaikuttavat suoraan luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen hinnoitteluun ja sitä kautta joukkovelkakirjalainaportfolion arvoon. Edellä mainittujen komponenttien vaikutus joukkovelkakirjalainojen hinnoitteluun nähdään selvästi seuraavista kaavoista (Duffie & Singleton 1999),

$$V_0 = E_0^Q \left[\exp \left(- \int_0^T R_t dt \right) X \right] \quad (3.1)$$

$$R = r + \lambda, \quad (3.2)$$

jossa V_0 on joukkovelkakirjalainan hinta hetkellä 0, E_0^Q on riskineutraali ehdollinen odotusarvo hetkellä 0, X on luottoriskillisen saatavan nimellinen arvo, r on riskitön korko ja λ sijoittajien luottoriskilliselle joukkovelkakirjalainasijoitukselle vaadittava riskipremio. Kaavasta (3.1) nähdään, että riskittömän koron muutokset sekä riskipremion muutokset vaikuttavat joukkovelkakirjalainan arvoon siten, että kun nämä komponentit kasvavat joukkovelkakirjalainan arvo laskee.

Riskittömien korkojen muutokset ovat seurausta markkinoiden muuttuneista odotuksista talouden, tuottavuuden, investointien, teknologisen kehityksen ja innovaatioiden sekä rahapolitiikan suhteen (Cox et al. 1985). Riskittömien korkojen muutosta voidaan mallintaa stokastisilla prosesseilla, joita esitellään tarkemmin luvussa 4.

Riskipremion eli korkomarginaalin on perinteisesti ajateltu kuvaavan luottoriskilliseen saatavaan kohdistuvaa luottoriskiä eli toisin sanoen riskiä siitä, että saatavan maksuvelvollinen vastapuoli ei halua tai kykene suorittamaan maksua tulevaisuudessa (Black & Scholes 1973; Merton 1974; Duffie & Singleton 1999). Edelleen kirjallisuudessa on esitetty huomattava määrä rakenteellisia malleja ja intensiteettimalleja, joilla pyritään hinnoittelemaan luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen riskipremiota mallintamalla yrityksen luottoriskiä eli riskiä siitä, että yritys suoriutu tulevista velvoitteistaan, ja luottoriskissä mahdollisesti tapahtuvia muutoksia. Valitettavasti tutkimuksessa on osoitettu, että kyseisillä malleilla ja siten luottoriski ja siinä tapahtuvat muutokset selittävät vain pienen

osan riskipreemioiden tasosta ja varsinkin riskipreemioissa tapahtuvista muutoksista. Seuraavaksi esitetään yhteenvetoa tällaisista tutkimuksista.

Collin-Dufresne et al. tutkivat artikkelissaan (2001) yksittäisten luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen riskipreemion muutoksia, joita he yrittivät selittää käyttäen kirjallisuudessa esitettyjä perinteisiä rakenteellisia malleja luottoriskille ja riskipreemiolle. He havaitsivat tutkimuksessaan, että riskipreemion mallintamiseen käytetyt vastapuolen luottoriskiä ja sen muutoksia arvioivat mallit selittivät vain neljänneksen riskipreemiossa tapahtuvista muutoksista. Giesecke et al. ovat puolestaan artikkelissaan (2011) tutkineet yritysten joukkovelkakirjalainojen toteutunutta luottotappioriskiä 150 vuoden ajalta vuosilta 1866-2008. Heidän havaintonsa mukaan luottoriskiä kuvaavat rakenteelliset mallit onnistuvat kyllä ennustamaan vastapuolien konkurssitodennäköisyyksiä, mutta toteutuneet riskipreemiot ovat olleet yli kaksi kertaa suurempia kuin toteutuneet konkurssitodennäköisyydet yhdessä luottorisktiin perustuvien mallien kanssa olisivat antaneet tulokseksi. Lisäksi he toteavat tutkimuksensa perusteella, että toteutuneet konkurssitodennäköisyydet eivät juurikaan vaikuttaneet joukkovelkakirjalainojen riskipreemion hinnoitteluun, mikä osoittaa sen, että riskipreemioiden tasoja ja niiden muutoksia on vaikea selittää luottoriskin arviointiin perustuvilla malleilla.

Collin-Dufresne et al. huomasivat tutkimuksessaan (2001) myös, että se osa riskipreemiosta, jonka muutosta ei voitu selittää, oli hyvin korreloitunutta yhden tekijän suhteen. He eivät myöskään löytäneet selviä selittäviä tekijöitä tälle "systemaattiselle" komponentille osana riskipreemiota vaan arvelevat sen olevan seurausta erilaisista kysyntään ja tarjontaan liittyvistä shokeista markkinoilla. Näin ollen he argumentoivat, että riskipreemion muutoksia selittävä systemaattinen riskikomponentti on luottoriskillisen joukkovelkakirjalainaportfolion paljon merkittävämpi riskifaktori kuin yksittäisten vastapuolien luottoriskiin ja sen muutoksiin liittyvät tekijät. Myös Chen et al. päättelivät tutkimukseensa (2007) perustuen, että luottoriski ja sen arviointiin perustuvat riskipreemiomallit selittävät vain pienen osan riskipreemion muutoksista. Itseasiassa he osoittavat tutkimuksessaan, että likviditeetin muutoksilla voidaan selittää yli puolet riskipreemiossa tapahtuneista muutoksista, mikä on kaksi kertaa enemmän kuin luottoriskikomponentilla voidaan selittää. Bao et al. ovat päätyneet tutkimuksessaan (2011) samaan lopputulokseen. Heidän mukaansa luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen riskipreemion muutokseen ajan suhteen vaikuttaa huomattavasti joukkovelkakirjalainojen epälikviditeetti. He argumentoivat epälikviditeetin olevan paljon merkittävämpi joukkovelkakirjalainojen riskipreemioon vaikuttava tekijä kuin luottoriskikomponentti. Lisäksi he osoittavat tutkimuksessaan, että erityisesti markkinamyllerrysten aikaan joukkovelkakirjalainojen epälikviditeetti on merkittävin riskipreemion muutoksia selittävä tekijä. Heidän mukaansa likviditeetin muutokset

selittävät paljon enemmän laajojen joukkovelkakirjalainaindeksien hintojen muutoksia kuin luottoriskikomponentissa tapahtuvat muutokset.

Yhteenvedona yllä esitetyistä tutkimuksista voidaan todeta, että luottoriskin ja sen muutoksen arviointiin perustuvat riskipreemiomallit selittävät huonosti markkinoilla havaittuja riskipreemioiden tasoja ja erityisesti riskipreemioiden muutoksia. Riskipreemioiden muutokset vaikuttaisivat lisäksi olevan erittäin korreloituneita varsinkin markkinamyllerrysten aikana. Tätä systeemistä riskipreemiokomponenttia ja sen muutoksia näyttäisi selittävän erityisesti likviditeetin muutokset. Näin ollen voidaan perustellusti esittää, että joukkovelkakirjalainaportfolio altistuu ainakin seuraaville riskikomponenteille, kun tarkasteluhorisontti on suhteellisen lyhyt (yksi vuosi):

- a) Riskittömien korkojen muutokset
- b) Riskipreemioiden muutokset, jotka vaikuttavat systemaattisilta ja joiden suurin selittävä tekijä vaikuttaa olevan likviditeetin muutos
- c) Yksittäisiin joukkovelkakirjalainoihin liittyvä absoluuttinen luottoriski eli riski siitä, että vastapuoli ei kykene maksamaan lainaa tai sen kuponkikorkoja takaisin

Seuraavissa luvuissa esitetään tapoja mallintaa näitä riskifaktoreita. Riskittömien korkojen mallinnukseen voidaan löytää kirjallisuudesta useita stokastisia malleja (Vasicek 1977; Cox et al. 1985). Riskipreemioiden mallinnus kirjallisuudessa perustuu pitkälti luottoriskin ja konkurssitodennäköisyyden mallintamiseen. Kirjallisuudessa on esitetty rakenteellisia malleja sekä intensiteettimalleja (Duffie & Singleton 1999). Intensiteettimallien etuna on se, että vaikka niiden mallinnuksessa on alun perin hyödynnetty konkurssi-intensiteettien mallinnusta, niin mallien antama stokastinen prosessi riskipreemiolle on analoginen riskittömien korkojen stokastisten mallien kanssa. Näin ollen tarkoituksenmukaisella kalibroinnilla intensiteettimallilla voidaan mallintaa riskipreemioiden systemaattisia muutoksia portfoliotasolla. Lisäksi yksittäisiin vastapuoliin liittyvää absoluuttista luottoriskiä voidaan mallintaa yleisesti käytetyllä, luottotappioriskien mallintamiseen kehitetyllä Basel II mallilla (Basel Committee on Banking Supervision 2005).

4. RISKITTÖMÄT KOROT

Tässä luvussa käsitellään riskittömien korkojen aikarakennetta ja riskittömiä nollakuponkikorkoisia joukkovelkakirjalainoja. Riskittömät korot voidaan käsittää aikavaihtuvina ja stokastisina, sillä riskittömän koron ajatellaan heijastelevan markkinoiden odotuksia riskinottohalukkuudesta, investointivaihtoehdoista, teknologisesta kehityksestä, tuottavuudesta ja kulutuksesta kullakin ajanhetkellä tietylle maturiteetille (Cox et al. 1985). Riskittömyydestä tässä yhteydessä on tärkeä ymmärtää, että sillä tarkoitetaan riskittömyyttä vastapuoliriskin näkökulmasta eli käytännössä sitä, että joukkovelkakirjalainan takaisinmaksuun ja tulevien kassavirtojen toteutumiseen ei liity epävarmuutta (Cox et al. 1985; Brigo & Mercurio 2006). Tarkasteltaessa riskittömän nollakuponkilainan (engl. Zero-coupon bond) arvoa $P_0(t, T)$ hetkellä $t < T$ tilanteessa, jossa lainan takaisinmaksu hetkellä T täyttää ehdon $P_0(T, T) = 1$ huomataan, että lainan arvo hetkellä t riippuu ainoastaan riskittömästä lyhyestä korosta $r(t)$ ja sen aikarakenteesta (Brigo & Mercurio 2006; Privault 2012). Mukailien Privaultia (2012) voidaan edelleen tunnistaa kolme tapaa määrittää $P_0(t, T)$ riippuen riskittömän lyhyen koron ominaisuuksista:

- 1) Lyhyt riskitön korko on deterministinen vakio $r > 0$, jolloin

$$e^{r(T-t)}P_0(t, T) = P_0(T, T) = 1 \quad (4.1)$$

$$P_0(t, T) = e^{-r(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.2)$$

- 2) Lyhyt riskitön korko on riippuvainen ajasta ja on deterministinen funktio $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, jolloin

$$P_0(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds} \quad (4.3)$$

- 3) Lyhyt riskitön korko on stokastinen prosessi $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, jolloin velkakirjan arvo $P_0(t, T)$ riippuu tulevaisuudessa havaittavien riskittömien korkojen arvoista r_s , jossa $s \in [t, T]$. Tällöin riskittömän velkakirjan arvo $P_0(t, T)$ voidaan esittää ehdollisena odotusarvona hetkellä $t < T$:

$$P_0(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right] \quad (4.4)$$

Jossa \mathbb{Q} on riskineutraali todennäköisyysmitta.

Riskittömien korkojen aikarakennetta käsittelevä kirjallisuus mallintaa pääasiassa riskittömät korot stokastisena prosessina (Brigo & Mercurio 2006). Perinteiset stokastiset koromallit voidaan jakaa kolmeen pääryhmään: Keskiarvoon hakeutuvat mallit (Vasicek

1977; Cox et al. 1985), muuttuvan volatilitiitin mallit (Marsh & Rosenfeld 1983) ja aika-riippuvaiset mallit (Ho & Lee 1986; Hull & White 1990). Tässä työssä keskitytään keskiarvoon hakeutuviin malleihin niiden yksinkertaisemman rakenteen vuoksi ja koska työn tavoitteena on tarkastella joukkovelkakirjalainoihin liittyvää riskiä, jossa korkoriski on vain yksi komponentti osana joukkovelkakirjalainaportfolion markkinariskiä.

Yksinkertaisissa keskiarvoon hakeutuviissa malleissa riskittömien korkojen aikarakenteen stokastinen prosessi voidaan esittää Privaultia (2012) mukaillen ja (Vasicek 1977; Cox et al. 1985) hyödyntäen seuraavasti,

$$dr_t = a(r_t)dt + b(r_t)dB_t \quad (4.5)$$

jossa $a(r_t)$ ja $b(r_t)$ ovat riskittömästä lyhyestä korosta riippuvia deterministisiä funktioita ja dB_t kuvastaa Brownin liikettä, jossa

$$dB_t \sim N(0, dt) \quad (4.6)$$

Näin ilmaistu stokastinen prosessi on ajan suhteen jatkuva Markovin prosessi, jolla tarkoitetaan sitä, että riskittömän koron stokastisen prosessin aiempi kehitys ei vaikuta sen tulevaan kehitykseen vaan prosessin seuraavaan arvoon vaikuttaa ainoastaan riskittömän koron sen hetkinen taso.

4.1 Vasicek 1977

Vasicekin (1977) esittämä riskittömien korkojen stokastinen malli olettaa riskittömän lyhyen koron r_t olevan normaalijakautunut stokastinen prosessi, joka voidaan ilmaista seuraavasti,

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t \quad \beta, \alpha, \sigma > 0 \quad (4.7)$$

jossa α, μ ja σ ovat vakioita. Prosessissa σ kuvastaa lyhyiden riskittömien korkojen volatilitiettä, μ kuvastaa lyhyen riskittömän koron r pitkän aikavälin keskiarvoa, jota kohti prosessi pyrkii ajautumaan nopeudella α . Näin ollen termi $\alpha(\mu - r_t)$ on prosessia kasvassa pitävä voima (engl. Drift), joka pyrkii palauttamaan prosessia kohti pitkän aikavälin keskiarvoa (Vasicek 1977).

Vasicekin mallia noudattava stokastinen korkoprosessi on normaalijakautunut ja riskittömän koron r_t ehdollinen odotusarvo hetkellä $t > s$ voidaan esittää seuraavasti (Vasicek 1977),

$$\mathbb{E}[r_t | r_s] = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu(1 - e^{-\alpha(t-s)}) \quad (4.8)$$

ja vastaavasti ehdollinen varianssi voidaan esittää,

$$\text{Var}[r_t|r_s] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(t-s)}). \quad (4.9)$$

Huomion arvoista prosessissa on se, että se ei poissulje negatiivisten riskittömien korkojen mahdollisuutta, mitä pitkään pidettiin yhtenä prosessin heikkoutena (Brigo & Mercurio 2006) kunnes rahoitusmarkkinoilla päädyttiin negatiivisten korkojen aikakaudelle.

4.2 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 1985

Cox, Ingersoll & Ross julkaisivat vuonna 1985 oman stokastisen mallinsa (CIR malli) lyhyiden riskittömien korkojen mallintamiseen. Malli on Vasicekin (1977) mallin tapaan pitkän ajan keskiarvoa kohti hakeutuva tasapainomalli, mutta se ei Vasicekin (1977) mallista poiketen mahdollista negatiivisia riskittömiä lyhyitä korkoja ja siten sen on ajateltu korjaavan negatiivisten korkojen ”ongelman” (Privault 2012). CIR mallin mukainen stokastinen lyhyiden riskittömien korkojen prosessi voidaan ilmaista seuraavasti,

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t \quad \beta, \alpha, \sigma > 0 \quad (4.10)$$

Ainoa ero edellisessä kappaleessa esitettyyn Vasicekin malliin on se, että prosessissa riskittömien korkojen volatilitteetti esitetään suhteellisena kulloinkin vallitsevan korkotasoon arvoon eli sitä kerrotaan termillä $\sqrt{r_t}$. Tämä puolestaan johtaa siihen, että stokastinen prosessi ei ole enää normaalijakautunut vaan prosessin inkrementin varianssi on suhteellisesti riippuvainen kunkin hetken riskittömästä lyhyestä korosta. Tämä lisäys puolestaan johtaa korkomallin osalta seuraaviin ominaisuuksiin: a) negatiivisten korkojen mahdollisuus on estetty; b) jos korko saavuttaa arvon nolla prosessin aikana se voi saada tulevaisuudessa ainoastaan positiivisia arvoja; c) korkoprosessin absoluuttinen varianssi kasvaa, kun kulloinkin vallitseva korkotaso kasvaa; d) korkoprosessille löytyy vakaa todennäköisyysjakauma. Lisäksi voidaan osoittaa, että jos $\sigma^2 > 2\beta\alpha$ niin r_t voi saavuttaa arvon 0 ja mikäli $\sigma^2 \leq 2\beta\alpha$ niin prosessin ”Drift” termi on riittävän voimakas pitääkseen r_t suurempana kuin 0. (Cox et al. 1985)

CIR mallin siirtymätodennäköisyysjakauma korolle r hetkellä s voidaan ilmaista ehdollisena korolle r nykyhetkellä t seuraavasti edellyttäen, että $\sigma^2 \leq 2\beta\alpha$ ja $\beta, \alpha, \sigma, r_0 > 0$ (Cox et al. 1985),

$$p(r_s, s; r_t, t) = ce^{-(u+v)} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}), \quad (4.11)$$

$$c = \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})}$$

$$u = cr_s e^{-\alpha \Delta t},$$

$$v = cr_t,$$

$$q = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} - 1,$$

$$\Delta t = t - s$$

jossa $I_q(\cdot)$ on modifioitu q :n asteen ensimmäisen luokan Besselin funktio.

