Tampereen yliopisto

Violet Hukki

FRAKTAALIEN DIMENSIOT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Elokuu 2020

Tiivistelmä

Violet Hukki: Fraktaalien dimensiot
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Elokuu 2020

Joukkoja, jotka koostuvat äärettömän monesta ja äärettömän pienistä itseään toistavista rakenneosista, kutsutaan fraktaaleiksi. Termin määrittely on melko haastavaa, joten tämän tutkielman määritelmä perustuu fraktaalin kahteen perusominaisuuteen: itsesimilaarisuuteen sekä fraktaaleille ominaiseen Hausdorffin dimensioon.

Tutkielmassa perehdytään ensin mittateorian käsitteisiin, joita ovat joukon suuruus, pituus, peite sekä Hausdorffin mitta. Tästä edelleen siirrytään tarkastelemaan Hausdorffin dimensiota ja itsesimilaarisuutta. Itsesimilaarisuuteen sisältyvät käsitteinä kutistuma, similariteetti, kutistussuhde sekä invarianttius. Huomataan, että fraktaali on joukko, joka on invartiantti similariteeteille ja täten siis itsesimilaarinen joukko.

Tutkielman lopussa tarkastellaan syvemmin neljää eri fraktaalia, Kochin lumihiutaletta, Sierpinskin kolmiota, Mengerin pesusientä sekä Cantorin joukkoa. Näillä neljällä fraktaalilla tarkastellaan esimerkin omaisesti fraktaalien rakennetta sekä niiden Hausdorffin dimensioiden määrittämistä.

Tutkielmaan ja sen sisältöön liittyy lukiolaisille suunnattu interaktiivinen opiskelumateriaali joukko-opista sekä fraktaaleista. Materiaali on löydettävissä tutkielman liitteistä sekä osoitteesta

https://tim.jyu.fi/view/tau/toisen-asteen-materiaalit/matematiikka/kertaus/joukko-oppia-ja-fraktaaleja.

Avainsanat: Fraktaali, Hausdorffin dimensio, Itsesimilaarisuus

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikkaa esiintyy luonnossa muun muassa erilaisissa rakenteissa. Tätä ilmiötä harvoin kuitenkaan esimerkiksi lukiomatematiikassa käsitellään, vaan konkreettiset esimerkit liittyvät ihmisen luomiin tilanteisiin. Fraktaalit ovat itsetoistuvia rakenteita, joita on nähtävissä luonnossa vaikkapa kukkakaaleissa ja saniaisen lehdissä. Tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään fraktaaleja sekä niiden ulottuvuuksia. Tutkielmaan liittyy myös verkosta löytyvä materiaali Joukko-oppia ja fraktaaleja, joka on suunnattu lukiomatematiikan rinnalle tuomaan hieman erilaista näkökulmaa.

Fraktaali itsessään on haastava määritellä tarkasti, mutta tässä tutkielmassa fraktaaliksi mielletään joukko, jolla on äärettömästi pieniä ja itseääntoistavia rakenneosia. Tätä rakennetta voitaisiin suurentaa, mutta rakenneosia "syntyisi"aina lisää. Fraktaaleille on myös ominaista, että niiden dimensio poikkeaa meille tutusta topologisesta dimensiosta. Fraktaalien dimensio voi olla myös jotain muuta kuin kokonaisluku ja tätä ulottuvuutta kutsutaan Hausdorffin dimensioksi. Tutkielmassa käsitellään fraktaalin ominaisuuksista itsesimilaarisuutta sekä Hausdorffin dimensiota. Tutkielmassa on hyödynnetty pääosin lähdettä [3]: Khain T. *Fractals and dimension*, 2016.

Lisäksi on käytetty teoksia *The Fractal Geometry of Mandelbrot*, Barcellos A., 1984 sekä *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Falconer K. 1952. Tekstissä on erikseen viitattu lähteisiin [1] ja [2], jos näitä on hyödynnetty.

Kuvassa 1.1 on esitetty tässä tutkielmassa käsiteltävät neljä fraktaalia.

Kuva 1.1. Neljä erilaista fraktaalia: Kochin lumihiutale, Sierpinskin kolmio, Mengerin pesusieni sekä Cantorin joukko.

Luvussa 2 tarkastellaan ensin mittateoriaan littyviä käsitteitä, kuten joukon suuruutta ja peitettä. Lisäksi käsitellään Hausdorffin mittaa, josta edelleen päästään käsittelemään luvussa 3 Hausdorffin dimensiota eli ulottuvuutta.

Fraktaalit ovat ominaisuuksiltaan itsesimilaarisia, eli ne koostuvat itsensä pienennöksistä. Luvussa 4 käsitellään itsesimilaarisuuden käsitettä sekä siihen liittyvää itsesimilaarisuussuhdetta. Luvussa 5 käsitellään neljän erilaisen fraktaalin rakenteita sekä niiden Hausdorffin dimensioita.

Viimeisessä luvussa 6 esitellään verkkomateriaali *Johdatus joukko-oppiin ja fraktaaleihin*. Materiaali on tuotettu opiskelumateriaaliksi lukiotason opiskelijoille, ja sen voi toteuttaa itseopiskeltavana kokonaisuutena tai vaihtoehtoisesti opettaja voi hyödyntää materiaalia oppitunneillaan.

2 Mittateoriaa

Tarkastellaan aluksi intuitiivisesti dimensiota käsitteenä. Olkoon B_r pallo, jonka säde on r, ja olkoon joukko $B_r \subset \mathbb{R}^d$, jossa $d \in \mathbb{Z}_+$. Kuvatkoon v nyt joukon B_r suuruutta d-ulottuvuudessa.

Kun pallo muodostetaan 1-ulottuvuudessa, B_r on jana, jonka pituutta suuruus v kuvaa. Lisäksi suuruus v on suoraan verrannollinen ympyrän säteeseen r, jota merkitään $v \propto r$. Vastaavasti 2-ulottuvuudessa B_r on ympyrä, jonka pinta-alaa suuruus v kuvaa, ja $v \propto r^2$. 3-ulottuvuudessa B_r on pallo ja nyt suuruus v kuvaa pallon tilavuutta ja $v \propto r^3$.

Oletetaan siis, että suuruus v on suoraan verrannollinen säteen eri ulottuvuuksiin r^d, merkitään $v \propto r^d$ tai vastaavasti $d \propto \dfrac{\log(v)}{\log(r)}$. Dimensio d riippuu kahdesta muuttujasta, säteestä r ja suuruudesta v. [3, s.1–2]

2.1 Joukon suuruus

Tässä kappaleessa on hyödynnetty lähteen [3] sivuja 1–2.

Määritelmä 2.1. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$. *Mitta* μ joukossa S on funktio $\mu : S \to \mathbb{R}_{\geq 0} \bigcup \{\infty\}$, jolle pätee seuraavat ominaisuudet:

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ jos $A \subset B$.

c) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, missä $\{A_i \subset \mathbb{R}^n,\ i \in I\}$. Tässä $I = \{1, 2, 3 \ldots\}$.

Mitta μ tarkoittaa joukon kokoa. Ominaisuuksista ensimmäinen (a) tarkoittaa, että tyhjän joukon mitta on nolla. Ominaisuuksista toinen (b) ilmaisee, että jos joukko A on joukon B aito osajoukko, tällöin joukon A mitta on suurimmillaan sama kuin joukon B mitta. Viimeinen ominaisuus (c) kertoo, että jos joukko on numeroituvasti ääretön yhdiste, niin yhdisteessä esiintyvien yksittäisten joukkojen yhteenlaskettu mitta on vähintään yhtä suuri kuin koko yhdisteen mitta. [2, s.10]

Yksinkertainen esimerkki joukon mitasta on *pistemassa*. Olkoon a alkio ja M joukko. Jos $a \in M$, niin $\mu(M) = 1$, ja toisaalta jos $a \notin M$, niin $\mu(M) = 0$.

Tarkastellaa nyt tilannetta, jossa pistemassa on mitta:

i) $\mu(\emptyset) = 0$, koska $\emptyset$ ei sisällä alkioita, ja erityisesti $a \notin \emptyset$.

ii) Oletetaan joukot A ja B siten, että $A \subset B$. Jos $a \in A$, niin $a \in B$ ja myös $\mu(A) = \mu(B) = 1$. Jos $a \notin A$, niin $\mu(A) = 0$. Joko $\mu(B) = 0$ tai $\mu(B) = 1$, ja näin ollen $\mu(A) \leq \mu(B)$.

iii) Olkoon nyt $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ numeroituva joukkoperhe. Jos $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1.$$

Nyt koska $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, niin välttämättä $a \in A_i$ ainakin jollain $i \in I$. Täten

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \geq 1, \text{ jolloin } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Toisaalta

$$\text{jos } a \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{ niin } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0.$$

Tällöin $a \notin A_i$ millään $i \in I$.

Täten

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0, \text{ ja } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

2.2 Joukon pituus ja peite

Fraktaalien dimensiota käsiteltäessä hyödynnetään *Hausdorffin mittaa*. Käsitellään tätä varten vielä termit *Eukleidinen etäisyys*, joukon *halkaisija* ja *peitteen koko*. Tässä kappaleessa on hyödynnetty lähteen [3] sivuja 2–3.

Määritelmä 2.2. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$, merkitään $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Nyt pisteiden x ja y välinen *Eukleidinen etäisyys* on

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Määritelmä 2.3. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$. Joukon S *halkaisija* $|S|$ on

$$|S| = \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}.$$

Määritelmä 2.4. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$. Joukon S δ-peite on äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukkoperhe

$$\{U_i \subset \mathbb{R}^n : i \in I\},$$

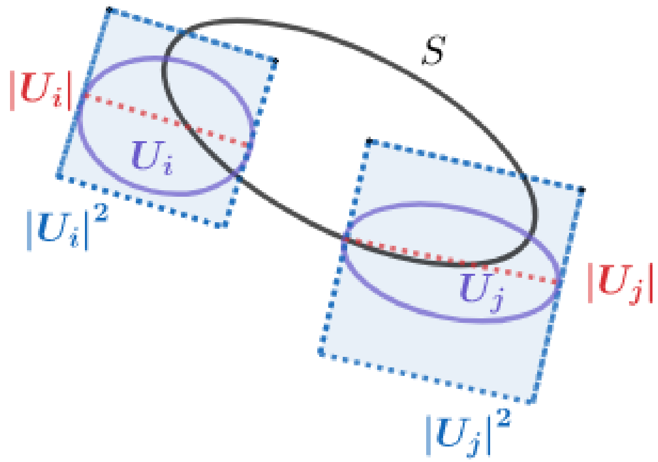
missä $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $0 \leq |U_i| \leq \delta$ ja $\delta > 0$.

Joukkoperheen U_i halkaisija on siis suurimmillaan δ:n suuruinen.

Määritellään vielä peitteelle suure H_δ^s. Oletetaan, että $S \subset \mathbb{R}^n$ ja $s \geq 0$. Määritellään nyt

$$H_\delta^s(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ on joukon } S\ \delta\text{-peite} \right\}.$$

Havainnollistetaan seuraavaksi määritelmiä. Kuvassa 2.1 on mustalla reunalla ympäröity joukko S. Tällä joukolla on kaksi δ-peitteen komponenttia, joukot U_i ja U_j. Näiden joukkojen halkaisijat $|U_i|$ ja $|U_j|$ ovat merkitty punaisilla janoilla. Tässä kuvassa $s = 2$ ja edelleen saadaan $H_\delta^2(S)$.



Kuva 2.1. Joukko S on mustalla viivalla rajattu joukko. Violetit joukot U_i ja U_j ovat joukon S δ-peitteen komponentteja.

δ-peite on joukko perheitä, jotka peittävät koko joukon S. Jos δ-peite pienenee, eli perheiden lukumäärä vähenee, huomataan että sarjan infimum kasvaa tai pysyy ennallaan. Infimum ei voi vähentyä. Tästä voidaan päätellä, että $H_\delta^s(S)$ on monotoninen ja sillä on olemassa raja-arvo tai epäoleellinen raja-arvo, kun $\delta \to 0$.

2.3 Hausdorffin mitta

Aiempien käsitteiden avulla voidaan määritellä *Hausdorffin mitta* $H^s(S)$, joka tarkoittaa raja-arvoa suureelle $H^s_\delta(S)$. Tässä kappaleessa on hyödynnetty lähteen [3] sivuja 3–4.

Määritelmä 2.5. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$. Nyt joukon S s-ulotteinen *Hausdorffin mitta* on

$$H^s(S) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(S).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että edellinen määritelmä on mielekäs siinä mielessä, että $H^s(S)$ tosiaan on mitta.

(i) Osoitetaan, että $H^s(\emptyset) = 0$. Tyhjä joukko peittyy kaikilla mahdollisilla δ-peitteillä, erityisesti se peittyy peitteellä $\{0\}$. Nyt määritelmästä saadaan, että

$$H^s_\delta(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{\infty} |\{0\}|^s = 0.$$

Ja edelleen tämä on kaikkien δ-peitteiden infimum, joten $H^s(\emptyset) = 0$. Määritellään vielä lisäksi, että $0^0 = 0$.

(ii) Oletetaan sitten, että $A \subset B$. Osoitetaan, että $H^s(A) \leq H^s(B)$. Nyt jos U_i-peite on joukon B peite, niin se on myös joukon A peite. Kuitenkaan joukon A peite ei ole välttämättä joukon B peite.

