Tampereen yliopisto

Tuan Vo

KANSAINVÄLISTEN MATEMATIIKKAOLYMPIALAISTEN TEHTÄVIEN HYÖDYNTÄMINEN MATEMATIIKASSA

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Diplomityö
Huhtikuu 2020

TIIVISTELMÄ

Tuan Vo: Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävien hyödyntäminen matematiikassa
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellisen DI-tutkinto
Huhtikuu 2020

Diplomityössä tutkittiin miten yliopiston ensimmäisen vuoden insinöörimatematiikan opiskelijat ratkaisevat Kansainvälisten Matematiikkaolympialaisten (IMO) tehtäviä. Haluttiin nähdä opiskelijoiden ajatteluprosessia vaikeissa tehtävissä, mitä virheitä opiskelijat tekevät, mistä ne johtuivat ja voidaanko hyödyntää IMO-tehtäviä yliopiston matematiikassa?

Työn teoreettisessa viitekehyksessä käsitellään matemaattiseen ajatteluun liittyviä käsitteitä. Matemaattiseen ajatteluun vaikuttaa opiskelijan uskomukset, kulttuuri, matemaattiset kyvyt, informaation prosessointi ja ongelmanratkaisutaidot. Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin mukaan matemaattista ajattelua voidaan kuvata matemaattisella osaamisella (*mathematical proficiency*). Teoreettisessa viitekehyksessä esitellään myös Wilsonin taksonomia, jolla kuvataan matemaattista käyttäytymistä kognitiivisella tasolla. Aikaisempien tutkimuksien perusteella tiedämme, että ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden matemaattisissa taidoissa on puutteita.

Tutkimus on laadullinen. Tutkimukseen osallistui Tampereen yliopiston ensimmäisen vuoden insinöörimatematiikan opiskelijoita. Aineistonkeruussa jokaisen pienen opiskelijaryhmän piti ratkaista yksi kolmesta eritasoisista IMO-tehtävistä. Ratkaisuista poimittiin opiskelijoiden tekemiä ratkaisuja, ja niitä analysoitiin Wilsonin taksonomialla ja Kilpatrickin mallilla.

Tutkimuksessa saatiin selville, että suurin osa virheistä olivat päättelyvirheitä, ja ne liittyivät perusalgebraan, algoritmien hallintaan, todistamiseen sekä määritelmien väärin ymmärtämiseen. Opiskelijat lähestyivät tehtäviä deduktiivisesti. He ensisijaisesti hyödynsivät proseduureja muistin varaisesti, eivätkä kyseenalaistaneet olivatko proseduurit oikeita. Opiskelijat luottivat omaan proseduraaliseen sujuvuuteen ja kun he kohtasivat tuntemattomampia käsitteitä, he eivät pysähtyneet miettimään mitä käsitteellä tarkasti tarkoitetaan. Heikko käsitteellinen ymmärrys johtaa siihen, että opiskelijoiden riski käyttää proseduuri väärin kasvaa ja siksi myös strateginen kompetenssi on rajoitettu. Opiskelijoilta puuttuu myös kriittistä ajattelua. Kokonaisuudessa opiskelijoiden matemaattinen osaaminen on kohtalainen ja tarvitaan nopeita toimenpiteitä heidän ajattelunsa parantamiseen.

Tutkimuksessa todettiin, että IMO-tehtäviä voidaan hyödyntää yliopiston matematiikassa, kunhan tehtävät ovat sopivan vaikeita ja tukevat kurssin sisältöä. Tämä tarkoittaa sitä, että muiden kilpailujen tehtävien käyttö on myös hyvä vaihtoehto.

Avainsanat: Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset, IMO, matematiikka, opettaminen, koulutus, matemaattinen ajattelu, matemaattinen osaaminen, kehittäminen

ABSTRACT

Tuan Vo: Utilizing International Mathematical Olympiad's problems in mathematics
Master's thesis
Tampere University
The Master's Degree Programme in Engineering and Natural Sciences
April 2020

The aim of the study was finding out, how university's first-year students of engineering mathematics solve the International Mathematical Olympics (IMO) problems. The aim was to see the thinking process of the students while facing difficult problems, what kind of mistakes do they make, where did the mistakes came from and is it possible to utilized IMO problems in university mathematics?

In theoretical framework the concepts related to mathematical thinking will be explained. Mathematical thinking is effected by student's beliefs, cultures, mathematical abilities, information processing, and problem-solving skills. According to Kilpatrick, Swafford, and Findell, mathematical thinking can be described by mathematical proficiency (*Mathematical proficiency*). The Wilson's taxonomy is also be discussed and it describes mathematical behavior at the cognitive level. Previous studies suggest that the mathematical skills of first-year university students are deficient.

This study was a qualitative reseach. Target group was the first-year students of engineering mathematics at the University of Tampere. Each small group of students had to solve one of three of IMO-problems (three difficulty levels). Solutions made by students were selected from the datas and were wanalyzed using Wilson's taxonomy and the Kilpatrick model.

The study found that most of the errors were reasoning errors and were related to basic algebra, controlling of algorithms, proofs, and definitions' misunderstanding. Students approached the problems deductively. They primarily utilized the procedures using memory, and did not very often question whether the procedures were correct. Students relied on their own procedural fluency, and when they encountered more unfamiliar concepts, they did not stop to think about what exactly the concept meant. Low level of conceptual understanding might leads to an increasingrisk of students misusing the procedures and therefore also limited strategic competences. Students also lack critical thinking. Overall, students's matehamtical proficiency are moderate and quick action is needed to improve their mathematical thinking.

The study found that many IMO problems can be utilized in university mathematics as long as the problems are suitably difficult and they support the objectives of the courses. This means that using other competition problems is also a good option.

Keywords: International Mathematical Olympiad, IMO, mathematics, teaching, education, mathematical thinking, mathematical proficiency, developing

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Tämän diplomityön tekeminen oli minulle suuri haaste. Aihe oli minulle hyvin tuntematon ja työn aloittaminen lähti liikkeelle nollasta. Onneksi matemaattista ajattelua on tutkittu paljon. Matemaattisen ajattelu toeriaan tutustuessani tuli eteen paljon hyviä lähteitä ja työn aloittaminen alkoi sujua pikku hiljaa. Äidinkieleni ei ole suomi, ja siksi kirjoittaminen oli minulle kaikista suurin vaikeus. Tämä työ ei ole minulle merkityksellinen vain suorituksena, mutta isona osana otyötä on myös itsensä kehittäminen. Työssä olen oppinut paljon matematiikan opetuksen tutkimuksesta ja kehittämisestä. Uskon, että työstä oli minulle paljon hyötyä tulevaisuudessa. Tämä työ ei ole täydellinen ja minulla on paljon kehitettävä, mutta tämä on hyvä alku.

Haluaisin kiittää ohjaajani Terhi Kaarakka ja Simo Ali-Löytty. Te olette ohjanneet ja antaneet minulle hyviä ohjeita työn kirjoittamisessa. Kiitos, että olette olleet kärsivällisiä ja tehneet paljon töitä työtäni eteeni. Kiitän erityisesti Terhiä, joka on auttanut minua paljon suomenkielen tarkistamisessa, ilman sinua en olisi saanut tätä diplomityötä tehtyä.

Olen kiitollinen perheelleni, joka on ollut aina mukana tukemassa minua jaksamaan ja tekemään työtä loppuun. Erityiskiitokset siskoille, jotka olivat minun kanssani vaikeissa hetkissä. Kiitän lopuksi vielä kavereitani, jotka jaksoivat kannustaa ja tukea minua diplomityön teon aikana.

Tampereella, 29. huhtikuuta 2020

Tuan Vo

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

HT	Harvoin toistuva
IMA	Insinöörimatematiikka (engl. Engineering Mathematics)
IMO	Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset (engl. International Mathematical Olympiads)
MUT	Melko usein toistuva
$\mathbb{R}$	Reaaliluvut
UT	Usein toistuva
$\mathbb{Z}$	Kokonaisluvut

1 JOHDANTO

Matematiika on ollut aina tärkeä rooli luonnontieteessä ja teknologian kehittämisessä, mutta matematiikka silloin tällöin pidetään koulumaailmassa epäsuosittuna oppiaineena. Kun taas striimipalvelut sekä sosisaalinen media ovat tärkeä nuorten elämässä. Näistä syistä monet luonnontieteiden harrastelijat ovat myös lähteneet näihin palveluihin mukaan ja ovat saaneet paljon ihmisiä kiinnostumaan luonnontieteistä. YouTubesta löytyy paljon matematiikkaan liittyviä kanavia muun muassa Numberphile, standupmaths, Mathologer, Professor Dave Explains. Videoiden sisällöt vaihtelevat. Välillä ne ovat tuutortyyppisiä, jossa opetaan miten lasketaan matematiikka, tai sitten niissä selitetään mielenkiintoisista matemaattisistä ilmiöistä, esimerkiksi kultainen leikkaus, Monty Hallin ongelma. Videoiden ideana on opettaa ihmisille matematiikkaa, herättää heidän innostuksensa ja kiinnostuksensa matematiikkaa kohtaan. Kanava nimeltään 3Blue1Brown julkaisi yksi video, jonka nimi on "This problem seems hard, then it doesn't, but it really is", oli tämän diplomityön inspiraatio. Videossa keskustellaan mielenkiintoisesta matematiikan tehtävästä ja sen ratkaisemisesta. Kyseessä on vuoden 2011 Kansainvälisten Matematiikkaolympialaisten Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset (engl. International Mathematical Olympiads) (IMO) tehtävä 2 , joka on tunnettu nimellä "tuulimylly"(windmill) [17].

IMO 2011 - Tehtävä 2. Olkoon $\mathcal{S}$ vähintään kahdesta pisteestä koostuva äärellinen joukko tasossa. Oletetaan, että mitkään kolme joukon $\mathcal{S}$ pistettä eivät ole samalla suoralla. Kutsutaan *tuulimyllyksi* prosessia, joka alkaa suoralla l, joka kulkee yksittäisen pisteen $P \in \mathcal{S}$ kautta. Suora pyörii myötäpäivään *kierron keskipisteen* P ympäri kunnes se törmää johonkin toiseen joukkoon $\mathcal{S}$ kuuluvaan pisteeseen. Nyt tämä piste Q alkaa toimia kierron keskipisteenä, ja suora pyöri myötäpäivään pisteen Q ympäri kunnes se törmää jälleen joukon $\mathcal{S}$ pisteeseen. Tämä prosessi jatkuu loputtomasti.

Osoita, että voidaan valita sellainen $P \in \mathcal{S}$ ja pisteen P kautta kulkeva suora l, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista joukon $\mathcal{S}$ pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

Ratkaisussa tehtävää lähdettiin ratkaisemaan samalla tavalla kuin muitakin sanallisia tehtäviä. Luetaan tehtävänanto läpi ja samalla kirjoitetaan tehtävässä annetut tiedot ylös. Tämän jälkeen pyritään havainnollistamaan tilannetta ja ymmärtämään, mitä tehtävässä kysytään. Tämän tehtävän idea oli mallintaa "tuulimyllyn"prosessia ja etsiä tehtävälle ratkaisu. Tehtävän ratkaisuprosessissa mallinnettiin ensin yksinkertaisimmat tuulimyllyt ja varmistettiin, että ne toimivat tehtävänannon mukaan. Tämän jälkeen mallinnettiin monimutkaisempia tuulymyllyjä. Kun on kokeiltu tarpeeksi monta esimerkkiä, niin pystyttiin päättelemään ratkaisu. Tämä ei kuitenkaan riitä, vaan se on todistettava matemaattisesti. Lukija voi yrittää ratkaista tehtävää itse tai tutustua videoon.

Videosta huomataan, että tehtävän ratkaisuprosessi on vastaava kuin minkä tahansa muun sanallisen tehtävän ratkaisuprosessi. Opettajalle olisi tärkeää, että opiskelijoille pystytään opettamaan ongelmanratkaisua. Insinööreille tämä on yksi tärkeimmistä taidoista, joita on osattava. Videon katsomisen jälkeen huomataan, että tehtävän ratkaisua ei ole vaikea ymmärtää. Lisäksi ratkaisuun johtava prosessi on matemaattisesti kaunis.

Diplimityön tekijän mielenkiinto tämänkaltaisiin tehtäviin heräsi, koska hän huomasi, ettei osannut itse ratkaista tehtävää. Hän ei ollut osallistunut tämänkaltaisiin kilpailuihin. Näin syntyi idea siitä, että opiskelijoille annettaisiin vaikeita tehtäviä, ja observoitaisiin, kuinka he aloittavat ratkaisemaan tehtävää. Näin olisi ehkä mahdollista päästä avamaan heidän ajatteluprosessiaan. Tutkimuksessa ei odoteta, että opiskelijat saisivat tehtäviä lopullisesti ratkaistuksi, mutta olisi hyvä jos heidän ajattelu- ja ratkaisuprosessiaan saataisiin mallinnettua.

Tässä työssä tutkitaan siitä, onko mahdollista hyödyntää Kansainvälisten Matematiikkaolympialaisten tehtävät matematiikan oppimisessa ja opetuksessa. Samalla selvitetään siitä, kuinka Tampereen yliopiston Hervannan kampuksen ensimmäisen vuoden insinöörimatematiikan opiskelijat lähtivät ratkaisemaan näitä tehtäviä ja kuinka he suoriutuivat tässä prosessissa.

Luvussa 2 esitellään teoreettinen viitekehys, jonka keskeisimpiä sisältönä on matemaattiseen ajatteluun liittyvät käsitteet. Matemaattinen ajattelu on kognitiivinen prosessi, jota on mallinnettu useiden eri tutkijoiden toimesta. Tutustutaan muutamiin keskeisiin malleihin.

Luvussa 3 keskeisenä sisältönä on esitellä Kansainvälisten Matematiikkaolympialaisten konsepti. Esitellään kilpailun tavoitteet ja käydään läpi millaisiin aihealueisiin kilpailukysymykset liittyvät ja miten paljon eri aihealueiden kysymyksiä on kysytty.

Luvussa 4 esitellään tutkimuskysymykset ja tarkastellaan laadullista tutkimusmenetelmää, jota tutkimuksessa käytetään. Tutkimuksen toteutus käydään läpi luvussa 5, tässä perustellaan myös, miksi juuri valitut kysymykset oettiin tarkasteluun tässä tutkimuksessa.

Luvussa 6 analysoidaan kerättyä aineistoa sekä opiskelijoiden erilaisia ratkaisuprosesseja. Pohdintaluvussa 7 tarkastellaan analyysin perusteella opiskelijoiden matemaattista ajattelua, vastataan tutkimuksen perusteella tutkimuskysymyksiin sekä lopuksi analysoidaan tutkimuksen luotettavuutta.

2 TEOREETTINEN VIITEKEHYS

2.1 Matemaattinen ajattelu ja siihen vaikuttavat tekijät

Matemaattinen ajattelu on hyvin laaja ja vaikeasti määriteltävä käsite, sillä se riippuu mistä näkökulmasta käsitettä käsitellään. Matemaattista ajattelua voidaan tutkia osatekijöidensä yhdistelmänä [18]. Henderson määritteli matemaattista ajattelua niin, että se on eksplisiittinen ja epämääräinen yhdistelmä matemaattisista tekniikoista, konsepteista ja prosesseista ongelman ratkaisemisessa [40]. Avitalin ja Shettleworthin mukaan matemaattinen ajattelu voidaan jakaa kolmeen hierarkkiseen tasoon. Alintaso on asian mieleenpalauttaminen tai tunnistaminen, jolloin yksilö palauttaa mieleen opitun asian. Mieleenpalauttamista hieman korkeammalla tasolla on algoritminen ajattelu, yleistäminen, eli siirtovaihe opituista sisällöistä uusiin opitun kaltaisiin sisältöihin, jossa henkilö hyödyntää opittuja algoritmeja. Korkeimmalla tasolla on avoin etsiminen, jossa yksilö voi järjestää tai esittää tehtävän osia ja löytää niistä yhteyksiä, riippuvuuksia. Tähän viimeiseen tasoon kuuluu myös matemaattinen keksiminen, oivaltaminen sekä reflektointi. [4, 20].

Burtonin [6] määritelmän mukaan, matemaattinen ajattelu on ajattelutyyli, johon liittyy matemaattisia operaatioita, prosesseja ja toimintoja. Matemaattinen ajattelu liittyy niihin ongelmiin, joita voidaan kuvata tai käsitellä matemaattisilla kielellä, symboleilla ja strukttuureilla. Lisäksi näiden ominaisuuksien välillä on loogisuutta, sekä sisäistä ristiriidattomuutta [6].

Burtonin mielestä, matemaattisessa ajattelussa on neljä keskeisintä prosessia ja Yrjösuuri esitteli prosessit seuraavasti [6, 50]:

1. *Täsmentäminen (specializing)* - Kun oppilas tutustuu tehtävään, hän kokeilee ja tutkia joitakin esimerkkejä tai malleja, joiden avulla hän pyrkii käsittelemään tehtävässä olevia elementtejä ja käsitteitä. Täsmentäminen on induktiivisen lähestymistavan lähtökohta.
2. *Otaksuminen (conjecturing)* - Kun tarpeeksi monta esimerkkiä on tutkittu, oppilas voi arvailla esimerkkien yhteydet melkein automaattisesti. Otaksumisessa oppilas käyttää erilaisia päättelysääntöjä ja tapoja, jotka vähentävät yrityksien ja erehdyksien määrää. Sopivin yhteys ilmaistaan ja vahvistetaan
3. *Yleistäminen (generalizing)* - Esimerkkien säännöllisyyden tai kuvioiden tunnistamisella saadaan aikaan yleistäminen. Oppilas luo uudelle tiedolle järjestyksen ja merkityksen, ja liittää niitä tietorakenteeseen. Samalla hän kehittää omaa tietora-

kennettaan.