5. RISKILLISET KOROT

5.1 Luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen hinnoittelumallit

Yritysten emittoimat joukkovelkakirjalainat altistuvat luottoriskille. Luottoriskillä tarkoitetaan käytännössä sitä, että vastapuoli ei suoriudu velvoitteistaan. Yritysten joukkovelkakirjalainojen tapauksessa tämä käytännössä tarkoittaa sitä, että joukkovelkakirjalainan kassavirtoihin lainanottajalta sijoittajalle liittyy epävarmuutta ja ne ovat ehdollisia lainan emittoineen yrityksen lainanmaksukyvyille ja -halulle. Takaisinmaksuun liittyvä epävarmuus vaikuttaa yritysten joukkovelkakirjalainojen hinnoitteluun markkinoilla ja siten sijoittajalle aiheutuvaan riskiin. Pahimmassa tapauksessa sijoittaja menettää koko joukkovelkakirjalainaan sijoittamansa pääoman. (Hull 2009, ss. 521-525) Toisaalta, kuten luvussa 3 on osoitettu, luottoriskissä tapahtuvat muutokset selittävät kuitenkin vain osan luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen hinnoittelusta.

Kirjallisuudesta voidaan löytää kahden tyyppisiä joukkovelkakirjalainojen hinnoittelumalleja: rakenteelliset mallit (engl. structural model) eli yhtiön arvoon perustuvat mallit ja velan laiminlyönnin intensiteettiin perustuvat mallit (engl. default intensity model). Rakenteelliset eli yhtiön arvoon perustuvat mallit nojautuvat Black & Scholesin (1973) ja Mertonin (1974) esittämiin teorioihin yhtiön arvoprosessista ja yhtiön emittoiman velan riippuvuudesta yhtiön arvoon. Edelleen Black & Cox (1976) kehittivät mallia esittämällä, että velan laiminlyönti tapahtuu, kun yhtiön arvo alittaa ulkoisesti määritetyn raja-arvon (engl. default boundary). Rakenteellisia malleja on edelleen kehitetty mm. huomioimaan verot ja muut konkurssista aiheutuvat lisäkustannukset, velkakirjojen kuponkikorot sekä maturiteetin. Kehittyneempiä rakenteellisia malleja ovat esittäneen mm. Leland & Toft (1996) sekä Fisher & al. (1989). Eom et al. (2004) Ovat kuitenkin empiirisessä analyysissään osoittaneet rakenteellisten mallien kyvykkyyden ennustaa yritysten joukkovelkakirjalainojen hintoja tai niiden kehitystä melko heikoksi.

Toinen tapa mallintaa luottoriskillisten joukkovelkakirjalainojen hinnoittelua on hyödyntää ns. intensiteettimalleja kuten Landon artikkelissaan (1998) esittämä malli. Intensiteettimalleissa luottoriskillisten joukkovelkakirjojen hinnoittelussa hyödynnetään pääsääntöisesti Poisson prosessin mukaan mallinnettuja konkurssitodennäköisyyksiä. Intensiteettimallien etuna on se, että niissä konkurssitodennäköisyyksien voidaan ajatella olevan läheisesti kytköksissä riskillisten joukkovelkakirjalainojen korkomarginaaliin (engl. spread) ja korkomarginaalin eli riskipreemion voidaan ajatella noudattavan stokastista

prosessia (Brigo & Mercurio 2006). Tässä suhteessa erityisen mielenkiintoinen on Duffien & Singletonin artikkelissaan (1999) esittämä intensiteettimalli, jossa lyhyt riskitön korko kalibroidaan huomioimaan yritysten joukkovelkakirjalainojen luottoriski ns. lyhyen korkomarginaalin eli riskipreemion, joka mallinetaan stokastisena diffuusioprosessina, avulla. Näin ollen analogia lyhyeen riskittömään korkoon on selvä ja korkomarginaalia voidaan mallintaa stokastisena diffuusioprosessina (Duffie & Singleton 1999). Duffie tarjoaa artikkelissaan (2005) kattavan yhteenvedon erilaisista intensiteettimalleista. Seuraavaksi esitetään yksinkertainen, yhden faktorin CIR intensiteettimalli, joka noudattaa vastaavanlaista stokastista diffuusioprosessia kuin riskitön lyhyt korko CIR mallissa.

5.2 CIR intensiteettimalli

Duffie & Singleton esittävät artikkelissaan (1999) että mikä tahansa saatava, joka on altistunut luottoriskille, voidaan hinnoitella hyödyntämällä riskitöntä lyhyttä korkoa r ja luottoriskikalibroituja lyhyen koron prosessia $R = r + \lambda$ seuraavasti kun saatavan alkupe-
räinen arvo on X ,

$$V_0 = \mathbb{E}_0^Q \left[\exp \left(- \int_0^T R_t dt \right) X \right] \quad (5.1)$$

jossa E_0^Q on riskineutraali ehdollinen odotusarvo hetkellä 0. Termi λ on kyseisen saatavan tai instrumentin riskineutraali riskipreemion prosessi. Laajasti ymmärtäen riskikalibroitu lyhyen koron prosessi R koostuu siis riskittömän koron prosessista r ja riskipreemion (engl. spread) lyhyestä prosessista λ . Näin määriteltynä luottoriskillisen saatavan hinta on analoginen riskittömän velkakirjan arvon kanssa (ks. Kaava 4.4). Duffien & Singletonin (1999) mukaan edellä mainitun analogian seurauksena myös R :n ja siten myös λ mallintamiseen voidaan käyttää saman tyyppisiä stokastisia prosesseja kuin riskittömien korkojen mallinnuksessa.

Edelleen Duffieta ja Singletonia (1999) mukailien olettamalla, että vastapuoli ei ole ajautunut konkurssiin hetkellä t voidaan λ :n stokastinen prosessi esittää

$$d\lambda_t = c(\lambda_t)dt + d(\lambda_t)dB_t \quad (5.2)$$

jossa $c(\lambda_t)$ ja $d(\lambda_t)$ ovat λ :sta riippuvia deterministisiä funktioita ja dB_t kuvastaa Brownin liikettä. Tällöin riskipreemiota λ voidaan yksinkertaisimmillaan mallintaa hyödyntäen olemassa olevia ja laajasti tutkittuja lyhyen riskittömän koron stokastisia malleja kuten CIR mallia (kaava 4.10) olettamalla, että λ noudattaa CIR prosessia,

$$d\lambda_t = \alpha_\lambda(\mu_\lambda - \lambda_t)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dB_t \quad \beta, \alpha, \sigma > 0 \quad (5.3)$$

jossa parametrit tulkitaan samalla tavalla kuin aiemmin esitettyssä CIR mallissa.

Esitetyn intensiteettimallin etuna on sen yksikertaisuus ja parametrisointi historiallisella datalla, mutta kuten Duffie artikkelissaan (2005) huomauttaa puhtaat stokastiseen diffuusion ja Brownin liikkeeseen perustuvat mallit eivät välttämättä kuvaa oikein luottoriskin ja siten riskipreemioiden ominaispiirteitä ilman hyppydiffuusio (engl. jump-diffusion) prosessia.

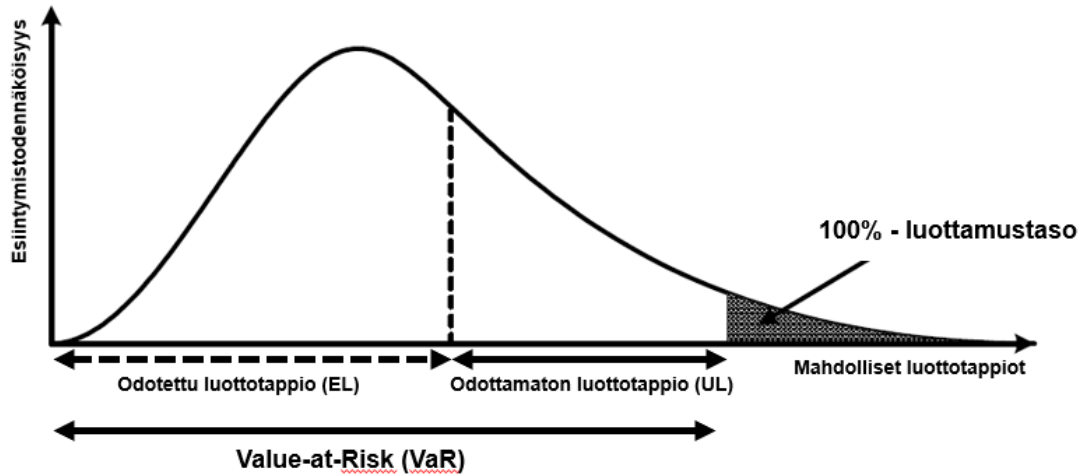
CIR intensiteettimallin etuna on se, että sen parametrit voidaan estimoida historiallisella riskipreemiodatalla samaan tapaan kuin CIR mallissa riskittömille koroille (Barnhill Jr & Maxwell 2002). Kun kalibrointi suoritetaan suoraan rating -kategoria kohtaisiin riskipreemioihin, malli ei huomioi mahdollisia siirtymiä rating kategorioiden välillä eli yksittäisten arvopaperien luottoriskissä tapahtuvia muutoksia tai mahdollisia konkurssitapahtumia. Tällöin λ kuvaa siis systemaattisia riskipreemioissa tapahtuvia muutoksia eikä yksittäisten arvopaperien luottoriskissä tapahtuvia muutoksia. Luvussa 3 on kuitenkin todettu, että valtaosa riskipreemioissa tapahtuvista muutoksista on luonteeltaan systemaattisia ja lähinnä kysyntä- ja tarjontashokeista sekä likviditeetistä johtuvia. Tämä siis puoltaa λ :n parametrien mallintamista suoraan rating -kategoriakohtaiseen riskipreemiodataan, mutta ilman rating -siirtymiä malli ei huomio yksittäisten arvopaperien sisältämää luottoriskiä.

6. LUOTTORISKIN MITTAAMINEN BASEL KEHIKOSKA

Basel vakavaraisuussäätelykehikko on kehitetty pankkien vakavaraisuuden sääntelyyn. Basel sääntelykokonaisuuden keskiössä on odottamattomien luottotappioiden mittaamiseen kehitetty sisäisten luottoluokitusten menetelmään perustuva Value-at-Risk pohjainen kaava, jota tässä yhteydessä kutsutaan Basel II malliksi. (Basel Committee on Banking Supervision 2001; Basel Committee on Banking Supervision 2005). Basel II malli mallintaa vuoden aikahorisontilla lainoista ja sitoumuksista aiheutuvien odottamattomien luottotappioiden sitä määrää, jota ei ylitetä valitulla luottamustasolla. Basel II malli on vain ja ainoastaan luottotappioiden mallintamiseen kehitetty menetelmä eli se mallintaa asiakkaan maksukyvyttömyydestä aiheutuvia odottamattomia luottotappioita eli absoluuttista luottoriskiä.

Basel II kaava ottaa huomioon saatavaportfolioon liittyvän systemaattisen riskikomponentin eli luottotappioiden korrelaation taloudellisen tilan kehitykseen nähden sekä portfolion yksittäisten lainojen ominaisuudet kuten vastapuolen maksuhäiriötodennäköisyyden, saatavan maturiteetin, lainan senioriteetin ja takaisinsaantitodennäköisyyden (Basel Committee on Banking Supervision 2005). Basel II kaava on asymptoottinen yhden faktorin luottoriskin portfoliomalli. Sana asymptoottinen kuvaa sitä, että lainaportfolion oletetaan olevan täydellisesti hajautunut ja yhden faktorin mallilla puolestaan tarkoitetaan sitä, että lainaportfolioon liittyvä systemaattinen riski eli lainanottajien maksukyvyttömyystodennäköisyyksien väliset korrelaatiot mallinnetaan yhdellä systemaattisen riskin faktorilla, jonka voidaan ajatella kuvaavan talouden yleistä tilaa (Gordy 2003).

Basel II mallissa luottotappiot jaetaan odotettuun luottotappioon (EL) ja odottamattomaan luottotappioon (UL). Perinteisesti Value-at-Risk malleissa VaR tietyllä luottamustasolla kattaa sekä odotetun, että odottamattoman luottotappion, mutta Basel II mallissa nämä kaksi komponenttia on haluttu erottaa toisistaan, koska pankit ja muut kansainvälisiä tilinpäätösstandardeja ja etenkin IFRS 9 standardia noudattavat yritykset joutuvat huomioimaan odotetun luottotappion varauksena, joka vähentää yhtiön varoja. (Basel Committee on Banking Supervision 2005; Novotny-Farkas 2016) Odotettujen ja odottamattomien luottotappioiden ja VaR:n suhdetta Basel II mallissa on havainnollistettu kuvassa 2.



Kuva 2. Odotettu luottotappio ja odottamaton luottotappio sekä luottoriskin VaR.

Basel II mallissa yksittäisen luottoriskillisen saatavan odotettu luottotappio (EL) yhden vuoden aikahorisontilla määritetään seuraavasti (Basel Committee on Banking Supervision 2005),

$$EL_i = PD_i \cdot EAD_i \cdot LGD_i \quad (6.1)$$

jossa PD_i on saatavan i keskimääräinen maksuhäiriötodennäköisyys yhden vuoden aikahorisontilla luottosyklin yli (engl. probability of default, through-the-cycle), EAD_i on saatavan i määrä hetkellä, jolla vastapuoli ei selviydy velvoitteistaan (engl. exposure at default) ja LGD_i on saatavan i tappio-osuus mikäli vastapuoli ei suoriudu velvoitteistaan (engl. loss given default)

Vastaavasti odottamaton luottotappio yritysvastapuolien luottoriskilliselle saatavalle yhden vuoden aikahorisontilla valitulla luottamustasolla α määritetään seuraavasti (Basel Committee on Banking Supervision 2005),

$$UL_i(\alpha) = EAD_i \cdot LGD_i \cdot \left[N \left(\frac{N^{-1}(PD_i) + \sqrt{R_i} \cdot N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - R_i}} \right) - PD_i \right] \cdot \frac{1 + (M_i - 2.5) \cdot b_i}{1 - 1.5 \cdot b_i} \quad (6.2)$$

jossa M_i on saatavan i duraatio ja R_i on saatavan i korrelaatio systemaattiseen riskitekijään ja se määritellään suurille yritysvastapuolille seuraavasti,

$$R_i = 0.24 - 0.12 \cdot (1 - e^{-50 \cdot PD_i}) \quad (6.3)$$

Vastaavasti b_i on saatavan maturiteettikorjaus, joka yhdessä UL funktion viimeisen tulotermin kanssa kuvaa odottamattoman luottotappion riippuvuussuhdetta saatavan maturiteetista empiirisiin havaintoihin perustuen (Basel Committee on Banking Supervision 2005). Maturiteettikorjaus b_i määritellään seuraavasti,

$$b_i = [0.11852 - 0.05478 \cdot \ln(PD_i)]^2 \quad (6.4)$$

Vaikka Basel II malli on yleisesti käytetty ja regulatorinen luottotappioriskin mittaamiseen käytetty malli, se sisältää myös puutteita. Mallia on kritisoitu sen myötäsyklisyydestä eli käytännössä siitä, että malli käytännössä aliarvio lainaportfolion luottotappioriskit hyvässä luottosyklissä ja taloudellisten kriisien aikana riskimitta ja luottoriskin pääomavaateet kasvavat, kun vastapuolien taloudellinen tila heikkenee ja vastapuolien arvioidut *PD* arvot kasvavat, kun samaan aikaan toteutuneet luottotappiot kasvavat ja lainaportfolion haltijan oma varallisuus vähenee toteutuneiden luottotappioiden seurauksena. Myötäsyklisyyttä voidaan pyrkiä vähentämään käyttämällä *PD*:n arviointiin malleja, jotka ovat luottosyklisiä riippumattomia (engl. through-the-cycle), mutta tämä on käytännössä osoittautunut haastavaksi. (Bikker & Hu 2002; Lowe 2002)

Lisäksi mallista haluttiin riittävän yksinkertainen, analyyttinen ja saatavaportfolion kannalta sellainen, että uuden lainan lisääminen portfolioon ei vaikuta olemassa olevan portfolion riskillisyyteen, niin mallista luotiin asymptoottinen yhden riskifaktorin malli, mikä käytännössä tarkoittaa sitä, että toimiakseen oikein mallinnettavan luottoportfolion tulisi olla täydellisesti hajautunut. (Gordy 2003)

7. JVK PORTFOLION RISKI

Aiemmissa luvuissa esitettyyn teoriaan nojaten voidaan todeta yritysten joukkovelkakirjalainaportfolion riskin koostuvan ainakin seuraavista riskifaktoreista:

- a) Riskittömien korkojen muutokset, Δr
- b) Riskipreemioiden systemaattiset muutokset, $\Delta \lambda$
- c) Yksittäisiin joukkovelkakirjalainoihin liittyvä absoluuttinen luottoriski eli riski siitä, että vastapuoli ei kykene maksamaan lainaa tai sen kuponkikorkoja takaisin, *Credit*

Mikäli riskifaktorit oletetaan normaalijakautuneiksi, niin portfolion VaR voidaan laskea yksittäisten riskifaktorien muutoksista aiheutuvista VaR arvoista soveltaen korreloituneiden ja normaalijakautuneiden muuttujien X ja Y yhteiselle keskihajonnalle σ_{X+Y} annettua kaavaa (Hull 2009, s. 480),

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y} \quad (7.1)$$

jossa σ_X ja σ_Y ovat muuttujien X ja Y keskihajonnat ja ρ niiden välinen korrelaatio. Tällöin portfolion VaR luottamustasolla α voidaan määrittellä seuraavasti,

$$VaR(\alpha) = \sqrt{VaR(\alpha)_{\Delta r + \Delta \lambda}^2 + VaR(\alpha)_{Credit}^2 + 2 \cdot \rho \cdot VaR(\alpha)_{\Delta r + \Delta \lambda} \cdot VaR(\alpha)_{Credit}} \quad (7.2)$$

jossa ρ on luottoriskimitan $VaR(\alpha)_{Credit}$ ja riskittömien korkojen ja riskipreemioiden muutoksista aiheutuvan riskimitan $VaR(\alpha)_{\Delta r + \Delta \lambda}$ välinen korrelaatio. Koska $VaR(\alpha)_{\Delta r + \Delta \lambda}$ määritetään simuloimalla, niin Δr ja $\Delta \lambda$ välinen korrelaatorakenne tulee huomioitua osana simulaatioasetelmaa. Vastaavasti $VaR(\alpha)_{Credit}$ saadaan laskemalla kunkin joukkovelkakirjalainan i luottoriski Basel II kaavan avulla seuraavasti,

$$VaR(\alpha)_{Credit} = \sum_{i=1}^n EAD_i \cdot LGD_i \cdot \left[N \left(\frac{N^{-1}(PD_i) + \sqrt{R_i} \cdot N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - R_i}} \right) - PD_i \right] \cdot \frac{1 + (M_i - 2.5) \cdot b_i}{1 - 1.5 \cdot b_i},$$

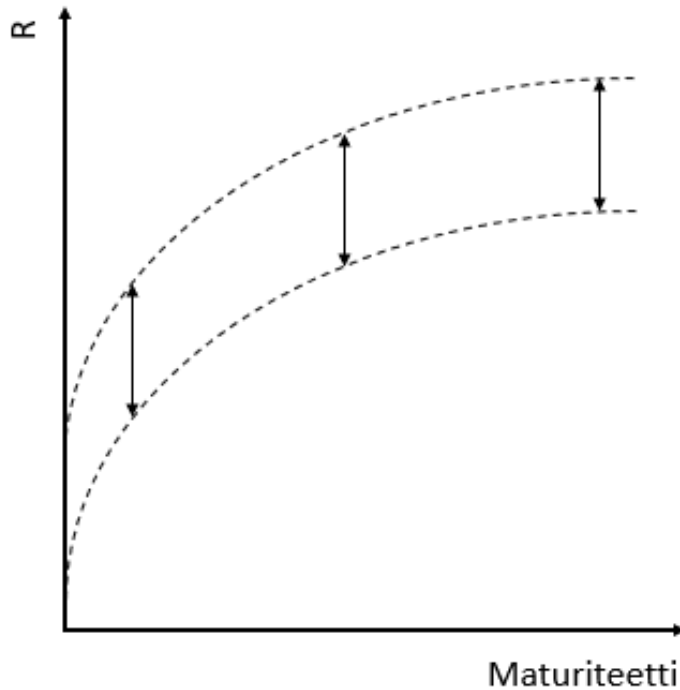
$$R_i = 0.24 - 0.12 \cdot (1 - e^{-50 \cdot PD_i}),$$

$$b_i = [0.11852 - 0.05478 \cdot \ln(PD_i)]^2 \quad (7.3)$$

jossa EAD_i on joukkovelkakirjalainan i markkina-arvo, LGD_i on joukkovelkakirjalainan i takaisinsaantiprosentti luottotappion realisoituessa, M_i on joukkovelkakirjalainan i modifioitu duraatio ja PD_i on joukkovelkakirjalainan vastapuolen arvioitu maksukyvyttömyystodennäköisyys pitkällä aikavälillä (through-the-cycle).