Nyt kaikille $\delta > 0$ pätee, että $H^s_\delta(A) \leq H^s_\delta(B)$. Edelleen tästä seuraa, että δ-peitteiden vähentyessä ($\delta \to 0$) myös joukon A peitteiden infimum on pienempi kuin joukon B peitteiden infimum. Voidaan siis kirjoittaa, että $H^s(A) \leq H^s(B)$.

(iii) Oletetaan seuraavaksi, että joukko $\{A_i \subset \mathbb{R}^n : i \in I\}$ on äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukkoperhe. Oletetaan lisäksi, että jokaiselle joukolle s-ulotteinen Hausdorffin dimensio on äärellinen, eli $H^s(A_i) < \infty$ kaikilla $i \in I$. Osoitetaan, että

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(A_i).$$

Valitaan $\epsilon > 0$ mielivaltaisesti. Silloin kaikille joukoille A_i ($i \in I$) on olemassa δ-peite $\{U_j^{(i)}\}$, joka on riippuvainen luvusta i, ja joka toteuttaa ehdon

$$\sum_j |U_j^{(i)}|^s < H^s_\delta(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Summataan kaikki $i \in I$, jolloin saadaan

$$\sum_i \sum_j |U_j^{(i)}|^s < \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^s(A_i) + \epsilon.$$

Nyt koska $\{U_j^{(i)}\}$ on peite joukoille A_i ($i \in I$), niin peitteiden yhdiste $\bigcup_{i \in I} \{U_j^{(i)}\}$ on peite yhdisteelle $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Voidaan kirjoittaa

$$H_\delta^s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_i \sum_j |U_j^{(i)}|^s < \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^s(A_i) + \epsilon.$$

Nyt jos $\epsilon \to 0$, niin

$$H_\delta^s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^s(A_i)$$

kun $\delta > 0$. Jos nyt $\delta \to 0$, niin

$$H^s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(A_i).$$

Nyt kohtien i)-iii) nojalla s-ulotteinen Hausdorffin mitta on todella mitta.

3 Dimensiot

Hausdorffin mitta ja dimensio kuuluvat olennaisesti fraktaalien matemaattisten ominaisuuksien tarkasteluun. Hausdorffin dimensio voidaan määrittää kaikille joukoille, vaikkakin sen arvo voi olla matemaattisesti hankala laskea. Tässä kappaleessa on hyödynnetty lähteen [3] sivuja 4–5.

Jos $\delta < 1$ ja s kasvaa, niin kaikilla joukoilla $S \subset \mathbb{R}^n$ suure $H^s_\delta(S)$ ei kasva, josta edelleen seuraa, ettei Hausdorffin mitta H^s kasva.

Olkoon nyt $t > s$ ja oletetaan $\{U_i\}$ olevan δ-peite joukolle S. Nyt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Otetaan seuraavaksi infimum epäyhtälön molemmilta puolilta, jolloin saadaan

$$H^t_\delta(S) \leq \delta^{t-s} H^s_\delta(S).$$

Lähestyköön nyt δ nollaa. Jos nyt $H^t(S) > 0$, niin

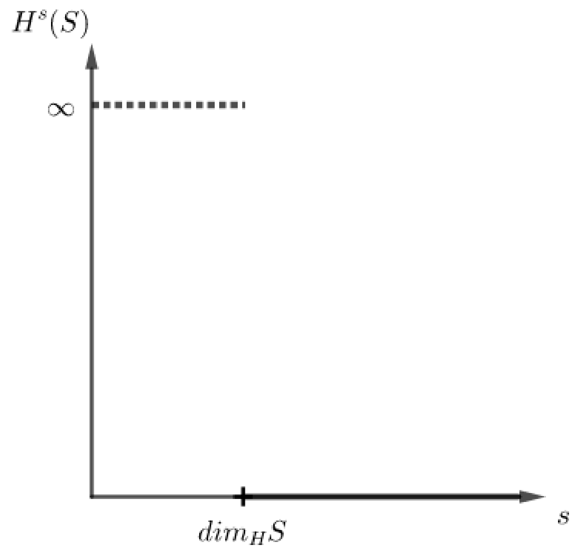
$$\lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(S) = \infty.$$

Toisaalta, jos $H^s(S) < \infty$, niin

$$H^t(S) = \lim_{\delta \to 0} H^t_\delta(S) = 0.$$

Siis ei ole olemassa kuin yksi arvo potenssille s, jolla $0 < H^s(S) < \infty$. Kyseessä on siis porrasfunktio, jonka arvot kulkevat äärettömässä niin kauan, kunnes jollain arvolla s funktio saa arvon 0.

Havainnollistetaan tätä kuvalla 3.1. Kun $s = 0$, niin kyseessä olisi 0-ulottuvuus ja Hausdorffin mitta $H^s(S) = 0$. Kohdassa, jossa Hausdorffin mitta $H^s(S)$ vähenee aina arvoon 0 asti, on kyseessä joukon *S Hausdorffin dimensio*.



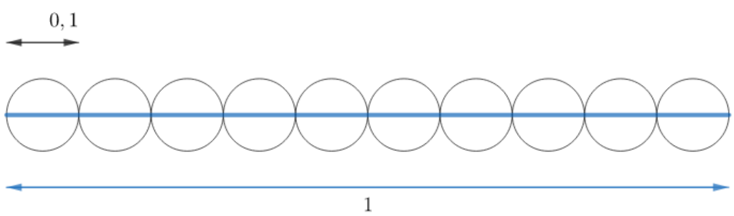
Kuva 3.1. Havainnollistuskuva, jossa x-akselilla on muuttujana s ja y-akselilla Hausdorffin mitta $H^s(S)$.

Määritelmä 3.1. Olkoon joukko $S \subset \mathbb{R}^n$. Nyt joukon S Hausdorffin dimensio $dim_H S$ on

$$dim_H S = \inf\{s \geq 0 : H^s(S) = 0\} = \sup\{s : H^s(S) = \infty\}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkin omaisesti määritelmää 3.1.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan janaa $[0, 1]$, jonka pituus on 1. Intuitiivisesti ajateltuna kyseessä on yksiulotteinen jana, jonka ulottuvuus olisi 1. Alla olevassa kuvassa on havainnolistettu tilannetta. Määritetään ulottuvuus vielä käyttäen yllä esitettyjä määritelmiä.



Olkoon nyt $\delta = 0,1$. Tällöin δ-peitteen komponenttien halkaisija on enimmillään $0,1$, eli $|U_i| \leq 0,1$ kaikilla i. Asetetaan komponentit siten, että ne sivuavat toisiaan, ja jokaisen komponentin halkaisija on $0,1$. Tällöin janan δ-peite koostuu kymmenestä komponentista, ja kaikilla i pätee $|U_i| = 0,1$.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa δ-peitteen komponenttien halkaisija on $|u_i| = \delta$. Nyt halkaisijoiden s. potenssin summaksi saadaan

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{\frac{1}{\delta}} \delta^s = \frac{1}{\delta}\delta^s = \delta^{s-1}.$$

Jos nyt $\delta \to 0$, ja $s > 1$, niin $\delta^{s-1} \to 0$. Jos taas $s < 1$, niin $\delta^{s-1} \to \infty$.

Edelleen jos $\delta \to 0$ ja $s > 1$, niin $H^s[0,1] = 0$. Ja jos taas $s < 1$, niin $H^s[0,1] = \infty$.

Kuvan 3.1 mukainen porras on kohdassa $s = 1$. Tämä tarkoittaa, että janan $[0,1]$ Hausdorffin dimensio on 1, kuten alussa pääteltiinkin.

4 Itsesimilaarisuus

Käsitellään seuraavaksi erästä ominaisuutta, jota kutsutaan *itsesimilaarisuudeksi* (engl. *self-similarity*). Itsesimilaarisuus tarkoittaa jonkin rakenteen yhteneväistä toistuvuutta; esimerkiksi luonnossa on mahdollista nähdä luonteeltaan itsesimilaarisia rakenteita muun muassa lumihiutaleissa ja saniaisen lehdissä. Itsesimilaarinen rakenne toistuu rakenteessa itsessään aina vain pienempinä yksikköinä. Tässä kappaleessa on hyödynnetty lähteen [3] sivuja 5–7.

Itsesimilaariset fraktaalit rakentuvat osista, jotka ovat samanmuotoisia itse fraktaalin kanssa mutta niitä on pienennetty ja käännetty.

Määritellään seuraavaksi kuvaukset, joita kutsutaan *kutistumiksi* (*engl.* contractions).

Määritelmä 4.1. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko. Jos nyt on olemassa luku c_i siten, että $0 < c_i < 1$ ja

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|,$$

kaikilla $x, y \in D$, niin kuvausta $S : D \longrightarrow D$ kutsutaan joukon D *kutistumaksi*.

Lisäksi, jos yhtäsuuruus pätee eli

$$|S(x) - S(y)| = c_i|x - y|$$

kuvausta S kutsutaan *similaarisuudeksi* (*engl.*contracting similarity) ja c on *kutistuksen suhde*.

Määritelmä 4.2. Äärellistä kutistumien joukkoa $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$, jossa $k \geq 2$, kutsutaan *kutistuskokoelmaksi* (engl. *iterated function system*).

Määritelmä 4.3. Yksikäsitteistä, epätyhjää ja kompaktia joukkoa $F \subset D$ kutsutaan *invariantiksi kutistukselle* (engl. *attractor*), jos

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} S_i(F),$$

missä $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$ on kutistuskokoelma.

Määritelmä 4.4. Olkoot similariteetit $S_1, ..., S_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja joukko F invariantti näille similariteeteille siten, että

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Tällöin sanotaan, että F on *itsesimilaarinen joukko* [2, s.114,117].

Seuraavaksi esitellään lause, joka helpottaa ulottuvuuksien määrittämistä. Lauseen avulla voidaan määrittää Hausdorffin dimensio hyödyntäen fraktaalin similariteettikertoimia.

Lause 4.5. *Olkoon F joukko, jolle*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

missä $S_1,\ S_2, ...,\ S_m$ *ovat similariteetteja suhteilla* $c_1,\ c_2,\ ..., c_m$*. Tällöin Hausdorffin dimensio joukolle F on*

$$dim_H F = s,$$

missä s on sellainen luku, että

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1.$$

Lisäksi, että Hausdorffin mitta $H^s(F)$ *on äärellinen positiivinen luku.*

Todistus. Rajoitetaan Hausdorffin mitta $H^s(F)$ sekä ylhäältä että alhaalta, ja osoitetaan $H^s(F)$ olevan äärellinen ja positiivinen luku. Ja nyt koska s on jokin tietty rajattu luku, niin myös $H^s(F)$ on äärellinen ja rajattu luku. Tällöin siis on olemassa Hausdorffin dimensio $\dim_H F = s$. Osoitetaan ensin, että $H^s(F)$ on äärellinen luku.

Oletetaan, että $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$. Olkoot sitten $S_1,\ S_2\ , ..., S_m$ similariteetteja. Näitä similariteetteja voidaan yhdistellä niin, että similariteettiyhdisteen pituus $k \geq 1$. (Esimerkiksi, jos yhdistetään similariteetit $S_1,\ S_2,\ S_3$ ja S_4, niin muodostettu yhdiste on $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4$, jonka pituus $k = 4$.)

Olkoon sitten $I_k = \{(i_1, ..., i_k) | 1 \leq i_j \leq m,\ j = 1, ..., k\}$. Nyt hyödyntämällä yhtälöä $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$ yhteensä k kertaa, saadaan

$$F = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} S_i \left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i \left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(...) \right) \right)}_{k\text{-kertaa}} = \bigcup_{I_k} S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ ... \circ S_{i_k}(F).$$

Yhtälö pätee kaikille pituuksille $k \in \mathbb{N}$, ja yhdisteiden kuvat muodostavat joukon F peitteen.

Nyt koska kuvaus $S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \ldots \circ S_{i_k}$ on similariteetti itsessään suhteella $c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$, saadaan lauseella 4.5 muodostettua yhtälö

$$\sum_{I_k} |S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)|^s = |F|^s \sum_{I_k} (c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s = |F|^s \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) = |F|^s$$

.

Lisäksi

$$|S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)| = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} |F| \leq (\max\{c_1, c_2, \ldots, c_m\})^k |F|.$$

Koska pituus k voidaan valita mielivaltaisesti ja $c_1, \ldots, c_m < 1$, niin kaikilla $\delta > 0$ on olemassa pituus k siten, että $|S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)| \leq \delta$. Siis yhdisteiden kuvat ovat fraktaalin F δ-peite. Koska on myös muita mahdollisia peitteitä, niin $H^s_\delta(F) \leq |F|^s$. Asettamalla $\delta \to 0$ saadaan $H^s(F) \leq |F|^s$. Ja edelleen koska |F| on äärellinen, niin myös Hausdorffin mitta $H^s(F)$ on äärellinen. On osoitettu, että Hausdorffin mitta $H^s(F)$ on ylhäältä rajoitettu, ja se on äärellinen luku.

Todistuksen loppuosa, jossa osoitetaan Hausdorffin mitan olevan myös alhaalta rajoitettu, on löydettävissä teoksesta [2, s.119–120]. □

5 Fraktaalit

Fraktaalien tarkka määrittely on haastavaa, mutta fraktaaliksi ajatellaan sellainen joukko F, jolla on seuraavat ominaisuudet:

i) Fraktaalilla on hieno, tarkka sekä toistuva rakenne.

ii) Fraktaali F on liian epäsäännöllinen kirjoitettavaksi tavanomaisen geometrian avulla.

iii) Fraktaali F on itsesimilaarinen, eli sisältää pienennöksiä itsestään. Itsesimilaarisuutta koskee määritelmä 4.4.

iv) Fraktaalilla F on usein dimensio, joka on suurempi kuin sen topologinen dimensio. Tätä dimensiota kutsutaan Hausdorffin dimensioksi, ks. lause 4.5.

v) Useimmissa tapauksissa fraktaali F on määritelty yksinkertaisella menetelmällä, esimerkiksi rekursiivisesti. [2]

Kohdassa iv) käsiteltiin topologista dimensiota. Tähän käsitteeseen ei syvennytä tässä tutkielmassa tarkemmin, mutta aiheesta voi lukea lisää esimerkiksi lähteestä [4, s.15, s.38].