4. *Vakuuttaminen (convincing)* - Jotta tieto on vankka ja kestävä, sitä pitää testata, kunnes se on vakuuttava. Vakuuttaminen ei ole pelkästään vahvistamista, vaan se sisältää sisäinen prosessi, joka ajaa itsetyytyväisyyden hyväksymistä, epäilee ja tutkii väitettä, kysyy oletuksia, sekä selvittää merkityksiä parhaan mahdollisen todistuksen saamiseksi. Oppilas ensin vakuuttaa itsensä, ja sitten muut. Vakuuttamisprosessi on keino, jolla yleistäminen liikkuu henkilöstä yhteisöön.

Induktiivisessa lähestymistavassa oppilaat tutustuvat ensin ilmiöihin tai reaalimaailman ongelmaan. He tutkivat niitä kokeellisilla tavoilla tehden havaintoja. Tietoja analysoimalla ja järkevällä päättelyllä, opiskelijat yrittävät muodostaa faktoja, sääntöjä ja ohjausperiaatteita, joilla voivat mahdollisesti ratkaista ongelman [44]. Huono puoli kuitenkin se, että prosessi saattaisi viedä paljon aikaa, oppilaat saavat virheellisiä tulkintoja, ja he saattavat ärsyyntyä ja luovuttavat. Induktiivisessa lähestymistavassa ajatteluprosessit tapahtuvat järjestyksessä täsmentäminen, otaksuminen ja yleistäminen [6].

Induktiivisen lähestymistavan vastakohta on deduktiivinen, jossa opettaja opettaa oppilaille ensin teorioita, sääntöjä, matemaattisia malleja ja näyttää heille esimerkkejä mallien sovelluksista. Lopuksi oppilaat pääsevät itse ratkaisemaan samankaltaisia ongelmia hyödyntämällä esimerkkejä ja opetettuja sääntöjä Deduktiivisen lähestymistavassa yleensä huonosti selitetty mikä on motivaatio uuden asian oppimiselle, miksi opitaan juuri esitettyjä asioita, mitä reaalimaanilman ilmiöitä tai ongelmia voidaan selittää ja ratkaista kyseisillä malleilla. Deduktiivisessa lähestymistavassa ajatteluprosessien järjestys on toisin päin verrattuna induktiiviseen, eli yleistäminen, otaksuminen ja täsmentäminen [6]. Opettaja voisi hyödyntää induktiivista tai deduktiivista lähestymistapaa tai molempia riippuen opettavasta aiheesta.

Jotta voidaan tutkia matemaattista ajattelua paremmin, on ensin tunnistettava ajatteluun vaikuttavia tekijöitä. Matemaattiseen ajatteluun vaikuttaa viisi tekijää [19], eivätkä niiden määritelmät ole yksiselitteisiä:

- Uskomukset
- Kulttuurit
- Matemaattiset kyvyt
- Informaation prosessointi
- Ongelmanratkaisutaito

Opiskelijan *uskomus* on subjektiivista tietoa, joka pohjautuu hänen omaan kokemuksiin, havaintoihin ja tiedostamiseen [21]. Riippuen kontekstista, uskomukset ovat kognitiivisen ja affektiivisen alueiden välillä [39]. Affektiiviseen alueeseen kuuluu uskomusten lisäksi asenteet, tunnetilat, opiskelijan näkemykset, itseluottamus, sekä matematiikkapelko ja kunnianhimo [5, 32]. *Kulttuurilla* on ominaisia piirteitä kuten, itse kehitetyt käytänteet, tiedot, ammattikieli ja koodit, jotka vaikuttavat opiskelijan käytöstapoihin. Lähtökohtana on se, että matemaattinen ajattelu ja ymmärrys muodostuvat opiskelijan ympäröivässä kulttuurissa yksilön oman toiminnan kautta [46]. *Informaation prosessointiin* eli ihmisen tiedonkäsittelyyn kuuluu muun muassa havaitseminen, mieltäminen, kategorisointi, ajattelu, päättely, päätöksenteko sekä ongelman ratkaisua [28]. Käydään vielä ongelmanratkaisua ja matemaattista kykyä tarkemmin läpi.

2.1.1 Matemaatinen kyky

Werdelinin määritelmän mukaan matemaattisella kyvyllä tarkoitetaan kykyä ymmärtää matemaattisten ongelmien, symbolien, menetelmien ja todistusten luonne. Yksilö oppii niitä, osaa uudelleen tuottaa niitä, yhdistellä niitä ongelmiin, symboleihin, menetelmiin ja todistuksiin, sekä käyttää niitä matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa [31]. Campbell esitti kaksi tärkeää matemaattista kykyä, numeerinenkyky ja ongelmaratkaisukyky. Numeerinenkyky viittaa numeroiden käsittelyyn eli niiden esittämiseen, vertailuun, sijoittamiseen, laskemiseen sekä yksinkertaisiin algoritmeihin, kun taas ongelmanratkaisukyky viittaa abstraktisten matemaattisten suhteiden hankkimiseen ja ratkaisujen löytämiseen monimutkaisessa matemaattisessa kontekstissa. [7, 49].

Kilpatrickin mukaan matemaattisille kyvyille tunnusmerkkejä ovat [50]:

- kyky ajatella loogisesti kvantitatiivisten ja spatiaalisten suhteiden, lukujen ja kirjainsymbolien alueella,
- kyky ajatella matemaattisin symbolein
- kyky lyhentää matemaattisen ajattelun prosessia
- kyky ajatella lyhennetyillä struktuureilla
- pyrkimys ratkaisujen selvyyteen, yksinkertaisuuteen, taloudellisuuteen ja rationaalisuuteen
- henkisen prosessin joustavuus matemaattisessa toiminnassa
- kyky henkisen prosessin suunnan nopeaan ja vapaaseen uudelleen konstruoimiseen kytkemällä ajatteluketju päinvastaiseen suuntaan.

Krutetskiin mielestä matemaattisten kykyjen tärkeimpiä piirteitä on ymmärtää kirjoitettua sekä suullista matemaattista tietoa, itse esittää sekä kirjallisesti että suullisesti ja kykyä muistaa matemaattista informaatiota [26, 31]. Yksilön matemaattinen kyvyt ovat yksilön potentiaaliominaisuuksia ja ne muodostuvat ajattelunprosessin hallinnasta. Matemaattinen ajattelu on opiskelijan matemaattisten kykyjen säätelemä prosessi. Niiniluodon "Uskomuksia ilman tietoa?-artikkelin [36] mukaan informaatio on yläkäsite ja tieto sen alakäsitteenä tarkoittaa tarkempaa perusteltavuuteen ja totuudenmukaisuuteen liittyvää vaatimusta [42].

2.1.2 Ongelmanratkaisu

Ongelma on kysymys tai tilanne, johon etsitään ratkaisua. Mitä vaikeampi ongelma on, sitä työläämpi löytää siihen ratkaisua. Tilanne tai kysymys ei ole kaikille ongelmaa samalla tavalla, sillä se kytkeytyy vahvasti jokaiseen henkilöön eri tavalla eri ajanhetkellä. Jotta matemaattista ongelmaa voidaan ratkaista, opiskelijan on käytettävä aikaisemmin opittuja matemaattisia tietojaan ja taitojaan järkevästi. [31]

Ongelmat voidaan luokitella niiden esitystavan mukaan. Ongelmissa annetaan eksplisiittisesti (suorasti) tai implisiittisesti (epäsuorasti) informaatiota tai lähtöilmaisuja, jotka ilmaisevat lähtötilanteen ja tavoiteilmaisut eli varsinaisen ongelman tai ratkaisun tavoitteen. Ongelmassa vaaditaan operaatioita, eli toimintoja, joilla saadaan yksi tai useampi ilmaisu muunnettua yhdeksi tai useammaksi uudeksi ilmaisuksi. Matemaattisen ongelman lähtöilmaisut voivat olla muun muassa tietoja ongelman elementeistä, alkioita (esineitä, kappaleita) ja luokkia (käsitteitä, relaatioita tai operaatioita.) Ongelman implisiittinen lähtöinformaatio on vaikeimmin havaittavissa, koska se edellyttää ongelman alaan tai aiheeseen liittyvien tietojen tuntemista. Matemaattisen ongelman ratkaisu on prosessi, joka kuvaa millä tavalla päästiin lähtöilmaisuista tavoitetilaan. [31]

Matemaattisia ongelmia voidaan jakaa kolmeen luokkaan: perusongelmat, matemaattiset tutkimustehtävät sekä mallintaminen [19]. Polyan mallin mukaan ongelmanratkaisuprosessiin sisältää neljä vaihetta:

1. ymmärrä ongelma
2. laadi suunnitelma
3. toteuta suunnitelma
4. tarkista tulos.

Polyan ongelmanratkaisuprosessin vaiheet näkyvät parhaiten avoimissa ongelmissa, josta puuttuu lähtötila tai lopputila tai molemmat, eli yleensä näihin matemaattisiin tutkimus- tai mallintamistehtäviin [43]. Strategioiden hallinta, sopivien strategioiden tunnistaminen ja valitseminen ovat tärkeitä ja niitä ohjaavat yksilön metakognitiot, eli hänen ajattelua omasta ajattelustaan. Metakognitiot ohjaavat yksilön päätöksentekoa [33]. Metakognitio sisältää kaksi pääkomponenttia: "kognition tunnistaminen"(deklaratiivinen, proseduraalinen ja konditionaalinen tieto) ja tärkeämpi "kognitiivisen sääntely"(suunnitteleminen, seuranta, hallinta ja reflektointi) [34]. Dreyfusin ja Eisenbergin mielestä kehittyneen matemaattisen ajattelun keskeisimpiä asioita ovat ajattelun esteettisyys, analoginen päättely, struktuurien ymmärtäminen, esittäminen, visuaalinen päättely ja käänteinen ajattelu [9].

2.1.3 Matemaattinen osaaminen

Matemaattista ajattelua voidaan tutkia *matemaattisella osaamisella*. Kilpatrick, Swafford ja Findell ovat tutkineet paljon matematiikan osaamista (*mathematical proficency*) [24] ja heidän mielestä hyvä matemaattinen pätevyys koostuu viidestä piirteestä:

- **Käsitteellinen ymmärtäminen** (conceptual understanding) - ymmärrys matemaattisista käsitteistä, operaatioista ja suhteista.
- **Proseduraalinen sujuvuus** (procedural fluency) - taito suorittaa proseduureja jous-

tavasti, tarkasti, tehokkaasti ja asianmukaisesti.

- **Strateginen kompetenssi** (strategic competence) - kyky muodostaa, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.
- **Mukautuva päättely** (adaptive reasoning) - kyky ajatella, pohdiskella, selittää ja perustella loogisesti.
- **Yritteliäisyys** (productive disposition) - taipumus nähdä matematiikkaa järkevänä, hyödyllisenä ja kannattava, uskoen omiin kykyihin ja vahvuuksiin.

Kaikki piirteet kietoutuvat hyvin toisiinsa ja ovat riippumattomia toisistaan. Käsitteellisessä ymmärtämisessä, hyvä matematiikkaa osaava opiskelija ei pelkästään tiedä, vaan ymmärtää sekä osaa käyttää konsepteja ja menetelmiä, mutta myös ymmärtää missäkin tilanteissa tarvitaan mitäkin, tunnistaa kontekstien ja tietojen yhteyksiä. Hyvin organisoitu tietorakenne auttaa opiskelijaa muistamaan aiemmin opittuja asioita ja oppimaan helpommin uusia asioita. Ymmärtäminen on helpompaa kuin ulkoaopettelu, sillä tietoa voidaan rekonstruoida. Ymmärtäminen vähentää myös väärin muistamisen riskiä, sillä tietoa voidaan perustella. Käsitteellisesti ymmärtävä opiskelija osaa löytää myös yhteyksiä käsitteiden ja proseduurien välillä. [24]

Proseduraalinen sujuvuus viittaa opiskelijan taitoon ymmärtää ja käyttää proseduureja eli menettelytapoja tai menetelmiä. Opiskelija tietää missä tilanteissa ja miten niitä käytetään tarkoituksen mukaisesti. Proseduraalisella sujuvuudella on yhteys käsitteelliseen ymmärtämiseen, sillä proseduurien oppimisessa tarvitaan käsitteiden osaamista, ja uusi opittu proseduuri vahvistaa käsitteiden ja suhteiden ymmärrystä. Proseduurien sujuvuuteen sisältyy myös proseduurien arviointia, eli tunnistaa mitkä olisivat vahvuudet ja heikkoudet [24]

Strateginen kompetenssi liittyy ongelman ratkaisemiseen. Opiskelija ymmärtää ongelman, tunnistaa ongelman oleellisia osia ja muotoilee ongelmaa siihen muotoon, jotta ratkaiseminen on mahdollista. Ratkaistakseen ongelman opiskelija kykenee tunnistamaan ja hallitsemaan useita ratkaisustrategioita, joiden avulla muodostaa ja esittää ongelmanratkaisua. Opiskelijalla on oltava hyvä proseduurien ja käsitteiden tuntemus, jotta hän tunnistaa ja löytää ongelman samanlaisuutta ja yhteyksiä käsitteiden välillä. [24]

Mukautuva päättely viittaa opiskelijan kykyyn ajatella loogisesti eri käsitteiden ja tilanteiden välisistä suhteista. Ongelman muotoilu on tärkeässä roolissa, joka vaikuttaa siihen, miten opiskelija kykenee mukautuvaan päättelyyn. Mukautuvassa päättelyssä ilmenee opiskelijan kyky osoittaa riittävät perustelut hänen omille teoilleen ja valinnoilleen. Mukautuva päättely sisältää muun muassa intuitiivisen ja induktiivisen järkeilyn, joka perustuu säännönmukaisuuksiin, analogioihin ja metaforiin. Järkeilyt yhdessä perusteluiden kanssa kasvattavat käsitteellistä ymmärrystä. [24]

2.2 Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Konstruktivismissa oppiminen on uuden tiedon rakentamista prosessina, jossa oppilaalla on keskeinen ja aktiivinen tiedon rakentajana. Oppilas on muodostanut oman käsityksensä ympärillään olevista ja oppimistaan asioista. Hänen käsityksensä voi olla luonnontieteen kannalta puutteellinen ja tiedostamaton. Oppilaan maailmankuvaan opettaja tuo palasia tieteellisestä maailmankuvasta. Oppilas omaksuu uutta tietoja oman ajattelun sekä tietorakenteensa mukaan [2]. Oppilaan vanhat tiedot ja käsitykset säätelevät, kuinka ja paljonko uutta asiaa oppilas pystyy tulkitsemaan ja ymmärtämään. Kun uutta tietoa on ymmärretty, sitä voidaan tällöin lisätä tietorakenteeseen. [2]

Driverin [18] mukaan, konstruktivismin kuusi keskeistä ominaispiirrettä ovat:

1. Oppilaat opiskelevat määrätietoisesti ja ovat vastuullisia omasta oppimisestaan. Hän tuo aktiivisesti omia näkökulmiaan ja käsityksiään oppimistilanteisiin.
2. Oppiminen on aktiivinen prosessi, jossa oppilaan käsitykset muuttuvat. Tämä prosessi vaatii oppilaalta aktiivisuutta tiedon rakentamisessa, joka tapahtuu vuorovaikutuksessa uuden ilmiön kanssa tai oivalluksena.
3. Yksilön tieto ei ole "objektiivista", vaan se on rakennettu persoonallisesti ja sosiaalisesti. Uutta tietoa arvioidaan ja rakennetaan vanhan tiedon päälle oppilaan aikaisempien kokemuksien perusteella. Uuden ja vanhan tiedon välillä ei saa olla ristiriitaisuuksia, jotta uusi tieto voidaan hyväksyä.
4. Opettajien omat persoonalliset käsitykset opettamisesta ja oppimisesta vaikuttavat oppimistilanteeseen. Oppimistilanteissa oppilas on vuorovaikutuksessa opettajan kanssa.
5. Opettaminen ei ole pelkkää tiedon siirtämistä, vaan eri opetustilanteiden järjestämistä ja tehtävien suunnittelua, niin että ne auttavat oppilasta saavuttamaan oppimistavoitteet.
6. Opetussuunnitelmassa ei saa olla pelkästään opettavia asioita, vaan siinä pitäisi olla myös ohjeita, jotka liittyivät oppiaineen tehtäviin, materiaaleihin ja resursseihin, ja joiden avulla oppilaat voivat konstruoidaan tietorakennettaan.

Oppilailla on omia käsityksiä ja uskomuksia opituista asioista ja siksi oppilaat tulkitsevat ympäristöstään olevia asioita omalla tavallaan. Tämän takia myös opetuksen on oltava tarpeeksi monimuotoisia, että eri oppilailla on mahdollisuuksia vuorovaikuttaa ilmiön kanssa eri tavoin. Näillä tavoilla oppilaalta herättää ajatuksia, pohdintoja, mitkä taas kyseenalaistavat vanhaa tietoa ja muokkaa sitä. Oppilaan tieto ja kokemukset ovat rajoitettuja. Kun oppilaat kohtaavat uutta ilmiötä, he yrittivät etsiä tietorakenteesta sellaisia tapahtumia, jotka ovat jollakin tavalla samaa kuin uuden ilmiön, selittämään ja soveltamaan uuteen asiaan. Opettajan rooli on tietää nämä rajoitukset ja virheelliset käsitykset uudesta ilmiöstä ja ohjata oppilaita oikeaan suuntaan. [10]

Konstruktivismi oppimiskäsitys näkyy vahvasti luonnontieteissä, kuten matematiikka, fysiikka ja kemiaa. Näissä oppiaineissa vaaditaan oppilaalta jonkinlaista perusosaamispohjaa. Heikommalla pohjalla oppilaalla ei ole tarpeeksi taitoja uuden asian pohtimiseen, jolloin uudella tiedolla on heikko yhteys vanhaan, eikä tällöin tiedon rakentaminen tietorakenteeseen on hyvin haastava. Opettajan on otettava huomioon oppilaan taso opetuksen suunnittelemiseen.