Riskittömien korkojen ja riskipreemioiden systemaattisista muutoksista aiheutuva $VaR(\alpha)_{\Delta r + \Delta \lambda}$ riskimitta voidaan määrittää riskittömien korkojen ja systemaattisen riskipreemion kalibroituja stokastisten prosessien kautta Monte Carlo simulaatiota hyödyntäen. Simulaatio voitaisiin suorittaa siten, että simuloidaan m määrä riskittömiä korkokäyriä ja systemaattisen riskipreemion käyriä kaikille JVK portfolion maturiteeteille ja edelleen laskemalla kunkin joukkovelkakirjalainan arvon muutos ΔV voitaisiin laskea määrittämällä joukkovelkakirjalainan kassavirtojen nykyarvo kullakin simuloitulla korkokäyrällä $r + \lambda$ (ks. Kaava 5.1) ja vähentämällä näin saatu velkakirjan arvo sen nykyisestä markkina-arvosta V_0 . Tämä kuitenkin vaatisi riskittömän koron prosessin simulointia kaikille joukkovelkakirjalainaportfolion tulevien kassavirtojen maturiteeteille sekä joukkovelkakirjalainaportfolion tulevien kassavirtojen mallintamista ja hyödyntämistä laskennassa.

Mikäli shokkitilanteessa korkokäyrän muutoksien oletetaan tapahtuvan täysin korreloitu-neesti kaikille maturiteeteille eli koko korkokäyrän taso muuttuu, niin joukkovelkakirjalai-naportfolion arvon muutoksia voidaan tarkastella yksinkertaisemmalla tavalla. Oletusta siitä, että korkoprosessi kaikille maturiteeteille on täydellisesti korreloitunut ja siten korkokäyrän muutokset ovat korkokäyrän tason muutoksia, voidaan perustella sillä, että erityisesti makrotaloudelliset shokit näyttävät aiheuttavan korkokäyrän tason muutoksia (Diebold et al. 2008) ja toisaalta oletus on riskienhallinnan näkökulmasta konservatiivinen, sillä mikäli portfolion kassavirrat ovat hajautuneet maturiteetin suhteen niin korkokäyrän tason muutos kauttaaltaan tuottaa myös suurimman muutoksen portfolion arvoon. Kuvassa 3 on havainnollistettu korkokäyrän tason muutosta.



Kuva 3. Korkokäyrän tason muutos (parallel shift).

Mikäli korkokäyrän muutokset oletetaan korreloituneiksi kaikilla maturiteeteilla ja muutokset ovat nimenomaisesti korkokäyrän tason muutoksia voidaan joukkovelkakirjalainojen arvon muutoksiin hyödyntää modifioidun duraation D_{mod} määritelmää (Hull 2009),

$$D_{mod} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial R} \quad (7.4)$$

Jossa V on velkakirjan arvo ja R on riskittömän koron r ja riskipreemion λ summa eli velkakirjan tuottovaade. Edelleen modifioidun duraation määritelmästä voidaan johtaa approksimaatio,

$$\Delta V \approx -V \cdot D_{mod} \cdot \Delta R \quad (7.5)$$

Tällöin voidaan simuloida m kierrosta riskittömien korkojen r stokastisia prosesseja (kaava 4.7 tai 4.10) sekä rating kategoriasta riippuvien systemaattisten riskipreemioiden stokastisia prosesseja λ (kaava 5.3) vuoden aikahorisontilla huomioiden näiden prosessien väliset korrelaatiot. Edelleen voidaan laskea kullekin simulaatiokierrokselle portfolion arvon muutos ΔV seuraavasti,

$$\Delta V_m = \sum_{i=1}^n -V_i \cdot D_{mod,i} \cdot \Delta R_{i,m} , \quad (7.6)$$

$$\Delta R_{i,m} = \Delta r_m + \Delta \lambda_{m,i} \quad (7.7)$$

jossa V_i on yksittäisen joukkovelkakirjalainan arvo hetkellä 0, $D_{mod,i}$ on yksittäisen joukkovelkakirjalainan modifioitu duraatio hetkellä 0, Δr_m on riskittömän koron muutos vuoden aikahorisontilla ja se noudattaa riskittömän koron stokastista prosessia r ja $\lambda_{m,i}$ on yksittäisen velkakirjan riskipreemion muutos, joka noudattaa velkakirjasta riippuvan rating-kategorian mukaista stokastista systemaattisen riskipreemion prosessia (kaava 5.3). Edelleen kun simulaatioiden $0 \rightarrow m$ portfolion arvon muutoksista muodostuu tapiojakauma, voidaan siitä määrittää $VAR(\alpha)_{\Delta r + \Delta \lambda}$ halutulla luottamustasolla α

Jotta stokastisia riskittömän koron ja riskipreemion prosesseja voidaan käsitellä numeerisesti, on ne muutettava diskreetiksi ajan suhteen. Tämä voidaan tehdä hyödyntämällä Euler-Maryama muunnosta ja esimerkiksi CIR prosessille (kaava 4.10) approksimaatio voidaan esittää esimerkiksi seuraavasti,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(\mu - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{|r(t_i)|}\sqrt{\Delta t}Z_i \quad (7.8)$$

jossa $r(0)$ on annettu ja Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1} ovat normaalijakautuneita satunnaismuuttujia $Z_i \sim N(0,1)$. Termin $\sqrt{\Delta t}Z_i$ oletetaan noudattavan samaa jakaumaa kuin CIR mallin stokastisen prosessin Brownin liike ΔB_t . Kun CIR prosessista tehdään diskreetti Euler approksimaatiolla on syytä huomata, että diskretisointivirheen takia $r(t_{i+1})$ voisi saada negatiivisia arvoja, vaikka CIR prosessi on aina positiivinen. Näin ollen diffuusiotermissä otetaan itseisarvo termistä $r(t_i)$. Muita tapoja ottaa positiivisuusehto huomioon Euler muunnoksessa olisi esittää diskreetti prosessi seuraavasti,

$$r(t_{i+1}) = \max(r(t_i) + \alpha(\mu - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{r(t_i)}\sqrt{\Delta t}Z_i, 0) \quad (7.9)$$

tai,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(\mu - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\max(r(t_i), 0)}\sqrt{\Delta t}Z_i, 0 \quad (7.10)$$

8. PARAMETRIEN ESTIMOINTIMENETELMÄT

Stokastisten prosessien r ja λ parametrien estimointiin voidaan käyttää historiallista markkinadataa sekä tilastollisia estimointimenetelmiä. Yleisesti tunnettuja tilastollisia estimointimenetelmiä kuten pienimmän neliösumman menetelmä (PNS) ja suurimman uskottavuuden menetelmä (MLE) (Johnson & Wichern 2002; Millar 2011). Eksaktissa suurimman uskottavuuden menetelmässä (engl. Maximum Likelihood Estimation) oletetaan, että tarkasteltavan ilmiön jakauma tiedetään lukuun ottamatta tiettyä määrää tuntemattomia parametreja θ . Nämä tuntemattomat parametrit estimoidaan dataa vasten siten, että parametrit maksimoivat datapisteiden todennäköisyyden tiettyä todennäköisyysjakauma olettaen vasten. Suurimman uskottavuuden menetelmää pidetään hyvänä menetelmänä rahoituksessa käytettävien stokastisten prosessien parametrien estimointiin erityisesti, kun niiden todennäköisyysjakauma on tiedossa tai se voidaan arvioida. (Phillips & Yu 2009) Seuraavaksi esitetään parametrien estimointimenetelmät sekä CIR mallille, että Vasicek mallille.

8.1 CIR mallin parametrien estimointi

Pienimmän neliösumman menetelmällä voidaan estimoida aloitusparametrit numeeriselle suurimman uskottavuuden menetelmälle. Parametrien estimointi pienimmän neliösumman menetelmällä on esitetty esimerkiksi Johnson & Wichernin kirjassa (2002, ss. 364-370), jota seuraavissa kaavoissa on hyödynnetty. Estimointiin käytetään diskretisoitua versiota (kaava 7.8) kaavasta 4.10,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(\mu - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{|r(t_i)|}\Delta W_i \quad (8.1)$$

jossa $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ja $\Delta t = t - s$. Ryhmittämällä termejä uudelleen saadaan,

$$\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\sqrt{|r(t_i)|}} = \frac{\alpha}{\sqrt{|r(t_i)|}}(\mu - r(t_i))\Delta t + \sigma\Delta W_i, \quad (8.2)$$

$$\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\sqrt{|r(t_i)|}} = \alpha\mu \frac{\Delta t}{\sqrt{|r(t_i)|}} - \alpha\sqrt{|r(t_i)|}\Delta t + \sigma\Delta W_i \quad (8.3)$$

merkitsemällä,

$$y_i = \frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\sqrt{|r(t_i)|}}, \quad (8.4)$$

$$\beta_1 = \alpha\mu, \quad (8.5)$$

$$\beta_2 = -\alpha, \quad (8.6)$$

$$z_{1i} = \frac{\Delta t}{\sqrt{|r(t_i)|}}, \quad (8.7)$$

$$z_{2i} = \sqrt{|r(t_i)|}\Delta t, \quad (8.8)$$

$$\varepsilon_i = \sigma\Delta W_i \quad (8.9)$$

saadaan yhtälö 8.3 muotoon,

$$y_i = \beta_1 z_{1i} + \beta_2 z_{2i} + \varepsilon_i \quad (8.10)$$

josta edelleen voidaan merkitä,

$$Y = Z\beta + \varepsilon \quad (8.11)$$

jossa,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,1} \\ z_{1,2} & z_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ z_{1,n-1} & z_{2,n-1} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \varepsilon = \sigma\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1(0,1) \\ \mathcal{N}_2(0,1) \\ \vdots \\ \mathcal{N}_{n-1}(0,1) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

jossa $\mathcal{N}_1(0,1), \dots, \mathcal{N}_{n-1}(0,1)$ ovat riippumattomia normaalijakautuneita satunnaismuuttujia $\mathcal{N}(0,1)$. Tällöin parametrivektorille β saadaan pienimmän neliösumman mukaiset estimaatit seuraavasti,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \arg \min \|Y - Z\beta\|^2 \quad (8.13)$$

josta edelleen saadaan estimaatit $\hat{\alpha}$ ja $\hat{\mu}$ seuraavasti,

$$\hat{\alpha} = -\hat{\beta}_2, \quad (8.14)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}} \quad (8.15)$$

Lisäksi voidaan $\hat{\sigma}$ määrittää seuraavasti (Johnson & Wichern 2002),

$$\widehat{\sigma^2\Delta t} = \frac{1}{n} \|Y - Z\hat{\beta}\|^2, \quad (8.16)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{tn}} \|Y - Z\hat{\beta}\|. \quad (8.17)$$

Yllä esitettyjä pienimmän neliösumman menetelmällä (PNS) haettuja estimaatteja CIR mallin parametreille α, β ja σ voidaan hyödyntää myös suurimman uskottavuuden menetelmän numeerisen ratkaisun aloitusparametreina.

Suurimman uskottavuuden estimointimenetelmää voidaan hyödyntää CIR mallin parametrien estimointiin sillä tarkasteltavan prosessin siirtymätodennäköisyysjakauma on tiedossa (ks. kaava 4.11). Suurimman uskottavuuden menetelmässä maksimoidaan ilmiötä kuvaavaa uskottavuusfunktiota (engl. likelihood function), jolloin suurimman uskottavuuden estimaatti on se arvo, joka maksimoi uskottavuusfunktion. (Myung 2003) Kun $r(t_i)$ hetkellä t_i tiedetään ja toisaalta tiedetään CIR prosessin siirtymätodennäköisyyksien noudattavan luvussa 4.1.2 esitettyä jakaumaa (kaava 4.11) voidaan parametrivektorista θ riippuva uskottavuusfunktio esittää,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n-1} p(r(t_{i+1})|r(t_i), \theta) \quad (8.18)$$

jossa $\theta = (\alpha, \mu, \sigma)$ ovat tuntemattomia parametreja ja $p(r(t_{i+1})|r(t_i), \theta)$ CIR prosessin ehdollinen siirtymätodennäköisyysjakaumafunktio, joka riippuu vektorin θ arvoista. Ottamalla luonnollinen logaritmi funktiosta $L(\theta)$ saadaan,

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln p(r(t_{i+1})|r(t_i), \theta) \quad (8.19)$$

Sijoittamalla CIR mallin siirtymätodennäköisyysjakaumafunktiota (ks. Kaava 4.11) funktiolle $\ln L(\theta)$ saadaan,

$$\ln L(\theta) = (n-1) \ln c + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ -u(t_i) - v(t_{i+1}) + \frac{q}{2} \ln \frac{v(t_{i+1})}{u(t_i)} + \ln I_q 2\sqrt{u(t_i)v(t_{i+1})} \right\} \quad (8.20)$$

jolloin parametrivektori $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ voidaan estimoida maksimoimalla $\ln L(\theta)$ vektorin θ suhteen,

$$\hat{\theta} = \arg \max \ln L(\theta) \quad (8.21)$$

Käytännössä estimointi voidaan suorittaa numeerisesti MATLAB:lla hyödyntäen funktioita `fminsearch` ja `besselj` sekä pienimmän neliösumman menetelmällä estimoituja aloitusparametreja vektorille θ .

8.2 Vasicekin mallin parametrien estimointi

Vasicekin korkoprosessi on normaalijakautunut (Vasicek 1977) ja sille voidaan laskea parametriestimaatit $\theta = (\alpha, \mu, \sigma)$ pienimmän neliösumman menetelmällä kuten CIR mallille, mutta käyttämällä CIR mallin sijasta Vasicekin korkoprosessin diskretisoitua funktiota,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(\mu - r(t_i))\Delta t + \sigma\Delta W_i. \quad (8.22)$$

Koska Vasicekin korkoprosessi on normaalijakautunut ja sen siirtymätodennäköisyyshaikauhan ehdollinen odotusarvo voidaan määrittellä kaavan 4.8 mukaisesti ja vastaavasti ehdollinen varianssi voidaan määrittellä kaavan 4.9 mukaisesti voidaan suurimman uskottavuuden menetelmän mukainen uskottavuusfunktio kirjoittaa seuraavasti,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r(t_{i+1}) - (r(t_i)e^{-\alpha\Delta t} + \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}))}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2 \right] \quad (8.23)$$

josta ottamalla luonnollinen logaritmi saadaan,

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{r(t_{i+1}) - (r(t_i)e^{-\alpha\Delta t} + \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}))}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right]^2 \quad (8.24)$$

jolloin parametrivektori $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ voidaan estimoida maksimoimalla $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ vektorin $\boldsymbol{\theta}$ suhteen,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max \ln L(\boldsymbol{\theta}). \quad (8.25)$$

Estimointi voidaan tehdä numeerisesti MATLAB:illa samaan tapaan kuin CIR prosessille. Vasicekin mallissa logaritmista uskottavuusfunktiota derivoimalla estimoitaville parametreille löytyy kuitenkin myös analyttiset ratkaisut, jotka on esitetty Brigon ja Mercurion kirjassa (2006, s.62).