Fraktaalien rakenteita löytyy luonnosta, kuten jo aiemmin mainittiinkin, esimerkiksi saniaisen lehdistä sekä lumihiutaleista. Lisäksi itsetoistuvan rakenteen voi huomata esimerkiksi kukkakaaleissa. Kukkakaalien nuppu koostuu samanlaisista, mutta vain pienemmistä nupun näköisistä osista.

Eräitä tunnetuimpia fraktaaleja ovat *Kochin lumihiutale*, *Sierpińskin kolmio*. Näiden lisäksi muita tunnettuja fraktaaleja ovat *Mengerin pesusieni*, *Cantorin joukko*, *Mandelbrotin joukko* sekä *Julian joukko*. Tässä tutkielmassa käsitellään näistä neljää ensimmäistä. Mandelbrotin sekä Julian joukoista löytyy lisätietoja esimerkiksi lähteestä [5].

Tarkastellaan seuraavaksi erilaisten fraktaalien rakennetta sekä ulottuvuutta.

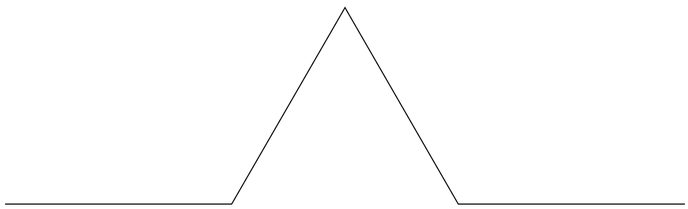
5.1 Kochin lumihiutale

Tarkastellaan fraktaalia nimeltä Kochin lumihiutale. Kochin lumihiutaleen piiri on ääretön, mutta sen pinta-ala on äärellinen. Kochin lumihiutaleen rakenne muodostuu, kun pohjajana jaetaan aina kolmeen osaan, joista keskimmäinen osa korvataan tasasivuisella kolmiolla. [3, s.9]

Kuvassa 5.1 on Kochin käyrän alkutilanne. Tämä suora jana jaetaan kolmeen

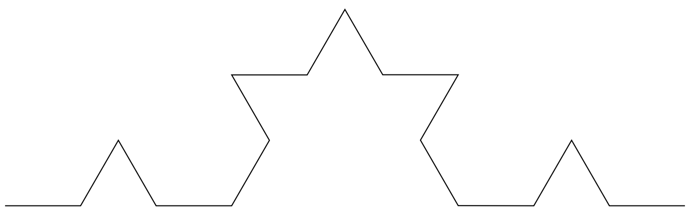
Kuva 5.1. Taso 0: pohja (engl. *initiator*)

yhtä suureen osaan, joista keskimmäinen jana korvataan tasasivuisella kolmiolla.



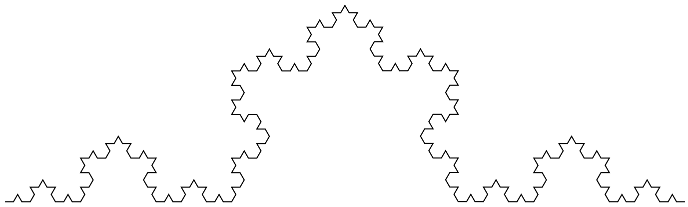
Kuva 5.2. Taso 1: kehittäjä (engl.*generator*)

Tasasivuisen kolmion lisäämisen jälkeen ollaan päädytty kuvan 5.2 näköiseen tilanteeseen. Tätä ensimmäistä vaihetta kutsutaan kehittäjäksi, sillä tätä osaa lisätään pienempänä versiona jokaiseen janaan. Jokainen murtoviiva korvataan nyt tällä kehittäjän pienennöksellä.



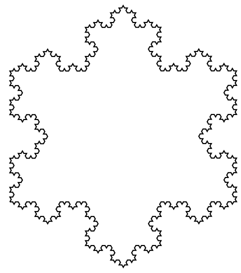
Kuva 5.3. Taso 2: Pohjasta lähtien laskettuna janoja on jaettu yhteensä kaksi kertaa, ja jokaiseen keskimmäiseen janaan on liitetty tasasivuinen kolmio.

Kuvassa 5.3 on hyödynnetty ensimmäisen tason kehittäjäosasta, jolla on korvattu jokainen murtoviiva.



Kuva 5.4. Taso 3: Tällä tasolla janoja on jaettu yhteensä kolme kertaa.

Edelleen jokainen murtoviiva on korvattu kehittäjäosan pienennöksellä, jolloin ollaan saatu yhä monimutkaisempi kuvio. Kuvassa 5.4 nähdään Kochin käyrälle ominainen piirin muoto. Kehittäjäosaa liitetään äärettömän monta kertaa, jolloin piirin pituus kasvaa kohti äärettömyyttä. Jos kehittäjäosan liittämisessä osaa kierrettäisiin, saataisiin suljettu kuvio, eli Kochin lumihiutale (kuva 5.5).



Kuva 5.5. Jos yhdistellään akselinsa ympäri pyöräytettyä Kochin käyrän osaa, saadaan mallinnettua Kochin lumihiutale.

Tarkastellaan seuraavaksi, millaiset similariteetit muodostavat Kochin käyrän. Jotta iteraatiosta 1 (kuva 5.2) päästäisiin iteraatioon 2 (kuva 5.3), täytyy kehittäjäosaa kutistaa kertoimella 3 ja korvata horisontaaliset janat kahdella kopiolla. Lisäksi kehittäjäosaa kutistetaan kertoimella 3 ja kierretään 60° vastapäivään, jonka jälkeen sijoitetaan tämä tasakylkisen kolmion vasemman kyljen paikalle. Viimeisenä kutistetaan kehittäjäosaa samalla kertoimella ja kierretään 60° myötäpäivään, ja sijoitetaan kolmion oikean kyljen päälle.

Similariteettien kertoimet ovat $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{3}$. Nyt lauseella 4.5 saadaan

$$\sum_{i=1}^{4} c_i^s = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

josta edelleen ratkaistaan

$$s = \frac{2 \cdot \ln(2)}{\ln(3)} = 1{,}26186.$$

Kochin käyrän Hausdorffin dimensio on siis $1{,}26186$.

Sama tulos saataisiin, jos valittaisiin mikä tahansa iteraatiotaso ja mitkä tahansa similariteetit. Esimerkiksi toisesta tasosta (kuva 5.3) kolmanteen tasoon (kuva 5.4), pienennyskerroin olisi 9. Yhteensä pienennettyjä kopioita liitettäisiin yhteen 16 kappaletta. Similariteettikertoimet olisivat siis $c_1 = c_2 = \ldots = c_{16} = \frac{1}{9}$. Nyt lauseella 4.5 saataisiin

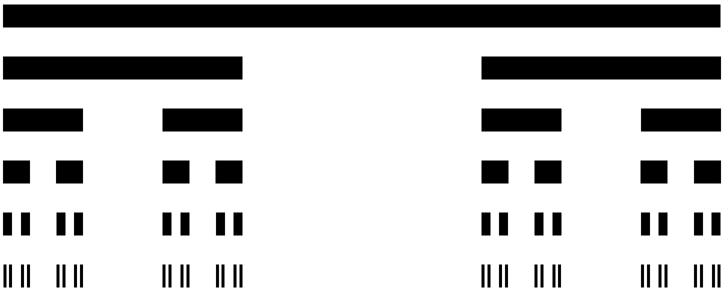
$$\sum_{i=1}^{16} c_i^s = 16 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^s = 1$$

josta edelleen ratkaistaan

$$s = \frac{2 \cdot \ln(2)}{\ln(3)} = 1{,}26186.$$

5.2 Cantorin joukko

Tarkastellaan seuraavaksi *Cantorin joukkoa*, joka on esitetty kuvassa 5.2.



Kuva 5.6. Cantorin joukon rakenne. Ylin jana on lähtötilanne. Toiseksi ylimmät janat on tulos ensimmäisestä iteroinnista.

Cantorin joukon rakenteen alkutilanne on jana $[0,1]$, jolla on pituus 1. Jana jaetaan kolmeen osaan, joista poistetaan keskimmäinen. Jäljelle jäävät nyt janat $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ja $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Edelleen nämä janat jaetaan kolmeen osaan, josta keskimmäinen poistetaan. Cantorin joukko on siis itsesimilaarinen ja se koostuu itsensä pienennöksistä. [3, s.7]

Määritetään seuraavaksi Cantorin joukon Hausdorffin ulottuvuus. Määritetään ensin Cantorin joukon similariteetit ja similariteettikertoimet.

Jotta alkuperäisestä janasta $[0,1]$ päädyttäisiin toiselle riville janoiksi $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ja $\left[\frac{2}{3},1\right]$, täytyy alkujanaa pienentää kertoimella 3. Asetetaan sitten janat väleille $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ja $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Ensimmäisessä iteraatiossa on siis kaksi similariteettia S_1 ja S_2, jotka voidaan kirjoittaa muodossa $S_1(x)=\frac{1}{3}x$ ja $S_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Merkitään nyt Cantorin joukkoa kirjaimella C. Nyt Cantorin joukolle

$$C=\bigcup_{i=1}^{2} S_i(C)=S_1(C)\cup S_2(C).$$

Similariteettikertoimet ovat edelleen $c_1=c_2=\frac{1}{3}$. Ja nyt hyödyntäen lausetta 4.5 saadaan

$$\sum_{i=1}^{2} c_i^s = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

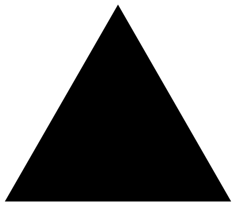
josta edelleen ratkaistaan

$$s=\frac{\ln(2)}{\ln(3)}=0,63093.$$

5.3 Sierpinskin kolmio

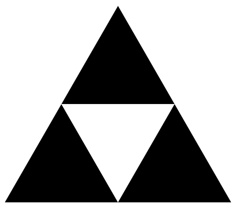
Käsitellään seuraavaksi fraktaalia nimeltä Sierpinskin kolmio, ja tarkastellaan tämän rakennetta sekä Hausdorffin ulottuvuutta.

Sierpinskin kolmio on itsesimilaarinen fraktaali, joten hyödynnetään lausetta 4.5. Tarkastellaan kuitenkin ensin Sierpinskin kolmion rakennetta. [3, s.8]



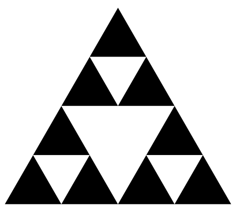
Kuva 5.7. Taso 0: Sierpinskin kolmion alkutilanne

Lähtötilanne on piirretty kuvaan 5.7. Kyseessä on tasasivuinen kolmio. Määritetään tasasivuisen kolmion sivujen keskipisteet, joiden kautta jaetaan kolmio neljäksi yhtä suureksi kolmioksi.



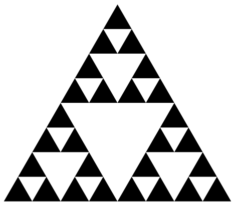
Kuva 5.8. Taso 1: Sierpinskin kolmion iteroinnin ensimmäinen vaihe

Näistä neljästä kolmioista keskimmäinen poistetaan, jolloin jäljelle jää kolme tasasivuista kolmiota, jotka osuvat toisiinsa kärjistään. Päädytään kuvan 5.8 tilanteeseen. Edelleen näiden kolmen kolmion sivujen keskipisteet määritetään, ja niiden avulla jokainen kolmio jaetaan neljään yhtä suureen tasasivuiseen kolmioon.



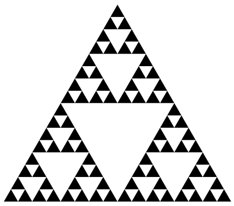
Kuva 5.9. Taso 2: Sierpinskin kolmion toinen iterointi

Samoin kuin edellisessä kohdassa, nytkin kaikki keskelle jääneet kolmiot poistetaan, jolloin jäljelle jää kuvan 5.9 mukaisesti yhdeksän pientä tasasivuista kolmiota, jotka koskettavat toisiaan kärjillään.

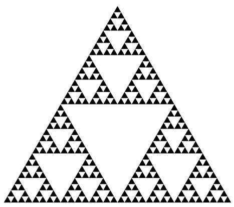


Kuva 5.10. Taso 3: Sierpinskin kolmion iteroinnin kolmas vaihe

Edelleen jokainen tasasivuinen kolmio jaetaan sivujensa keskipisteiden avulla neljään pienempään tasasivuiseen kolmioon, joista edelleen keskimmäinen kolmio poistetaan. Näin päädytään kuvien 5.11 ja 5.12 kuvioihin. Tätä iterointia voitaisiin jatkaa aina vain edelleen.



Kuva 5.11. Taso 4: Sierpinskin kolmion iteroinnin neljäs vaihe



Kuva 5.12. Taso 5: Sierpinskin kolmion iteroinnin viides vaihe

Tarkastellaan seuraavaksi Sierpinskin kolmion similariteettikertoimia. Jotta alkutilanteen tasasivuinen kolmio saadaan iteroitua ensimmäisen asteen kolmeksi kolmioksi, alkutilanteen kolmio on kutistettu kertoimella kaksi. Näitä pienennöksiä sijoitetaan kolme niin, että jokaisen kolmion kaksi kärkeä on alkuperäisen kolmion kahden sivun keskipisteissä.