2.3 Kognitiivisen alueen taksonomia

1900-luvun puolessa välissä, Yhdysvalloissa oli tutkimusryhmä, joka kehitti luokittelusysteemi eli taksonomian, joka luokittelee opetuksen tavoitteita. Opetuksen tavoitteitta voidaan tarkastella kolmella alueella: kognitiivinen, affektiivinen ja psykomotorinen [48]. Tässä työssä keskitytään kognitiiviseen alueeseen, jota voidaan kuvailla Bloomin taksonomialla. Bloomin taksonomia soveltuu oppimistulosten luokitteluun [18]. Taksonomian avulla voidaan määrittää osaamisen tasoja.

Bloomin taksonomiassa osaaminen jaetaan seuraaviin kuuteen tasoon [48]:

1. Tietäminen (*Knowledge*)
2. Ymmärtäminen (*Comprehension*)
3. Soveltaminen (*Application*)
4. Analysoiminen (*Analysis*)
5. Synteesi (*Synthesis*)
6. Arvioiminen (*Evaluation*)

Tasot ovat hierarkkisia, ja ne ovat alimmasta tasosta korkeampaan [18]. *Tietäminen* on ensimmäinen taso, joka tarkoittaa sitä, että opiskelija tietää ja muistaa tietoja ja asioita, sekä erilaisia tietojen käsittelytapoja ja menetelmiä. Opiskelijat eivät siis välttämättä ymmärtää kaikkea, mitä he tietävät. Seuraava taso on *ymmärtäminen*, eli opiskelija ymmärtää tietojen merkityksen ja osaa tulkita niitä sekä kääntää kielestä tai viestintämuodosta toiseen. Näiden lisäksi hän osaa myös päätellä loogisesti. Ymmärtäminen ei vaadi, että tietoja voidaan liittää johonkin muuhun asiaan. Kolmas taso on *soveltaminen*. Tällä tasolla opiskelija osaa käyttää opittuja konsepteja ja ratkaista tiettyjä ongelmia. Neljäs taso on *analysointi* ja se tarkoittaa sitä, että opiskelija osaa jakaa isompia kokonaisuutta pienempiin osiin. Hän osaa havaita elementtejä, ja analysoida tietojen välisiä suhteita ja yhteyksiä. *Synteesi* on viidellä tasolla. Eri asioiden yhteyksien perusteella opiskelija osaa hyödyntää niitä ja luoda uusia tietoja. Viimeinen taso on *arviointi*, jossa opiskelija osaa pohtia menetelmien tehokkuutta ja voiko niitä soveltaa tietyn ongelman ratkaisemisessa. Opiskelijaa osaa lisäksi tarkastella tietojen ja tulosten laatuja. [48]

James W. Wilson on luonut Bloomin taksonomian pohjalta mallin, joka kuvaa matemaattista käyttäytymistä kognitiivisella tasolla. Hänen mukaan matemaattisten käyttäytymistasojen keskeisiä piirteitä ovat laskutaito, ymmärtäminen, soveltaminen ja analysointi. Tasot ovat hierarkisia [19, 20]:

A Laskutaito.

B Ymmärtäminen.

C Soveltaminen.

D Analysoiminen.

Laskutaidon tasolla oppilas tunnistaa termejä ja käsitteitä, hallitsee algoritmien käyttöä sekä osata tehdä yksinkertaisia muistamistehtäviä ja rutiininomaisia harjoituksia. Tällä tasolla ei edellytetä oppilaalta päätöksentekoa, eikä monimutkaista muistamista, vaan riittää tosiasioiden muistaminen [20].

Ymmärtämisellä tasolla, oppilas tunnistaa ja ymmärtää matemaattisia käsitteitä, rakenteita, sekä erilaisia matemaattisia periaatteita ja sääntöjä. Oppilas osaa muuttaa tietoja muodosta toiseen, ymmärtää ja osaa seurata tehtävän loogisuutta. Ymmärtämisen ja laskutaidon tasojen raja on hankala erottaa, sillä tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan yleensä molempia tasoja. [20].

Kolmas taso on soveltaminen. Tällä tasolla oppilas tunnistaa tehtävän jo ennen ratkaisun tekoa, sillä hän on ratkaissut ennen jo vastaavan tyyppisiä tehtäviä. Ratkaisuprosessissa opiskelija osaa erotella tietoja, kykenee paloittelemaan ongelman pienempiin osiin ja yhdistelemään ratkaisemiaan alaongelmia. Tason tehtävät ovat kuitenkin rutiiniluonteisia, ja ne vaativat opiskelijoiden päätöksentekoa. [20].

Korkein taso on analysoiminen, jossa oppilaat miettivät asioita syvällisemmin. Tässä vaiheessa ei tehdä enää rutiinitehtäviä. Tehtävissä vaaditaan oppilaalta luovuutta ja keksimistä. Oppilas joutuu tutkimaan ongelmaa tarkemmin ja annettujen tietojen pohjalta, etsii tietojen välille suhteita, muodostaa teorioita, rakentaa uusia malleja, jotka eivät ole aikaisemmin tuttuja oppilaalle. Tällä tasolla oppilaalla on oltava laaja osaamispohja ja taidot [20]. Tässä tutkimuksessa halutaan tarkastella ensimmäisen vuoden opiskelijoiden osaamista hyödyntämällä Wilsonin mallia.

2.4 Yliopiston ensimmäisen vuoden opiskelijoiden ja lukiolaisten asenteet matematiikasta

Hyvin suuri yliopiston opiskelijoista tulevat lukiosta, siksi vaikka tässä diplomityössä tutkitaan yliopiston opiskelijoiden matemaattista ajattelua, olisi myös hyvää nähdä myös lukiolaisten matemaattista ajattelua ja asenteita. Tässä osiossa tutustutaan, onko lukiolaisilla ja yliopiston ensimmäisen vuoden insinöörimatematiikan opiskelijoilla paljon eroja ajattelussaan.

Erkkilä on tutkinut lukiolaisten suhtautumista matematiikkaan vuonna 2009 [12]. Hänen mukaan opiskelijat ovat tietoisia lukion matematiikan vaikeudesta ja ymmärtävät kotitehtävien tekemisen merkityksen ja sen hyödyllisyyden. Opiskelijat kuitenkin luottivat ja uskoivat omiin kykyihinsä, joka saattoi johtaa välillä kotitehtävien tekemättömyyteen. Heidän mukaan syynä oli ajankäyttö, motivaation ja innostuksen puuttuminen. Osa lukiolaisista piti matematiikka mekaanisena; toiset taas korostivat tiedon soveltamisen merkitystä. Lisäksi opiskelijat korostivat opettajan merkitystä oppimiselle. Osa opiskelijoista tavoitteli hyviä arvosanoja sekä opiskeli ylioppilaskirjoituksia varten. Toiset taas pohtivat opittavien asioiden käyttömahdollisuuksia ja olivat kiinnostuneita matematiikasta. Yleisesti opiskelijat pitivät matematiikka hyödyllisenä ja heidän matematiikka-asenne oli pääosin positiivinen. [12]

Krook on taas tutkinut lukiolaisten matemaattista osaamista ylioppilaskokeissa sekä pääsykokeissa vuonna 2014 [25]. Tutkimuksessa mainittiin, että ylioppilaskirjoituksissa painotetaan vahvasti mekaanisia tehtäviä ja rutiinitehtäviä. Strategia- ja sovellustehtäviä testattiin selvästi vähemmin kuin edellä mainittuja tehtävätyyppisiä [25]. Tämä oli varmasti yksi niistä syistä, miksi lukiolaiset saattoivat nähdä matematiikka mekaanisena oppiaineena.

Krook on jakanut opiskelijoita, heidän menestyksensä ylioppilaskirjoitusten ja pääsykokeiden tulosten perusteella ryhmiin:

1. *Osaajat* - matematiikan monipuolinen osaajia.
2. *Kurssiopiskelijat* - suoriutuvat heikosti tai keskinkertaisesti. Rutiininomaisten tehtävien hallinta on kohtuullisella tasolla.
3. *Laskijat* - Mekaanisissa ja rutiivitehtävissä hyvin menestyneet opiskelijat, mutta heikommin strategioiden tai sovellusten hallinnassa.
4. *Heikot* - heikosti suoriutunut opiskelija kaiken tyyppisissä tehtävissä.
5. *Stretegistit* - Hallitsee erinomaisesti tehtävät, jotka painottavat oikeaan ratkaisustrategian valintaan.

Krookin tutkimustulosten mukaan, pääsykokeissa osaajia oli vähemmän, sillä he todennäköisesti pääsivät sisään suoraanvalinnoilla. Sen sijaan kurssiopiskelijoiden määrä oli selkeästi suurempi ja myös strategististen määrä oli hieman suurempi [25]. Tutkimuksessa ei ole mainittu laskijoiden määrä, mutta voidaan olettaa, että heitä oli pääsykokeissa myös, sillä he todennäköisesti menestyivät kohtuullisen hyvin ylioppilaskokeissa (rutiinitehtävien painotuksen takia). Tutkimuksessa johti siihen, että yliopiston ensimmäisen vuoden insinöörimatematiikan opiskelijoita ovat suurin osaa osaajia, kurssiopiskelijoita, laskijoita sekä strategisteja.

Vuonna 2004, Tampereen teknillisessä yliopistossa tarkasteltiin opiskelijoiden matemaattisia taitoja perustaitotestilla, matematiikkajumpalla sekä matemaattisia asenteita kyselyillä. Tarkoitus oli kehittää yliopistomatematiikan opetusta [41]. Kaikki Tampereen korkeakoulut yhdistettiin Tampereen yliopistoyhteisöksi vuonna 2019 ja perustaitotesti on muuttunut ajan myötä. Siksi Pohjolaisen tutkimuksen tarkoitus on antaa meille suuntaa, millaisia ensimmäisen vuoden opiskelijoita ovat mahdollisesti. Tehdyn tutkimuksen (vuonna 2006) tuloksista, tarkasteltiin opiskelijoiden asenteita ja jaettiin heidät ryhmiin:

- *Pintasuuntautuneet mallista oppijat (14,7 %)* - Ryhmän opiskelijat ovat epävarmoja osaamisesta, ja heidän opiskelussaan korostuu kopioimalla tai esimerkkien avulla oppiminen. He eivät pyri syvälliseen oppimiseen. Kyseenalaistaminen pidettiin vähemmän tärkeänä, sillä opiskelijoiden mukaan, matematiikan merkitys näkyy oma koulutusohjelman tarpeista.

- *Vertaisoppijat (24,0 %)* - Ryhmäläiset ovat muihin ryhmiin sosiaalisimpia ja suhtautuvat matematiikan opiskeluun positiivisesti. Heidän opiskelutapansa ovat pääosin kopiointia tai esimerkkien avulla ulkolukua, mutta he pyrkivät myös syvälliseen oppimiseen.
- *Tukea tarvitsevat (12,5 %)* - Opiskelijat ovat erittäin epävarmoja osaamisen suhteen ja luopuvat helposti opiskelusta. Heidän opiskelutapanansa on ulkolukua ja heidän on vaikea ymmärtää matemaattista kieltä. He tarvitsevat opettajalta paljon apua ja ohjausta.
- *Omiin päin opiskelevat (22,7 %)* - Ryhmä vaikutti passiiviselta, mutta heidän menestyksensä oli samansuuntaisia kuin osaajilla. Ryhmän opiskelijat uskoivat omiin kykyihinsä ja osaamiseen, mutta eivät pyrkineet syvälliseen opiskeluun, eivätkä pitäneet yrittämisensä tärkeänä tai käyttäneet luovaa päättelyä tehtävien ratkaisemisessa. Omin päin opiskelevat saattavat olla soveltamissuuntautuneita.
- *Osaajat (26,1 %)* - Osaajien suhtautuminen matematiikka on positiivinen. He pyrkivät syvälliseen oppimiseen ja käyttivät vähiten ulkolukua. Osaajat ottivat vastuun omasta opiskelustaan.

Prosenttiluvut siis kertoivat kyseisen ryhmän opiskelijoiden osuuden kaikista opiskelijoista. Testin jälkeen tarjottiin matematiikkajumppa niille, jotka tarvitsivat apuja. Kyseisen tukimenetelmä on auttanut opiskelijoita. Pohjolaisen tutkimuksessa huomattiin, että jumpan suorittaneiden ongelmakohdat liittyivät asian unohtamiseen tai sen osaamattomuuteen tai puutteellisten käsitteiden hallintaan. Opiskelijat kokivat jumppaa hyödyllisenä. [41].

Pohjolaisen ja Krookin tutkimukseen osallistuneet opiskelijat ovat käyttäneet oppimismateriaaleina paperisilla kirjoilla vielä ja suorittivat ylioppilaskirjoitukset paperisena. Tarkasteluissa on hyvä huomioida, että syksyllä 2018 toteutettiin sekä lukion lyhyessä että pitkässä matematiikassa on käytetty sähköisiä materiaaleja ja opiskelijat suorittivat ylioppilaskirjoituksen sähköisenä. Tämä johtaa siihen, että lukiolaisten matemaattinen ajattelu on muuttunut hieman.

Ala-Maakala on tehnyt tutkimuksen sähköisen ylioppilaskokeen vaikutuksia lukiolaisten matemaattiseen ajatteluun [3]. Tutkimuksessaan hän mainitsi, että joidenkin oppilaiden menestys ei ole matematiikan ylioppilaskokeessa aikaisempaa parempi, koska tietotekniikan opettelu vie aikaa tehtävien ymmärtämiseltä. Hän myös totesi, että matematiikan selkeä ja johdonmukainen rakenne saattoi kärsiä teknisten apuvälineiden takia [3]. Tampereen yliopiston pääsykokeissa saa käyttää vain funktiolaskinta, jolloin opiskelijoiden piti luottaa omiin kykyihin ja ajatteluihinsa. Ala-Maakala tutkimuksen perusteella voidaan päätellä, kopiointitekniikkaa ja ulkolukua käyttäneiden opiskelijoiden lukumäärä kasvaisi jonkin verrattuna vuonna 2014.

Pajarre on tehnyt raportin (vuonna 2012) ensimmäisten vuoden opiskelijoiden kokemuksista yliopistossa [38]. Huomattiin, että opiskelija koki alussa järkytyksen, sillä opiskelu-tapa sekä -ympäristö olivat erilaisia lukioon verrattuna. Myös välivuosien pitäminen aiheutti ongelmia alussa, sillä asioita ei enää muisteta niin hyvin. Opiskelu vaatii opiskelijoilta enemmän panostamista. Vertaistuki, harjoitusryhmät sekä pienryhmät ja yhteisöllisyys pidettiin opiskelua helpottavina tekijöinä. Opiskelijoiden mielipiteet perusopinnoista kuitenkin jakaantuivat. Jotkut pitivät niitä välttämättömäksi pohjaksi, jonka myöhemmin osaaminen rakentuu, mutta toisille taas riitti, että he pääsisivät kursseista läpi. [38]

2.5 Tampereen yliopiston insinöörimatematiikka lukuvuonna 2019-2020

Tampereen yliopistossa toteutettiin opetuskokeilu syksyllä vuonna 2019 insinöörimatematiikka C1 -kurssilla. Opetuksessa käytettiin flipped classroom (käänteinen luokkahuone) ja flipped learning (käänteinen oppiminen) oppimismenetelmänä. Perinteisessä opetuksessa, opiskelijat tulevat luennolle seuraamaan opetusta, jossa opettaja esittää uutta asiaa perinteisesti taululle, tai muin keinoin. Opetuksen jälkeen, opiskelijat tekevät laskuharjoituksia kotona tai harjoitustunnilla. Käänteisessä oppimisessa opiskelijat tutustuvat aiheeseen jo kotona, ja tunnilla he tekevät harjoituksia sekä saavat opettajalta ohjausta. Käänteisessä oppimisessa opiskelijat ottavat suuremman vastuun omasta opiskelusta. [47]

Joukko-oppi, logiikka ja todistaminen	
Lähtökohdat	• Tiedän, että matematiikka nojaa vahvasti väitteisiin ja niiden todistuksiin.
Perustaso	• Tunnen joukko-opin perusmääritelmät ja laskutoimitukset. Osaan havainnollistaa näitä Vennin diagrammien avulla • Tunnistan loogiset konnektiivit. • Tunnistan todistuksesta, onko siinä käytetty suoraa vai epäsuoraa todistustapaa
Keskitaso	• Osaan yhdistää väitelauseita loogisilla konnektiiveilla ja tarkastella niiden totuusarvoja totuustaulukon avulla. • Osaan käyttää induktiomenetelmää väitteiden todistamiseen.
Edistyneen taso	• Osaan todistaa kahden joukon samuutta koskevia väitteitä osoittamalla, että tarkasteltavat joukot ovat kumpikin toistensa osajoukkoja. • Osaan selittää, miksi induktioperiaate toimii.

Taulukko 2.1. *Joukko-opin, logiikan ja todistamisen tavoitteet*

Kurssilla ei siis ole luentoja, vaan opiskelijat itse tutustuvat aiheeseen kotona hyödyntämällä opettajien tekemisiä sähköisiä materiaaleja, kuten kurssin muistiinpanoja, erilaisia videotallenteita, sekä tekemällä verkkotehtäviä ja laskuharjoituksia. Käänteiselle oppimiselle opettajat toimivat ohjaajina. Joka viikko, opiskelijat voivat tulla tekemään verkkotehtäviä, sekä harjoitustehtäviä ja saa ohjauksia Reenaamossa. Reenaamo on luokkatila. Opiskelijoilla on 2x45 min harjoitustunti, jolloin tekivät 3 tehtävää ennen tuloa, ja 3 lisää paikan päällä. Kurssilla oli lisäksi pienryhmäkeskustelu opettajan kanssa nimeltään Primetime. Primetimessa opiskelijoilla on mahdollisuus kysyä aiheeseen liittyvistä ongelmista, sekä epäselvyyksistä, tai ylipäänsä kurssin asioista, ja pienryhmässä tekevät ryhmätehtävä, jota arvioidaan. Viimeistään kolmannella viikolla, opiskelijoiden piti suorittaa perustaitotesti läpi.