8.3 Parametriestimoinnin virhetarkastelu

Suurimman uskottavuuden menetelmällä saatujen parametriestimaattien standardivirheestimaatit saadaan käytännössä logaritmisen uskottavuusfunktion $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ toisen asteen osittaisderivaattojen Hessian matriisiin $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ avulla. Parametriestimaattien $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ on $k \times k$ matriisi, jonka i, j ilmentymä voidaan kirjoittaa logaritmisen uskottavuusfunktion toisen asteen osittaisderivaattana parametrivektorin $\boldsymbol{\theta}$ ilmentymien i ja j suhteen seuraavasti (Millar 2011),

$$H_{i,j} = \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (8.26)$$

Tällöin parametrivektorin $\boldsymbol{\theta}$ varianssi - kovarianssi matriisi $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ saadaan Hessian matriisin negatiivisen odotusarvon käänteismatriisina,

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = (-E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})])^{-1} \quad (8.27)$$

jolloin matriisin $V(\theta)$ i, j ilmentymä kuvaa estimoitujen parametrien θ_i ja θ_j välistä kovarianssia $cov(\theta_i, \theta_j)$. Näin ollen parametrivektorin θ standardivirhevektori S pisteessä $\hat{\theta}$ saadaan ottamalla matriisista $V(\hat{\theta})$ diagonaalinen neliöjuuri. Käytännössä logaritmisu-kottavuusfunktion Hessian matriisi pisteessä $\hat{\theta}$ voidaan arvioida numeerisesti MATLAB ohjelmalla käyttämällä `hessian` funktiota.

8.4 Stokastisten prosessien väliset korrelaatiot

Riskittömän koron prosessi r ja systemaattisten riskipreemioiden prosessit λ vaikuttavat yhdessä joukkovelkakirjalainojen arvon kehitykseen ja sitä kautta niiden riskiin kaavassa 7.6 kuvatulla tavalla. Näin ollen on syytä tarkastella myös kyseisten prosessien välistä korrelaatiota. Hullia (2009, ss. 512-513) mukaillen korrelaatio muuttujien X ja Y välillä voidaan määrittellä seuraavasti,

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (8.28)$$

jossa σ_X ja σ_Y ovat muuttujien X ja Y keskiarvojen keskiarvot ja $\text{cov}(X, Y)$ on muuttujien X ja Y välinen kovarianssi, joka puolestaan on määritelty seuraavasti,

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (8.29)$$

jossa μ_X ja μ_Y ovat muuttujien X ja Y keskiarvot ja E tarkoittaa odotusarvoa. Jos x_i ja y_i määritellään muuttujien X ja Y suhteelliseksi muutokseksi päivien i ja $i - 1$ välillä,

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}}, \quad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}} \quad (8.30)$$

ja lisäksi määritellään muuttujien X ja Y päivittäiset volatilitetit $\sigma_{X,n}$ ja $\sigma_{Y,n}$ päivälle n sekä kovarianssiestimaatti päivälle n muuttujien X ja Y välillä Cov_n niin korrelaatio parametrien X ja Y välillä päivänä n voidaan määrittää seuraavasti

$$\frac{\text{Cov}_n}{\sigma_{X,n} \sigma_{Y,n}}. \quad (8.31)$$

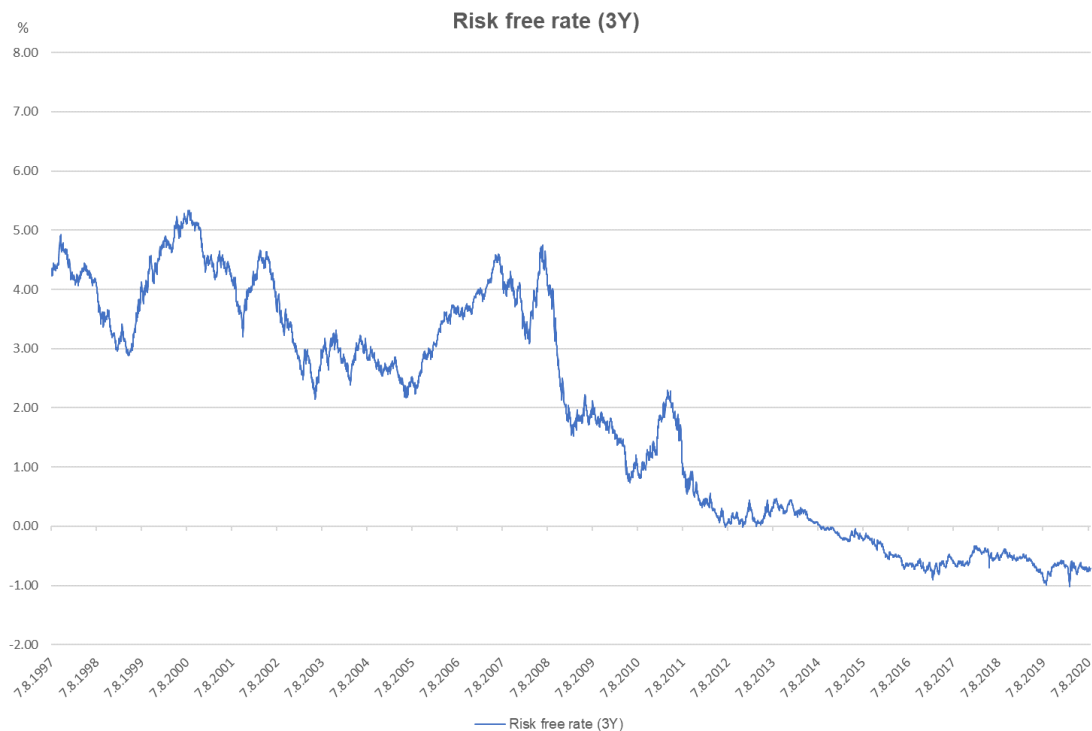
Tällöin korrelaatio voidaan estimoida muuttujien X ja Y päivittäisistä muutoksista. Kun muuttujia on useampi kuin kaksi, niin muuttujien välinen korrelaatorakenne voidaan kuvata korrelaatiomatriisin kautta. Jos määritetään muuttujavektori $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ niin korrelaatiomatriisi Σ_X vektorille \mathbf{X} on $(n \times n)$ matriisi jonka (i, j) elementti on

$$\Sigma_{X,ij} := \text{Corr}(X_i, X_j). \quad (8.32)$$

9. PARAMETRIEN ESTIMOINTI HISTORIALLISELLA DATALLA

9.1 Estimointiaineisto

Riskittömän koron osalta estimointiaineistona on päätetty käyttää Saksan valtiolainojen jälkimarkkinahinnoista johdetun korkorakenteen mukaista korkoa 3 vuoden maturiteetille. Riskittömän koron osalta aineiston valintaan on vaikuttanut se, että riskimallia tuliaan käyttämään euroalueen luottoriskillisiin joukkovelkakirjalainoihin, joiden maturiteetti vaihtelee pääasiassa 0-6 vuoden välillä. Lisäksi Saksan valtiolainoissa likviditeetti on hyvällä tasolla ja valtiolainojen korkotasoa on euroalueen matalin. Saksan valtiolainojen korkorakenteen päivittäiset noteeraukset kolmen vuoden maturiteetille elokuusta 1997 lähtien löytyvät Bundesbankin julkaisemina (Bundesbank, 2020). Kuvassa 4 on esitetty Saksan valtion riskittömän koron aikasarja 3 vuoden maturiteetille.

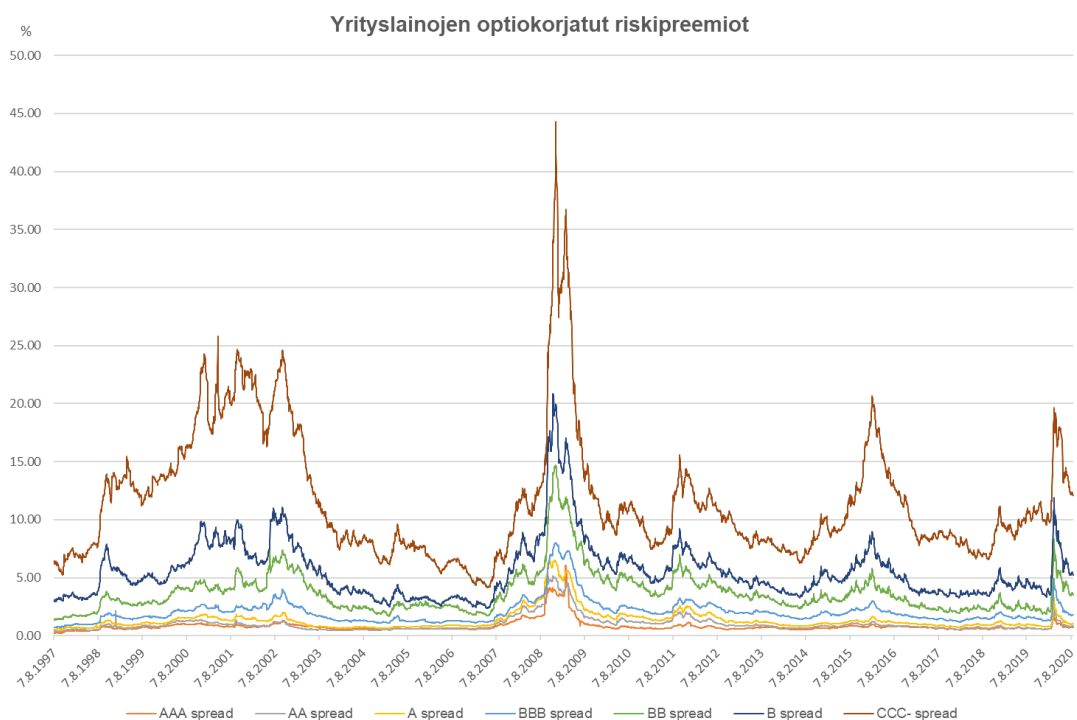


Kuva 4. Saksan valtiolainoista määritetyn riskittömän koron aikasarja (maturiteetti = 3 vuotta).

Kuvasta 4 voidaan havaita, että Saksan valtiolainojen korko laskenut voimakkaasti vuosien 2008-2009 finanssikriisin jälkeen, eikä ole enää palautunut Finanssikriisiä edeltäneelle tasolle. Lisäksi voidaan havaita, että korko on ollut negatiivinen vuoden 2014 lo-

pulta lähtien. Negatiivisuus asettaa kyseenalaiseksi CIR mallin käytettävyyden riskittömän koron mallintamisessa, sillä CIR prosessi sisältää ei-negatiivisuusehdon kuten kapaleessa 4.2 on esitetty. Ei negatiivisuusehdon perusteella CIR prosessia on yleisesti pidetty Vasicekin mallia kehittyneempänä tapana mallintaa riskittömiä korkoja (Privault 2012), mutta tuore havaintoaineisto asettaa argumentin kyseenalaiseksi.

Riskipreemioprosessien estimointiin eri rating -kategorioille voidaan käyttää laajoja riskipreemiaindekskejä. Federal Reserve Bank of St. Louis julkaisee laajalti aikasarjoja talouden ja markkinoiden eri osa-alueilta. Kyseinen tutkimuslaitos julkaisee myös eri rating -kategorioiden optio korjattuja riskipreemiaindekskejä yritysten joukkovelkakirjalainoille Yhdysvaltojen markkinoilla. OAS indeksit siis mittaavat kunkin rating luokan keskimääräistä optio korjattua riskipreemiota markkinoilla ja se on laskettu kyseiseen rating luokkaan kuuluvien joukkovelkakirjalainojen tuoton ja riskittömän koron välisenä erotuksena joukkovelkakirjalainojen markkina-arvoilla painotettuna. (Federal Reserve Bank of St. Louis 2020a-g) Näin ollen kyseiset riskipreemiaindeksit ottavat huomioon systemaattisen riskipreemioiden dynamiikan, mutta ne eivät kuvaa yksittäisten joukkovelkakirjalainojen luottoriskiä tai siirtymiä rating-kategoriasta toiseen. Kuvassa 5 on esitetty kunkin rating luokan riskipreemiaindeksin päivittäinen kehitys elokuusta 1997 alkaen.



Kuva 5. Riskipreemioiden aikasarjat rating -luokittain.

Kuvasta 5 voidaan havaita, että parempien luottoluokitususten joukkovelkakirjalainojen riskipreemioiden taso keskimäärin on alhaisempi kuin huonompien luottoluokitususten joukkovelkakirjalainojen riskipreemioiden taso. Lisäksi kuvan perusteella näyttäisi siltä, että

huonommin luokiteltujen joukkovelkakirjalainojen riskipreemioiden volatilitteetti näyttäisi olevan korkeampi kuin paremmin luokitettujen joukkovelkakirjalainojen. Kaikkien riskipreemioindeksien päivittäiset muutokset näyttäisivät myös olevan korreloituneita varsinkin taloudellisten myllerrysten (Finanssikriisi 2008, Eurokriisi 2011 ja COVID-19 kriisi 2020) aikana. Kaikkien rating-kategorioiden riskipreemiot ovat koko havaintojakson ajan pysyneet positiivisina, mikä on linjassa riskipreemiomallien erityisesti riskipreemioiden stokastiseen mallintamiseen käytetyn CIR intensiteettimallin kanssa.

Taulukossa 1 on esitetty havaintoaineiston tilastollisia tietoja. Taulukossa 1 tiedot on esitetty ykkösinä (1 = 100%). Taulukosta 1 havaitaan riskipreemioiden tason ja keskihajonnan kasvavan, kun rating-luokka huononee. Vastaavasti havaitaan, että riskitön korko on negatiivisesti vinoutunut normaalijakaumaan nähden ja toisaalta riskipreemioiden erittäin huipukkaita erityisesti hyvillä rating luokilla.

Taulukko 1. *Estimointiaineiston tilastollisia tunnuslukuja.*

	Riskitön korko (3Y)	AAA spread	AA spread	A spread	BBB spread	BB spread	B spread	CCC-spread
Havaintojen keskiarvo	0.01904	0.00821	0.01014	0.01351	0.02056	0.03710	0.05571	0.11605
Havaintojen keskihajonta	0.01936	0.00541	0.00689	0.00874	0.01048	0.01832	0.02535	0.05414
Havaintojen vinous	-0.00101	4.77259	3.31078	3.33433	2.91804	2.40195	2.16209	1.69203
Havaintojen huipukkuus	1.49465	30.13560	16.12447	16.43052	14.26275	11.50124	10.13395	6.70106
Havaintojen minimi	-0.01020	0.00210	0.00360	0.00490	0.00720	0.01360	0.02360	0.04140
Havaintojen maksimi	0.05330	0.06070	0.05150	0.06490	0.08040	0.14680	0.20840	0.44290

9.2 Korrelaatiot

Riskittömän koron ja riskipreemioiden päivittäisten suhteellisten muutosten väliset korrelaatiot on esitetty alla olevassa korrelaatiomatriisissa (Taulukko 2). Korrelaation voidaan tulkita olevan heikkoa, kun korrelaation itseisarvo on pienempi kuin 0.35, keskivahvaa kun se on välillä 0.36 – 0.67 ja vahvaa kun se ylittää 0.68 (Taylor 1990). Korrelaatiomatriisista havaitaan, että riskittömän koron korrelaatio riskipreemioiden kanssa on lähellä arvoa 0 eli riskittömän koron muutokset eivät juurikaan korreloi riskipreemioiden muutosten kanssa. Toisaalta eri rating -kategorioiden riskipreemioiden väliset korre-

laatiot ovat kaikki positiivisia, eli riskipreemioiden suhteelliset muutokset näyttävät korreloivan keskenään. Erityisesti toisiaan lähellä olevien rating kategorioiden korrelaatio on voimakasta.

Taulukko 2. *Estimointiaineistosta johdettu riskittömän koron ja riskipreemioiden välinen korrelaatorakenne (korrelaatiomatriisi).*

	Riskitön korko (3Y)	AAA spread	AA spread	A spread	BBB spread	BB spread	B spread	CCC- spread
Riskitön korko (3Y)	1	0.003112	-0.00982	-0.02618	-0.02189	-0.00883	-0.01327	-0.02213
AAA spread	0.003112	1	0.480843	0.55348	0.458339	0.350133	0.341736	0.277294
AA spread	-0.00982	0.480843	1	0.675139	0.56589	0.402466	0.393685	0.341724
A spread	-0.02618	0.55348	0.675139	1	0.720082	0.493946	0.492788	0.41723
BBB spread	-0.02189	0.458339	0.56589	0.720082	1	0.506934	0.574242	0.471489
BB spread	-0.00883	0.350133	0.402466	0.493946	0.506934	1	0.805944	0.628512
B spread	-0.01327	0.341736	0.393685	0.492788	0.574242	0.805944	1	0.663981
CCC- spread	-0.02213	0.277294	0.341724	0.41723	0.471489	0.628512	0.663981	1

Korrelaatiotarkastelussa on syytä kiinnittää huomiota myös korrelaatiotarkastelun tilastolliseen merkitsevyyteen. Havaintojen tilastollista merkitsevyyttä voidaan mitata p-arvolla ja havainnon tilastollinen merkitsevyys on sitä suurempi, mitä pienempi p-arvo on. Tilastollisesti merkittävänä havaintoa voidaan pitää, kun p-arvo on pienempi kuin 0.05. (Taylor 1990) Taulukossa 3 on esitetty yllä esitettyjen korrelaatioiden (Taulukko 2) p-arvot.

Taulukko 3. Riskittömän koron ja riskipreemioiden välisen korrelaatorakenteen p-arvot.

	Riskitön korko (3Y)	AAA spread	AA spread	A spread	BBB spread	BB spread	B spread	CCC-spread
Riskitön korko (3Y)	1.0000	0.8122	0.4532	0.0455	0.0945	0.5000	0.3108	0.0910
AAA spread	0.8122	1.0000	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001
AA spread	0.4532	<0.0001	1.0000	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001
A spread	0.0455	<0.0001	<0.0001	1.0000	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001
BBB spread	0.0945	<0.0001	<0.0001	<0.0001	1.0000	<0.0001	<0.0001	<0.0001
BB spread	0.5000	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	1.0000	<0.0001	<0.0001
B spread	0.3108	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	1.0000	<0.0001
CCC-spread	0.0910	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	1.0000

Talukoista 3 ja 4 voidaan siten todeta, että riskitön korko ei korreloi tilastollisesti merkittävällä tavalla riskipreemioiden kanssa, joten se voidaan olettaa itsenäiseksi ja riskipreemioiden välinen korrelaatiomatriisi voidaan ilmaista alla esitettyllä tavalla (Taulukko 4).