Similariteetteja on siis yhteensä kolme: S_1, S_2 ja S_3, joiden similariteettikertoimet $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$. Nyt lauseella 4.5 voidaan ratkaista Hausdorffin dimensio Sierpinskin kolmiolle.

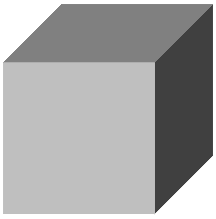
$$\sum_{i=1}^{3} c_i^s = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1,$$

josta edelleen voidaan ratkaista Hausdorffin dimensio

$$s = \frac{\lg(3)}{\lg(2)} = 1,58496.[3, s.8]$$

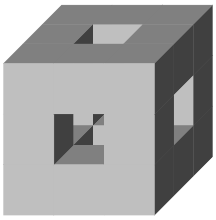
5.4 Mengerin pesusieni

Tarkastellaan fraktaalia nimeltä *Mengerin pesusieni*. Mengerin pesusieni on kolmiulotteinen kuutio, jonka osasia jaetaan ja poistetaan. Iteroinnin edetessä päädytään aina reikäisempään kuutioon, joka muistuttaa pesusientä. [1, s.108-109]



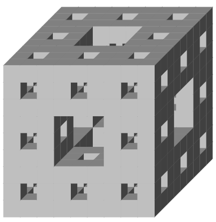
Kuva 5.13. Taso 0: Mengerin pesusienen alkutilanne

Kuvassa 5.13 on Mengerin pesusienen iteroinnin aloitustilanne. Kuutio jaetaan 27 yhtäsuureen kuutioon.



Kuva 5.14. Taso 1: Mengerin pesusienen ensimmäinen iterointi

Jokaisen tahkon keskimmäinen kuutio poistetaan, jolloin jäljelle jää vain suuremman kuution särmät ja keskelle aukko. Päädytään kuvan 5.14 mukaiseen tilanteeseen. Edelleen jokainen pienempi kuutio jaetaan 27 pienempään kuutioon. Nyt poistetaan



Kuva 5.15. Taso 2: Mengerin pesusienen toinen iterointi

taas jokainen keskimmäinen kuutio, ja tuloksena on kuvan 5.15 tilanne. Tarkastellaan seuraavaksi Mengerin pesusienen similariteetteja ja niiden kertoimia.

Ensimmäisessä iteroinnissa alkuperäinen kuutio pienennetään kertoimella 3. Kopioita tehdään yhteensä 20 kappaletta, sillä keskimmäiset poistetaan (yhteensä 7 kuutiota). Similariteetit ovat siis $S_1, S_2, \ldots, S_{20}$, ja näiden similariteettikertoimet ovat $c_1 = c_2 = \ldots = c_{20} = \frac{1}{3}$. Nyt lauseella 4.5 voidaan ratkaista Mengerin pesusienen Hausdorffin dimensio.

$$\sum_{i=1}^{20} c_i^s = 20 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

josta edelleen voidaan ratkaista

$$s = \frac{\ln(20)}{\ln(3)} = 2,72683.$$

6 Johdatus joukko-oppiin ja fraktaaleihin

Seuraavaksi esitellään lukiolaisille tarkoitettu materiaali liittyen joukko-oppiin sekä fraktaaleihin. Opiskelijoille suunnattu materiaali löytyy tästä linkistä. Lisäksi materiaali on tutkielman liitteenä (ks. 6.3.2). Materiaalin tarkoituksena on toimia joko itseopiskeltavana aineistona tai oppitunnin tukena. Materiaali sisältää joukko-opin alkeet ja siihen liittyvät termistöt. Materiaalin tehtävät eivät vaadi ennakkotietoja joukko-opista tai fraktaaleista, ja esitys aloitetaan aivan perusasioiden käsittelystä ja hallitsemisesta. Materiaalin loppuosassa käsitellään myös fraktaaleja, jotka ovat tiettyjä joukkoja tietyillä ominaisuuksilla. Fraktaaleissa käsitellään tärkeimmät termit kuten itsesimilaarisuus, similaarisuuskerroin sekä Hausdorffin dimensio.

Materiaali sisältää teoriaa, tehtäviä sekä malliratkaisuja vaikeimpiin tehtäviin. Tehtävät ovat suurimmalta osin interaktiivisia ja automaattitarkisteisia, mutta joissain tehtävissä palautus tapahtuu palautustiedoston avulla. Nämä tiedostot opettaja voi halutessaan tarkastaa sekä pisteyttää.

6.1 Johdatus joukko-oppiin

Tässä luvussa tutustutaan joukko-oppiin ja sen keskeisiin termeihin. Materiaali sisältää kaksi johdantotehtävää, joiden tarkoituksena on toimia aktivoivina elementteinä opiskelijoille. Tässä osuudessa ei ole vielä teoriaa, vaan opiskelijan tehtävänä on itse päätellä kuvasta joukot sekä niihin sisältyvät alkiot.

Tehtävätyypit tässä kappaleessa ovat ”totta vai tarua” -kysymykset sekä piirtotehtävä. Toisessa johdantotehtävässä tarkoituksena on pohtia, kuinka joukot ja alkiot voivat myös kulkea limittäin piirroksissa. Yksi alkio voi kuulua moneen eri joukkoon, ja silti joukot eivät ole samat (joukkojen samuuteen palataan myöhemmässä vaiheessa).

6.2 Joukko-opin käsitteitä

Edellisessä kappaleessa tutuiksi tulivat joukot ja alkiot. Tässä kappaleessa syvennytään tarkemmin näihin olentoihin määritelmän tyylisten info -laatikoiden avulla. Tärkeimmät teoriat kerrotaan harmaissa laatikoissa, joihin voi aina palata tehtäviä tehdessä.

6.2.1 Joukot ja alkiot

Ensimmäinen teorialaatikko sisältää tietoa joukoista ja alkioista tarkemmin kuin johdantokappaleessa. Tässä kappaleessa käsitellään myös tyhjäjoukko sekä kahden joukon samuus. Teoriassa käsitellään merkinnät kuulua joukkoon $\in$ ja tyhjä joukko, $\emptyset$.

Tässä kappaleessa opiskelija tekee ”valitse oikea vaihtoehto” -tehtävätyypin tehtäviä, joissa on tehtävänantona havainnollistettu joukkoja ja alkioita ympyröillä ja niiden sisälle merkityillä alkioilla. Kappaleen lopussa ohjataan tarkastelu osajoukkoihin.

6.2.2 Osajoukot

Tässä osassa teoriassa käsitellään osajoukon määritelmä. Käsitellään sisältymiseen käytettävät merkinnät $\subset$ ja $\not\subset$. Lisäksi käydään läpi tyhjän joukon sisältyminen kaikkiin joukkoihin.

Tämän osuuden tehtävänä on ”totta vai tarua” -tehtävä, jossa tehtävänantona on laadittu valmiit joukot, jotka on nimetty kirjaimin $A - E$. Tehtävässä on automaattinen tarkistus. Tehtävässä on mahdollisuus avata GeoGebra-sovellus, jos piirtäminen auttaa hahmottamaan tehtävän toteutusta.

6.2.3 Yhdiste, leikkaus ja erotus

Tässä osiossa opiskelija lähtee tutkimaan yhdistettä, leikkausta ja erotusta johdantotehtävän avulla. Johdantotehtävässä pyydetään hahmottelemaan valmiiksi annetut joukot GeoGebralla. Tämän jälkeen opiskelija palauttaa GeoGebralla toteutetun piirroksen sille merkittyyn palautuslaatikkoon.

Johdantotehtävän jälkeen on teorialaatikko, jossa esitellään yhdiste, leikkaus ja erotus sekä näihin liittyvät matemaattiset merkinnät $\bigcup$, $\bigcap$ ja $\setminus$. Teoria käsitellään esimerkin avulla niin, että tarkasteltavaksi joukoksi on valittu äärelliset joukot $A = \{\text{a, b, c}\}$ sekä $B = \{\text{a, c, d, e, f}\}$.

Opiskelija tekee ensin ”valitse oikea vaihtoehto” -tyypin tehtävän liittyen tekemäänsä edelliseen johdantotehtävään. Tehtävässä on automaattitarkistus ja kolmessa ensimmäisessä osatehtävässä on myös pieni opastus tehtävänannossa.

Toinen tehtävä liittyen leikkaukseen, erotukseen ja yhdisteeseen on ”totta vai tarua” -tyypin tehtävä, jossa on valmiiksi annetut joukot. Joukot on havainnollistettu piirtämällä.

6.2.4 Funktiot

Viimeinen osa liittyen joukko-oppiin on funktiot ja käänteisfunktiot. Tämä osuus aloitetaan johdantotehtävällä, jossa opiskelijaa pyydetään hahmottelemaan GeoGebralla pyydetyt joukot A ja B. Näiden joukkojen alkioiden välille opiskelija pohtii jonkin säännön ja piirtää viivat niihin alkioihin, jotka liittyvät toisiinsa.

Johdantotehtävän jälkeen on teorialaatikko, jossa käsitellään funktion merkintätavat ja määritelmä. Lisäksi käsitellään funktion määrittely- ja arvojoukot. Tässä hyödynnetään piirrosta, jossa on eroteltu lähtö- ja maalijoukoista määrittely- ja arvojoukot.

Opiskelija tekee yhteensä kaksi eri tehtävää liittyen funktioihin. Ensimmäisen tehtävän a-kohta on ”raahaa”-tehtävä, jossa on valmiiksi piirretty määrittely- ja arvojoukot funktiolle $f(x)$. Opiskelijan tulee raahata oikeat alkiot oikeille paikoille. Tehtävän b-kohta on ”totta vai tarua” -tehtävä, jossa on väitteitä liittyen a-kohdan funktioon. Tässä opiskelijan tulee pohtia muun muassa määrittelyjoukkoja neliöjuurelle.

6.2.5 Käänteisfunktiot

Joukko-oppiosuuden lopussa käsitellään suppeasti myös käänteisfunktiot. Tätä havainnollistetaan nuolella, joka kulkeekin joukosta B joukkoon A, eli päinvastaiseen suuntaan kuin aiemmin. Lisäksi teoriaosassa on esimerkki, miten aidosti monotoniselle funktiolle voidaan muodostaa käänteisfunktio.

Käänteisfunktioon liittyy myös kaksi eri tehtävää, joista ensimmäinen on ”raahaa”-tehtävä, jossa pitää täydentää käänteisfunktion arvojoukon alkiot oikeisiin paikkoihin. Lisäksi tehtävässä kysytään alkuperäisen funktion lauseketta, jolloin opiskelijan tulee ensin löytää käänteisfunktiolle f^{-1} lauseke, ja tämän jälkeen ajatella se käänteisesti.

Toinen tehtävä liittyen käänteisfunktioon on kuvaajan lukeminen, jossa aluksi muistellaan kuvaajan lukemista funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ avulla. Tämän jälkeen viimeiset ”valitse oikea vaihtoehto” -tehtävät vaativat opiskelijalta oivallusta siitä, että käänteisluetaan vain y-akselilta.

6.3 Fraktaalit

Materiaalin loppuosassa perehdytään fraktaaleihin, jotka itse asiassa ovat tietynlaisia joukkoja tiettyine ominaisuuksineen. Pikkutarkemmat selvitykset tästä jätetään materiaalista pois, sillä materiaalin painopisteenä on esitellä fraktaalit mahdollisimman kevyesti.

6.3.1 Mitä ovat fraktaalit?

Fraktaalien määritteleminen ei ole yksinkertaista, mutta materiaalissa fraktaali määritellään olentona, jolla on ominaisuutenaan itsesimilaarisuus sekä tietty Hausdorffin dimensio. Materiaalissa havainnollistetaan luonnosta löytyvää itsesimilaarista rakennetta Romanescu-kukkakaalilla, jonka rakenteessa on selkeästi havaittavissa osasia, jotka ovat kokonaisuudesta luotuja pienempiä kopioita. Opettaja voi oppitunnilla kertoa muista luonnossa esiintyvistä itsesimilaarisista asioista, kuten lumihiutaleista, saniaisenlehdistä, kukka- ja parsakaaleista.

Johdantotehtävänä opiskelija hyödyntää internettiä ja etsii tietoa siitä, mistä kaikkialta luonnossa tätä fraktaalille ominaista piirrettä, itsesimilaarisuutta, voi löytää. Vastaus palautetaan tekstimuodossa.

Materiaalissa käsitellään Kochin lumihiutaleen "rakennusvaiheet". Tarkemmat yksityiskohtaiset tiedot lumihiutaleen rakentumisesta löytyy tämän tutkielman kappaleesta 5.1.

Opiskelija perehtyy Sierpinskin kolmion rakentamiseen yhden tehtävän avulla. Tehtävässä on annettu kuvina Sierpinskin kolmion viisi ensimmäistä rakennusvaihetta, jotka ovat sekaisessa järjestyksessä. Opiskelijan tulee järjestää kuviot oikeaan järjestykseen. Tämän jälkeen opiskelija pohtii, mikä on kaava Sierpinskin kolmion rakentumiselle. Minkälaisia vaiheita on nähtävissä jokaisessa rakennusvaiheessa? Tarkemmat yksityiskohtaiset tiedot Sierpinskin kolmion rakentumisesta löytyy tämän tutkielman kappaleesta 5.3.