Funktiot	
Lähtökohdat	• Olen käsitellyt erilaisia funktioita kuten polynomifunktiot, eksponenttifunktiot ja trigonometriset funktiot.
Perustaso	• Osaan etsiä yksinkertaisessa tapauksessa funktion kuva- ja alkukuvajoukot sekä funktion määrittelyjoukon. • Osaan käyttää alkeisfunktioiden (polynomi- ja rationaalifunktioiden, eksponentti- ja logaritmifunktioiden sekä trigonometristen funktioiden) laskusääntöjä. • Osaan ratkaista polynomi- ja rationaalifunktioihin liittyviä yhtälöitä. • Osaan yhdistää ja esittää yhdistettyä funktioita.
Keskitaso	• Osaan etsiä yksinkertaisissa tapauksissa käänteisfunktion lausekkeen alkeisfunktioille ja niiden yhdisteille. • Osaan ratkaista eksponentti- ja logaritmifunktioihin, trigonometrisiin ja hyperbolisiin funktioihin liittyviä yhtälöitä. • Osaan tarkastella käänteisfunktioiden ja yhdistettyjen funktioiden määrittely- ja arvojoukkoja.
Edistyneen taso	• Osaan päätellä yhdistetyn funktion monotonisuuden sen perusteella, mitä tiedän yhdisteessä käytettyjen alkeisfunktioiden monotonisuudesta. • Osaan peilata, siirtää tai skaalata funktion kuvaajaa tekemällä tietynlaisia muutoksia alkuperäisen funktion lausekkeeseen.

Taulukko 2.2. *Funktioihin liittyvät tavoitteet*

Arviointi perustuu jatkuvaan arviointiin. Opiskelijoiden oppimista seurataan verkkotehtävien, harjoitusten sekä Primetimen avulla. Tehtävien painoarvo on siis melko suuri. Kurssilla on myös sähköinen tentti. Kurssin käänteisen luokkamallin toimivuutta tutkitaan vielä, sillä tämä oli ensimmäinen toteutuskerta.

Kurssi koostuu eri matematiikan osa-alueista, ja niitä opetetaan järjestyksessä joukko-oppi, logiikka ja todistaminen, funktiot, kompleksiluvut, raja-arvo ja jatkuvuus, derivaatta ja funktion kulku, sekä integroinnin perusteet (Opinto-opas). Jokaisen viikon osaamistavoitteet jaettiin neljään tasoihin, eli lähtökohdat, perustason, keskitason sekä edistyneen tason taidot. Käydään funktioiden osaamistavoitteiden läpi ja lisäksi myös joukko-opin, logiikan ja todistamisen osaamistavoitteet, sillä se on peruspohja tehtävien ratkaisemisessa ja todistamisessa. Taulukoissa 2.1 ja 2.2 on esitetty tavoitteita liittyen kurssin kahden ensimmäisen viikon tavoitteisiin. Tässä tutkimuksessa keskityttiin trigonometrian funktion käsittelyyn.

3 KANSAINVÄLISET MATEMATIIKKAOLYMPIALAISET

Kansainväliset matematiikkaolympialaiset (IMO) on matematiikassa vuosittain järjestetyistä kilpailuista suurin ja arvovaltaisin kilpailu, joka järjestetään joka vuonna. Kilpailun tarkoitus on tuoda esiin matematiikan kauneutta ja mielenkiintoa peruskoulun yläasteen ja lukion oppilaille sekä auttaa tunnistamaan matemaattisesti lahjakkaita oppilaita [8]. Tässä luvussa tutustutaan kilpailun historiaan, sen toimintaan ja tehtävien aiheisiin.

3.1 Kansainvälisen matematiikanolympialaisten historia ja käytäntö

Ensimmäiset kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin vuonna 1959, ja siihen osallistui vain seitsemän maata, Bulgaria, Tšekkoslovakia, Saksan demokraattinen tasavalta, Unkari, Romania, Puola sekä Neuvostoliitto. Tämän jälkeen muut maat alkoivat myös osallistua mukaan kilpailuun. Vuonna 2019 Romaniassa järjestettiin 60. kertaa kilpailu, johon osallistui yhteensä 112 maata [15]. 60. kilpailun tavoitteena oli tuoda yhteen lahjakkaimmat nuoret eri puolilta maailmaa yhteen nauttimaan matematiikan haastettavuudesta ja kauneudesta kilpailuhengessä. Kilpailun tarkoitus on antaa kaikille osallistujille mahdollisuus jakaa omia löytöjään, ajatuksiaan, ja muistojaan matematiikasta sekä tarjota tilaisuus muodostaa pitkäaikaisia ystävyyksiä. [15]

Kilpailun muoto on pysynyt samana matkan varrella. Jokaisesta maasta osallistuu yksi tiimi, jossa saa olla maksimissaan kuusi kilpailija, yksi tiimin johtaja (team leader) ja yksi apulaisjohtaja (deputy leader). Kilpailijat ratkaisevat tehtävät henkilökohtaisesti ilman kenenkään apua. Tiimin johtaja on mukana tehtävien valikoinnissa, ja siksi häntä eristetään kokonaan tiimistä kisan päättymiseen asti. Apulaisjohtaja pitää huolta kilpailijoista.

Kilpailu kestää kaksi päivää ja kumpanakin päivänä annetaan osallistujille kolme tehtävää ja aikaa tehtävien ratkaisemiseen on neljä ja puoli tuntia. Tehtäviä on yhteensä kuusi ja jokaisesta tehtävästä saa enintään 7 pistettä eli kokonaisuudessa enintään 42 pistettä. Tehtävät pyrittiin antamaan vaikeusjärjestyksessä, helpoimmat tehtävät ovat ensimmäinen ja neljäs, ja vaikeammat kolmas ja kuudes. Tehtävien arviointi tehdään yhteistyössä kisan järjestäjän, tehtäväkoordinaattorien, tiimin johtajan ja apulaisjohtajan kanssa.

Kilpailijoiden suorituksia verrataan keskenään, ja paremmuuden järjestyksen perusteella jaetaan palkinnot. Karkeasti noin puolet osallistujista saavat palkinnon. Palkinnot ovat pronssi-, hopea- ja kultamitaleja ja niitä jaetaan suhteessa 3:2:1 [29]. He, jotka eivät saa mitaleja, mutta saavat vähintään yhdestä tehtävästä täydet pisteet, niin heille annetaan kunniamaininta.

Tehtävät valitaan siten, että jokainen maa lähettää oma ehdotuksensa kilpailun järjestäjälle. Järjestäjä ei saa ehdottaa tehtäviä. Tehtäväkomitea valikoi ja muodostaa ehdotetuista tehtävistä sopivia tehtäviä. Kaikki tiimien johtajat yhdessä päättävät mitkä kuusi tehtävät otetaan kilpailuun. [8].

3.2 Kilpailun tehtävät

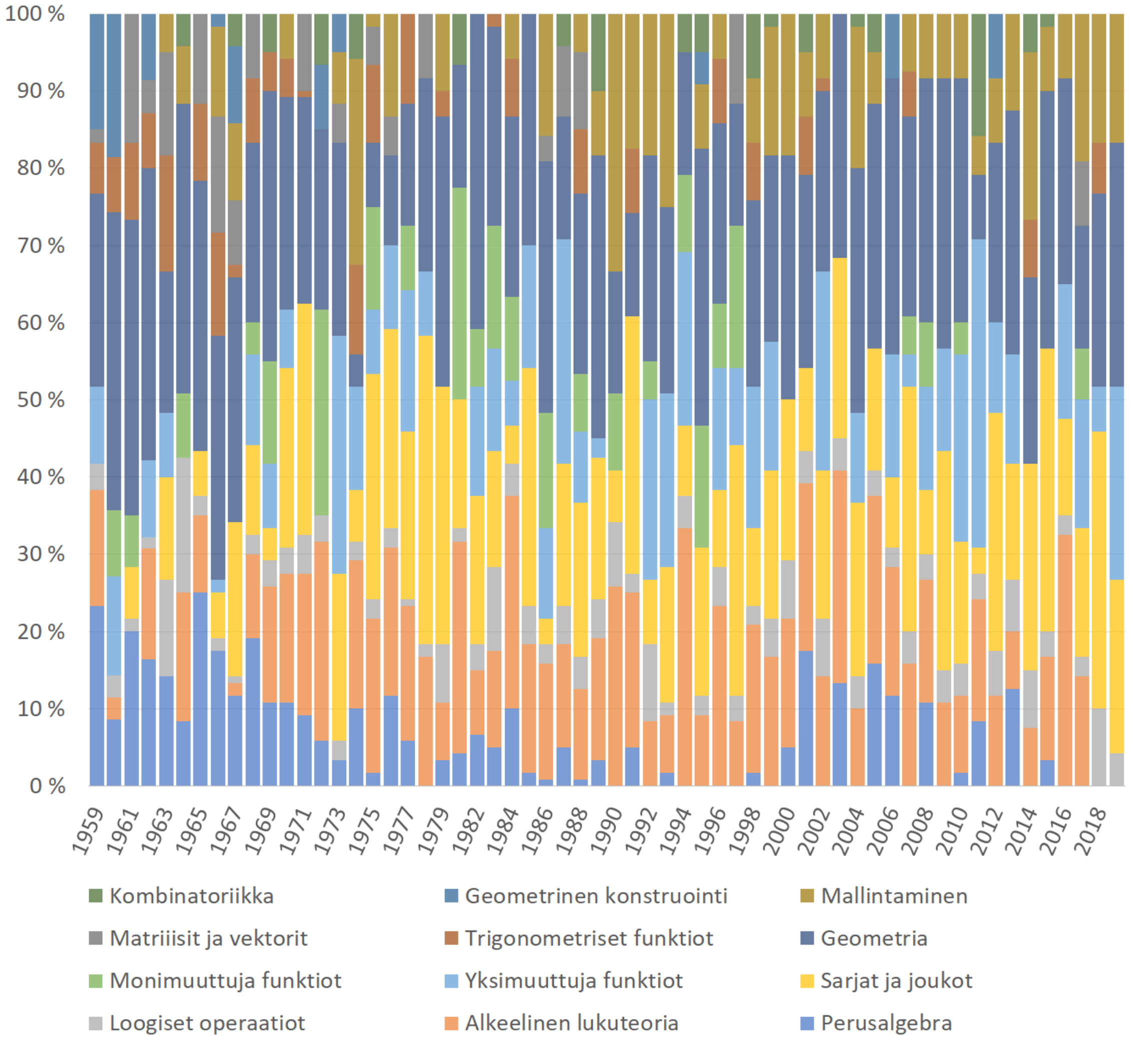
Kansainvälisten matematiikan olympialaisten tehtävät koostuvat matematiikan eri aihealueista, jotka ovat pääasiassa lukuteorian alkeita, kombinatoriikka, epäyhtälöitä, algebraa sekä taso- ja avaruusgeometriaa. Tehtäviin ei kuitenkaan kuuluu differentiaali- ja integraalilaskentaa, eikä myöskään todennäköisyyslaskentaa, jotka ovat kuitenkin Suomen lukion pitkän matematiikan tärkeimpiä aiheita [29]. Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaoston nettisivulla on edellisinä vuosina järjestettyjen kilpailujen tehtävät ja ratkaisut [1].

Tutkimuksen tarkoitus on hyödyntää kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtäviä matematiikan opetuksessa, ja siksi on luokiteltava tehtävät tarkemmin. Tässä tutkimuksessa luokitellaan tehtävät Amerikkaan Matemaattisen Yhdistyksen (American Mathematical Society) kehittämän Matematiikan aiheiden luokittelun (Mathematics Subject Classification, eli MSC) avulla [1]. Koska tehtäviä oli runsaasti ja ne olivat vaikeita, niin tehtävät luokiteltiin tehtävänannon ja malliratkaisujen avulla. Yhden tehtävän malliratkaisussa katsottiin, mitä aihealueita opiskelijan on osattava, ja riippuu siitä, kuinka tärkeä aihe on ratkaisun kannalta, valittiin aiheelle painoarvo (0-100 %). Tällöin luokittelu jäi hieman karkeaksi ja on ainoastaan suunta-antava. Aiheita jaettiin 12 ryhmään:

1. Perusalgebra
2. Alkeellinen lukuteoria - 11A
3. Matematiikan logiikka ja perustus - Logiikan operaatiot - 03B35
4. Sarjat ja joukot - 11B
5. Yhden muuttujan funktiot - 26A
6. Usean muuttujan funktiot - 26B
7. Geometria - 51
8. Trigonometriset funktiot - 33B10
9. Lineaarinen ja multilineaarinen algebra - Matriisit ja vektorit - 15
10. Mallinnus - 00A71
11. Geometrinen konstruointi - 51M15

[1] Matematiikkakilpailut ja olympiavalmennus: https://matematiikkakilpailut.fi/

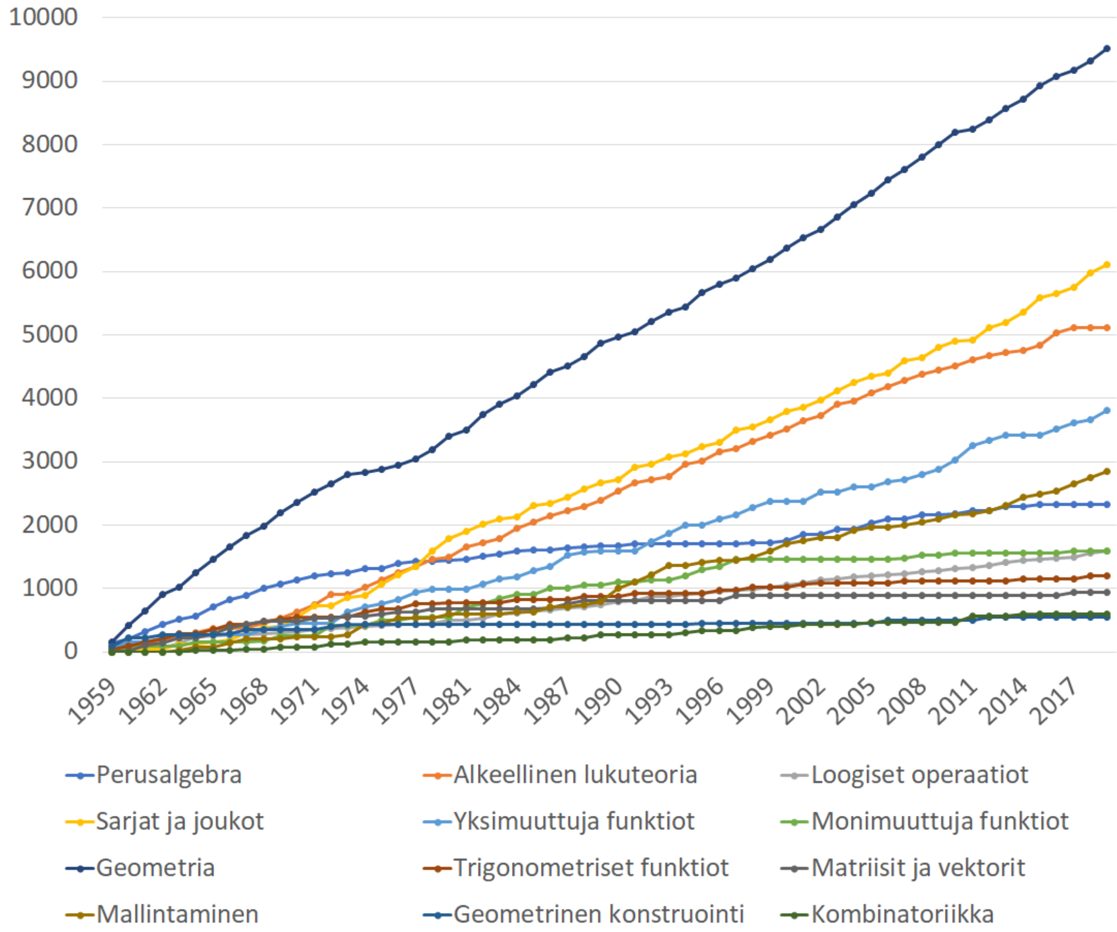
12. Kombinatoriikka - 05



Kuva 3.1. *Aihealueiden vuotuinen jakautuminen kansainvälisisten matematiikkaolympialaisten tehtävissä. Huomaa, että kilpailua ei järjestetty vuonna 1980.*

Ryhmien koodit ovat vuoden 2020 MSC-luokittelun aiheiden koodeja. Syy miksi perusalgebralla ei ole koodia, on se, että algebra on yksi matematiikan perusosasista, joka liittyy enemmän tai vähemmän kaikkiin muihin matematiikan alueisiin. Tällöin tehtävänantojen ja ratkaisujen pohjalta on hyvin hankala luokitella, kuuluuko tehtävä algebraan vai ei. Perusalgebraan kuuluu aritmeettisen laskennan osaamista, sekä lukujen ja symbolien ymmärtämistä. Loogisilla operaatioilla viitataan todistuksen rakenteeseen, todistusmenetelmiin ja -tekniikkoihin. Geometria on laaja käsite, mutta tässä tapauksessa tarkoitetaan kaksi- tai kolmiulotteisen geometristen kuvioiden tai kappaleiden tuntemusta ja niiden käsittelyä. Geometriaan ryhmään kuuluu myös analyyttinen geometria. Geometrisessä konstruointitehtävässä tarvitaan hyvää geometrinen osaamista ja niiden pohjalta rakentaa geometrisia malleja. Matriisiin ja vektoreihin sisältyy myös lineaariset systeemit. Mallintaminen taas sisältää erilaisia ilmiöitä, ongelmia, joissa tarvitaan matemaattista mallia ongelmanratkaisun löytämiseen.