Taulukko 4. Riskipreemioiden välinen korrelaatorakenne (korrelaatiomatriisi).

	AAA spread	AA spread	A spread	BBB spread	BB spread	B spread	CCC-spread
AAA spread	1	0.480843	0.55348	0.458339	0.350133	0.341736	0.277294
AA spread	0.480843	1	0.675139	0.56589	0.402466	0.393685	0.341724
A spread	0.55348	0.675139	1	0.720082	0.493946	0.492788	0.41723
BBB spread	0.458339	0.56589	0.720082	1	0.506934	0.574242	0.471489
BB spread	0.350133	0.402466	0.493946	0.506934	1	0.805944	0.628512
B spread	0.341736	0.393685	0.492788	0.574242	0.805944	1	0.663981
CCC-spread	0.277294	0.341724	0.41723	0.471489	0.628512	0.663981	1

9.3 Riskittömän koron prosessi

9.3.1 Vasicek

Yksi tapa mallintaa riskittömien korkojen prosessia on hyödyntää luvussa 4.1 esiteltyä Vasicekin stokastista korkoprosessia. Korkoprosessin parametrit keskiarvoon hakeutumisenopeus α , keskiarvoparametri μ ja volatilitteettiparametri σ voidaan estimoida riskittömän koron estimointiaineistosta hyödyntäen suurimman uskottavuuden menetelmää (MLE). Menetelmä on esitelty luvussa 8.2. Estimointi suoritetaan MATLAB -ohjelmalla. Kun estimointi suoritetaan koko riskittömän koron aineistolle eli vuosien 1997-2020 havainnoille, niin saadaan taulukon 5 mukaiset tulokset.

Taulukko 5. Riskittömän koron Vasicek prosessin parametriestimaatit estimointiaineistolla 1997-2020.

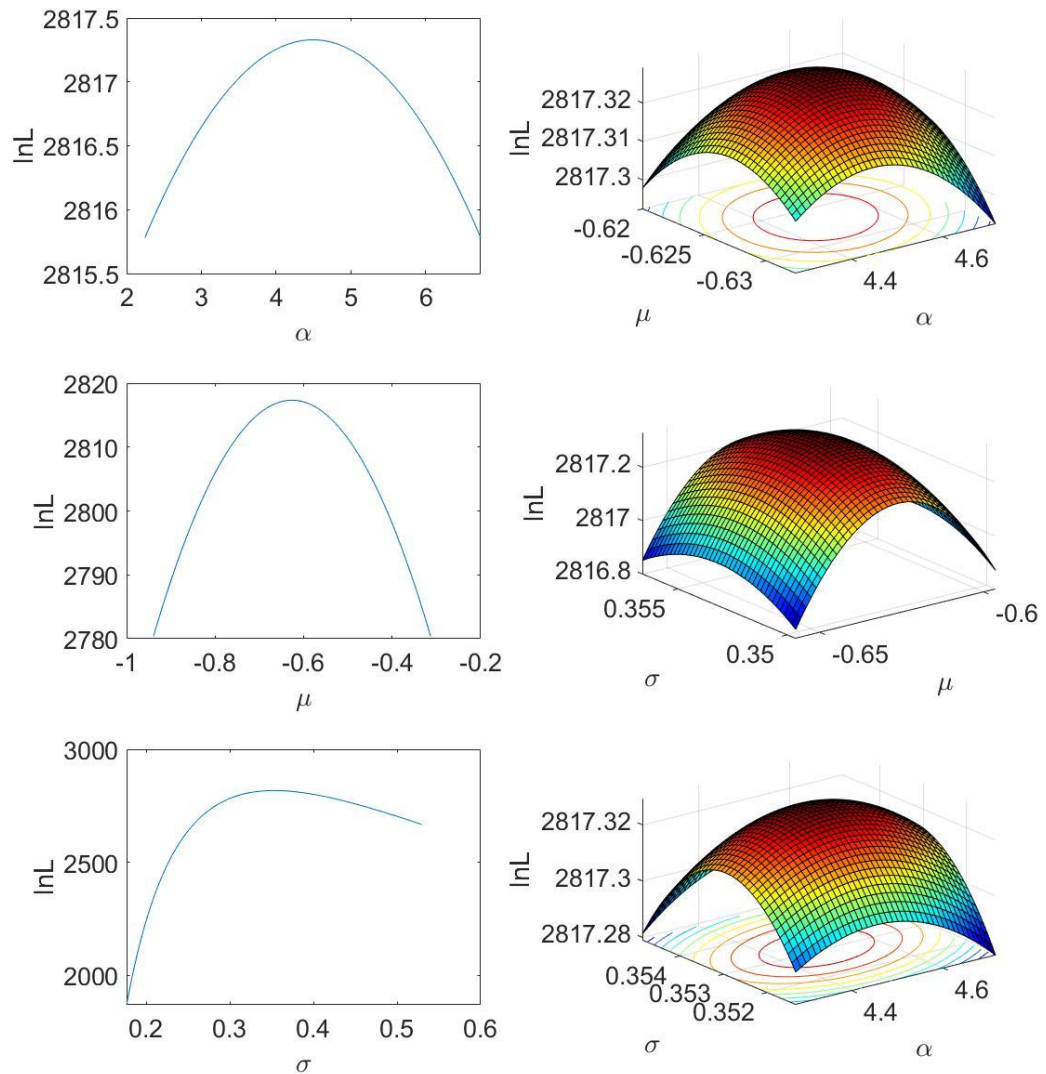
Riskitön korko r , aineisto 1997-2020	Nopeusparametri, α (std. Virhe)	Keskiarvoparametri, μ (std. Virhe)	Volatilitteettiparametri, σ (std. Virhe)
MLE	0.0594 (0.0754)	-1.726 (5.2169)	0.7026 (0.0065)

Taulukosta 5 havaitaan, että keskiarvoon hakeutumisenopeus α on hyvin lähellä nollaa ja toisaalta keskiarvoparametri μ on voimakkaasti negatiivinen ja itseasiassa negatiivisempi kuin yksikään aineiston havainto. Tarkasteltaessa keskiarvoparametrin μ standardi virhettä huomataan, että se on poikkeuksellisen suuri, mikä johtunee siitä, että havaintoperiodilla riskitön korko on ollut voimakkaasti laskeva kuten Kuvasta 4 nähdään. On myös esitetty argumentteja, että riskitön korko ei voi laskea enää voimakkaasti ja että talouden fundamentit ovat muuttuneet siten, että matalien korkojen aikakauden on arvioitu olevan pitkäkestoinen (Holston et al. 2017). Tällöin voidaan ajatella, että tuoreempi havaintoaineisto antaa luotettavamman kuvan korkojen käyttäytymisestä. Estimointiaineiston aikajakson valinta on yleinen ongelma VaR malleissa ja aikahorisontin valinta on aina kompromissi havaintoaineiston määrän ja sen tuoreuden välillä (Choudhry 2006). Kun parametrien estimointi suoritetaan vuosien 2016-2020 havaintoaineistolle saadaan alla olevan Taulukon 6 mukaiset estimointitulokset.

Taulukko 6. Riskittömän koron Vasicek prosessin parametriestimaatit estimointiaineistolla 2016-2020.

Riskitön korko r , aineisto 2016-2020	Nopeusparametri, α (std. Virhe)	Keskiarvoparametri, μ (std. Virhe)	Volatilitteettiparametri, σ (std. Virhe)
MLE	4.4901 (1.3018)	-0.6262 (0.0369)	0.3531 (0.0073)

Taulukosta 6 nähdään, että estimoitaessa parametreja vain tuoreimmalla havaintoaineistolla keskiarvoon hakeutumisenopeus kasvaa merkittävästi, keskiarvo nousee ja volatiliteetti pienenee. Lisäksi havaitut standardivirheet ovat suhteellisesti tarkasteltuna huomattavasti pienempiä. Vastaavasti Kuvassa 6 on esitetty uskottavuusfunktion herkkyyksiä parametrien suhteen käyttäen estimointiaineistoa 2016-2020. Kuvassa 6 vasemmalla on herkistely logaritmisesta uskottavuusfunktion käyttäytymisestä yksittäisten estimoitavien parametrien suhteen ja oikealla on puolestaan tarkasteltu uskottavuusfunktion käyttäytymistä parametriparien suhteen.



Kuva 6. Riskittömän koron Vasicek prosessin logaritmisesta uskottavuusfunktion herkkyyksiä estimoitujen parametrien suhteen.

9.3.2 CIR

Luvussa 4.2 esitelty CIR prosessi pysyy määritelmällisesti aina positiivisena. Estimointiaineistosta kuitenkin havaitaan, että riskitön korko r on tosiasiallisesti ollut negatiivinen vuoden 2014 lopusta lähtien. Tämä aiheuttaa haasteita kahdesta näkökulmasta. Ensinnäkin parametrien estimointia ei voida sellaisenaan suorittaa ja toisaalta CIR mallin sopeutus riskittömien korkojen prosessin mallintamiseen kyseenalaistuu. CIR mallia kuitenkin pidetään yleisesti parempana tapana mallintaa riskittömiä korkoja kuin Vasicek mallia, koska sen jakauma oletettaman ajatellaan paremmin kuvaavan riskittömien korkojen volatiliteettirakennetta (Brigo & Mercurio 2001). Ongelman ratkaisemiseksi on esitetty korkokäyrän tason keinotekoista muuttamista seuraavasti (Orlando et al. 2019),

$$r_{shift}(t) = r_{real}(t) + c, \quad t \in [0, T] \quad (9.1)$$

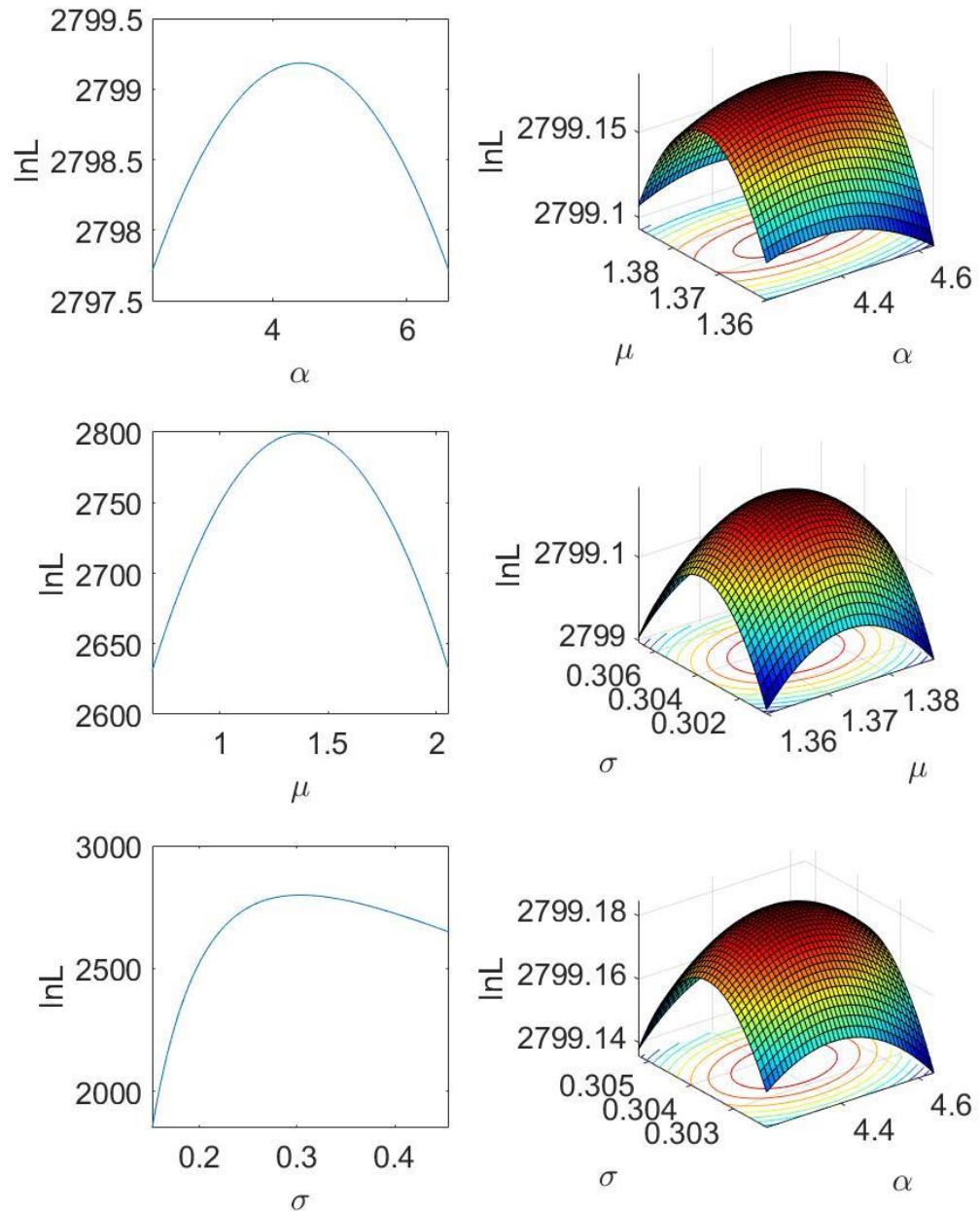
jossa $r_{shift}(t)$ on muutettu korko hetkellä t , $r_{real}(t)$ on havaittu korko hetkellä t ja c on vakio, jolla muutettu korkokäyrä saadaan positiiviseksi. Muutosta on perusteltu sillä, että se ei juurikaan muuta riskittömän koron stokastisen prosessin dynamiikkaa eli toisin sanoen $dr_{shift}(t) = dr_{real}(t)$ (Orlando et al. 2019). Koska tässä työssä tarkastellaan erityisesti riskittömien korkojen muutoksesta aiheutuvaa riskiä, niin olemme erityisesti kiinnostuneita riskittömän koron stokastisesta prosessista emmekä niinkään sen absoluuttisesta tasosta, jolloin yllä esitettyä keinotekoista muunnosta voidaan pitää perusteltuna.

Jotta prosessin parametrit keskiarvoon hakeutumisenopeus α , keskiarvoparametri μ ja volatiliteettiparametri σ voidaan estimoida estimointiaineistosta, on estimointiaineiston tasoa muutettava kaavan Y mukaisesti siten, että kaikki havainnot pysyvät positiivisina. Näin ollen estimointiaineiston jokaista havaintoa $r_{real}(t)$ nostetaan ylöspäin vakiolla $c = 2\%$. Estimointi suoritetaan ainoastaan vuosien 2016-2020 havainnoille luvussa 9.3.1 esitellyistä syistä. Estimointi suoritetaan hyödyntäen suurimman uskottavuuden menetelmää (MLE) ja se on esitelty CIR prosessille luvussa 8.1. CIR prosessin parametreille saadaan Taulukon 7 mukaiset estimaatit.

Taulukko 7. Riskittömän koron CIR prosessin parametriestimaatit 2016-2020 kun korkokäyrää on nostettu 2 %-yksikköä.

	Nopeusparametri, α (std. Virhe)	Keskiarvoparametri, μ (std. Virhe)	Volatiliteettiparametri, σ (std. Virhe)
Riskitön korko r +2%, aineisto 2016- 2020			
MLE	4.4181 (1.2983)	1.3735 (0.0375)	0.3037 (0.0063)

Vastaavasti Kuvassa 7 on esitetty uskottavuusfunktion herkkyyksiä parametrien suhteen käyttäen estimointiaineistoa 2016-2020. Kuvassa 7 vasemmalla on herkistetty logaritmi-
 sen uskottavuusfunktion käyttäytymistä yksittäisten estimoitavien parametrien suhteen ja oikealla on puolestaan tarkasteltu uskottavuusfunktion käyttäytymistä parametriparien suhteen.



Kuva 7. Riskittömän koron CIR prosessin logaritmi-
 sen uskottavuusfunktion herkkyyksiä
 estimoitujen parametrien suhteen.