Kolmas tehtävä sisältää tietoja Mengerin pesusienestä ja opiskelija järjestää kolme Mengerin pesusienen vaihetta oikeaan järjestykseen ja pohtii myös Mengerin pesusienen rakennusvaiheita. Tarkemmat yksityiskohtaiset tiedot Mengerin pesusienen rakentumisesta löytyy tämän tutkielman kappaleesta 5.4.

Viimeisenä tehtävänä tähän osioon liittyen opiskelija perehtyy itsenäisesti Julian ja Mandelbrotin joukkoihin hyödyntäen internettiä. Opiskelija vastaa tekstikysymykseen, mitä samaa ja mitä eroa näillä kahdella joukolla on.

6.3.2 Fraktaalien rakenne

Materiaalin lopussa käsitellään fraktaalien rakennetta. Tutustutaan käsitteisiin itsesimilaarisuus, similariteettikerroin ja Hausdorffin dimensio. Fraktaalien ulottuvuudet poikkeavat meidän kokemistamme ulottuvuuksista (kokonaisluku-ulottuvuuksista) siinä, että fraktaalien ulottuvuudet voivat olla myös muita kuin kokonaislukuja.

Fraktaalien Hausdorffin dimension määrityksestä on materiaalissa esitetty esimerkkitehtävä, jossa lasketaan välivaiheet esittäen Kochin lumihiutaleen Hausdorffin dimensio. Tämän tutkielman kappaleessa 5.1 käsitellään Kochin lumihiutaleen dimension määritys, mutta materiaalissa on esitetty yksityiskohtaisempi lasku.

Opiskelijalle on kaksi tehtävää tässä osuudessa, jossa hän itse määrittää Sierpinskin kolmion ja Mengerin pesusienen Hausdorffin dimensiot. Näissä tehtävissä oma vastaus palautetaan liitetiedostona. Tehtävissä on mahdollista saada vihjeitä tehtävän ratkaisemiseen. Lisäksi opiskelija voi vertailla omaa vastaustaan malliratkaisuun. Tämän tutkielman kappaleissa 5.3 ja 5.4 käsitellään Sierpinskin kolmion ja Mengerin pesusienen Hausdorffin dimensioiden määritys.

Lähteet

[1] Barcellos, Anthony. *The Fractal Geometry of Mandelbrot*. College Mathematics Journal 15.2, 98–114, 1984.

[2] Falconer, Kenneth. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1952.

[3] Khain, T. *Fractals and dimension*. University of Chicago, 2016.

[4] Mandelbrot, B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and company, 1983.

[5] Peitgen, H., Jürgens, H. & Saupe, D. *Chaos and Fractals; New Frontiers of Science*. New York: Springer-Verlag, 1992.

Liitteet

Joukko-oppia ja fraktaaleja

On suositeltavaa avata materiaali verkossa osoitteessa https://tim.jyu.fi/view/tau/toisen-asteen-materiaalit/matematiikka/kertaus/joukko-oppia-ja-fraktaaleja. Liitteessä on kolme tehtävää, jotka eivät näy miten niiden pitäisi. Nämä tehtävät ovat interaktiivisia raahaustehtäviä: Tehtävä 3.2: Funktio eli kuvaus, tehtävä 3.3: käänteisfunktio sekä tehtävä 4.2: Sierpinskin kolmio. Selaimessa materiaalin interaktiiviset tehtävät toimivat parhaiten, ja käyttäjän vastaukset tallentuvat.

Joukko-opista fraktaaleihin

Ohjeita käyttäjälle

Materiaali koostuu viidestä alaluvusta, jotka sisältävät tehtäviä, teoriaa sekä esimerkkejä liittyen joukko-oppiin ja fraktaaleihin. Löydät sisällysluettelon linkkeineen sivun vasemmasta reunasta.

Materiaali on pyritty suunnittelemaan niin, että sitä voidaan hyödyntää sekä oppitunneilla että itsenäisessä opiskelussa. Tehtäviä suositellaan tekemään annetussa järjestyksessä, sillä jokainen osio sisältää oman oppisisältönsä sekä mahdollisesti tärkeää taustatietoa seuraaviin tehtäviin.

Suurin osa tehtävistä on rakennettu siten, että vastaukset voi tallentaa tai tarkistaa tehtävän yhteydessä. Tehtävät ovat tyypiltään sellaisia, että laskimeen ei tarvitse turvautua. Jos tehtävässä käsketään hyödyntämään vapaavalintaista ohjelmistoa, sen yhteyteen on lisätty kohta, johon voit ladata kuvakaappauksen tai vastaustiedoston, kun olet saanut tehtävän valmiiksi. Näin voit tallentaa kaikki vastaukset tälle sivulle. Jos teet tehtävän paperille, voit ottaa siitä kuvan ja ladata palautuskohtaan.

Ohjeita vastaamiseen:

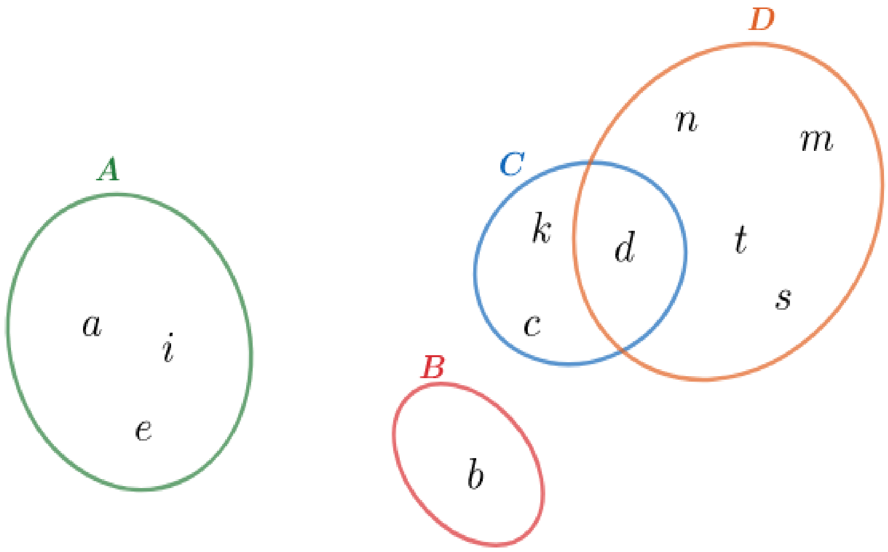
- Osa tehtävistä avautuu kokonaiseksi vasta kun viet kursorin tehtävän päälle.
- +-merkki tarkoittaa sulkeutuvaa aluetta, jota klikkaamalla saat näkyviin piilotetun sisällön, esim. vastausikkunan, kysymykset tai mallivastauksen.
- Kaikista tehtävissä ei tule erillistä ilmoitusta, menikö vastaus oikein vai väärin. Etsi tällöin `Points` tehtävän yläreunasta:
  - Jos `Points: 0` niin vastaus ei ole oikein. Alusta tehtävä ja kokeile uudelleen. Huom. joissain tehtävissä vastauskertojen määrä on rajoitettu.
  - Jos `Points: 1` tai enemmän, vastaus meni oikein.
- Tekstivastauksista ei tule automaattisesti pisteitä eikä oikein/väärin -ilmoitusta, mutta opettaja voi halutessaan pisteyttää nämä tehtävät.

Muita vinkkejä:

- Voit merkitä alueen luetuksi klikkaamalla sivun oikeassa reunassa näkyvää oranssia palkkia.
- Oikean reunan C merkistä voit lisätä kyseiseen kohtaan julkisen kommentin tai tehdä muistiinpanoja, jotka näkyvät vain itsellesi (`Just me`).
- Jos reuna on keltainen, materiaaliin on tehty muutoksia sen jälkeen, kun olet lukenut sen.
- Materiaalin lopusta löytyy ylimääräisiä paikkoja vastaustiedostojen palauttamiselle.
- Aivan materiaalin lopusta löydät ylimääräisiä palautuspaikkoja vastaustiedostolle

1. Johdatus joukko-oppiin

1.1 Johdantotehtävä 1



Yllä olevassa kuvassa on neljä **joukkoa** A, B, C ja D. Joukkoihin kuuluvat **alkiot** (tässä pienet kirjaimet) luetellaan aaltosulkeissa. Kuvaavatko seuraavat ilmaisut yllä olevia joukkoja? Valitse totta tai tarua.

	True	False	
$D = \{\text{d, n, m, t, s}\}$	☑	☐	Correct!
$A = \{\text{a, e, i}\}$	☑	☐	Correct!
$C = \{\text{k, c}\}$	☐	☑	Correct!
$B = \{\text{b}\}$	☑	☐	Correct!
$C = D$	☐	☑	Correct!
$d = D$	☐	☑	Correct!
$a = e$	☐	☑	Correct!

1.2 Johdantotehtävä 2

Tässä tehtävässä tarvitset jotain ohjelmista, jolla voi piirtää. Esimerkiksi GeoGebran online-version voit avata alla olevasta pudotusvalikosta.

➕ Avaa GeoGebra tästä!

Seuraa tarkasti ohjeistusta, ja vastaa tämän jälkeen tehtäviin. Tehtävät löydät pudotusvalikoista hieman alempaa.

1. Piirrä GeoGebralla kolme erilaista ellipsiä siten, että voit liikuttaa niitä vapaasti raahaamalla.

2. Nimeä ellipsit seuraavasti:

$$\mathbb{N} \text{ luonnolliset luvut}$$
$$\mathbb{Z} \text{ kokonaisluvut}$$
$$\mathbb{R} \text{ reaaliluvut}$$

3. Lajittele seuraavat luvut oikeisiin ellipseihin:

$$\pi,\ \frac{3}{5},\ 20,\ -5,\ 3.08,\ e$$

4. Ota kuvakaappaus tekemästäsi kuviosta ja palauta se alla olevaan palautuslaatikkoon.

➕ 2.2 Johdantotehtävän palautuslaatikko

➕ Avaa tehtävät tästä!

2. Joukko-opin käsitteitä

Johdantotehtävässä 2 muodostamasi ympyrät tai ellipsit ovat esimerkkejä **joukoista**. Luvut, joita asetit ympyröiden sisälle, ovat nimeltään **alkioita**, eli joukon jäseniä. Joukossa voi olla ääretön tai äärellinen määrä alkioita.

Joukot ja alkiot

Olkoon *joukko*

$$S = \{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d}\}.$$

Lukuja a, b, c, ja d kutsutaan joukon S *alkioiksi*.
Jos alkio a kuuluu joukkoon S, merkitään

$$a \in S.$$

Jos alkio a ei kuulu joukkoon S, merkitään

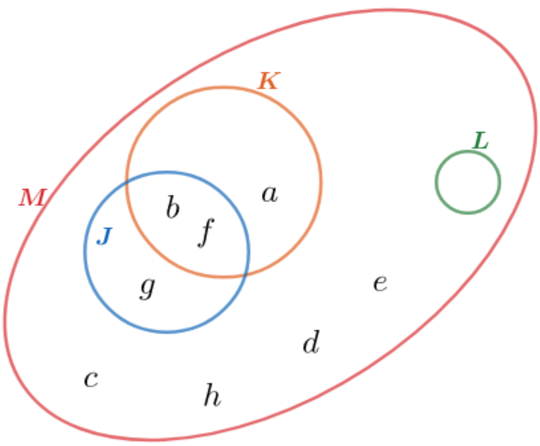
$$a \notin S.$$

Joukko voi olla myös *tyhjä joukko*, jolloin joukossa ei ole yhtään alkiota ja tällöin merkitään $S = \emptyset$.
Kaksi joukkoa ovat samat, jos niillä on samat alkiot. Eli

$$A = B, \text{ jos } a \in A \text{ silloin ja vain silloin, kun } a \in B.$$

2.1 Tehtävä: Joukot ja niiden alkiot

Kuvassa on hahmoteltu joukot M, K ja L, ja niihin sisältyvät alkiot. Valitse oikeat vastaus!



a. Joukko K voidaan kirjoittaa

◉	$K = \{\mathrm{b},\ \mathrm{f}\}$
○	$K = \{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{f}\}$
○	$K = \mathrm{a}$, $K = \mathrm{b}$ ja $K = \mathrm{f}$ 3. kysymyksen selitys oikeasta vastauksesta

b. Joukko L voidaan kirjoittaa

○	$L = 0$
○	$L = \emptyset$
○	$L = \{\emptyset\}$

c. Joukko M voidaan kirjoittaa

○	$M = \{\mathrm{c},\ \mathrm{h},\ \mathrm{d},\ \mathrm{e},\ J,\ K,\ L\}$
○	$M = \{\mathrm{c},\ \mathrm{h},\ \mathrm{d},\ \mathrm{e},\ J,\ K,\ \{\emptyset\}\}$
○	$M = \{\mathrm{c},\ \mathrm{h},\ \mathrm{d},\ \mathrm{e},\ J,\ K\}$

Joukon alkioista voidaan muodostaa myös pienempiä joukkoja. Tällöin kyseessä on **osajoukoista**. Jos vaikka joukko $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sen osajoukkoja olisivat esimerkiksi $\{1, 2\}$, $\{2, 4\}$.

Osajoukot
Olkoon joukko

$$S = \{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}\}.$$

Joukon S eräs *osajoukko* olisi joukko $\{\mathrm{a},\ \mathrm{b}\}$.
Jos joukko A on joukon S osajoukko, niin jokaisen joukon A alkio on oltava myös joukon S alkio. Tällöin merkitään

$$A \subset S.$$

Jos joukko A ei ole joukon S osajoukko, niin merkitään

$$A \not\subset S.$$

Jokainen joukko A on aina myös itsensä osajoukko, eli

$$A \subset A$$

Tyhjä joukko $\emptyset$ on jokaisen joukon osajoukko, eli jos joukko S on mikä tahansa joukko, niin aina $\emptyset \subset S$.