Kuvasta 3.1 huomataan, että geometrian osuus on ollut vahvana osana kilpailua alusta lähtien. Mallintamisen osuus oli alussa vähäinen, mutta 1990-luvun tienoilla se alkoi lisääntyä. 1970- ja 2000-lukujen välillä perusalgebran osuus oli melkoinen vähän. Syy oli se, että algebra ei ollut enää perustasolla, vaan ne liittyivät enemmänkin sarjoihin, funktioihin ja alkeellisiin lukuteorioihin. Kuvasta 3.1 nähdään myös se, että lukuihin ja funktioihin liittyvät aiheet kattavat suurimman osan tehtävistä. Molempien kuvien 3.1 ja 3.2 perusteella, sarjojen, joukkojen ja alkeellisen lukuteorian osuus kasvoi tasaisesti. Vähemmän kysyttyjä aiheita olivat kombinatoriikka, geometrinen konstruointi, lineaariset systeemit ja trigonometriset funktiot. Tehtävät, jotka liittyvät perusalgebraan, sarjoihin, joukkoihin, yksinmuuttujanfunktioihin sekä trigonometriaan, saattavat olla sopivia yliopiston opiskelijoille. Huomautetaan vielä, että prosenttiosuudet eivät kerro kuinka vaikea tehtävät ovat, mutta antaa opettajille suuntaa, mitä tehtävään sisältää.



Kuva 3.2. *Aiheiden kumulatiivinen osuus vuosien jälkeen*

Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät perustuivat hyvin pitkälle kilpailun tavoitteista ja yksi tavoitteista nauttia matematiikan haastavuudesta ja löydöksistä [16]. Kilpailutehtävät ovat siis hyvin vaikeita ja haastavia ja tällöin ne vaativat kilpailun osallistujilta oivalluksia ja syvällisen matematiikan osaamista. Matti Lehtinen on tehnyt kirjasen "Kilpailumatematiikan opas", jonka tarkoitus on harjoittaa lukijaa matematiikkakilpailuissa olennaisen tärkeän perustelemisen ja todistamisen taitoon [30]. Lehtisen mukaan [30]:

“Kilpailumatematiikka on myös oiva silta korkeakoulutason matematiikan opintoihin: vaikka sisällöt eivät ole samoja, kilpailu- ja yliopistomatematiikan asenne matematiikkaan on samansuuntaista. Kumpikaan ei ole laskentoa, vaan tiedon johdonmukaista rakentamista jo olemassa olevan tiedon päälle.”

On tutkittu, että matematiikkakilpailut vaikuttavat positiivisesti matematiikan opetukseen ja kehittämiseen. Kilpailut ovat auttaneet opiskelijoita näkemään heidän vahvuuksiaan ja motivoivat heitä suuntautumaan enemmän luonnontieteisiin [22, 29]. Yleensä vain lahjakkaimmat pääsevät osallistumaan matematiikkakilpailuihin. Tällöin vaikka esim. peruskouluissa tai lukiossa, opiskelijat eivät päässyt niihin kilpailun, niin olisi kuitenkin hyvä tarjota heille tilaisuutta haastamaan itsensä.

4 TUTKIMUSONGELMA

Kansainvälisten matematiikkaolympialaiset on maailman arvostetuimpia kilpailuja. Kilpailun tehtävät ovat siis tällöin hyvin haastavia ja vaatisivat ratkaisijalta syvää pohdintaa, matemaattisen aiheiden määritelmien soveltamista sekä kriittistä ajattelua. Nämä taidot vaaditaan myös diplomi-insinööreiltä, erityisesti loogista ajattelua, luovuutta ja kriittistä ajattelua, kyky muodostaa ajattelulle kysymyksiä. Siksi on hyvä, jos näitä taitoja myös opetellaan ja harjoitellaan yliopistossa enemmän. Yliopistossa kilpailutehtävien tekeminen on ylöspäin eriyttämistä. Ylöspäin eriyttämisellä pystytään erottelemaan parhaimmat opiskelijat, mahdollisuuksien mukaan päästään tarjoamaan lisää koulutusta tai heitä voidaan myös rekrytoida tehokkaammin. Toisaalta opiskelijoiden epäonnistumisissa kilpailutehtävissä antavat meille myös käsitystä opiskelijoiden osaamisestaan. Halutaan siis antaa ensimmäisen vuoden opiskelijoille kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtäviä ratkottavaksi.

Tampereen yliopiston Hervannan kampuksen ensimmäisen vuoden opiskelijoille perusopintojen tärkeimpiä kurssia ovat insinöörimatematiikat (IMA). Näiden matematiikan kursseilla opitaan yliopiston matematiikka, jotka ovat pohjana opiskelualan opinnoille. Ensimmäinen kurssi oli insinöörimatematiikka 1, ja ensimmäisillä viikoilla tarkoitus oli kerrata vanhoja asioita ja syventää osaamista. Aiheet olivat muun muassa joukko-oppi, logiikka, sekä funktiot. Yliopiston tasolla erityisesti insinöörimatematiikan opiskelijoille, geometrinen ei ole kovin tärkeä aihe, eikä sitä ole laitettu mihinkään kurssiin. Valitaan tällöin sellaisia IMO-tehtäviä, jotka liittyvät logiikkaan, joukko-oppiin tai funktioihin, niin on mahdollista, että opiskelijat osaisivat myös tällaisia tehtäviä ratkaista.

Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin valmennuksessa osallistujat ovat harjoitellut ja tottuneet ratkaista paljon vaikeita tehtäviä ja siksi he osasivat paljon matemaattisia "kikkoja", jotka auttavat tehtävien ratkaisemisessa. Tämä ei tarkoittaa sitä, että "kikkojen"osaamisella osataan ratkaista kaikki tehtävät, vaan mitä pidemmälle mennään, sitä enemmän matemaattista ajattelua korostuu. Tässä tapauksessa insinööriopiskelijat pääsevät testaamaan itseään, käyttämään luovuutta enemmän, ajattelemaan laajemmin, löytämään ja kehittämään sekä numeerista kykyä, että ongelmaratkaisukykyä. Tehtävissä opiskelijat pääsevät harjoittelemaan pitkäjänteisyyttä.

Tämän työn tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Miten insinööriopiskelijat lähtisivät ratkaisemaan vaikeita tehtäviä?
2. Minkälaisia virheitä he tekisivät, ja mistä ne johtuisivat?

3. Voidaanko hyödyntää kansainvälisten matematiikanolympialaisten tehtäviä yliopiston matematiikan opetuksessa?

Pidetään mielessä sen, että tehtävät saattavat olla vaikeita, eivätkö insinööriopiskelijat saa täydellisesti ratkaista nämä tehtävät. Tutkimuksen tarkoitus oli nähdä ja kuvaamaan opiskelijoiden ajatteluprosessiaan ja osaamistaan.

5 TUTKIMUSSUUNNITELMA

5.1 Kvalitatiivinen tutkimus

Kvalitatiivinen tutkimus eli laadullinen tutkimus, jonka päätarkoitus on tutkia tarkasti aineiston ominaisuuksia, erityispiirteitä, ja laatua. Laadullinen tutkimus on melko induktiivinen ja subjektiivinen. Tällöin aineistonkeruu, analyysi, sekä tulkinta, että raportointi korostuvat tutkimuksessa hyvin vahvasti. Laadullisen aineiston hankintamenetelmiä ovat haastattelut, kirjoitelma-aineistot, erilaiset dokumenttiaineistot. Sillä aineistossa voisi olla laajasti tietoja, joten sen analyysi riippuu siitä, miten tutkija on tulkinnut aineistoa. Siksi on tärkeä, että aineiston tulkinnassa tutkijan näkemyksen pitää olla mahdollisimman objektiivinen [13].

Kvalitatiivinen tutkimusmenetelmä sopii oikein hyvin tähän tutkimusongelmaan. Tutkimuksessa Annettaan opiskelijoille tehtäväpaperi, ja opiskelijoilla on tunti aikaa ratkaista sitä yksin tai pienryhmässä. Opiskelijoiden ratkaisut ovat tutkimusaineistoa. Lähekkäin olevat ryhmät saavat eri tehtäväkysymys. Kriteerinä on se, että opettaja ei saanut auttaa opiskelijoita. Opettajien neuvot vaikuttaisivat opiskelijoiden päätöksiin ja sen kautta antaisi väärän kuvan opiskelijoiden osaamisestaan. Opiskelijoiden matematiikantaidot eivät ole niin edistynyt kuin olympialaisiin osallistuneet, siksi yliopiston opiskelijoilla on mahdollisuus käyttää apuvälineitä kuten, taulukkokirja, kurssin materiaalit, muistiinpanoja, mutta ei laskinta. He saivat myös kysyä apua muiden ryhmien opiskelijoilta. Tässä tutkimuksessa pyritään etsimään sellaisia tehtäviä, joiden vaikeus tasoa ei ole liian korkea, sekä ratkaisu ei ole niin moniselitteinen, jolloin opettajan subjektiivisuus ei pääse vaikuttamaan tuloksia arvioinnin aikana. Kutsutaan näitä tehtäviä testiksi.

Testi toteutettiin Primetimen ensimmäisellä tunnilla. Opiskelijoilla oli mahdollisuus valita normaalin Primetimen tehtäviä tai tutkimustestiä. Testiin osallistuminen oli siis vapaaehtoinen, eikä ratkaisut vaikuttaneet mitenkään kurssin arviointiin. Tällöin varmistettiin, että opiskelijoiden ratkaisut olivat itse heidän antamiaan. Käytettiin yksi Primetime-tunti, joka oli osa kurssin suorittamista, siksi opiskelijoiden piti osoittaa aktiivisuutensa tunnilla, jolloin ratkaisupapereihin täytyi laittaa nimet (Liite A). Kuitenkin opiskelijoilta saadut ratkaisut käsiteltiin nimettömästi. Tutkimusta yritettiin toteuttaa neutraalisesti.

5.2 Tutkimuksen testitehtävät

Opiskelijat ovat ehtineet käydä joukko-oppia, logiikkaa, funktioita sekä osa kompleksilukuja läpi. Siksi testitehtäviksi valittiin trigonometrisia tehtäviä. Syy tähän oli se, että ei haluta turhan vaikeita tehtäviä, jotka vievät paljon aikaa opiskelijoilta. Opiskelijat olivat juuri kerranneet trigonometrisia funktioita, jolloin oletettiin, että heillä olisi osaamista. Tehtävien pitäisi tukea kurssin tavoitteita. Tehtävien taso pitää vaihdella, jotta nähdään mitä opiskelijat osaavat ja mitä eivät. Tehtävien tarkoitus on mitata opiskelijoiden suoriutumista vaikeissa tilanteissa. On siis valittava tuttuja mutta erikoisempi tehtäviä.

Edellisillä perusteilla valitaan tällöin yksi todistus tehtävä, toinen on yhtälön ratkaiseminen ja kolmas on epäyhtälön ratkaiseminen:

Testin kysymys 1 - IMO 1959, tehtävä 3

Olkoon x kulma (eli reaaliluku). Olkoot a, b ja c mielivaltaisia reaalilukuja. Luku $\cos x$ toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0. \tag{5.1}$$

Johda sellainen toisen asteen yhtälö, jonka toteuttaa luku $\cos 2x$. Eli etsi sellaiset kertoimet k, m ja n, että yhtälö

$$k \cos^2 2x + m \cos 2x + n = 0 \tag{5.2}$$

Vertaa näitä yhtälöitä tapauksessa $a = 4, b = 2$ ja $c = -1$.

Testin kysymys 2 - IMO 1961, tehtävä 3

Ratkaise täydellisesti yhtälö

$$\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1.$$

Testin kysymys 3 - IMO 1965, tehtävä 1

Määritä kaikki välin $0 \leq x \leq 2\pi$ luvut x, jotka toteuttavat epäyhtälöt

$$2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}.$$

Testin kysymys 1 ei ollut kokonaan samaa kuin vuoden 1959 IMO tehtävän 3. "Eli etsi sellaiset kertoimet k, m ja n"oli lisätty osa. Sen tarkoitus oli antaa vihjeitä opiskelijoille, että johtamisella löydetään kertoimia k, m ja n, jolloin yhtälöitä (5.1) ja (5.2) olisi mahdollista. Kysymykset 2 ja 3 pidettiin samana kuin mitä kilpailussa oli. Tästä lähtien testin tehtävillä viitataan siis testin kysymyksiin. Tehtävien ratkaisut löytyy liitteessä B ja tehtävät tukevat kurssin tavoitteita (taulukot 2.1 ja 2.2). Näillä tehtävillä pyritään mittamaan opiskelijoiden osaamista Kilpatrickin mallin mukaan (kappale 2.1.3) käsitteellistä ymmärtämistä, proseduraalista sujuvuutta, strategista kompetenssia, mukautuvaa päättelyä.

5.3 Virheiden luokittelu

Greer ja Mulhernin mukaan [14] opiskelijoiden virheet voidaan jakaa kahteen tyyppiin, joko systemaattisiin tai satunnaisiin. Satunnaisvirheet ovat nimen mukaan satunnaisia, ne voivat olla esimerkiksi laskuvirheitä, jotka johtuivat opiskelijoiden huolimattomuudesta. Näitä virheitä on hyvä tunnista, sillä ne johtavat vääriin ratkaisuihin. Tutkimuksen kannalta satunnaisvirheet eivät ole niin tärkeitä verrattuna systemaattisiin virheisiin. Systemaattiset virheet kertovat opiskelijoiden ajatteluprosessin virheitä tai virhe käsityksiä. Tutkimalla systemaattisilta virheiltä löydetään, missä osaamisen piirteessä (käsitteellinen ymmärrys, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi tai mukautuva päättely) ovat opiskelijalla virheellisiä, ja miten ne ohjasivat opiskelijoiden ratkaisuprosessia [14]. On erilaisia tapoja luokitella virheitä riippuen siitä, mikä on tutkimuksen tarkoitus. Virheitä voidaan luokitella tässä tutkimuksessa kolmeen luokkaan: laskuvirheisiin (LV, calculation errors), virheelliseen päättelyyn (VP, procedural errors) ja virheellisiin merkintöihin (VM, symbolic errors) [11, 35].

Laskuvirheet johtuivat huolimattomuudesta [23]. Tällaiseksi virheeksi lasketaan, jos opiskelija teki peruslaskutoimituksen (yhteen-, vähennys, tulo- ja jakolaskut) virheitä, tai tilanteissa, jossa opiskelija on osoittanut ymmärryksensä, mutta kirjoitti asiaa uudestaan väärin.

Virheelliset päättelyt kertovat sen, että opiskelija ei ymmärtänyt menettelyyn liittyvä konseptia. Eli käytännössä opiskelijalla on harhaa käsitystä aiheesta, eikä ymmärtää miksi tai miten matemaattinen menettely toimii, eikä myöskään tunnistaa mitä menettelyssä on oleellinen. Tällöin johtaa siihen, että opiskelija päättelee tai käyttää menettelyä väärin [23].

Kolmas virheluokka on virheelliset merkinnät. Virheet esiintyvät, kun opiskelijat on osoittanut jo ymmärtävänsä asian, mutta toistaessaan aisan kirjoittaa sen väärin. Tai toinen vaihtoehto on se, että opiskelijat sekoittivat melkein samanlaiset matemaattiset merkinnät kesken, eivätkä ymmärtäneet merkintöjen merkitykset kunnolla ja suorittivat laskut virheellisesti [37].

Tässä työssä käytetään laadullista tutkimusmenetelmää, joten tarkoituksena on tällöin tutkia jokaista vastauspaperia ja poimia niistä opiskelijoiden tekemät virheet sekä käytetyt ratkaisumenetelmät.

Välillä on hankala luokitella virhe, miten tietty virhe kuuluu mihinkin luokkaan. Siksi muodostetaan kriteereitä virheiden luokittelemiselle. Pidetään mielessä sen, että virhettä tarkastellaan yksittäisenä virheenä ja myös ratkaisun kokonaisuudessa. Tärkein kriteeri on se, että onko opiskelija osoittanut ymmärtävänsä asian tavalla tai toisella. Jos opiskelija on osoittanut ymmärtävänsä asian, mutta tekee myöhemmin ratkaisussa virheen, niin todennäköisesti virhe on huolimattomuusvirhe. Asian toistaminen kuten muunnoskaavan uudelleen kirjoittaminen on myös huolimattomuusvirhe. Lisäksi oletetaan, että opiskelijat ovat osanneet suorittaa yksinkertaisimmat aritmeettiset laskut (summa, erotus, tulo ja osamäärä), tällöin jos virhe liittyy näihin laskuihin, niin sitäkin luokitellaan huolimattomuusvirheeksi. Jos opiskelijoiden tekemät merkinnät ovat epäselviä, niin sitä luokitellaan virheellisiksi merkinnöiksi. Jos virhe liittyy algebralliseen ajatteluun, yksinkertaisimpiin laskumenetelmiin tai laskumenetelmien väärin käyttöön, luokitellaan virheelliseksi päättelyksi. Välillä raja virheellisillä päättelyillä, merkinnöillä ja huolimattomuusvirheillä välillä on hyvin pieni, joten mihin ryhmään virhe kuuluu, riippuu siitä, kuinka usein sitä on tullut esille. Jos sama virhe toistuu usein, se on todennäköisesti päättelyvirhe.

6 TULOSTEN KERÄÄMINEN JA ANALYSOINTI

6.1 Tulosten analysointi

Tässä osiossa, tarkastellaan opiskelijoiden tekemiä ratkaisuja. Kaikkia ratkaisuja käytiin läpi. Ratkaisut ovat niin erilaisia, joten on järkevä ensin poimia, mitä opiskelijat ovat tehneet, ovatko ne oikeita tai vääriä. Tämän jälkeen voidaan virheitä luokitella. Samaan tehtävään kuuluvat ratkaisut vertailtiin toisiinsa ja yritettiin numeroida niitä paremmuusjärjestyksessä, jossa ensimmäisellä ryhmällä oli paras ratkaisu. Jos ratkaisussa esiintynyt virhe on huomioitu, sitä samaa virhettä ei mainita enää uudestaan myöhemmin.

Merkintä	Selitys
✓- Ratkaisu 1	Ratkaisussa 1 on käytetty oikea menetelmää.
✗- Ratkaisu 2	Ratkaisu 2 on käytetty väärä menetelmää.
$\boxed{3}$	Ryhmä 3 käytti menetelmää.
④	Ryhmä 4 käytti menetelmää virheellisesti.
5	Ryhmä 5 käytti eri menetelmää
$\cancel{6}$	Ryhmä 6 ei ole tehnyt kyseistä tapaa/vaihetta

Taulukko 6.1. *Ratkaisujen merkinnät ja tarkoitukset.*

Analysoinin selkeyttämiseksi käytetään taulukon 6.1 merkintöjen mukaisesti. Käydään ensin jokaisen tehtävän läpi ja sen jälkeen vertaillaan tehtävien sisältämiä virheitä.