9.4 Riskipreemion prosessi

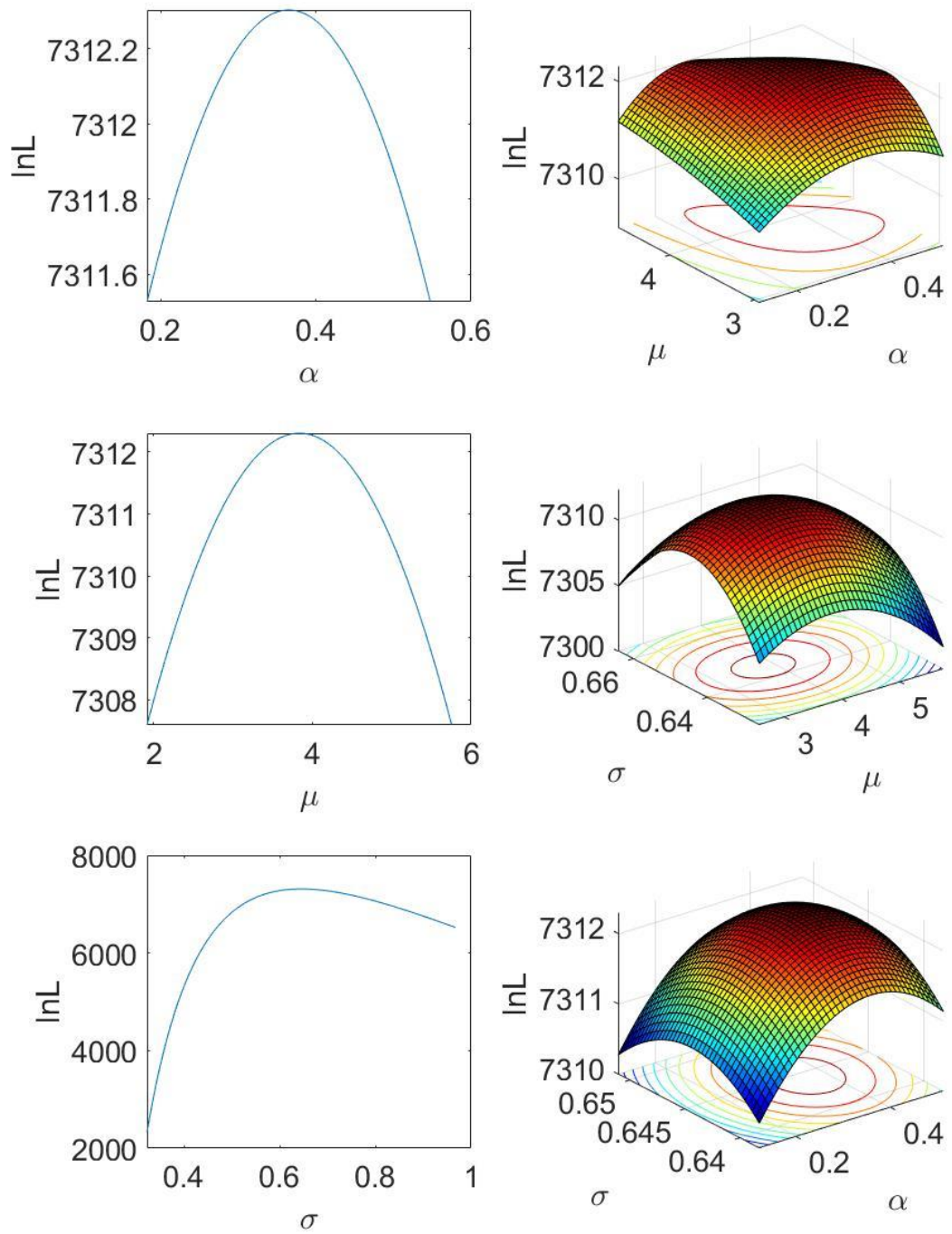
Riskipreemioiden mallintamiseen käytetään CIR-intensiteettiprosessia, joka on esitelty luvussa 5.2. Prosessin parametrit keskiarvoon hakeutumisnopeus α , keskiarvoparametri μ ja volatilitteettiparametri σ estimoidaan estimointiaineistosta kullekin rating-kategorialle erikseen. Estimointimenetelmänä käytetään suurimman uskottavuuden menetelmää (MLE) ja se on esitelty CIR prosessille luvussa 8.1. Estimointi suoritetaan MATLAB -ohjelmalla. Estimoinnin tuloksena löydetään jokaisen rating- kategorian mukaiselle prosessille optimaaliset parametrit suurimman uskottavuuden menetelmällä. Parametrien estimoidut arvot sekä estimaattien keskivirheet on esitelty Taulukossa 8. Taulukosta 8 havaitaan, että prosessin keskiarvoparametri kasvaa rating kategorian heiketessä ja toisaalta erityisesti "high-yield" rating -kategorioissa (BB ja siitä heikommät) volatilitteetti kasvaa ja keskiarvoon hakeutumisnopeus pienenee rating -kategorian heiketessä.

Taulukko 8. Riskipreemioiden CIR-intensiteettiprosessien parametriestimaatit estimointiaineistolla.

	Nopeusparametri, α (std. Virhe)	Keskiarvoparametri, μ (std. Virhe)	Volatilitteettiparametri, σ (std. Virhe)
AAA Spread			
MLE	0.7988 (0.2473)	0.8307 (0.1043)	0.4451 (0.004)
AA Spread			
MLE	0.4802 (0.193)	1.0328 (0.1898)	0.4354 (0.0039)
A Spread			
MLE	0.2015 (0.1108)	1.421 (0.4501)	0.3012 (0.0028)
BBB Spread			
MLE	0.1832 (0.1006)	2.2367 (0.4772)	0.3024 (0.0027)
BB Spread			
MLE	0.3649 (0.1688)	3.8365 (0.7198)	0.6446 (0.0058)
B Spread			
MLE	0.3228 (0.1632)	5.7213 (1.101)	0.6998 (0.0063)
CCC- Spread			
MLE	0.2075 (0.1296)	12.4198 (3.1008)	0.8563 (0.0077)

Suurimman uskottavuuden menetelmällä (MLE) logaritmisen uskottavuusfunktion $\ln L(\theta)$ herkkyystarkastelu estimoitavien parametrien suhteen optimaalisten parametriestimaattien ympärillä osoittaa, että löydetyt parametrit todella maksimoivat uskotta-

vuusfunktion arvot. Kuvassa 8 on esitetty uskottavuusfunktion herkkyytarkastelua estimoitavien parametrien suhteen BB rating -kategorian riskipreemioprosessille. Kuvassa 8 vasemmalla on herkistely logaritmisesta uskottavuusfunktion käyttäytymisestä yksittäisten estimoitavien parametrien suhteen ja oikealla on puolestaan tarkasteltu uskottavuusfunktion käyttäytymistä parametriparien suhteen. Kuvasta havaitaan, että erityisen selkeä huippu löytyy volatilitteettiparametrille σ , mutta uskottavuusfunktio käyttäytyy huomattavasti tasaisemmin μ ja α osalta. Sama ilmiö toistuu muiden estimoitavien riskipreemioprosessien osalta. Toisaalta parametrien α ja μ keskivirheet Taulukon 8 perusteella kasvavat melko suuriksi.



Kuva 8. BB rating -kategorian CIR intensiteettiprosessin logaritmisen uskottavuus-funktion herkkyyden estimoitujen parametrien suhteen.

10. VAR MALLIN TULOKSET

10.1 Stokastisten prosessien simulaatio

Riskittömien korkojen muutoksista Δr ja riskipreemioiden muutoksista $\Delta \lambda_j$ portfoliolle aiheutuva riskimitta $VaR(\alpha)_{\Delta r + \Delta \lambda}$ luottamustasolla α lasketaan simuloimalla n kierrosta stokastisia prosesseja r ja λ sekä laskemalla kullekin simulaatiokierrokselle arvopaperikohtaisesti portfolion arvon muutos kaavan 7.6 mukaisesti. Riskittömän koron prosessille r käytetään luvussa 4.2 esiteltyä CIR prosessia ja siihen sovellettavaa kaavan 9.1 mukaista tason muutosta positiivisuusehdon täyttämiseksi. Vastaavasti riskipreemioiden prosesseille λ_j sovelletaan luvussa 5.2. esitettyä CIR prosessia. Käytännössä prosesseille r ja λ_j simulaation toteuttamiseksi hyödynnetään luvussa 8.1 esitettyä diskretisoitua versiota CIR prosessista,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(\mu - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{|r(t_i)|}\Delta W_i \quad (10.1)$$

jossa ΔW_i on $\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$ ja ε_i on normaalijakautunut satunnaisluku $\varepsilon_i \sim N(0,1)$. Aikamuutos Δt on simulaatiossa yksi päivä, jolloin yhden vuoden aikahorisonttiin mahtuu 252 kaupankäyntipäivää. Koska prosessien r ja λ_j oletetaan olevan korreloituneita luvussa 9.2 estimoidulla tavalla, otetaan korrelaatio huomioon jokaisessa simulaatiokierroksessa jokaiselle satunnaisluvulle ε_i hyödyntämällä Choleskyn hajotelmaa korrelaatiomatriisille ρ sekä vektoria $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2 \dots Z_i)$, jossa Z_i on normaalijakautunut satunnaismuuttuja $Z_i \sim N(0,1)$ seuraavasti (Hull 2009),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^T \mathbf{Z}, \quad (10.2)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \boldsymbol{\rho} \quad (10.3)$$

Jossa vektori $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_i)$ koostuu korrelaatiomatriisin $\boldsymbol{\rho}$ mukaan korreloituneista normaalijakautuneista satunnaismuuttujista $\varepsilon_i \sim N(0,1)$. Tarkemmat perustelut korreloituneille satunnaismuuttujille on esitetty Hullin kirjassa (2009, s. 450).

Kun simulaatiokierros on suoritettu kullekin prosessille r ja λ_j lasketaan riskittömän koron muutos Δr sekä riskipreemioiden muutokset $\Delta \lambda_j$ seuraavasti,

$$\Delta r = r(t_{252}) - r(t_1) \text{ ja} \quad (10.4)$$

$$\Delta \lambda_i = \lambda_i(t_{252}) - \lambda_i(t_1) \quad (10.5)$$

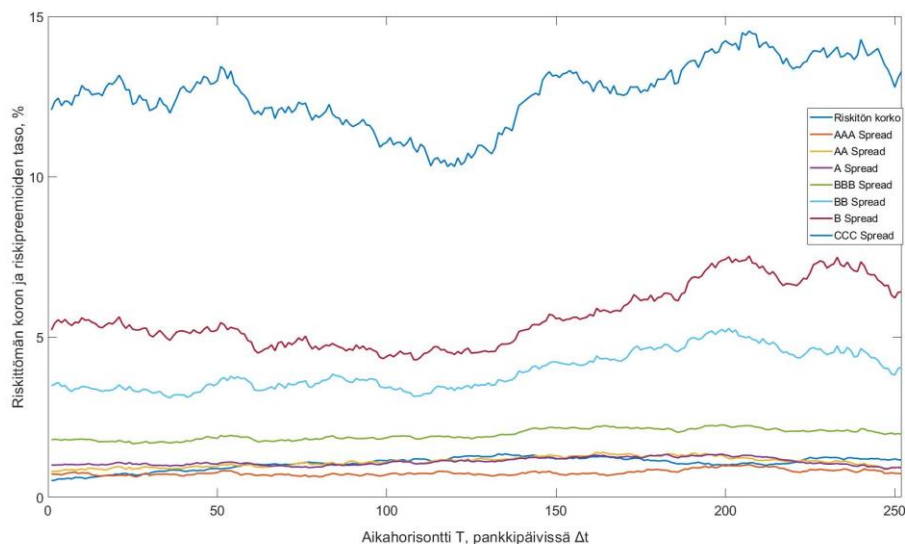
Lopuksi lasketaan kullekin arvopaperille arvon muutos luvussa 7 esitellyllä tavalla.

Taulukossa 9 on esitetty simulaatioasetelman tarvittavat lähtötiedot kootusti. Stokastisten prosessien r ja λ_j parametrit on estimoitu suurimman uskottavuuden menetelmällä ja parametrien estimoinnit on esitetty luvuissa 9.3.2 ja 9.4. Lisäksi simulaatiossa hyödynnetään luvussa 9.2 estimoitua korrelaatorakennetta.

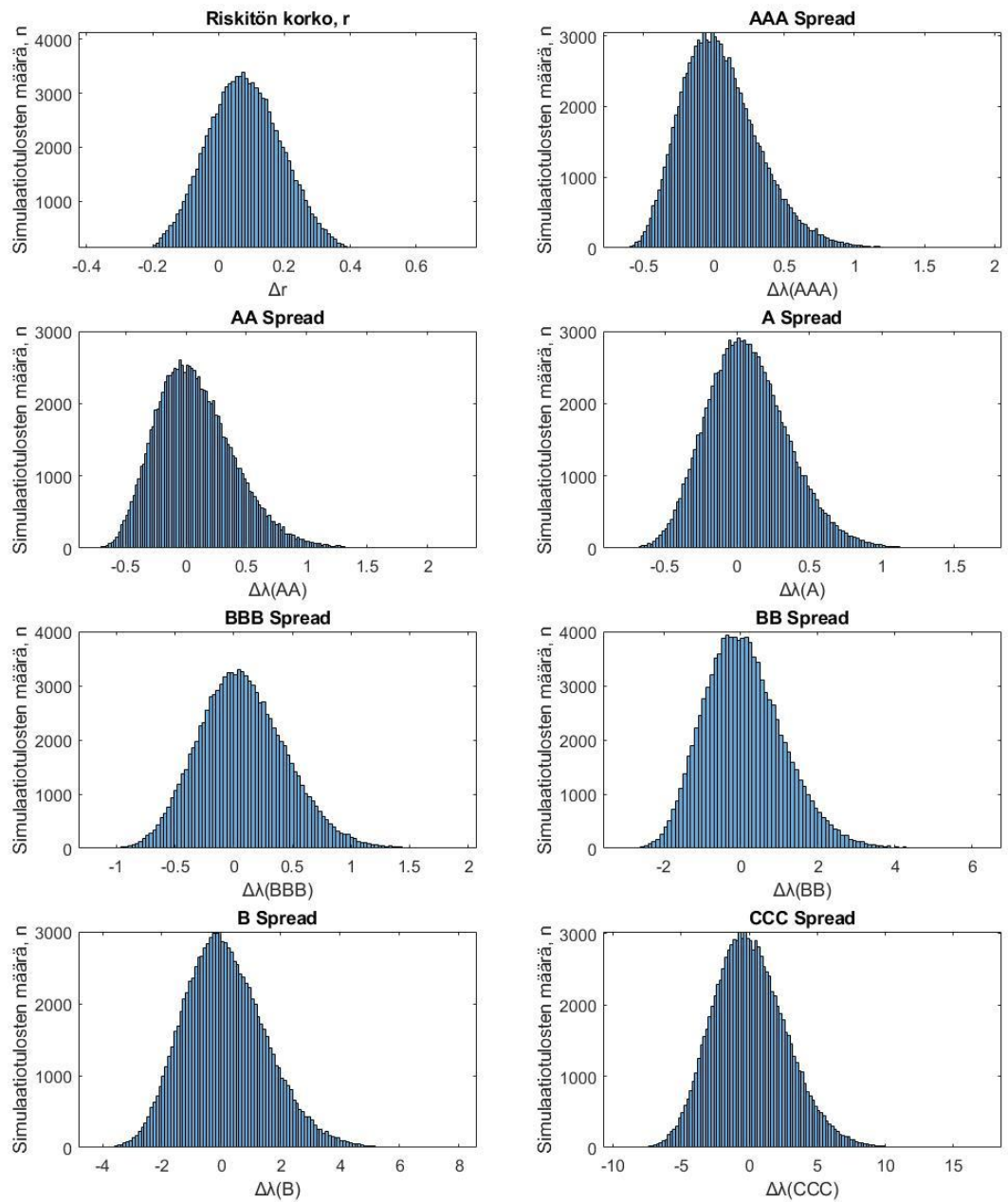
Taulukko 9. Stokastisten prosessien simulaatioasetelman lähtötiedot.

Symboli	Simulaatiokierrosten määrä n	Aikahorisontti T	Diskretisoitu aikahyppäys Δt	Prosessin lähtöarvo $r(1)$ tai $\lambda(1)$	Keskiarvoon hakeutumisnopeus α	Keskiarvo parametri μ	Volatiliteetti parametri σ
Yhteiset lähtöarvot	100000	1 vuosi	1/252				
r free				1.29	4.4181	1.3735	0.3037
AAA Spread				0.74	0.7988	0.8307	0.4451
AA Sprea				0.82	0.4802	1.0328	0.4354
A Spread				1.01	0.2015	1.4210	0.3012
BBB Spread				1.77	0.1832	2.2367	0.3024
BB Spread				3.53	0.3649	3.8365	0.6446
B Spread				5.24	0.3228	5.7213	0.6998
CCC Spread				12.07	0.2075	12.4198	0.8563

Kun simulaatio suoritetaan yllä esitetyllä tavalla MATLAB ohjelmalla, niin saadaan Kuvassa 10 esitettyjen histogrammien mukaiset tulokset riskittömän koron muutokselle Δr sekä riskipreemioiden muutoksille $\Delta \lambda_j$. Histogrammeista nähdään selvästi, kuinka muutosten $\Delta \lambda_j$ hännät levenevät, kun rating -luokka heikkenee. Erityisen voimakasta ilmiö on kun ns. "investment grade" tasolta eli BBB tasolta ns. "high yield" tasolle eli BB tasolle. Kuvassa 9 on esitetty simuloitua stokastisia prosesseja r ja λ_j eräällä simulaatiokierroksella.



Kuva 9. Riskittömän koron ja riskipreemioiden stokastinen prosessi eräällä simulaatiokierroksella.



Kuva 10. Simulaation tuloksena syntyvät riskittömien korkojen ja riskipremioiden muutosten jakaumat.

10.2 Esimerkkiportfolion VaR

VaR analyysi suoritetaan hypoteettiselle esimerkkiportfoliolle. Esimerkkiportfolio voisi ominaisuuksiensa puolesta olla vakuutusyhtiön joukkovelkakirjalainaportfolio osana vakuutusyhtiön sijoituksia. Esimerkkiportfolion koostumusta on kuvattu Taulukossa 10.

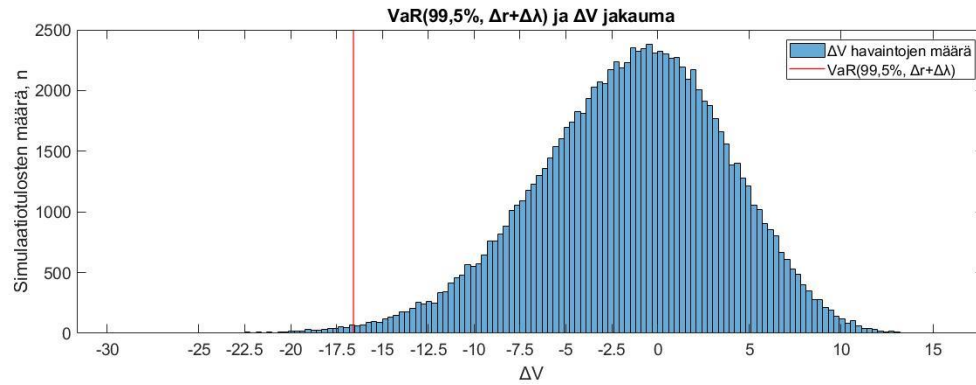
Taulukko 10. Esimerkkiportfolion koostumus.