2.2 Tehtävä: Joukot ja niiden osajoukot

Olkoon joukot

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ \{7\},\ 8,\ 15,\ 20\}$$
$$B = \{2,\ 6,\ 8\}$$
$$C = \{1,\ 2\}$$
$$D = \{6\}$$
$$E = \{6,\ \{7\}\}$$

➕ Avaa GeoGebra tästä!

a. Onko väite oikein vai väärin?

	True	False	
$C \subset D$	☐	☑	Correct!
$B \not\subset A$	☐	☑	Correct!
$D \subset E$	☑	☐	Correct!
$E \subset D$	☐	☑	Correct!
$E \not\subset A$	☐	☑	Correct!
$\emptyset \subset C$	☑	☐	Correct!

b. Ovatko väitteet totta vai tarua? Valitse oikea vaihtoehto.

	True	False
$D \subset E$	☐	☐
$C \subset B$	☐	☐
$\emptyset \in D$	☐	☐
$\emptyset \subset A$	☐	☐

2.3 Johdantotehtävä: Yhdiste, leikkaus ja erotus

Tutustutaan seuraavaksi joukko-opin käsitteisiin **yhdiste**, **leikkaus** ja **erotus**. Tee alla olevat tehtävät. Avaa GeoGebra-appi alla olevasta pudotusvalikosta ja hahmottele tehtävät kuvina!

Hahmottele GeoGebralla seuraava tilanne ja vastaa kysymyksiin.

1. Piirrä joukko E, johon kuuluu alkiot $1, 3$ ja 5.
2. Piirrä joukko F, johon kuuluu alkiona joukko E ja myös alkiot 2 ja 4.
3. Piirrä joukko G, johon kuuluu alkiot $1, 2$ ja 3.
4. Kirjoita joukot käyttäen joukko-opin merkintöjä ($A = \{...\}$).
5. Palauta alla olevaan palautuslaatikkoon kuvakaappaus piirroksestasi

➕ Avaa GeoGeobra tästä!

➕ 3.3 Johdantotehtävän palautuslaatikko

Joukkojen yhdiste, leikkaus ja erotus

Olkoon joukot $A = \{\text{a, b, c}\}$ ja $B = \{\text{a, c, d, e, f}\}$.

Näiden kahden joukon **yhdiste** on sellainen joukko, joka sisältää molempien joukkojen alkiot. Yhdistettä merkitään $\bigcup$:lla. Siis

$$A \bigcup B = \{\text{a, b, c, d, e, f}\}$$

Joukkojen A ja B **leikkaus** sisältää kaikki ne alkiot, jotka löytyvät sekä joukosta A että joukosta B. Leikkausta merkitään $\bigcap$:lla. Siis

$$A \bigcap B = \{\text{a, c}\}$$

Joukkojen A ja B **erotus** tarkoittaa, että joukon A alkioista poistetaan joukon B alkiot, ja luetellaan jäljelle jäänyt joukko. Joukkojen A ja B erotus merkitään $A \setminus B$. Siis

$$A \setminus B = \{\text{b}\}$$

2.4 Tehtävä: Yhdiste, leikkaus ja erotus

a. Jos joukoista E ja F muodostetaan **yhdiste**, eli luetellaan kaikki ne alkiot, jotka ovat joukossa E tai joukossa F, uusi joukko olisi

○	$E \bigcup F = \{1, 2, 3\}$
○	$E \bigcup F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
○	$E \bigcup F = \{6, 7, 8\}$
○	$E \bigcup F = \{0, 1\}$

b. Jos joukoista E ja G muodostetaan **leikkaus**, eli luetellaan ne alkiot, jotka löytyvät molemmista joukoista E ja G, uusi joukko olisi

○	$E \bigcap G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
○	$E \bigcap G = \{2\}$
○	$E \bigcap G = \{1, 3\}$
○	$E \bigcap G = \emptyset$

c. Jos joukosta G erotetaan joukon E alkiot, eli tehdään **erotus**, uusi joukko olisi

○	$G \setminus E = \{2\}$
○	$G \setminus E = \{1, 2, 3\}$
○	$G \setminus E = \emptyset$
○	$G \setminus E = \{1, 3\}$

d. Joukko $E \bigcup G$ on sama asia kuin

○	$\{1, 2, 3, 4\}$
○	$\{1, 3\}$
○	$\{1, 2, 3, 5\}$

e. Joukko $\{2\}$ on sama asia kuin

○	$G \setminus E$
○	$F \setminus E$
○	$E \setminus G$

f. Joukko $E \bigcap F$ on sama asia kuin

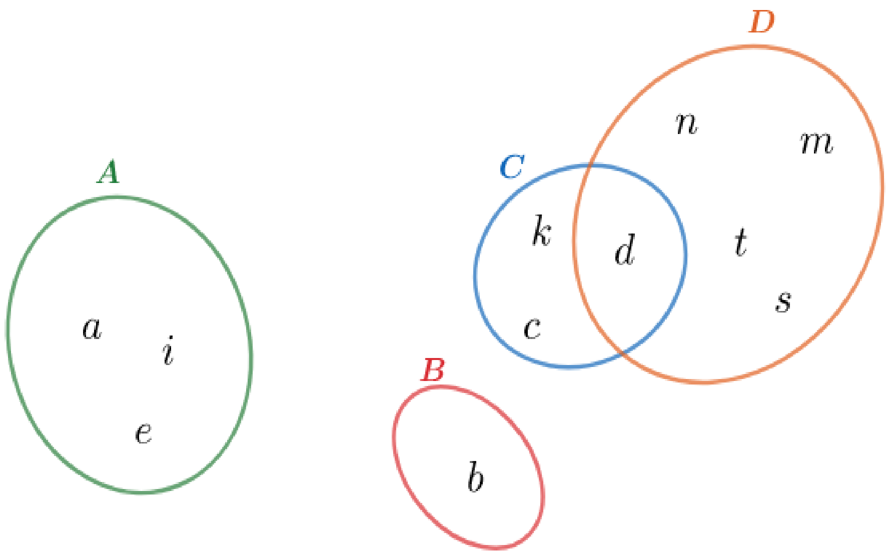
○	$\{1, 3, 5\}$

○	$\{1, 2, 3, 4, E\}$
○	$\emptyset$

g. Joukko $\{E, 1, 3, 4\}$ on sama asia kuin

○	$F \setminus G$
○	$G \bigcap E$
○	$E \bigcup F$

2.5 Tehtävä: Yhdisteet ja leikkaukset



Tarkastele yllä olevaa kuvaa. Onko väitteet totta vai tarua? Valitse oikea vaihtoehto.

	True	False	
$A \bigcup B = \{\text{a, b, e, i}\}$	☑	☐	Correct!
$D \setminus C = \{\text{c, k}\}$	☐	☑	Correct!
$C \bigcup D = \{\text{d}\}$	☐	☑	Correct!
$C \setminus D = \{\text{c, k}\}$	☑	☐	Correct!
$C \bigcap D = \{\text{d}\}$	☑	☐	Correct!
$B \bigcup C \bigcup D = \{\text{b, c, d, k, n, m, s, t}\}$	☑	☐	Correct!
$A \bigcap D = \emptyset$	☑	☐	Correct!

3. Funktiot

3.1 Johdantotehtävä: Kahden alkion välinen yhteys

Tutustutaan seuraavaksi joukko-opin käsitteitä yhdiste, leikkaus ja erotus. Tee alla olevat tehtävät. Avaa GeoGebra-appi alla olevasta pudotusvalikosta ja hahmottele tehtävät kuvina!

Hahmottele GeoGebralla seuraava tilanne ja vastaa kysymyksiin.

1. Piirrä joukko A, johon kuuluu alkiot $1, 2$ ja 4.
2. Piirrä joukko B, johon kuuluu alkiot $1, 4$ ja 16.
3. Onko näiden eri joukkojen alkioiden välillä jokin yhteys?
4. Piirrä joukon A alkioista viiva niihin joukon B alkioihin, jotka mielestäsi liittyvät yhteen jollain säännöllä.
5. Palauta alla olevaan palautuslaatikkoon kuvakaappaus piirroksestasi
6. Vastaa alla oleviin kysymyksiin.

✚ Avaa GeoGebra tästä!

✚ Avaa tehtävät tästä!

✚ 4.1 Johdantotehtävän palautuslaatikko

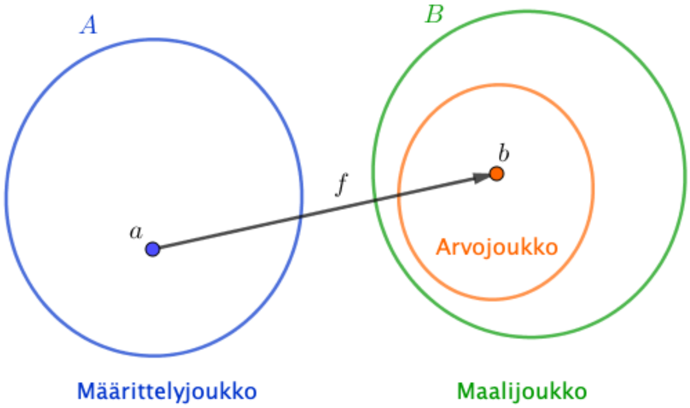
Tarkastellaan seuraavaksi funktioita joukko-opin näkökulmasta. Funktio liittää kahden eri joukon, määrittelyjoukon ja maalijoukon, alkiot toisiinsa. Tarkastellaan ensin, mitä nämä joukot ovat.

Funktio eli kuvaus
Funktio f on sääntö, joka liittää jokaiseen *määrittelyjoukon* A alkioon yksikäsitteisesti jonkin *maalijoukon* B alkion. Maalijoukosta B voidaan erottaa erilleen *arvojoukko*, johon sisältyvät vain ne maalijoukon alkiot, joille funktio f kuvaa alkion a.
Jos on olemassa tälläinen sääntö, joka kuvaa yksikäsitteisesti jokaisen joukon A alkion jollekin maalijoukon B alkiolle, niin sanotaan, että f on funktio eli kuvaus joukolta A joukkoon B. Tätä merkittäisiin

$$f : A \to B$$

Jos funktio f liittää joukon A alkion a joukon B alkioon b, niin merkitään

$$f(a) = b$$



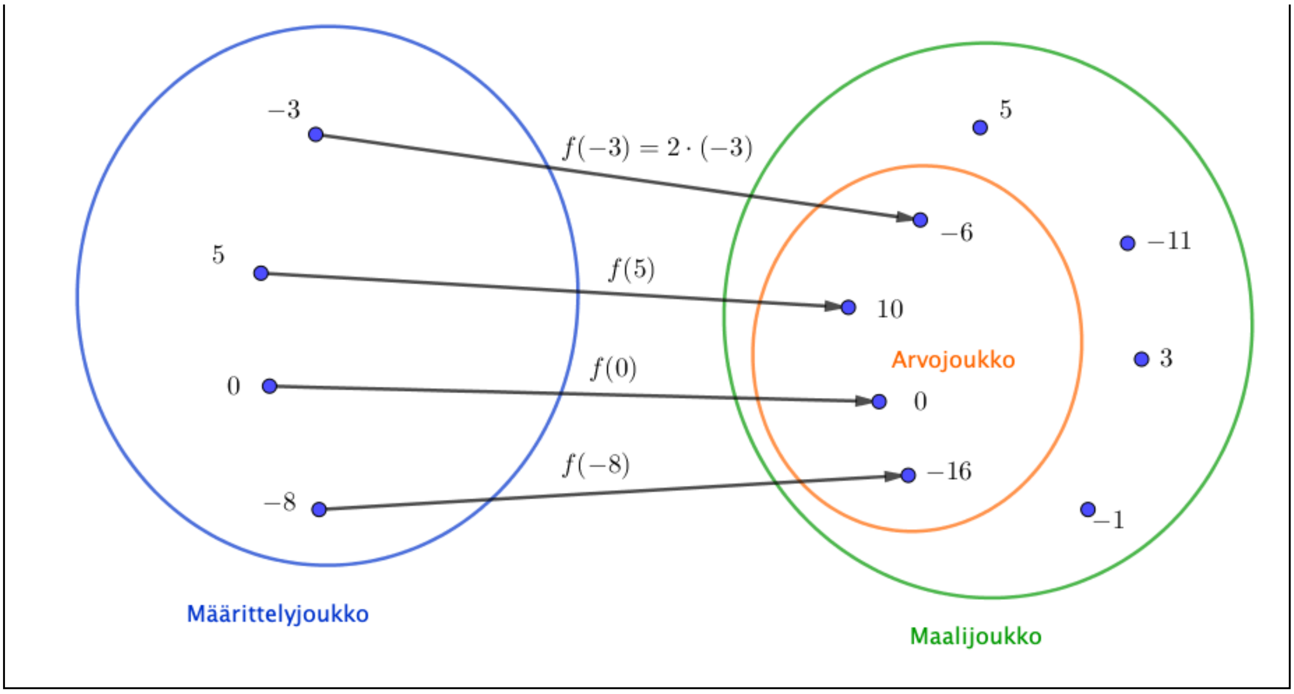
Sanotaan, että funktio f kuvaa alkion a alkiolle b.
Kuvassa oleva sininen ympyrä kuvastaa funktion f määrittelyjoukkoa. Funktio f kuvaa jokaisen määrittelyjoukon A alkion yksikäsitteisesti jollekin maalijoukon B alkiolle.