Tehtävä 1

Olkoon x kulma (eli reaaliluku). Olkoot a, b ja c mielivaltaisia reaalilukuja. Luku $\cos x$ toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0. \tag{6.1}$$

Johda sellainen toisen asteen yhtälö, jonka toteuttaa luku $\cos(2x)$. Eli etsi sellaiset kertoimet k, m ja n, että yhtälö

$$k\cos^2(2x) + m\cos(2x) + n = 0. \tag{6.2}$$

Vertaa näitä yhtälöitä tapauksessa $a = 4, b = 2$ ja $c = -1$.

Tehtävään 1 vastasi 12 ryhmää. Kahden hengen ryhmiä olivat ryhmät 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10 ja kolmen hengen ryhmiä olivat ryhmät 3, 8, 9, 11, 12 eli yhteensä 29 opiskelijaa. Opiskelijat menestyivät tässä tehtävässä huonosti, eikä oikeita ratkaisuja tullut ollenkaan, siksi seuraavasti esitetyt poiminnat yritetään järjestää niin, että ne ovat jotenkin loogisessa järjestyksessä.

Tehtävänantoon kuului kaksi osiota, johtamisosio ja vertailuosio. Johtamisosiossa oli tarkoitus johtaa väite (6.2) lähtien liikkeelle oletuksesta ja löytää samalla lukujen k, m ja n arvot. Kun väite on todistettu ja kertoimet k, m, n ovat löydetty, sen jälkeen päästiin vertailemaan yhtälöt (6.1) ja (6.2) keskenään, kun tiedettiin kertoimien a, b, c arvot.

Opiskelijoiden tekemien ratkaisujen poiminnat

✗- *Käyttää väitettä oletuksena:* Opiskelijat lähtevät muokkaamaan väitettä (6.2), hyödyntämällä tehtävän oletuksia.

Kommentit

✗- *Käyttää väitettä oletuksena:*

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$

Kaikki ryhmät ovat jossain määrin käyttäneet väitettä lähtökohtana. Kyseessä oli johtamistehtävä, jolloin oli lähdettävä liikkeelle tehtävän oletuksista, eli yhtälöstä (6.1), ja pyrkiä jollakin tavalla saavuttamaan todistettava yhtälö (6.2). Oli hyvin todennäköistä, että opiskelijoiden mielestä, kyseessä ei ollut johtamista, vaan enemmänkin vakioiden k, m ja n löytämistä, jolloin käyttivät väitettä oletuksena.

✗- *Käytti vakioiden a, b ja c arvoja:* Useimmat ryhmät sijoittivat a, b ja c lukuarvot suoraan yhtälöön (6.1) ja yrittävät ratkaista k, m, n.

✗- *Käyttää vakioiden a, b ja c arvot:*

~~1~~ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ ~~5~~ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ ~~8~~ $\boxed{9}$ ~~10~~ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$

Oli mahdollista se, että opiskelijat eivät saaneet todistettua väitettä, jolloin he yrittivät käyttää annettuja lukuarvoja. He todennäköisesti, ajattelivat, että konkreettisilla luvuilla olisi helompi ratkaista k, m ja n. Tai toinen mahdollinen tapaus oli se, etteivät opiskelijat saaneet erotettua tehtävän osioita.

✓- *Muunnoskaavan sijoittaminen:* Sijoitettiin $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ väitteeseen, saatiin

$$\begin{aligned} k\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 + m(2\cos^2 x - 1) + n = 0 \\ 4k\cos^4 x + (2m - 4k)\cos^2 x + (k - m + n) = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

✓- *Muunnoskaavan sijoittaminen*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 $\boxed{12}$

Sijoittamisen jälkeen, opiskelijoilla oli ongelma sieventämisessä. 2. ja 8. tekivät pienen huolimattomuusvirheen, ja loput ryhmät jättivät sieventämistä kesken. Syynä voisi olla, että he käyttivät "vääränlaista muunnoskaavaa"(esim. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ tai muuta vastaava), jolloin yhtälöön syntyi erilaisia termejä, mikä vaikeutti sieventämistä.

✗- *Ryhmä 5:*

$$
\begin{aligned}
-1 \leq \cos 2x &\leq 1 \\
\cos 2x &= \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2k} \\
\text{ja } m^2 - 4kn &\geq 0 \\
\Rightarrow \cos 2x &= \frac{-m}{2k} \\
k\left(\frac{-m}{2k}\right)\left(\frac{-m}{2k}\right) + m\left(\frac{-m}{2k}\right) + n &= 0
\end{aligned}
$$

$\cos 2x$ saa arvot $[-1, 1]$. Toiseen asteen funktion ratkaisut ovat välillä $[-1, 1]$, esim. $f(a) = a^2 - a$, ja sijoitetaan $a = \cos 2x$. Saadaan siis

$$
\begin{aligned}
f(\cos 2x) &= \cos^2 2x - \cos 2x + 0, \\
\text{eli } k &= 1, m = -1, n = 0
\end{aligned}
$$

✗- *Ryhmä 5:* yritti etsiä yhteyksiä oletuksen ja väitteen välillä, ja yksi keino oli etsiä matemaattinen malli, joka kuvaa molempia yhtälöitä. Ehkä siksi ajatus funktiosta $f(a) = a^2 - a$ tuli esiin. Tämä funktio kuitenkin oli vain esimerkki tietyssä tapauksessa, eikä sillä voi todistaa väitteen voimassaoloa. Lisäksi oletus $m^2 - 4kn = 0$ ei ole perusteltu kunnolla, miksi näin tapahtuisi, ja miten ehto auttaisi kertoimien ratkaisemisessa.

✓- *Muunnoskaavan sijoittaminen oletukseen:* Käytetään muunnoskaavaa $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ yhtälössä (6.1), saadaan

$$
\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos 2x + b\cos x + c = 0
$$

✓- *Muunnoskaavan sijoittamien oletukseen:*
$\boxed{1}$ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~
1. ei kuitenkaan sieventänyt enempää. 11. teki pienen laskuvirheen. Todennäköisesti opiskelijoiden mielestä, oletusyhtälö (6.1) oli jo yksinkertainen, ettei siitä ehkä kannattanut lähteä muokkaamaan ja laajentamaan, jolloin siitä saattaisi tulla vaikeammaksi näköiseksi.

✗- *Virheelliset oletukset:* Opiskelijat ajattelivat, että $\cos x$ ja $\cos 2x$ ovat suoraan verrannollisia, eli *Ryhmä 4:*

$$
\cos x = \cos 2x
$$

Ryhmä 11:

$$
\cos^2 x = \cos^2 2x \cdot r
$$

missä r on vakio.

✗- *Virheelliset oletukset:*
Ryhmän 4 mielestä, termien $\cos x$ ja $\cos 2x$ täytyy olla samat, ja että ne toteuttavat sekä oletuksen (6.1), että väitteen (6.2), muttei perustellut miksi näin tapahtuisi. Oikean muunoskaavan mukaan pitäisi olla $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$.

✓ - *Termien* $\cos x$ *tai* $\cos 2x$ *ratkaiseminen:* Yhtälöistä (6.1), (6.3) ja (6.2) ratkaistiin $\cos x$, $\cos^2 x$ ja $\cos 2x$ käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, saatiin

$$\cos x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \tag{6.4}$$

$$\cos^2 x = \frac{-m + 2k \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{4k} \tag{6.5}$$

$$\text{ja } \cos 2x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2k} \tag{6.6}$$

✓ - *Ratkaista* $\cos x$*:*

1 2 3 $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 7 $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\cancel{11}$ $\boxed{12}$

4., 6., 7., 9. yrittivät ratkaista termiä $\cos x$ (6.4), ryhmä 12 termiä $\cos^2 x$ (6.5) ja 2., 5., 8., 10. taas termiä $\cos 2x$ (6.6). On siis mahdollista ratkaista kertoimia k, m ja n, hyödyntämällä Vietan kaavoja, kun tiedetään termin $\cos x$ arvo (yhtälö (6.4))

✗- *Muodostetiin yhtälöpari:* Opiskelijat vertailivat melkein samannäköisiä yhtälöitä toisiinsa ja tekivät virheellisiä algebrallisia päätöksiä:

Ryhmä 3: Oletuksesta (6.1) ja väitteestä (6.2), saadaan

$$\begin{cases} a\cos^2 x = k\cos^2 2x \\ b\cos x = m\cos 2x \\ c = n \end{cases} \tag{6.7}$$

Ryhmä 12: Yhtälöä (6.4) neliöidään

$$\cos^2 x = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + \sqrt{5}}{16},$$

joka on yhtäsuuri yhtälön (6.5) kanssa, saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 = -m + 2k \\ 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{m^2 - 4kn} \\ 16 = 4k \end{cases}$$

✗- *Muodostetaan yhtälöpari:*

$\cancel{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\boxed{6}$ $\cancel{7}$ $\boxed{8}$ $\cancel{9}$ $\cancel{10}$ $\cancel{11}$ $\boxed{12}$

Opiskelijoilla oli vain kaksi yhtälöä, jotka sisältävät kuusi vakio ja yksi muuttuja, siksi oli hyvin haastava lähteä ratkaistamaan tuntemattomat vakiot. Yhtälöt olivat rakenteellisesti samat, ja niiden termit ja osiot muistuttavat hyvin toisiinsa. Näiden syiden takia, opiskelijoilla saattoi syntyä harha ajatus siitä, että voidaan muodostaa yhtälöryhmiä. Ongelma tässä oli se, ettei opiskelijat tarkistanut olivatko heidän johtopäätökset päteviä.

3. siis lähti tällä tavalla suoraan yhtälöstä (6.7) ratkaisemaan k, m, n, ja saivat $k = \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x}, m = \frac{2\cos x}{\cos 2x}, n = -1$, mutta sijoittivat termit takaisin väitteeseen, ja väitteestä sieventyy taikaisin oletukseen. Opiskelijat huomasivat tehneensä virheen.

✗- *Jakaminen nollalla:* Opiskelijat yrittivät ratkaista termejä yhtälöistä, ja tekivät jakolaskuja, mutteivät ottaneet nollalla-jakamistilanne huomioon:

$$\cos 2x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2k}$$

$$a\cos^2 x = k\cos^2 2x$$

$$k = \frac{a\cos^2 x}{\cos^2 2x}$$

✗- *Jakaminen nollalla:*

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\boxed{3}$ $\cancel{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\cancel{7}$ $\boxed{8}$ $\cancel{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$

Opiskelijat eivät suoraan jakanneet nollalla, mutta kertoimet ja muuttuja x ovat tuntemattomia, joten oli siis tarkasteltava aina erikseen nollalla-jakamistilanne ennen kun tehdään jakolaskua.

Muita lähestymistapoja:
Ryhmä 4: sai ratkaistua $\cos x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, ja lähti rakentamaan suorankulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on 4, ja kulman x viereisen kateetin pituus on $-1+\sqrt{5}$. Pythagoraan lauseella opiskelijat saivat toisen kateetin pituuden, kaksi arvoa kulmalle x ja kulmien komplementit. He eivät kuitenkaan päässyt tästä eteenpäin.

Ryhmä 9: Teki samalla ajatuksella ryhmän 4 kanssa, mutta piirsi yksikköympyrän. Ryhmä teki kuitenkin neliöintivirheen:

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1\pm 5}{16} \tag{6.8}$$

Ryhmä 8: Teki erikoinen menettely, joka muistuttaa haarukoinnilta:

$$\begin{aligned} x &= \pi \\ a(\cos\pi)^2 + b\cos\pi + c &= 0 \\ 1a - 1b + c &= 0 \end{aligned}$$

Muita lähestymistapoja:
Ryhmä 4 ja 9: Opiskelijat käytännössä yrittivät laskea asioita, jotka olivat mahdollista laskea.

Ryhmä 8: Haarukointi on tekniikka, jota käytetään tosi paljon matematiikassa. Kuitenkin, tässä tehtävässä ei tiedetä, mikä on muuttujan x, sekä vaikoiden a, b, c arvoja, jolloin ei voida olettaa $x = \pi$, ja jos niin olettaa, niin pitää olla joku perustelu.

Tehtävä 2

Ratkaise täydellisesti yhtälö

$$\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1. \tag{6.9}$$

Tehtävä 2 mittaa opiskelijoiden yhtälön ratkaisutaitoa, sekä trigonometrisen funktion määritelmien ymmärtämistä. Tehtävään vastattiin yhteensä 14 ryhmää. Kahden hengen ryhmiä olivat ryhmät 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14 ja kolmen hengen ryhmät 4, 8 ja 12, eli yhteensä 31 opiskelijaa. Yleinen vaikutelma oli se, että monet ovat saaneet hyvin lähellä oikeaa vastausta.

Tehtävänannossa pyydettiin ratkaisemaan yhtälön täydellisesti, eli löytää kaikki mahdollisia muuttujan x arvoja, jotka toteuttavat yhtälön (6.9). Kaikki ryhmät ymmärsivät tehtävänannon, ja tiesivät mitä tehtävässä pitäisi tehdä. Opiskelijoiden ratkaisuissa käytettiin tosi paljon muunnoskaavoja. Taulukkoon 6.2 on koottu muunnoskaavoja, joita käytettiin ratkaisuissa.

#.	Kaava	Ryhmien määrä $(n/14)$
1.	$\cos x \pm y = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	5
2.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	8
3.	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	3
4.	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$	14
5.	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	3
6.	$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(1 - 4\sin^2 x)$	8
7.	$\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$	1

Taulukko 6.2. *Trigonometristen muunnoskaavoja, jota käytettiin tehtävässä 2. Luku n kertoo kuinka monta ryhmää on käyttänyt kyseistä kaavaa.*

Opiskelijoiden tekemien ratkaisujen poiminnat

✓ - *Muunnoskaavojen käyttäminen:* Koska yhtälössä (6.9) oli kolmenlaista termiä $\cos x, \cos 2x$ ja $\cos 3x$, joten olisi hyvä käyttää muunnoskaavoja, jotta saataisiin yhtälöön vain yhden tyyppinen termi, jotta ratkaiseminen olisi helpompaa.

Kommentit

✓ - *Muunnoskaavojen käyttäminen:*
Ratkaisujen perusteella, melkein kaikki ryhmät ovat tietoisia siitä, että heidän on muokattava yhtälöä hyödyntämällä muunnoskaavoja.

✓ - *Tapa 1:* Käytettiin kaavoja 4 ja 6

$$\begin{aligned}\cos^2 2x &= (2\cos^2 x - 1)^2 \\ &= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 \qquad (6.10)\\ \cos^2 3x &= (4\cos^3 x - 3\cos x)^2 \\ &= 16\cos^6 x - 24\cos^3 x + 9\cos^2 x \qquad (6.11)\end{aligned}$$

Sijoitettiin termit muutetut termit $\cos^2 2x, \cos^2 3x$ yhtälöön (6.9) ja sievennettiin. Saatiin

$$16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x = 0 \qquad (6.12)$$

$$\cos^2 x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 6) = 0 \qquad (6.13)$$

✓ - *Tapa 1:*
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 4 $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 9 10 11 12 13 14
Suurin osa ryhmistä saivat sievennettyä oikein ja saivat yhtälön (6.13). Ryhmä 9 teki virheellinen neliöinti ja otti yhteisen tekijän väärällä tavalla:

$$\begin{gathered}\cos^2 x + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + \\ 1 + 16\cos^6 x - 9\cos^2 x - 1 = 0 \\ \cos^2 x(4\cos^2 x - 4 + 16\cos^3 x - 9) = 0\end{gathered}$$

10. ja 11. kirjoittivat muunnoskaavat 2 ja 6 väärin. Kaikki 10, 11 ja 13 jäivät pyörimään muunnoskaavojen kanssa, eikä saanut enempää.

✓ - *Tapa 2:* Käytettiin kaava 5

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$$
$$\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$$

Yhtälöstä (6.9) saatiin

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = 1$$
$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = -1 \qquad (6.14)$$

Merkittiin $2x = t$, ja käytettiin kaavaa 4 ja 6

$$\cos t + 2\cos^2 t - 1 + 4\cos^3 t - 3\cos t = -1$$
$$2\cos^2 t - 2\cos t + 4\cos^3 t = 0 \qquad (6.15)$$
$$2\cos t(2\cos^2 t + \cos t - 1) = 0 \qquad (6.16)$$

✓ - *Tapa 2:*
1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
Vain ryhmä 4 on saanut yhtälön (6.16). 12. käyttivät muunnoskaavoja suunnattomasti, eikä päässyt eteenpäin. 14. sai yhtälön (6.14) ja päätti ratkaista x jo tässä vaiheessa.

Ratkaisu vaiheet: Molemmissa tavoissa voidaan hyödyntää tulon nollasääntöä. Tämän jälkeen voidaan ratkaista muuttuja x.

✓ - *Tapa 1:* Yhtälössä (6.13) merkittiin $\cos^2 x = t$. Ratkaisua saadaan kun

$$t = 0 \qquad (6.17)$$
$$\text{tai } 16t^2 - 20t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ tai } t = \frac{3}{4} \qquad (6.18)$$

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (6.19)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (6.20)$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \qquad (6.21)$$
$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (6.22)$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + n\pi$$
$$\text{tai } x = -\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \qquad (6.23)$$

✓ - *Tapa 1:*
$\boxed{1}$ 2 3 4 5 6 7 8 9 ~~10~~ ~~11~~ 12 ~~13~~ 14
2., 3., 5., 6., 7. ottivat neliöjuuria, mutta jättivät plus-miinus-merkin $\pm$ huomioimatta (yhtälöissä (6.20) ja (6.22)). Tämä virhe vaikuttaa ryhmien 2, 5, 6, 7 ratkaisuihin niin, että heidän ratkaisut olivat vain osittain oikein. Ryhmät 3, 5, 6 laskivat kulmat x yhtälöistä (6.20) ja (6.22) osin väärin. Ryhmät 8 ja 9 saivat vain yhden ratkaisun (6.19), ja jättivät tehtävää kesken.