Rating luokka	Markkina-arvo	Arvopaperien lukumäärä	Yksittäinen sijoitus keskimäärin	Modifioitu duraatio keskimäärin	PD (TTC) keskimäärin, %	LGD keskimäärin
AAA	3 777 804	1	3 777 804	3.43	0.01 %	0.55
AA	22 256 082	5	4 451 216	2.47	0.03 %	0.59
A	52 020 640	13	4 001 588	3.48	0.08 %	0.71
BBB	65 444 862	20	3 272 243	3.67	0.27 %	0.59
BB	78 369 897	19	4 124 731	2.58	0.69 %	0.62
B	48 650 456	11	4 422 769	2.95	3.98 %	0.59
CCC	2 627 564	1	2 627 564	3.92	25.27 %	0.55
Yhteensä	273 147 305	70	3 902 104	3.09	1.23 %	0.62

Esimerkkiportfolio siis koostuu 70 yksittäisestä joukkovelkakirjalainasijoituksesta ja yksittäisen sijoituksen koko on keskimäärin 3,9 miljoonaa euroa ja sijoitukset painottuvat rating -luokkiin BBB-B. Yksittäisten sijoitusten PD ja LGD arvot on saatu hyödyntämällä rating -mallia, joka on rajattu tämän työn ulkopuolelle. Esimerkkiportfolion kaikki joukkovelkakirjalainat oletetaan noteerattavaksi kotimaan valuutassa, jolloin portfolio ei altistu valuuttariskille.

Esimerkkiportfolion riskimitta $VaR(\alpha)$ lasketaan VaR-komponenttien $VaR(\alpha)_{\Delta r+\Delta \lambda}$ ja $VaR(\alpha)_{Credit}$ kombinaationa huomioiden niiden välinen korrelaatio $\rho_{\Delta r+\Delta \lambda, Credit}$ luvussa 7 esitellyllä tavalla. Turvaavuussyistä sekä yhtiön edustajien kanssa käytyjen keskustelujen perusteella korrelaatio halutaan asettaa vakioksi 1. Luottamustasoksi α valitaan 99,5%, jolloin VaR arvo kertoo portfoliolla sen tappion määrän, joka ylitetään harvemmin kuin kerran 200 vuodessa, kun aikahorisontiksi on valittu yksi vuosi. Näin ollen VaR arvo on luottamustasonsa puolesta vertailukelpoinen vakuutusyhtiöiden vakavaraisuuden sääntelyyn käytettävän Solvenssi II mallin (SCR, engl. Solvency Capital Requirement) kanssa (2015/35 EU).

Esimerkkiportfolion $VaR(\alpha)_{\Delta r+\Delta \lambda}$ lasketaan simuloimalla riskittömän koron ja riskipremioiden muutoksia luvussa 10.1 esitellyllä tavalla sekä laskemalla kullekin simulaatiokierrokselle portfolion arvon muutos ΔV luvussa 7 esitellyllä tavalla. Simulaatiokierrosten tuloksena saadaan siis ΔV jakauma, joka sisältää 100000 havaintoa. Tällöin riskimitta $VaR(\alpha)_{\Delta r+\Delta \lambda}$ saadaan, kun jakaumasta otetaan 99,5% mukainen tappioprosentti. Kuvassa 11 on esitetty ΔV jakauma miljoonina euroina sekä $VaR(\alpha)_{\Delta r+\Delta \lambda}$ arvo 99,5% luottamustasolla.



Kuva 11. Riskittömän koron ja riskipreemioiden simuloituista muutoksista aiheutuva portfolion arvon muutosten jakauma ja $VaR(99,5\%)$.

Luottoriskikomponentti $VaR(\alpha)_{Credit}$ lasketaan esimerkkiportfoliolle yksittäisten sijoitusten luottoriskin kautta luvussa 7 esitetyllä tavalla. Lopuksi esimerkkiportfolion riskikomponentit $VaR(\alpha)_{\Delta r+\Delta \lambda}$ sekä $VaR(\alpha)_{Credit}$ yhdistetään kaavalla 7.2 ja valitulla korrelaatiolla $\rho_{\Delta r+\Delta \lambda, Credit} = 1$. Tällöin esimerkkiportfoliolle saadaan Taulukossa 11 esitetyt tulokset. Taulukossa 11 VaR arvot esitetään positiivisina.

Taulukko 11. Portfolion $VaR(99,5\%)$ komponenteittain.

	$VaR(99,5\%, \Delta r+\Delta \lambda)$	$VaR(99,5\%, Credit)$	$VaR(99,5\%)$
Absoluuttinen arvo, milj. €	16.58	13.42	30.00
Suhteutettuna portfolion markkina-arvoon, %	6.1 %	4.9 %	11.0 %

Saatuja tuloksia voidaan verrata myös Solvenssi II (2015/35 EU) mukaiseen esimerkkiportfoliolle laskettuun SCR arvoon ilman keskittymäriskiä. Se on käytännössä VaR mitta 99,5% luottamustasolla ja vuoden aikahorisontilla. Taulukossa 12 on esitetty vertailu tässä työssä mallinnetun $VaR(99,5\%)$ ja Solvenssi II (2015/35 EU) sääntöjen mukaisesti lasketun SCR:n välillä.

Taulukko 12. Portfolion $VaR(99,5\%)$ ja SCR ilman keskittymäriskiä.

	$VaR(99,5\%)$	SCR
Absoluuttinen arvo, milj. €	30.00	30.91
Suhteutettuna portfolion markkina-arvoon, %	11.0 %	11.3 %

Taulukosta 12 havaitaan, että mallin antama $VaR(99,5\%)$ on hyvin lähellä regulatorista pääomavaadetta (SCR) ilman keskittymäriskiä.

10.3 VaR mallin herkkyytarkastelut

VaR mallin herkkyyttä on syytä tarkastella stokastisten mallien parametriestimaattien suhteen. Ensimmäisessä herkkyysoanalyysissä tarkastellaan VaR mallin antaman riskin muutosta estimoitujen parametrien suhteellisen muutoksen suhteen siten, että mallien kutakin parametria muutetaan $\pm 10\%$ ja lasketaan esimerkkiportfolion VaR uudelleen. Näin voidaan tarkastella VaR mallin herkkyyttä parametriestimaattien suhteelliseen muutokseen. Tarkastelu suoritetaan erikseen riskittömän koron prosessille r , jolloin prosessien λ_j parametrit säilyvät ennallaan ja vastaavasti prosesseille λ_j yhdessä, jolloin prosessin r parametrit säilyvät ennallaan. Prosessien lähtötasoon $r(1)$ ja $\lambda(1)$ ei tehdä muutoksia, vaan ne säilyvät Taulukon 9 mukaisina. Alla olevasta Taulukoissa 13 ja 14 on esitetty VaR mallin herkkyytarkastelu yllä kuvatulla tavalla.

Taulukko 13. VaR mallin herkkyyso riskittömän koron prosessin parametrien suhteellisiin muutoksiin.

Riskittömän koron stokastinen prosessi r	Keskiarvoon hakeutumisnopeus		Keskiarvoparametri		Volatiliteettiparametri	
	α		μ		σ	
	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos
Parametrien muutokset:						
Ei muutosta	30.00	0 %	30.00	0 %	30.00	0 %
+10%	29.98	-0.060 %	31.15	3.849 %	30.04	0.137 %
-10%	29.98	-0.041 %	28.81	-3.949 %	29.94	-0.183 %

Taulukosta 14 voidaan tulkita, että riskittömän koron prosessin r osalta VaR on estimoiduista parametreista vähiten herkkä keskiarvoon hakeutumisnopeudelle α ja eniten herkkä keskiarvoparametrille μ . Tämä johtunee siitä, että prosessin keskiarvoon hakeutumisnopeus α on verrattain suuri, jolloin keskiarvoparametrin taso suhteessa vallitsevaan korkotasoon korostuu.

Taulukko 14. VaR mallin herkkyyso riskipreemioiden prosessien parametrien suhteellisiin muutoksiin.

Riskipreemioiden stokastiset prosessit λ	Keskiarvoon hakeutumisnopeus		Keskiarvoparametri		Volatiliteettiparametri	
	α		μ		σ	
	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos
Parametrien						
Ei muutosta	30.00	0 %	30.00	0 %	30.00	0 %
+10%	29.84	-0.514 %	30.74	2.482 %	31.63	5.442 %
-10%	30.14	0.475 %	29.24	-2.527 %	28.37	-5.404 %

Taulukosta 15 voidaan havaita, että VaR on erityisen herkkä suhteessa riskipreemioiden prosessien volatiliteettiparametriin σ . Tämä puolestaan johtunee siitä, että prosessien λ_j volatiliteettiparametrit σ_j ovat suhteellisesti korkeita verrattuna keskiarvoon hakeutumisnopeuteen. Lisäksi Taulukosta 14 havaitaan, että VaR malli käyttäytyy riskipreemioiden

prosessien parametrien suhteen loogisesti eli kun keskiarvoon hakeutumisnopeus α kasvaa, niin VaR pienenee ja vastaavasti kun keskiarvoparametri μ tai volatiliiteettiparametri σ kasvavat, niin VaR kasvaa.

VaR mallin herkkyyttä voidaan tarkastella myös prosessien r ja λ_j parametriestimaattien keskivirheiden suhteen, jotka on esitetty kunkin prosessin parametriestimaateille Taulukoissa 7 ja 8. Herkkyystarkastelu suoritetaan esimerkkiportfoliolle siten, että prosessien r ja λ_j parametrien arvoa muutetaan lisäämällä siihen tai vähentämällä siitä kyseisen parametriestimaatin keskihajonta eli keskivirhe. Tarkastelu suoritetaan erikseen riskittömän koron prosessille r , jolloin prosessien λ_j parametrit säilyvät ennallaan ja vastaavasti prosesseille λ_j yhdessä, jolloin prosessin r parametrit säilyvät ennallaan. Herkkyystarkastelun tulokset on esitetty Taulukoissa 15 ja 16.

Taulukko 15. VaR mallin herkkyys riskittömän koron prosessin parametrien keskivirheiden suhteen.

Riskittömän koron stokastinen prosessi r	Keskiarvoon hakeutumisnopeus α		Keskiarvoparametri μ		Volatiliiteettiparametri σ	
	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos
Parametrien						
Ei muutosta	30.00	0 %	30.00	0 %	30.00	0 %
+ keskivirhe	29.93	-0.230 %	30.31	1.037 %	29.99	-0.017 %
- keskivirhe	30.06	0.208 %	29.67	-1.080 %	29.99	-0.028 %

Taulukon 15 perusteella VaR mallin herkkyys riskittömän prosessin parametriestimaattien keskivirheiden suhteen on maltillinen. VaR malli on riskittömän koron prosessin osalta eniten herkkä keskiarvoparametrin μ keskivirhetarkastelun suhteen. Tämä johtuu lähinnä siitä, että VaR malli oli herkin riskittömän koron prosessin osalta juuri keskiarvoparametrin μ suhteelliselle muutokselle kuten Taulukosta 13 voidaan havaita.

Taulukko 16. VaR mallin herkkyys riskipreemioiden prosessien parametrien keskivirheiden suhteen.

Riskipreemioiden stokastiset prosessit λ	Keskiarvoon hakeutumisnopeus α		Keskiarvoparametri μ		Volatiliiteettiparametri σ	
	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos	VaR(99,5%), m€	Suhteellinen muutos
Parametrien						
Ei muutosta	30.00	0 %	30.00	0 %	30.00	0 %
+ keskivirhe	29.40	-1.992 %	31.52	5.094 %	30.14	0.477 %
- keskivirhe	30.70	2.345 %	28.47	-5.095 %	29.84	-0.503 %

Taulukon 16 perusteella VaR malli on huomattavasti herkempi riskipreemioiden prosessien parametriestimaattien keskivirheen suhteen kuin riskittömän koron prosessin parametriestimaattien keskivirheen suhteen. Tämä johtuu siitä, että keskivirheet ovat riskipreemioprosessien parametriestimaattien osalta huomattavasti riskittömän koron pros-

sia suuremmat parametrien α ja μ osalta. Tämä puolestaan kuvastaa riskipreemio-
prossien parametriestimaatteihin ja sitä kautta stokastiseen malliin liittyvästä epävar-
muudesta. Toisaalta vaikka parametriestimaattien α ja μ keskivirheet ovat melko suuria
riskipreemioiden stokastisissa prosesseissa (ks. Taulukko 8), niin VaR malli on kuitenkin
paljon herkempi volatiliiteettiparametrin σ suhteen ja sen keskivirhe on kaikkien riskipree-
mioprosessien osalta melko pieni.

VaR mallin herkkyyttä ja käyttäytymistä on syytä tarkastella myös portfolioissa tapahtu-
vien muutosten suhteen. Erityisesti kiinnostavaa on tarkastella VaR mallin muutoksia
portfolion rating -jakaumassa tapahtuvien muutosten sekä portfolion modifioidussa du-
raatiossa tapahtuvien muutosten suhteen. Herkkyyttä rating -jakauman suhteen tarkas-
tellaan heikentämällä esimerkkiportfolion jokaisen arvopaperin rating kategoriaa yksi ka-
tegoria alaspäin (esimerkiksi BBB \rightarrow BB) ja nostamalla arvopaperin PD arvoja vastaa-
vasti. CCC kategorian arvopapereihin ei tehdä muutoksia. Vastaavasti tarkastellaan
muutosta, jossa rating -kategoriaa nostetaan yksi kategoria ylöspäin (pl. AAA arvopape-
rit, joihin ei tehdä muutoksia). Tällöin saadaan Taulukkojen 17 ja 18 mukaiset portfoliot
ja VaR mallin herkkyydet rating -siirtymien suhteen sekä vertailu regulatoriseen SCR
arvoon muutokset huomioiden on esitetty taulukossa 19.

Taulukko 17. *Esimerkkiportfolio, jossa jokaisen arvopaperin rating -kategoriaa on nos-
tettu ja PD arvoa laskettu vastaavasti.*

Rating luokka, yhden kategorian parannus	Markkina-arvo	Arvopaperien lukumäärä	Yksittäinen sijoitus keskimäärin	Modifioitu duraatio keskimäärin	PD (TTC) keskimäärin, %	LGD keskimäärin
AAA	26 033 886	6	4 338 981	2.61	0.01 %	0.59
AA	52 020 640	13	4 001 588	3.48	0.03 %	0.71
A	65 444 862	20	3 272 243	3.67	0.08 %	0.59
BBB	78 369 897	19	4 124 731	2.58	0.27 %	0.62
BB	48 650 456	11	4 422 769	2.95	0.69 %	0.59
B	2 627 564	1	2 627 564	3.92	3.98 %	0.55
CCC	-	0	-	-	-	-
Yhteensä	273 147 305	70	3 902 104	3.09	0.26 %	0.62

Taulukko 18. Esimerkkiportfolio, jossa jokaisen arvopaperin rating -kategoriana on laskettu ja PD arvoa nostettu vastaavasti.

Rating luokka, yhden kategorian heikennys	Markkina-arvo	Arvopaperien lukumäärä	Yksittäinen sijoitus keskimäärin	Modifioitu duraatio keskimäärin	PD (TTC) keskimäärin, %	LGD keskimäärin
AAA	-	0	-	-	-	-
AA	3 777 804	1	3 777 804	3.43	0.03 %	0.55
A	22 256 082	5	4 451 216	2.47	0.08 %	0.59
BBB	52 020 640	13	4 001 588	3.48	0.27 %	0.71
BB	65 444 862	20	3 272 243	3.67	0.69 %	0.59
B	78 369 897	19	4 124 731	2.58	3.98 %	0.62
CCC	51 278 020	12	4 273 168	3.00	13.46 %	0.59
Yhteensä	273 147 305	70	3 902 104	3.09	3.89 %	0.62

Taulukossa 19 on kuvattu VaR mallin sekä SCR:n (ilman keskittymäriskiä) herkkyyttä rating Taulukoiden 17 ja 18 mukaisten rating -jakauman muutosten osalta. Taulukosta 19 nähdään selvästi, että tässä työssä esitelty VaR malli reagoi SCR:ää voimakkaammin portfolion rating -jakaumassa tapahtuviin muutoksiin. Varsinkin portfolion arvopapereiden rating kategorioita alaspäin siirrettäessä VaR malli antaa portfolion riskille huomattavasti korkeampi kuin SCR:n antama riskimitta.

Taulukko 19. VaR mallin ja SCR:n muutos kun esimerkkiportfolion rating -jakaumaa muutetaan.

Rating muutos	VaR(99,5%)			SCR		
	Absoluuttinen arvo, milj. €	Suhteutettuna portfolion markkina-arvoon, %	Suhteellinen muutos	Absoluuttinen arvo, milj. €	Suhteutettuna portfolion markkina-arvoon, %	Suhteellinen muutos
Ei muutosta	30.00	11.0 %	0.0 %	30.91	11.3 %	0.0 %
1 kategoria ylös	17.81	6.5 %	-40.6 %	19.92	7.3 %	-35.6 %
1 kategoria alas	52.01	19.0 %	73.4 %	43.54	15.9 %	40.9 %

VaR mallin herkkyyttä voidaan tarkastella myös suhteessa portfolion modifioituun duraatioon. Alla olevassa taulukossa 20 on esitetty VaR mallin herkkyys kun esimerkkiportfolion jokaisen arvopaperin modifioitua duraatiota on muutettu arvolla ± 1 . Taulukosta 20 havaitaan, että VaR malli reagoi portfolion modifioitun duraation muutoksiin hieman loivemmin kuin regulatorinen SCR, mutta suhteutettuna portfolion arvoon mallien väliset erot ovat kuitenkin maltilliset.

Taulukko 20. VaR mallin ja SCR:n muutos kun esimerkkiportfolion modifioitua duraatiota muutetaan.