Funktion käsitteeseen liittyvät joukot

Määrittelyjoukoksi kutsutaan sitä joukkoa, jossa funktio on määritelty. Tämän joukon jokainen alkio on mahdollista kuvata funktion avulla jollekin toiselle alkiolle.
Esimerkiksi funktio $f(x) = \ln x$ on määritelty vain positiivisilla reaaliluvuilla, eli määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^+$.

Maalijoukoksi kutsutaan sitä joukkoa, johon kuuluvat määrittelyjoukon alkioiden kuvat. Kaikille maalijoukon alkioille ei välttämättä kuvaudu mikään määrittelyjoukon alkio. Esimerkiksi, jos tarkastellaan funktiota $f(x) = 2x$ ja rajataan tarkastelussa määrittelyjoukoksi vain kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, tällöin funktion maalijoukko on myös ainoastaan kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$. Tästä maalijoukosta voidaan vielä erottaa omaksi joukokseen *arvojoukon*.

Arvojoukko on se maalijoukon osa, jossa ovat ainoastaan ne alkiot, joihin funktio kuvasi määrittelyjoukon alkion. Esimekiksi funktion $f(x) = 2x$ arvojoukko on kaikki parilliset kokonaisluvut $\{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$.



3.2 Tehtävä: Funktio eli kuvaus

a. Olkoon funktio $f(x) = \sqrt{x}$. Yhdistä oikeat joukon A alkiot oikeisiin joukon B alkioihin.

Täydennä arvojoukko.

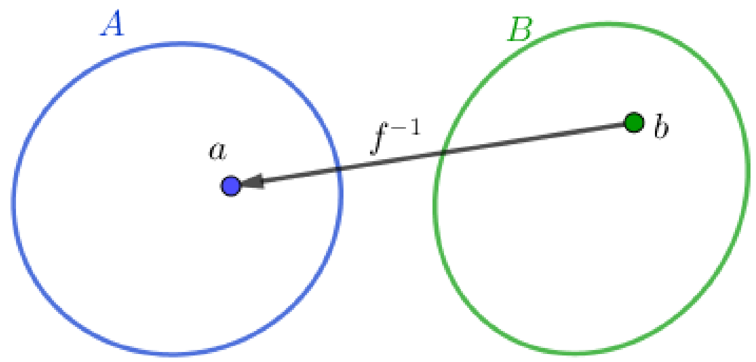
Siirrä joukon B alkiot oikeisiin kohtiin niin, että sininen nuppi osuu vihreään ympyrään.

b. Tarkastele a-kohdan funktiota. Onko väite totta vai tarua?

	True	False
Funktion f määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$	☐	☐
Funktio f liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkion johonkin arvojoukon alkioon	☐	☐
Funktion f arvojoukko on epänegatiivisten reaalilukujen joukko $[0, \infty]$	☐	☐
Funktion f määrittelyjoukko on epänegatiivisten reaalilukujen joukko $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	☐	☐
Funktion f arvojoukolle pätee, että $-2 \in B$.	☐	☐
Arvojoukon alkiolle 15 kuvautuu määrittelyjoukon alkio 3.	☐	☐
Arvojoukon alkiolle 15 kuvautuu määrittelyjoukon alkio 225.	☐	☐

Käänteisfunktio

Kaikilla funktioilla ei ole olemassa käänteisfunktiota. Käänteisfunktio on olemassa, jos jokaiselle maalijoukon alkiolle kuvautuu täsmälleen yksi määrittelyjoukon alkio.



Tarkastellaan aiemmin käsiteltyä funktiota $f: A \to B$. Oletetaan nyt, että f kuvaa maalijoukon jokaiselle alkiolle b täsmälleen yhden määrittelyjoukon alkion a. Silloin tämä funktio f liittää nyt jokaiseen alkioon a tietyn alkion b.
Sääntö, joka liittää jokaiseen joukon B alkioon b yksikäsitteisesti jonkin joukon A alkion a, määrittelee käänteisfunktion f^{-1}:

$$f^{-1}: B \to A.$$

Käänteisfunktion määrityksestä

Käänteisfunktion määrittäminen tapahtuu käytännössä niin, että ratkaistaan esimerkiksi ensimmäisen asteen yhtälö $y = ax + c \ (a \neq 0)$ muuttujan x suhteen:

$$x = \frac{y - c}{a}.$$

Ja tätä saatua lauseketta merkitään käänteisfunktiona $f^{-1}(y) = \frac{y-c}{a}$.
Koska olemme tottuneet käyttämään muuttujan paikalla kirjainta x, niin vaihdetaan vielä saatuun käänteisfunktioon muuttujan paikalle x:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - c}{a}$$

Osalle funktiosta voidaan määrittää helpostikin käänteisfunktio, mutta usein määritys on haastavaa ja työlästä.

3.3 Tehtävä: Käänteisfunktio

a.

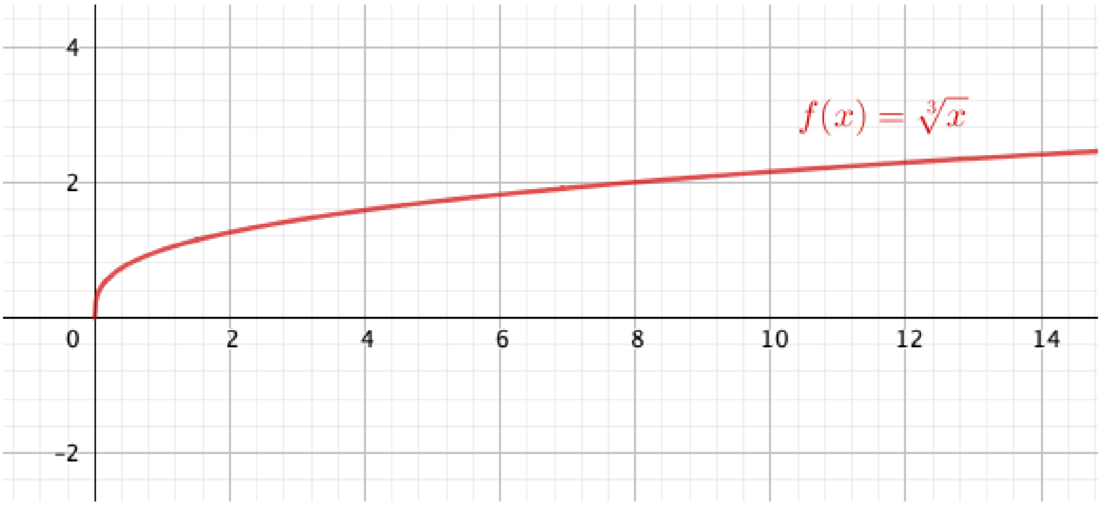
Olkoon funktio $f : A \to B$ nyt eri funktio kuin aiemmassa tehtävässä. Siirrä joukon A alkiot oikeisiin kohtiin. Mikä funktio f on?

Täydennä käänteisfunktion arvojoukko.

✚ Vastausruutu

b.

Kuvassa on funktio $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kun $x \in [0, \infty[$. Tarkastele funktion kuvaajaa ja valitse oikeat vaihtoehdot.



1. Funktion f arvo kohdassa $x = 0$ on

○	4
○	0
○	3
○	$-\frac{1}{2}$
○	Kohta $x = 0$ on määrittelyalueen ulkopuolella.

2. Funktion f arvo kohdassa $x = 1$ on

○	$\frac{1}{2}$
○	2
○	1
○	$\frac{3}{4}$

3. Käänteisfunktion arvo $f^{-1}(2) =$

○	$1\frac{1}{3}$

○	8
○	0
○	$5\frac{1}{2}$

4. Käänteisfunktion arvo $f^{-1}(1) =$

○	0
○	$\frac{1}{2}$
○	2
○	1

5. Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ käänteisfunktio on

○	$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$
○	$f^{-1}(x) = x^3$
○	$f^{-1}(x) = x - 3$
○	$f^{-1}(x) = \frac{1}{x^3}$

c.

Miten käänteisfunktion f^{-1} arvo voidaan lukea funktion f kuvaajasta?

Seuraavaksi käsitellään fraktaalin käsite ja sen ominaisuuksia. Fraktaalit ovat itse asiassa joukkoja, joilla on tiettyjä ominaisuuksia.

4. Mitä ovat fraktaalit?

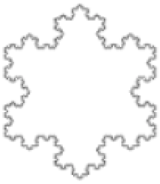
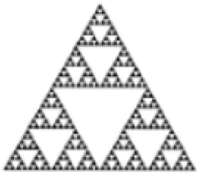
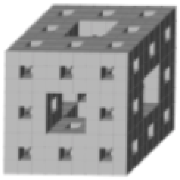
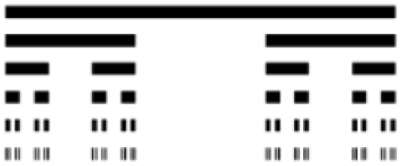
Fraktaalin määritteleminen tarkasti on melko haastavaa, mutta fraktaalina voidaan pitää sellaista kokonaisuutta, joka koostuu pienemmistä osista, jotka ovat kopioita tästä kokonaisuudesta. Fraktaalille tärkeimpiä ominaisuuksia on **itsesimilaarisuus** sekä fraktaalille ominainen **Hausdorffin dimensio**.

Yllä olevassa kuvassa Romanescu-kukkakaalissa voit huomata tämän toistuvan rakenteen: koko kaali näyttäisi koostuvan pienemmistä kaalin näköisistä osista.

Fraktaaligeometrian kehittäjänä pidetään Benoit Mandelbrotia, joka oli puolalaisyntyinen matemaatikko. Mandelbrot tutki kaaosteoriaa ja tutki niin kutsuttua *luonnon uutta geometriaa*.

Ensimmäistä fraktaaliteoriaa kehitettiin tarkoituksena ymmärtää matemaattista sisältöä käyrien jatkuvuudesta ja äärettömyydestä. Mandelbrot toi julki ajatuksen siitä, että fraktaalit ovat löydettävissä myös luonnosta.

Eräitä (jo nyt) klassisia fraktaaleja ovat *Kochin lumihiutale*, *Sierpinskin kolmio* sekä *Mengerin pesusieni*. Lisäksi on Cantorin joukko, Julian joukko sekä Mandelbrotin joukko. Näistä käsitellään tässä materiaalissa ensimmäiset kolme.

4.1 Johdantotehtävä: Mistä kaikkialta luonnosta fraktaaleja voi löytää?

Etsi internetistä tietoa siitä, mistä kaikkialta luonnosta voit löytää itsesimilaarisia rakenteita.

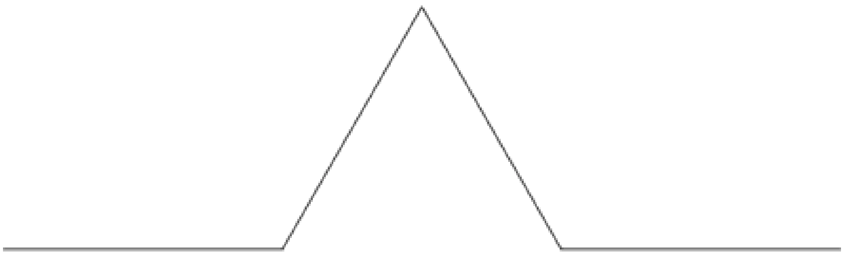
✚ Vastausruutu

Tarkastellaan seuraavaksi Kochin lumihiutaletta. Eri fraktaalien rakentuminen sisältää paljon samanlaisia pääpiirteitä ja näin ollen myös Kochin lumihiutaleen vaiheet on paikannettavissa myös muiden fraktaalien rakentumisvaiheista.

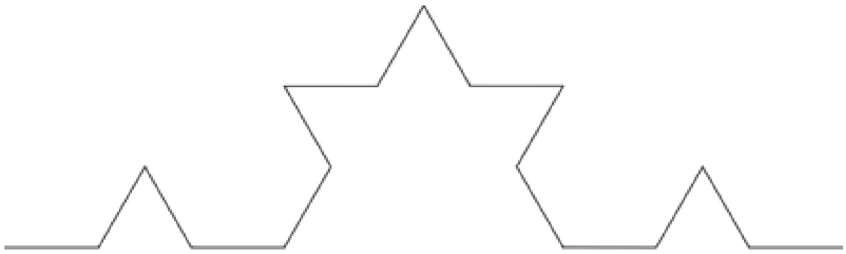
Kochin lumihiutale

Kyseisen fraktaalin kehittäjä on nimensä mukaisesti Helge van Koch. Kuvion rakentaminen aloitetaan pohjajanasta.

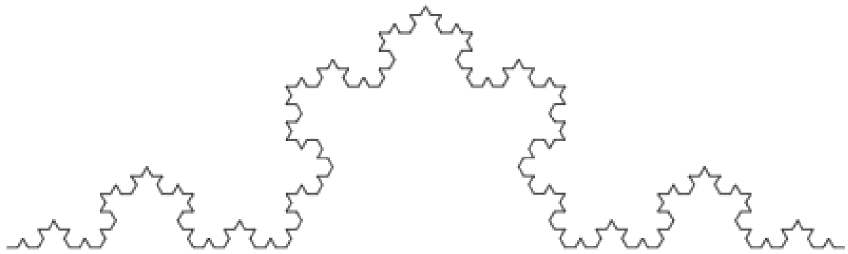
Tämä pohjajana jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan. Näistä keskimmäinen osa korvataan tasasivuisella kolmiolla.