✗- *Tapa 2 - Ryhmä 4:* Yhtälössä (6.16) merkitään $\cos t = a$, saadaan ratkaisuiksi

$$
\begin{aligned}
a = 0 &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \text{ ja } t = \frac{3\pi}{2} \\
a = \frac{1}{2} &\Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \\
a = -1 &\Rightarrow t = \pi
\end{aligned}
$$

ja koska $t = 2x$, saadaan edelleen

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\pi}{4} \text{ ja } x = \frac{3\pi}{4} \\
x &= \frac{\pi}{6} \\
x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

✗- *Tapa 2 - Ryhmä 4:*
Ryhmän 4 ratkaisu oli vain osittain oikein, sillä siinä ei ole huomioitu π-monikertaa ollenkaan.

✗- *Tapa 2 - Ryhmä 11:* Sai yhtälön (6.15) ja päätti ratkaista kulmaa x

$$
\begin{aligned}
2x + 4x + 6x &= \pi + n2\pi \text{ tai } -\pi + n2\pi \\
12x &= \pi + n2\pi \\
x &= \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6} \qquad \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

✗- *Tapa 2 - Ryhmä 11:*
Ryhmä sievensi yhtälöä (6.15) täysin väärin.

✓- *Kuvien piirtäminen:* Perustrigonometrisen yhtälön ratkaisemisessa voidaan hyödyntää kuvia, kuten yksikköympyrä tai muistikolmioita. Tällöin saadaan tarkasteltua kaikki mahdolliset kulmat.

✓- *Kuvien piirtäminen:*
$\boxed{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$ $\cancel{8}$ $\cancel{9}$ $\cancel{10}$ $\cancel{11}$ $\cancel{12}$ $\cancel{13}$ $\boxed{14}$
Ryhmän 1 yksikköympyrä verrattuna muihin ryhmään, oli paljon selkeämpi, jolloin he saivat huomioitu kaikki mahdolliset kulmat. 4. käytti vain muistikolmio, ja se selittäisi miksi ryhmän ratkaisussa puuttui kokonaan π-monikertaa.

Tehtävä 3

Määritä kaikki välin $0 \le x \le 2\pi$ luvut x, jotka toteuttavat epäyhtälöt

$$2\cos x \le |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \le \sqrt{2}. \tag{6.24}$$

Tehtävässä 3 pyydettiin ratkaisemaan epäyhtälö, joka sisältää paljon informaatiota. Tällöin opiskelijoiden täytyi ottaa ne huomioon ennen laskutoimituksiin siirtymistä. Tehtävään 3 vastasi yhteensä 13 ryhmää (yhteensä 27 opiskelijaa). Kahden hengen ryhmät olivat ryhmät 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, kolmen hengen ryhmiä olivat 2, 4, 10, ja yksinlaskijoita oli kaksi, ryhmät 8 ja 12. Tehtävänanto oli selkeä, joten opiskelijat tiesivät, millainen ratkaisu heidän oli saavuttava. Ratkaisuprosessissa löydettiin kuitenkin hyvin erilaisia virheitä.

Opiskelijoiden tekemien ratkaisujen poiminnat

✓- *Epäyhtälön jakaminen:* Jaetaan epäyhtälöt kahteen todistettavaan osaan

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \tag{6.25}$$
$$\text{ja } \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2} \tag{6.26}$$

Kommentit

✓- *Epäyhtälön jakaminen:*

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 8 7 $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ 11 $\boxed{12}$ $\boxed{13}$

3. ja 8. ensin neliöivät epäyhtälön (6.24), ja sen jälkeen vasta jakoivat kahteen osaan. 5., 7. ja 11. tekivät neliöinti, mutta eivät jakanneet epäyhtälöä ollenkaan, vaan yrittivät ratkaista molemmat epäyhtälöt yhtä aikaa. 11. lisäksi käytti itseisarvoa väärin, sillä heidän mielestä itseisarvo riippuisi siitä, onko $x > 0$ tai $x < 0$.

✓- *Neliöjuuren tarkastaminen:*

$$\sin 2x \in [-1,1], \text{ joten } 1 \pm \sin 2x \geq 0$$

Neliöjuuret olivat siis määriteltyjä.

✓- *Neliöjuuren tarkastaminen:*

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ ~~3~~ ~~4~~ $\boxed{5}$ ~~6~~ $\boxed{7}$ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~

Tämä vaihe oli melko tärkeä, sillä juurettavan arvo saattoi rajoittaa lopullisen ratkaisun merkittävästi.

Tarkastellaan ensin oikeapuoleista epäyhtälöä (6.26).

✗- *Epäyhtälön (6.26) jakaminen:* Itseisarvon molemmat vaihtoehdot olivat

$$\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \leq \sqrt{2}$$
$$\text{tai } \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \geq -\sqrt{2}$$

✗- *Epäyhtälön (6.26) jakaminen:* Tämän virheen teki ryhmä 12, yhtälöiden välissä pitäisi olla konfuktio-"ja". 9. merkitsi näin:

$$-2 \leq \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \geq 2$$

✓- *Neliöinti:* Epäyhtälöä voidaan korottaa toiseen potenssiin, saadaan

$$\begin{aligned}&(1+\sin 2x) + (1-\sin 2x)\\ &-2\sqrt{1+\sin 2x}\sqrt{1-\sin 2x} \leq 2\end{aligned} \tag{6.27}$$

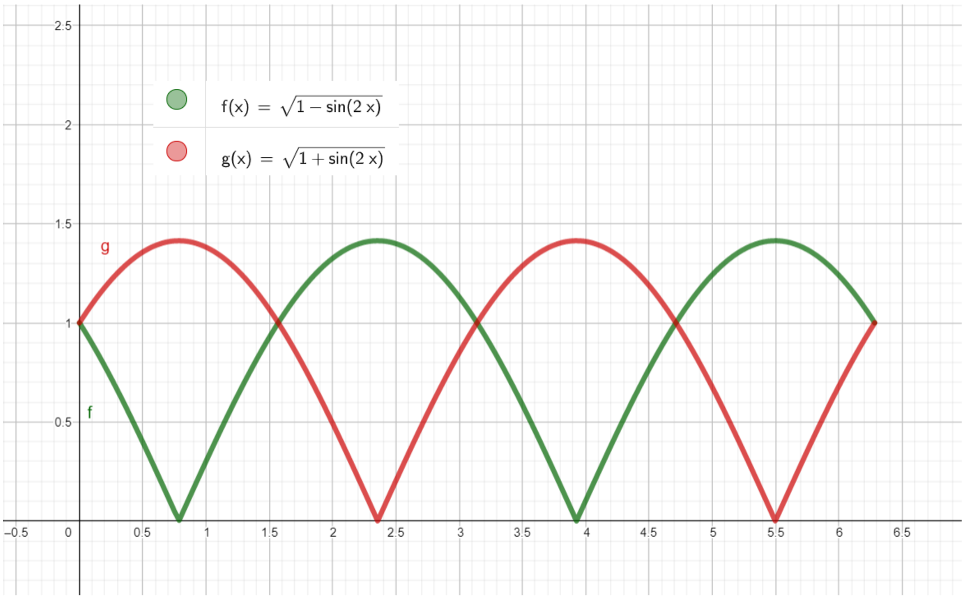
✓- *Neliöinti:*

$\boxed{1}$ 2 $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 6 $\boxed{7}$ 8 9 $\boxed{10}$ 11 12 ~~13~~

Ryhmien 6 ja 9 epäyhtälöltä (6.27) puuttui kerroin 2 neliöjuuren edestä. Ryhmä 13 ei ratkaisut epäyhtälöä (6.26) ollenkaan.

✓- *Kuvaajien käyttäminen:* Koska neliöjuurissa olevat termit ovat melko yksinkertaisia, joten on mahdollista hahmottaa niiden kuvaajia. Oikea kuvaaja pitäisi olla kuvan 6.1 mukaisesti.

✓- *Kuvaajien käyttäminen:* Ryhmän 2 $\sqrt{1+\sin 2x}$ ja $\sqrt{1-\sin 2x}$ kuvaajat olivat osittain väärin. Opiskelijoiden hahmotetuilla kuvaajilla oli sekä ylöspäin, että alaspäin aukeavat paraabelit, mutta oikeassa kuvaajassa (kuva 6.1) oli vain alaspäin aukeavia paraabeleja. Käsin piirrettynä kuvaajia ovat suuntaa antavia, eivätkä riitä tällöin kunnon perusteluksi.



Kuva 6.1. *Oikeat funktiot piirrettynä Geogebralla*

✗- *Väärin neliöinti:* Epäyhtälöstä (6.26) tulee muotoon

$$
\begin{aligned}
(1+\sin 2x)-(1-\sin 2x) &\leq 2 \\
2\sin 2x &\leq 2
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

✓- *Sieventäminen:* Epäyhtälöstä (6.28) saadaan

$$
\begin{aligned}
2-2\sqrt{1+\sin 2x}\sqrt{1-\sin 2x} &\leq 2 \\
-2\sqrt{1+\sin 2x}\sqrt{1-\sin 2x} &\leq 0 \\
-2\sqrt{1-\sin^2 2x} &\leq 0
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

✗- *Väärin neliöinti:*
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ $\boxed{8}$ ~~9~~ ~~10~~ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ ~~13~~
Opiskelijat luulivat, että itseisarvon korottamisessa, neliöjuuret häviävät, mutta matemaattisesti ei menee näin (koska $|a-b|^2=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$).

✓- *Sieventäminen:*
$\boxed{1}$ ~~2~~ 3 4 5 6 ~~7~~ 8 9 10 ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~
5. laski neliöjuurien tulon väärin (epäyhtälössä (6.29) $\sqrt{1+\sin^2 2x}$) ja myös kirjoitti muunnoskaavaa virheellisesti, joka johti siihen, etteivät he saaneet oikein sievennettyä.
10. laski mitkä olivat termien $\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}$ nollakohdat, ja tarkasteli, millä välillä termi olisi postiivinen tai negatiivinen. Lopulta ryhmä ratkaisi yhtälö

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}=\sqrt{2}$$

7. ja 11. ei päässyt enää eteenpäin.

✗- *Väärin sieventäminen:* Neliöjuurien tulo sievennettiin näin

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1+\sin 2x}\sqrt{1-\sin 2x}\\
=&\sqrt{1-\sin 2x+\sin 2x-(\sin 2x)^2}\\
=&\sqrt{1-\sin^2 2x}\\
=&1-\sin 2x
\end{aligned}
$$

✗- *Väärin sieventäminen:* $\boxed{6}$
Ryhmä laski neliöjuurien tulo oikein, mutta luuli, että neliöjuuri poistaisi termin $\sin^2 x$ eksponentin.

✗- *Sieventäminen loppuun asti:* Käyttäen muunnoskaavaa $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x$, epäyhtälöstä (6.29) saatiin muotoon

$$
\begin{aligned}
-2\sqrt{\cos^2 2x} &\leq 0\\
-2\cos 2x &\leq 0\\
\cos 2x &\geq 0
\end{aligned}
$$

✗- *Sieventäminen loppuun asti:* $\boxed{3}$ $\boxed{4}$
Ryhmien 3 ja 4 mielestä toinen potenssi supistuisi pois neliöjuuren takia, jolloin jäisi pelkkä $\cos 2x$, mutta oikeasti pitäisi olla $|\cos 2x|$. 3. lisäksi teki toisen virheen, jossa he jakoivat epäyhtälön neliöjuuren edessä olevalla negatiivisella luvulla (-2), mutta ei vaihtanut suuruusmerkkiä. Näiden virheiden takia 4. sai osittain oikein ratkaisut, kun taas 3. sai väärää ratkaisua.

✓- *Ratkaiseminen 1:* Koska neliöjuuri (epäyhtälöstä (6.29)) on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja juuren arvo oli suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla, niin neliöjuuren vastaluku oli negatiivinen, ja epäyhtälö (6.29) oli voimassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

✓- *Ratkaiseminen 1:*
$\boxed{1}$ 2 3 4 $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$ $\cancel{8}$ $\cancel{9}$ 10 $\cancel{11}$ $\cancel{12}$ $\cancel{13}$
2. käytti tätä menettelyä osittain oikein. Opiskelijat huomasivat, että itseisarvon on oltava vähintään nollaa ja enintään $\sqrt{2}$, ja perustelivat sen (osittain virheellisten) kuvaajien avulla, ja selittivat myös sanallisesti.

Ratkaistaan vielä epäyhtälöä (6.25):

$$
2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|
$$

✓- *Termin* $\cos x$ *arvo:* Koska itseisarvo oli aina suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla, niin

$$
\begin{aligned}
&2\cos x \leq 0\\
\iff\ &\cos x \leq 0 \iff x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Muuten

$$
\cos x > 0 x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tai } x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \tag{6.30}
$$

✓- *Termin* $\cos x$ arvo:
$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$ $\cancel{8}$ $\cancel{9}$ $\cancel{10}$ $\cancel{11}$ $\cancel{12}$ $\cancel{13}$
Kaikki ryhmät tekivät tämän virheen. Opiskelijat halusivat suorittaa laskutoimituksia, mutta eivät ottaneet huomioon niiden ehtoja. Tämä virhe seurasi siihen, että ratkaisut olivat joko puutteellisia tai vääriä.

✗- *Lähestymistapa 1 - Ryhmä 1:*
Epäyhtälöä (6.25) voitiin tarkastella kahdella epäyhtälöillä

$$
\begin{aligned}
2\cos x &\leq \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}, && (6.31)\\
\text{tai } 2\cos x &\leq \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1+\sin 2x}, && (6.32)
\end{aligned}
$$

missä epäyhtälö (6.31) olisi voimassa kun $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ tai $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ja epäyhtälö (6.32) kun $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ tai $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$. Kuvaajia käytettiin perusteluksi.

✗- *Lähestymistapa 1 - Ryhmä 1:*
Opsikelijat saivat epäyhtälöt ja tarkasteluvälit oikein, muttei päässeet tai ehtineet jatkaa tästä eteenpäin.

✓- *Lähestymistapa 2 - Ryhmä 2:*
Koska

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| &\leq \sqrt{2} && (6.33)\\
\text{ja } 2\cos x &\leq \left|\sqrt{1-\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| && (6.34)
\end{aligned}
$$

niin saatiin

$$
\begin{aligned}
2\cos x &\leq \sqrt{2}\\
-2 \leq 2\cos x &\leq \sqrt{2} && (6.35)\\
\frac{\pi}{4} \leq x &\leq \frac{7\pi}{4}
\end{aligned}
$$

✓- *Lähestymistapa 2 - Ryhmä 2:*
2. teki tässä virheellisen oletuksen. Käytännössä heidän mielestä, jos $b \leq c$ (epäyhtälö (6.33)) ja $a \leq b$ (epäyhtälö (6.34)), niin riittää, että ratkaistaan $a \leq c$ (epäyhtälö (6.35)). Ryhmä ei siis kuitenkaan ratkaissut epäyhtälö $a \leq b$.

✓- *Lähestymistapa 3, oikein neliöinti:* Jos $\cos x \geq 0$, voitaisiin neliöidä epäyhtälö (6.25), ja se sievenisi muotoon:

$$
\begin{aligned}
(2\cos x)^2 &\leq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right|^2\\
4\cos^2 x &\leq 2 - 2\sqrt{\cos^2 2x} && (6.36)
\end{aligned}
$$

✓- *Lähestymistapa 3, oikein neliöinti:*
$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\boxed{3}$ $\cancel{4}$ $\boxed{5}$ 6 $\boxed{7}$ 8 $\cancel{9}$ 10 11 12 13
4. ja 9. eivät ratkaisseet epäyhtälöä (6.25) ollenkaan. Ryhmältä 6 puuttui kerrointa 2 neliöjuuren edessä. 13. ei korottanut epäyhtälöä (6.25, vaan päätti jakaa epäyhtälö termillä $\cos x$ ja lisätä molemmille puolille (-2), mutta ryhmä ei päässyt enää eteenpäin.

✗- *Väärin neliöinti:* Itseisarvon neliöinti poisti neliöjuuret, joten saatiin

$$
\begin{aligned}
4\cos^2 x &\leq (1+\sin 2x) - (1-\sin 2x)\\
4\cos^2 x &\leq 2\sin x && (6.37)
\end{aligned}
$$

✗- *Väärin neliöinti:*
$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$ $\boxed{8}$ $\cancel{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ 12 $\cancel{13}$
10. todennäköisesti jakoi ryhmänjäsenille eri tehtävän osia, jolloin toiset ryhmäläiset neilöivät itseisarvoa oikein, mutta toiset eivät. 11. ei osannut sieventää enempää, jolloin jätti kesken.

✗- *Lähestymistapa 4 - Ryhmä 12:* Neliöitiin epäyhtälöä (6.25)

$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \tag{6.38}$$

$$4\cos^2 x \le |1+\sin 2x - (1-\sin 2x)| \tag{6.39}$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x \le 2\sin 2x \tag{6.40}$$

$$\text{tai } \; -4\cos^2 x \le 2\sin 2x \tag{6.41}$$

✗- *Ratkaisu 1 - Ryhmä 3:* Epähtälöön (6.36) sijoitettiin $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ja saatiin

$$4(1-\sin^2 x) \le 2 - 2\cos 2x \tag{6.42}$$

$$1 + (1 - 2\sin^2 x) \le 1 - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$1 + \cos 2x \le 1 - \frac{\cos 2x}{2}$$

✗- *Ratkaisu 2:* Yhtälöstä (6.37)

$$2\cos^2 x \le \sin 2x$$

$$\sin 2x - 2\cos^2 x \ge 0 \quad || \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin 2x - 2 \ge 0 \tag{6.43}$$

$$2t^2 + 2t - 1 \ge 0, \text{missä } \sin x = t$$

$$t = \frac{-1 \pm 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{ja vain } t = \frac{-1+2\sqrt{5}}{4} \in [-1,1] \text{ käy.}$$

✗- *Epäyhtälön ratkaisemisvirheet:*
Ryhmä 12:

$$\sin 2x \le \frac{1}{2} \text{ eli } \sin x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi \tag{6.47}$$

Ryhmä 6:

$$\sin 2x \le 1 \tag{6.48}$$

$$2x \le \frac{\pi}{2} + n2\pi \tag{6.49}$$

✗- *Lähestymistapa 4 - Ryhmä 12:* Opiskelija ajatteli, että neliöinti poistaisi vain neliöjuuri, eikä sillä ollut vaikutusta itseisarvoon. Siksi epäyhtälössä (6.39) oli itseisarvomerkinnät vielä Tämä virhe oli monimutkainen, sillä ryhmä neliöi itseisarvoa jo, siksi epäyhtälössä (6.39) ei siis ole enää itseisarvoa, eikä epäyhtälöä tällöin, itseisarvon määritelmän mukaisesti, voida enää jakaa kahteen osaan.