	VaR(99,5%)			SCR		
	Absoluuttinen arvo, milj. €	Suhteutettuna portfolion markkina-arvoon, %	Suhteellinen muutos	Absoluuttinen arvo, milj. €	Suhteutettuna portfolion markkina-arvoon, %	Suhteellinen muutos
Mod. Dur muutos						
Ei muutosta	30.00	11.0 %	0.0 %	30.91	11.3 %	0.0 %
+1	37.37	13.7 %	24.6 %	40.77	14.9 %	31.9 %
-1	22.71	8.3 %	-24.3 %	21.96	8.0 %	-29.0 %

11. JOHTOPÄÄTÖKSET

Tämän työn tavoitteena oli luoda yksinkertainen ja käytännöllinen malli luottoriskillisen joukkovelkakirjalainaportfolion riskin mittaamiseen. Kirjallisuuskatsauksen perusteella voidaan todeta, että luottoriskillinen joukkovelkakirjaportfolio altistuu ainakin kolmen tyyppisille riskifaktoreille, joita ovat: riskittömien korkojen muutokset, riskipreemioiden muutokset, jotka kirjallisuuskatsauksen perusteella ovat luonteeltaan enimmäkseen systemaattisia ja heijastelevat rajoitetusti yksittäisten joukkovelkakirjalainojen luottohäiriötodennäköisyyksissä tapahtuvia muutoksia sekä luottoriskillisiin joukkovelkakirjalainoihin sisältyvä riski vastapuolen kykenemättömyydestä suoriutua velvoitteistaan eli absoluuttinen luottoriski. Edelleen kirjallisuudesta etsittiin tapoja mallintaa havaittuja riskifaktoreita. Riskittömien korkojen osalta työssä esiteltiin kaksi riskittömien korkojen muutosta kuvaavaa stokastista prosessia: Vasicek ja CIR. Riskittömien korkojen mallintamiseen käytettiin CIR prosessia, jonka tasoa on korkojen negatiivisuuden takia korjattu ylöspäin, sillä CIR prosessin on korjattunakin ajateltu kuvaavan paremmin korkomuutosten dynamiikkaa. Vastaavasti systemaattisille riskipreemioiden muutoksille sovellettiin CIR intensiteettimallia, joka on CIR prosessin kanssa analoginen stokastinen prosessi. Luottoriskin arviointiin puolestaan käytettiin pankkien vakavaraisuussäätelyyn kehitettyä Basel II kaavaa, joka on asymptoottinen luottoriskin mittaamiseen kehitetty analyttinen kaava.

Stokastisten prosessien parametrit estimoitiin historiallisella datalla. Riskittömän koron prosessin parametrien estimointiin käytettiin Saksan valtionlainojen jälkimarkkinahinnoista johdettua korkoa kolmen vuoden maturiteetille. Estimointiaineistona systemaattisten riskipreemioiden prosesseille rating -kategorioittain käytettiin yhdysvaltalaisen yritysten liikkeelle laskemien joukkovelkakirjalainojen riskipreemioiden indeksejä, jotka on laskettu suuresta määrästä kyseisen rating -kategorian mukaan luokiteltujen joukkovelkakirjalainojen riskipreemioista painotettuna keskiarvona. Näin ollen estimointiaineisto riskipreemioiden osalta kuvaa juurikin riskipreemioiden systemaattisia muutoksia eikä niinkään yksittäisten arvopaperien luottohäiriötodennäköisyyksissä tapahtuvia muutoksia. Vastaavalla aineistolla estimoitiin myös stokastisten prosessien väliset korrelaatiot ja estimoinnin perusteella voitiin todeta, että riskittömän koron muutokset eivät korreloi riskipreemioiden muutosten kanssa tilastollisesti merkittävällä tavalla, joten korrelaatio oletettiin luodussa riskimallissa nolaksi. Vastaavasti havaittiin, että eri rating -luokkien riskipreemioiden välillä korrelaatio oli voimakasta ja tilastollisesti merkitsevää ja tätä korrelaatorakennetta hyödynnettiin mallissa. Stokastisten prosessien parametriestimointi

suoritettiin suurimman uskottavuuden menetelmällä numeerisesti. Vaikka kaikille prosesseille löydettiin uskottavuusfunktion selkeästi maksimoivat parametriestimaatit, niin riskipreemioiden prosesseille parametriestimaattien keskivirheet kasvoivat melko suureksi, mikä puolestaan asettaa mallin soveltuvuuden historiallisen datan perusteella kyseenalaiseksi.

Varsinaisena riskimittana päädyttiin ymmärrettävyyden, yksinkertaisuuden ja vertailtavuuden vuoksi käyttämään VaR mallia. Vaikka kirjallisuuden perusteella CVaR on monilta osin todettu VaR:ia paremmaksi ilmaista riskin määrää, niin käyttötarkoituksen perusteella VaR malli arvioitiin toimivaksi tavaksi ilmaista riskin määrää tässä työssä. VaR mallin etuna on myös sen suora vertailtavuus regulatoriseen SCR malliin.

Tässä työssä esiteltyä riskimallia sovellettiin käytäntöön hypoteettisen esimerkkiportfolion avulla. Esimerkkiportfoliolle laskettiin esitellyllä mallilla VaR arvo 99,5% luottamustasolla ja yhden vuoden aikahorisontilla. Vastaavasti laskettiin vakuutusyhtiöille sovellettavan regulatorisen pääomavaateen (SCR) määrä ilman keskittymäriskiä kyseiselle portfoliolle. Tässä työssä esitetty malli antoi portfolion riskiksi 11,0% portfolion markkina-arvosta, kun taas SCR antoi riskiksi 11,3% portfolion markkina-arvosta. Tulokset näyttävät olevan hyvin lähellä toisiaan. Toisaalta kehitetty malli näyttäisi herkkyyksanalyysien perusteella reagoivan SCR:ää voimakkaammin portfolion rating -jakaumassa tapahtuviin muutoksiin ja hieman lievemmin portfolion modifioidussa duraatiossa tapahtuviin muutoksiin.

Riskimallille suoritettiin myös herkkyyksanalyysijä stokastisten prosessien parametriestimaattien suhteen. Herkkyyksanalyysien perusteella (ks. Taulukko 13) voidaan todeta, että riskittömän koron prosessi on erityisen herkkä keskiarvoparametriestimaatin μ suhteellisille muutoksille. Riskipreemioiden prosessit puolestaan näyttäisivät olevan herkimpiä volatilitteettiparametriestimaatin σ suhteellisille muutoksille (ks. Taulukko 14). Riskimallin herkkyytstarkastelu suoritettiin myös parametriestimaattien keskivirheidensä suhteessa. Vaikka riskipreemioiden prosessien parametriestimaattien keskivirheet olivat melko suuria, niin luotu riskimalli kokonaisuudessaan reagoi yksittäisten parametrien muuttamiseen siten, että niihin lisätään tai vähennetään yksi kyseisen estimaatin keskivirhe, melko maltillisesti (ks. Taulukko 16).

Riskimalli sisältää monilta osin yksinkertaisuuksia, mahdollisia epätarkkuuden lähteitä ja kehityskohteita. Riskittömien korkojen prosessin osalta CIR mallin soveltuvuuden negatiivisten korkojen aikakauteen voidaan katsoa olevan määritelmällisesti kyseenalainen. Lisäksi yleinen korkotasoa on Kuvan 4 perusteella ollut trendinomaisesti laskeva, jolloin

keskiarvoon hakeutuvan mallin sopivuus korkojen mallintamiseen voidaan asettaa kyseenalaiseksi. Toisaalta tässä työssä estimointiaineiston aikaperiodia muokattiin siten, että mukaan otettiin korkohavainnot vain ajalta 2016 eteenpäin, jolloin korot ovat olleet pysyvästi matalalla. Estimointiperiodin valintaan liittyy kuitenkin huomattavaa epävarmuutta, eikä kirjallisuudessa ole esitelty yksiselitteistä tapaa aikaperiodin valintaan VaR mallien kalibroimiseksi, sillä toisaalta olisi hyvä olla mahdollisimman paljon havaintoja, mutta tuoreempien havaintojen voidaan ajatella kuvaavan vallitsevaa markkinaympäristöä vanhempia havaintoja paremmin. Systemaattisten riskipreemioiden osalta on syytä huomata, että nämä prosessit valitulla estimointiaineistolla eivät kuvaa yksittäisten arvopapereiden luottohäiriötodennäköisyyksissä tapahtuvia muutoksia vaan pikemminkin systemaattista markkinoiden luottoriskin hinnoittelussa tapahtuvia muutoksia. Riskimalliin on siksi lisätty Basel II luottoriskikomponentti kuvaamaan yksittäisiin arvopapereihin liittyvää luottoriskiä. Systemaattisen riskipreemion ja luottoriskikomponentin välisen korrelaation arvioiminen on kuitenkin hankalaa. Mahdollisesti parempi tapa olisi mallintaa riskipreemion prosessia yhdessä luottoriskin kanssa mahdollistamalla arvopapereiden rating siirtymät ja konkurssit stokastisena prosessina. Stokastisten prosessien sopivuutta riskittömän koron ja riskipreemioiden mallintamiseen voitaisiin mahdollisesti parantaa sallimalla myös hyppyt stokastisissa prosesseissa ja mallintamalla prosessien volatiliiteetti stokastisena. Molemmista löytyy esimerkkejä kirjallisuudesta. Yksi mainittava yksinkertaistus ja epätarkkuuden lähde on myös korkojen ja riskipreemioiden aikaraken-teen puutteellinen mallinnus. Riskimallissa on oletettu riskipreemioiden ja korkokäyrän muodon säilyvän ennallaan eli käytännössä malli mittaa riskiä korkokäyrän ja riskipreemioiden tason muutoksiin ("parallel shift"). Lisäksi on syytä tarkastella kriittisesti modifioidun duraation kautta laskettua portfolion arvon muutosta, mikä on karkea yksinkertaistus.

Mahdollisia tutkimuskohteita tulevaisuudessa on erityisesti negatiivisten korkojen aika-kauteen soveltuvat korkomallit. Lisäksi riskipreemioiden mallintamista tulisi tutkia lisää, erityisesti riskipreemioiden muutosten takana olevia faktoreita tulisi tutkia.

LÄHTEET

Bao, J., Pan, J. & Wang, J. (2011). The illiquidity of corporate bonds, *The Journal of Finance*, Vol. 66(3), s. 911-946.

Barnhill Jr, T.M. & Maxwell, W.F. (2002). Modeling correlated market and credit risk in fixed income portfolios, *Journal of Banking & finance*, Vol. 26(2-3), s. 347-374.

Basak, S. & Shapiro, A. (2001). Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices, *The review of financial studies*, Vol. 14(2), s. 371-405.

Basel Committee on Banking Supervision (2001). The new Basel Capital Accord. Consultative document, Saatavissa: <https://www.bis.org/bcbs/bcbscp3.htm>

Basel Committee on Banking Supervision (2005). An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions, Saatavissa: <https://www.bis.org/bcbs/bcbscp3.htm>

Bikker, J.A. & Hu, H. (2002). Cyclical patterns in profits, provisioning and lending of banks and procyclicality of the new Basel capital requirements, *PSL Quarterly Review*, Vol. 55(221)

Black, F. & Cox, J.C. (1976). Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions, *The Journal of Finance*, Vol. 31(2), s. 351-367.

Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of political economy*, Vol. 81(3), s. 637-654.

Brigo, D. & Mercurio, F. (2001). A deterministic–shift extension of analytically–tractable and time–homogeneous short–rate models, *Finance and Stochastics*, Vol. 5(3), s. 369-387.

Brigo, D. & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*, Springer Science & Business Media, 509 s.

Bundesbank (2020). Term structure of interest rates on listed Federal securities (method by Svensson) / residual maturity of 3.0 years / daily data, verkkosivu, Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): https://www.bundesbank.de/dynamic/action/en/statistics/time-series-databases/time-series-databases/759784/759784?listId=www_skms_it03a

Chen, L., Lesmond, D.A. & Wei, J. (2007). Corporate yield spreads and bond liquidity, *The Journal of Finance*, Vol. 62(1), s. 119-149.

Choudhry, M. (2006). *An introduction to value-at-risk*, 4th ed. John Wiley, Chichester, England, 224 s.

Collin-Dufresn, P., Goldstein, R.S. & Martin, J.S. (2001). The determinants of credit spread changes, *The Journal of Finance*, Vol. 56(6), s. 2177-2207.

Cox, J.C., Ingersoll Jr, J.E. & Ross, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, in: Anonymous (ed.), *Theory of valuation*, World Scientific, s. 129-164.

Diebold, F.X., Li, C. & Yue, V.Z. (2008). Global yield curve dynamics and interactions: a dynamic Nelson–Siegel approach, *Journal of Econometrics*, Vol. 146(2), s. 351-363.

- Duffie, D. (2005). Credit risk modeling with affine processes, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 29(11), s. 2751-2802.
- Duffie, D. & Singleton, K.J. (1999). Modeling term structures of defaultable bonds, *The review of financial studies*, Vol. 12(4), s. 687-720.
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020a). Ice Data Indices, LLC, ICE BofA AAA US Corporate Index Option-Adjusted Spread [BAMLC0A4CAAA], Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLC0A4CAAA>
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020b). Ice Data Indices, LLC, ICE BofA AA US Corporate Index Option-Adjusted Spread [BAMLC0A4CAA], Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLC0A4CAA>
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020c). Ice Data Indices, LLC, ICE BofA A US Corporate Index Option-Adjusted Spread [BAMLC0A4CA], Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLC0A4CA>
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020d). Ice Data Indices, LLC, ICE BofA BBB US Corporate Index Option-Adjusted Spread [BAMLC0A4CBBB], Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLC0A4CBBB>
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020e). Ice Data Indices, LLC, ICE BofA BB US High Yield Index Option-Adjusted Spread [BAMLH0A1HYBB], Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLH0A1HYBB>
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020f). Ice Data Indices, LLC, ICE BofA B US High Yield Index Option-Adjusted Spread [BAMLH0A1HYB], Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLH0A1HYB>
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020g). Ice Data Indices, LLC, ICE BofA CCC & Lower US High Yield Index Option-Adjusted Spread [BAMLH0A3HYC] Saatavissa (Viitattu 31.8.2020): <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLH0A3HYC>
- Finanssivalvonta (2020). Sijoitukset, verkkosivu, Saatavissa (viitattu 18.9.2020): <https://www.finanssivalvonta.fi/tilastot/vakuutus/sijoitukset/>
- Giesecke, K., Longstaff, F.A., Schaefer, S. & Strebulaev, I. (2011). Corporate bond default risk: A 150-year perspective, *Journal of Financial Economics*, Vol. 102(2), s. 233-250.
- Gordy, M.B. (2003). A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules, *Journal of financial intermediation*, Vol. 12(3), s. 199-232.
- Ho, T.S. & Lee, S. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, *the Journal of Finance*, Vol. 41(5), s. 1011-1029.
- Holston, K., Laubach, T. & Williams, J.C. (2017). Measuring the natural rate of interest: International trends and determinants, *Journal of International Economics*, Vol. 108 s. 59-75.
- Hull, J. (2009). *Options, futures and other derivatives*/John C. Hull. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 847 s.

- Hull, J. & White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities, *The review of financial studies*, Vol. 3(4), s. 573-592.
- Johnson, R.A. & Wichern, D.W. (2002). *Applied multivariate statistical analysis*, Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 773 s.
- Jorion, P. (1997). *Value at risk*, McGraw-Hill, New York, 332 s.
- Kivisaari, E. & Kahola, M. (2017). *Vakuutustalous–vakuutusyrityksen riskienhallinta, tilinpäätös ja vakavaraisuus*, Helsinki: FINVA, 289 s.
- Lando, D. (1998). On Cox processes and credit risky securities, *Review of Derivatives research*, Vol. 2(2-3), s. 99-120.
- Lowe, P.W. (2002). Credit risk measurement and procyclicality, BIS Working Paper No. 116, Saatavissa: <https://ssrn.com/abstract=846268>
- Marsh, T.A. & Rosenfeld, E.R. (1983). Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices, *The Journal of Finance*, Vol. 38(2), s. 635-646.
- Merton, R.C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, *The Journal of Finance*, Vol. 29(2), s. 449-470.
- Millar, R.B. (2011). *Maximum Likelihood Estimation and Inference : With Examples in R, SAS and ADMB*, John Wiley & Sons, Incorporated, New York, 357 s.
- Myung, I.J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation, *Journal of mathematical psychology*, Vol. 47(1), s. 90-100.
- Novotny-Farkas, Z. (2016). The interaction of the IFRS 9 expected loss approach with supervisory rules and implications for financial stability, *Accounting in Europe*, Vol. 13(2), ss. 197-227.
- Orlando, G., Mininni, R.M. & Bufalo, M. (2019). Interest rates calibration with a CIR model, *The Journal of Risk Finance*, Vol. 20(4), s. 370-387
- Phillips, P.C. & Yu, J. (2009). Maximum likelihood and Gaussian estimation of continuous time models in finance, in: Anonymous (ed.), *Handbook of financial time series*, Springer, s. 497-530.
- Privault, N. (2012). *Elementary Introduction to Stochastic Interest Rate Modeling*, an (2nd Edition), World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, 244 s.
- Rockafellar, R.T. & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of risk*, Vol. 2 s. 21-42.
- Sarykalin, S., Serraino, G. & Uryasev, S. (2008). Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization, in: Anonymous (ed.), *State-of-the-art decision-making tools in the information-intensive age*, Informs, s. 270-294.
- Taylor, R. (1990). Interpretation of the correlation coefficient: a basic review, *Journal of diagnostic medical sonography*, Vol. 6(1), s. 35-39.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, Vol. 5(2), s. 177-188.

Vakuutusyhtiölaki 2008/521, (2008). Saatavissa <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2008/20080521>

2009/138/EY (2009) Euroopan parlamentin ja neuvoston direktiivi vakuutus- ja jälleenvakuutustoiminnan aloittamisesta ja harjoittamisesta (Solvenssi II), Euroopan unionin virallinen lehti 17.12.2009. Saatavissa: <http://data.europa.eu/eli/dir/2009/138/2019-01-13>

2015/35 EU (2015) Komission delegoitu asetus vakuutus- ja jälleenvakuutustoiminnan aloittamisesta ja harjoittamisesta annetun Euroopan parlamentin ja neuvoston direktiivin 2009/138/EU täydentämisestä (Solvenssi II), Euroopan unionin virallinen lehti 10.10.2014. Saatavissa http://data.europa.eu/eli/reg_del/2015/35/oj