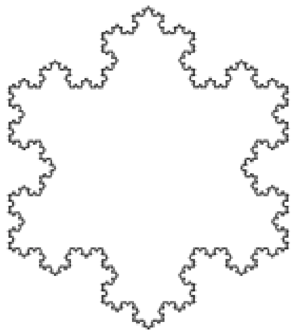
Edelleen nämä neljä janaa jaetaan jokainen kolmeen osaan. Näistä osista aina keskimmäinen korvataan tasasivuisella kolmiolla.



Tätä toistaen edetään, jolloin Kochin käyrä saa jo ominaisen muotonsa.

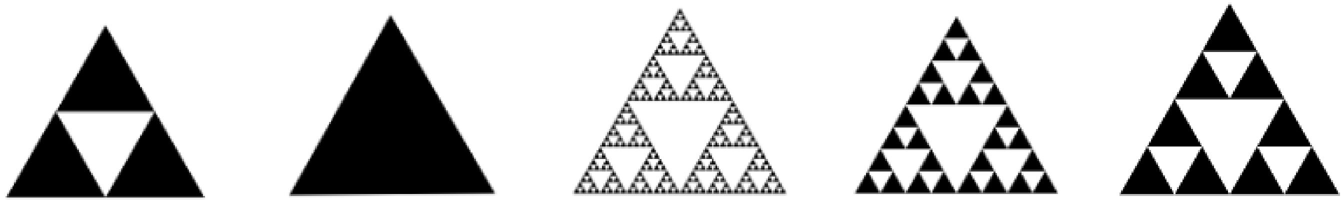


Jos jokaisella tasolla korvauksen ohessa uutta janaa myös käännetään $60°$, muodostuu suljettu kuvio.



4.2 Tehtävä: Sierpinskin kolmio

a.



Kuvio a. Kuvio b. Kuvio c. Kuvio d. Kuvio e.

Järjestele kuviot oikeaan järjestykseen niin, että Sierpinksin kolmion ensimmäinen vaihe on vasemmalla ja viimeinen oikella.

```
<h4>{}</h4>
<p class="stem">{}</p>
<div><label> <span>
    <input type="text"
           class="form-control"
           placeholder=""
           size="{}"></span></label>
</div>
<button class="timButton">
    Save
</button>
<a>{}</a>
<p class="plgfooter">{}</p>
```

```
<!--lazy --></span></tim-plugin-loader></div>
```

b.

Miten Sierpinskin kolmio rakennetaan? Minkälaista vaihetta toistetaan jokaisessa vaiheessa?

4.3 Tehtävä: Mengerin pesusieni

a.

Mengerin pesusienen kolme ensimmäistä vaihetta.

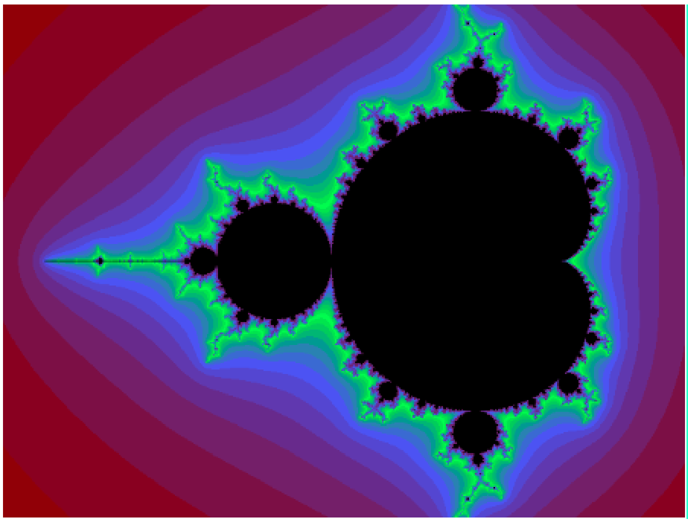
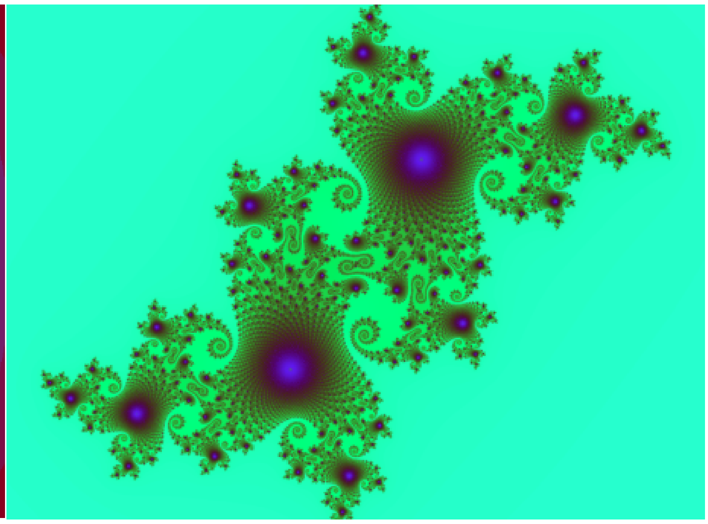
Siirrä Mengerin pesusienen vaiheet oikeisiin kohtiin.

b.

Miten Mengerin pesusieni rakennetaan? Minkälaista vaihetta toistetaan jokaisessa vaiheessa?

4.4 Tehtävä: Muita fraktaaleja

Alla on kuvat Mandelbrotin joukosta sekä Julian fraktaaleista.

Mitä samanlaisia ja erilaisia piirteitä näillä kahdella fraktaalilla on? Kirjoita lyhyt pohdinta siitä, mitä kuvissa näet. Mandelbrotin ja Julian fraktaaleihin ei perehdytä tässä materiaalissa enempää, sillä ne ovat huomattavasti monimutkaisempia käsitellä.

➕ Vastausruutu

5. Fraktaalien rakenne

Fraktaalien toistuvaa rakennetta kutsutaan **itsesimilaarisuudeksi**. Tämän similaarisuuden aiheuttaa **similariteettikerroin**, joka on jokaiselle fraktaalille ominainen. Lisäksi fraktaaleja käsiteltäessä usein törmätään **Hausdorffin dimensioon**, eli fraktaalin ulottuvuuteen. Tämä ulottuvuus poikkeaa niistä ulottuvuuksista, joita olemme yleisesti oppineet käyttämään, eli kokonaisluku-ulottuvuuksista.

Hausdorffin dimension määrittäminen
Fraktaalille F pätee, että

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

jossa $S_1, S_2, ...$ ovat fraktaalin similariteetteja.
Nyt fraktaalille F Hausdorffin dimensio s saadaan yhtälöstä, jossa $c_1, c_2, ...$ ovat similariteettien kertoimia.

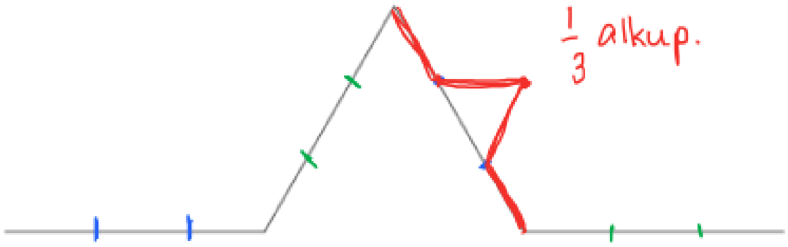
$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1.$$

Kerroin $c_1, c_2, ...$ ilmaisee, mikä on kutistuksen suhde, eli paljonko osaa pienennetään.

5.1 Esimerkki: Hausdorffin dimension määrittäminen

Tarkastellaan Kochin lumihiutaleen Hausdorffin dimensiota. Tiedetään, että Kochin lumihiutale muotoutuu alkujanasta niin, että jana jaetaan aina pienempiin osiin ja korvataan keskimmäinen osa tasasivuisella kolmiolla. Lähtötietona tiedetään, että uuden osan kutistus tapahtuu kertoimella kolme.

Tarkastellaan nyt siirtymistä vaihesta kaksi vaiheeseen kolme, jossa jo alkuperäiseen janaan on jo liitetty tasasivuinen kolmio. Alla olevassa kuvassa yksi jana on jo jaettu kolmeen osaan ja siihen on liitetty tasasivuinen kolmio.

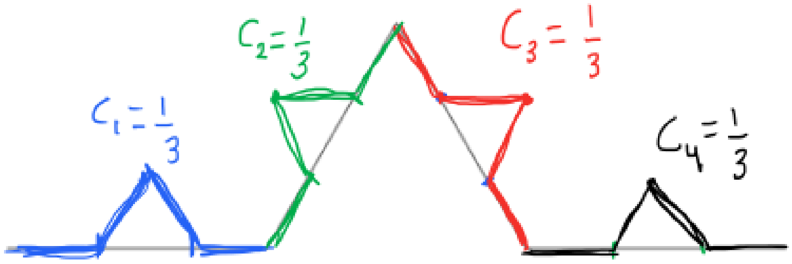


Tämä punainen kuvio on nyt pienennös alkuperäisestä kuviosta. Eli se on $\frac{1}{3} \cdot \text{alkuperäinen}$. Näitä korvauksia tehdään yhteensä neljä, eli molempiin kolmion sivuihin sekä vaakasuoriin janoihin.

Hyödynnetään nyt määritelmän laskukaavaa Hausdorffin dimension määrittämiselle:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1,$$

ja tässä esimerkissä $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{3}$



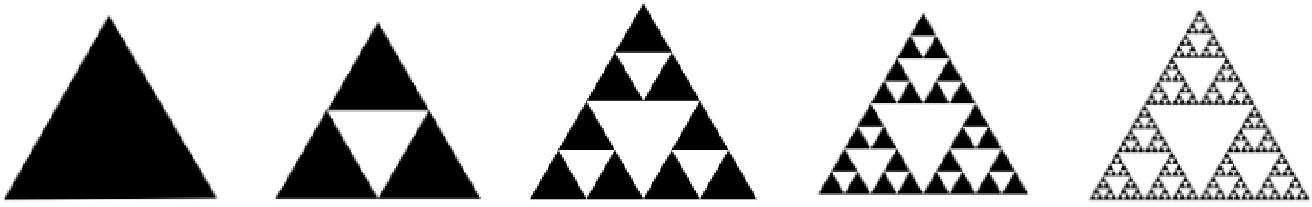
Kirjoitetaan yhtälö auki:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} c_i^s &= 1 \\
c_1^s + c_2^s + c_3^s + c_4^s &= 1 \\
\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1 \\
4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1 \qquad || \text{ratkaistaan s} \\
\left(\frac{1}{3}\right)^s &= \frac{1}{4} \qquad || \ln() \\
\ln\left(\frac{1}{3}\right)^s &= \ln\frac{1}{4} \\
s \cdot \ln\frac{1}{3} &= \ln\frac{1}{4} \\
s &= \frac{\ln\frac{1}{4}}{\ln\frac{1}{3}} \\
s &= \frac{\ln 1 - \ln 4}{\ln 1 - \ln 3} \qquad || \ln(1) = 0 \\
s &= \frac{\ln 4}{\ln 3} \qquad || \ln(4) = \ln 2^2 = 2 \cdot \ln 2 \\
s &= \frac{2\ln 2}{\ln 3}
\end{aligned}$$

Kochin lumihiutaleen, jonka kutistuskerroin on 3, Hausdorffin dimensio $s = \frac{2\ln 2}{\ln 3} \approx 1,26$.

5.2 Tehtävä: Sierpinskin kolmion Hausdorffin dimensio

Määritä Sierpinskin kolmion Hausdorffin dimensio, kun tiedetään kutistuskertoimen olevan 2. Sierpinskin kolmion aloitustilanne on tasasivuinen kolmio, joka jaetaan neljään yhtä suureen kolmioon, joista keskimmäinen poistetaan.



Palauta vastaustiedosto tähän.

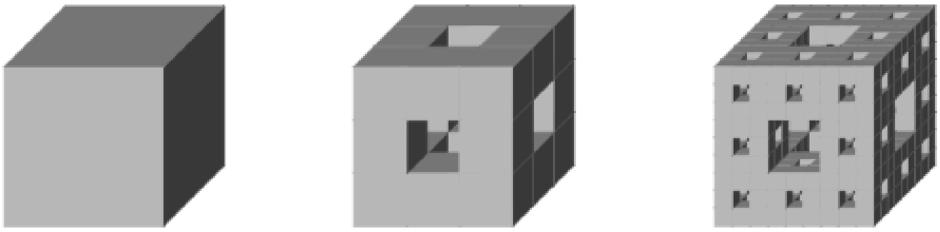
➕ Vihje 1

➕ Vihje 2

➕ Ratkaisu

5.3 Tehtävä: Mengerin pesusienen Hausdorffin dimensio

Määritä Mengerin pesusienen Hausdorffin dimensio, kun tiedetään kutistuskertoimen olevan 3. Mengerin pesusienen aloitustilanne on umpinainen kuutio, joka jaetaan 27 yhtä suureen kuutioon. Samoin kuin Sierpinskin kolmionkin tilanteessa aina keskimmäinen kuutio poistetaan.



Palauta vastaustiedosto tähän:

➕ Vihje 1

➕ Vihje 2

➕ Ratkaisu

6. Ylimääräisiä palautuspaikkoja vastaustiedostoille

Tähän voit tarvittaessa palauttaa tiedostoja, jos esimerkiksi tehtävän vastaus koostuu useammasta kuin yhdestä tiedostosta. Pyri kuitenkin palauttamaan vastaustiedosto vain yhtenä tiedostona itse tehtävän yhteyteen, jotta opettajan on helpompi löytää se.