✗- *Ratkaisu 1 - Ryhmä 3:*
Ryhmä yritti sieventää epäyhtälöä (6.42) ja teki yhtäaikaa liian monta sievennysvaihetta, jotka johtivat laskuvirheeseen. Ryhmä sai lopulta väärät ratkaisut.

✗- *Ratkaisu 2:*
~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 6 ~~7~~ $\boxed{8}$ ~~9~~ 10 ~~11~~ $\boxed{12}$ ~~13~~
12. katsoi todennäköisesti väärin ($\sin 2x = 2\sin x$), ja ajatteli, että epäyhtälö on polynomimuodossa, jonka muuttujana on $\sin x$. 8. sai vain epäyhtälön (6.43), eikä päässyt enää eteenpäin. Ryhmillä 5 ja 6 oli virheitä itseisarvon neliöinnissä ja sievennyksessä, eivätkä pystyneet jatkamaan.
Ryhmällä 10 oli lisäksi vielä neliöintivirhe

$$\cos x - \sin x \le 0 \tag{6.44}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x \le 0 \tag{6.45}$$

$$\cos 2x \le 0 \Rightarrow x = \frac{\pm\pi}{4} + \pi \tag{6.46}$$

✗- *Epäyhtälön ratkaisemisvirheet:*
1 2 3 4 5 $\boxed{6}$ ~~7~~ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ $\boxed{13}$
Kerätään vielä niitä virheitä, joita ei ole vielä huomioitu aikaisemmin. Tässä yritetään olla keräämättä huolimattomuusvirheitä. Nämä virheet liittyvät trigonometrisen yhtälön tai epäyhtälön ratkaisemiseen. Virheet johtuivat todennäköisesti trigonometrisen funktion väärin ymmärtämisestä. Seuraavat virheet ovat joitakin virheitä, jotka melko tärkeitä matemaattisen ymmärryksen kannalta.

✗- *Ratkaisujen ehdot:* Ratkaisuissa ei ole huomioitu tarkasteluväliä $0 \leq x \leq 2\pi$ tai $\pi-$monikertaa. Esim. ryhmä 6 (epäytälö (6.49)), ja lisäksi
Ryhmä 4:

$$\cos 2x \geq 0 \tag{6.50}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \tag{6.51}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \tag{6.52}$$

Ryhmä 3:

$$\cos 2x \leq 0 \tag{6.53}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ tai } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4} \tag{6.54}$$

Kuvien piirtäminen:
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 4 5 6 7 $\boxed{8}$ 9 10 11 12 13
Ryhmillä $\boxed{3}$ ja $\boxed{8}$ on vain yksi kuva yksikköympyrästä, kun taas ryhmillä $\boxed{1}$ ja $\boxed{2}$ on kuvia sekä yksikköympyrästä, että kuvaajia. Kuitenkin vain ryhmällä $\boxed{2}$ oli muistikolmioita vastauksissa.

Koonti tehtävistä ja virheistä

Tehtävässä 1 opiskelijat lähtivät liikkeelle väärästä kohdasta, joka hankaloitti tehtävän ratkaisemista huomattavasti. He käyttivät laskustrategiana yhtälöiden muodostamista enimmäkseen, jotta voivat ratkaista kertoimien arvoja. Tehtävässä korostui sen, että tehtävänannon huomiointi ja ymmärtäminen oli hyvin tärkeä tehtävän ratkaisemisen kannalta. Opiskelijat joutuivat "improvisoimaan"enemmän, sillä heidän matemaattisia työkaluja (pääosin algebralliset menetelmät) olivat rajoitettuja. Improvisoiminen johti myös siihen, että opiskelijat tekivät paljon algebrallisia virheitä.

Tehtävät 2 ja 3 olivat tutuimpia näköisiä opiskelijoille ja huomattiin, että he pärjäsivät paremmin kuin tehtävässä 1. Vaikka tehtävätyyppi oli tuttu, niin ratkaisuissa löydettiin erilaisia lähestymistapoja, mikä oli positiivinen asia matematiikan opiskelun kannalta. Kuvaajien käyttö oli hyvä oivallus opiskelijoilta. Huomattiin, että piirtämällä esimerkiksi muistikolmio tai yksikköympyrä auttoi opiskelijoita perustrigonometristen yhtälöiden ratkaisemisessa.

Virheiden luokat	Aihe ja virheet
Virheellinen päättely	• Todistusten loogisuus (UT) Algebralliset taidot: • Yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen. (UT) • Määritelmien väärin ymmärtäminen – Itseisarvo (UT) – Neliöinti (MUT) – Trigonometriset funktiot (MUT) • Erilaisten laskutekniikoiden ehtojen tarkastelu. (UT) • Virheeliset oletukset (HT) • Nollalla jakaminen (HT)
Virheelliset merkinnät	• Epäselvät merkinnät trigonometrisissa termeissä (HT) • Rakenteellisesti samojen merkintöjen väärin ymmärtäminen (MUT)
Huolimattomuusvirheet	• Kaavojen uudestaan kirjoittaminen (HT) • Neliöinti ja neliöjuuren ottaminen (MUT)

Taulukko 6.3. *Virheiden luokat*

Kokonaisuudessa opiskelijat osasivat kohtuullisen hyvin valituissa IMO-tehtävissä. Opiskelijoiden ratkaisujen perusteella, virheet johtuivat pääosin heikosta perusteorian osaamisesta, kuten trigonometristen funktioiden määritelmät, neliöinti, itseisarvot sekä yhtälön että epäyhtälön ratkaiseminen. Koska tehtävät olivat erilaisia, ja yksi opiskelija tehdä saman virheen uudestaan, mikä tarkoittaa sitä, että virheiden määrä kokonaisuudessa on vaikea laskea. Siksi ratkaisujen perusteella, luokiteltiin virheet harvoin toistuvaksi virheeksi (HT), melko usein toistuvaksi (MUT) tai usein toistuvaksi (UT), riippuen siitä kuinka usein virhe on esiintynyt virheiden poiminnassa.

6.2 Tulosten tulkinnat

Wilsonin malli ja matemaattinen ajattelu

Tarkastellaan opiskelijoiden kognitiivista tasoa hyödyntäen Wilsonin mallia, jonka mukaan on neljä hierarkkista tasoa:

A Laskutaito

B Ymmärtäminen

C Soveltaminen

D Analysoiminen

Laskutaito tasolla, opiskelijat pääosin tunnistivat ja muistivat tehtävän liittyvät termit, tehtävänantoa sekä tehtävätyyppiä. Tunnistettua tehtäviään, opiskelijat lähtivät saman tien ratkaisemaan niitä hyödyntäen opittuja algoritmeja, kuten yhtälön ratkaiseminen, tai kaavojen sijoittaminen. Jotkut ryhmät jopa kirjoittivat poimittuja tietoja ylös. Opiskelijoiden laskutaito on kiitettävä tai hyvä.

Ymmärtämisen tason näkökulmassa, opiskelijat tietävät paljon perusalgebrallisista menetelmistä, esimerkiksi neliöinti, ratkaisukaavat, korkeamman asteen yhtälöt, joita opiskelijat käyttivät joustavasti. Ongelma oli kuitenkin se, että he käyttivät niitä tietoja muistin varalla, jonka vuoksi osa muisti kaavoja väärin. Syy tähän oli myös kaavojen käyttäminen ilman tarkkaa ymmärrystä. Opiskelijat keskittyivät liikaa laskumetodien käyttämiseen, sen sijaan he olisi voineet selvittää perehtymättömiä käsitteiden merkityksiä, kuten itseisarvo ja epäyhtälöt. Perehtymättömät käsitteet olivat ongelmanratkaisun kannalta kriittiset kohdat, joita opiskelijoiden olisi pitänyt antaa enemmän huomiota. Lisäksi monessa tilanteissa yhtälön muokkaamiseen vaadittiin erillinen tarkistus tai huomiointi, esimerkiksi nollalla jakamistilanne, mutta jättivät niitä kokonaan huomioimatta. Huomattiinkin opiskelijat, jotka tiesivät enemmän kuin pelkkä kaavaa, esimerkiksi trigonometristen funktioiden määritelmien tai itseisarvon merkitys, menestyivät huomattavasti paremmin, sillä heillä oli käytännössä enemmän työkaluja käytössä ja niitä voisivat käyttää paljon joustavammin. Trigonometrisisten tehtävien ratkaisemisessa, määritelmillä oli erittäin tärkeä rooli.

Soveltamisella tasolla opiskelijat hyödynsivät laskutapojaan ja yrittävät ratkaista tehtäviä. Opiskelijoiden päätyökalu oli mekaaniset laskutavat, jotka olivat myös lukion aikana tärkeimpiä työkaluja.

Tehtävä 1 on rutiinimainen perus todistustehtävä, jossa annettiin oletus ja oletuksilla pitää todistaa väitettä. Malliratkaisussa (liite B) huomataan, että tehtävässä ei ole mitään ihmeellisempiä laskuja. Opiskelijoiden mielestä kertoimia voitiin ratkaista kertoimia k, m ja n mekaanisesti, eivätkä käyttänyt todistusmenetelmiä. He ovat huomanneet kuitenkin, että kertoimien ratkaiseminen pelkällä kahdella yhtälöillä (oletus ja väite) ei ole helppo, ja tekivät virheellisiä päättelyitä. Suurin osa opiskelijoista ymmärsivät termien $\cos x$ ja $\cos 2x$ yhteyden, joka myös yhdistää yhtälöitä (6.1) ja (6.2). Tämä tarkoittaa sitä, että he osasivat vertailla tehtävän annettuja tietoja keskenään, ja lähtivät niitä hyödyntämään. Monet ryhmät kuitenkin ajattelivat, että yhtälöt olivat rakenteellisesti samanlaisia, niin niiden ratkaisut ovat samat, ja muodostivat yhtälöiden välille vääriä yhtälöryhmiä. Tämä virhe osoitti sen, että tietojen erotteleminen oli vielä puutteellinen.

Tehtävät 2 ja 3 olivat opiskelijoille tutumpia ja heidän menestyksensä olivat parempia verrattuna tehtävään 1. Tehtävät olivat rutiinitehtäviä, ja ratkaiseminen oli siis suoraan viivaisempi, ja melko mekaanista. Mekaanisuuden takia, algebrallisten laskujen tarkkaavaisuus on tärkeässä roolissa. Opiskelijat tekivät suhteellisen paljon laskuvirheitä (erityisesti tehtävässä 3), ja virheet liittyivät neliöjuuriin, neliöintiin ja itseisarvoon. Opiskelijat käyttivät laskusääntöjä epäyhtälöille samalla tavalla kuin normaaleille epäyhtälöille.

Tämä viittaa siihen, että epäyhtälö oli monelle ryhmälle vaikea käsite, ja sen lisäksi piti epäyhtälöitä käsitellä, niin se oli vielä vaikeampi. Monet ryhmät ovat kirjoittaneet ylös tarpeellisia informaatioita (oletuksia, rajoitteita), mutta jättivät viime hetkellä niitä pois ratkaisun tarkastelussa. Tämä ongelma toistui molemmissa tehtävissä 2 ja 3, joka vaikeutti ratkaisuprosessissa huomattavasti, esti opiskelijoita saamaan haluttua ratkaisua. Tietojen erotteleminen oli puutteellinen.

Tehtävässä 2 monet ryhmät lähtivät hyödyntämään muunnoskaavoja ja sievensivät yhtälöä, ja lopulta huomasivatkin, että yhtälöä voitiin kirjoittaa toiseen asteen yhtälön muodossa. Tehtävässä 3 oli vaikeampi kuin tehtävä 2, mutta opiskelijat ovat pärjänneet kohtuullisen hyvin. Kuitenkin monta ryhmää eivät päässeet kovin pitkälle yhtälöiden tai epäyhtälöiden pyörittämisessä. Kokonaisuudessa kaikissa tehtävissä 1, 2 ja 3, opiskelijoiden soveltamisen taso on kohtalainen.

Analysointitasolla vaaditaan opiskelijalta syvällisempiä mietiskelyjä. Tehtävä 1 muistutti opiskelijoille perinteiseltä mekaaniselta tehtävältä, mutta se ei ollut. Opiskelijoiden ratkaisujen perusteella yhtälöiden relaation löytäminen oli vaikea. Tehtävissä 1 ja 3, opiskelijat ovat kohdanneet uusia ongelmakohtia, jotka asettivat heidät epämukavaan tilanteisiin. Opiskelijat yrittivät käyttää luovuutensa ja lähestyivät ongelmaa eri näkökulmissa, mutta kuitenkin he tekivät paljon virheitä intuitiivisten päätösten takia. Ongelma tässä oli se, että he eivät tarkistaneet olivatko heidän intuitiiviset päätökset järkeviä. Kaikkia keinoja saa kokeilla, kunhan niitä perustellaan. Opiskelijat eivät siis saavuttaneet tätä tasoa näissä tehtävissä.

6.3 Tutkimuksen pohdinta

Johtopäätöksiä matemaattisesta ajattelusta

Kilpatrickin matemaattinen ajattelumalli koostui viidestä piirteistä: käsitteellisestä ymmärtämisestä, proseduraalisesta sujuvuudesta, strategisesta kompetenssista, mukautuvasta päättelystä sekä yritteliäisyydestä. Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden käsitteellisessä ymmärtämisessä oli selvästi puutteellista, ja se johti opiskelijoita ratkaisuprosessissa harhaan suuntaan. Opiskelijat tuntevat kaikki tehtävissä olevat käsitteet, operaatiot, ymmärtävät niitä yleisellä tasolla, mutta ei kunnolla. Näiden virheiden syynä oli opiskelijan muistin ja laskumetodien riippuvuus. Matematiikassa pelkkä ulkoluku ei riitä pitkälle, ja se näkyi tutkimuksen tuloksista. Vaikka testissä oli rutiinitehtäviä, niin ne vaativat kuitenkin trigonometristen funktioiden ymmärrystä.

Proseduraalien sujuvuus oli opiskelijoille sekä vahvuus, että heikkous. Vahvuutena oli se, että he tietävät mitä menetelmiä voidaan käyttää missäkin tilanteissa. He hallitsevat perus laskutekniikat, osaa käyttää annettuja tietoja, sekä hyödyntää muunnoskaavoja. Heikkoutena he usein luottivat metodien käyttöön ilman tarkistusta, jolloin he saattaa jäivät jumiin ongelman ratkaisuissa tai saivat vääriä vastauksia. Laskuvirheet ja huolimattomuus virheet vaikuttavat tähän hyvin paljon, sillä tutkimuksessa käytettiin rutiinimaisia tehtäviä.

Proseduraalinen sujuvuus oli selkeästi opiskelijoiden tärkein työkalu.

Koska konseptuaalinen tieto on rajoitettu, myös laskumenetelmiä on myös rajoitettu, jolloin ratkaisujen etsiminen on paljon haastavampi. Strategisen kompetenssin tarkastelussa, käytettävissä olevat ratkaisustrategiat ovat rajoitettuja. Opiskelijat ovat käyttäneet erilaisia lähestymistapoja, osa toimii ja osa ei, mutta uskalsivat kokeilla. Ilman vahvaa käsitteellistä ymmärrystä, ja proseduurien hallintaa, uuden hyvän ratkaisustrategian keksiminen on hyvin vaikea. Opiskelijoiden keksimät uudet laskutavat eivät toimineet juuri konseptuaalisten tietojen puutteen takia.

Mukautuva päättely viittaa opiskelijan kykyyn ajatella loogisesti eri käsitteiden ja tilanteiden välillä. Tapauksissa, jossa opiskelijat ovat tehneet vääriä päättelyitä, ei ollut selkeitä perusteluita. Syy oli se, että muistivat laskumenetelmiä väärin, ja luulivat että käyttivät "faktoja". Toinen syy oli tehdä liian monta laskuvaiheita kerrallaan, jolloin välivaiheiden välillä ei ollut tarpeeksi perusteluita. Nämä johtivat siihen, ettei ratkaisussa ollut johdonmukaisuutta. Opiskelijat keskittyivät paljon kaavojen ja metodien muistamiseen, eivätkä siis tällöin käyttäneet paljon loogisia päättelyitä. Huomattiin taas hyvällä käsitteellisellä ymmärryksellä, opiskelijat ovat saaneet selkeimpiä ja loogisempi perusteluita.

Mistä opiskelijoiden tekemät virheet johtuivat?

Virheet olivat pääosin algebrallisissa taidoissa. Kuten on jo pohdittu, käsitteellisen ymmärtämisen puute vaikuttaa ratkaisuprosessiin, mutta oli muitakin tekijöitä. Yksi niistä oli tottuminen uuteen ympäristöön. Lukuvuoden alussa opiskelijat ovat varmasti unohtaneet paljon lukion asioita, ja lisäksi ohjelmistojen käyttö lukiossa saattoi heikentää ratkaisutaitoja ja käsin laskeminen, joten lyhyessä ajassa, opiskelijat eivät ehkä ehtineet kerrata kaikkia asiaa. Insinöörimatematiikan kurssin alussa oli paljon kerrattava, että ei ole pelkästään trigonometrisia funktioita, siksi olisi mahdollista, että trigonometriaa ei ole kerrattu tarpeeksi.

Työmuisti saattoi olla myös toinen virheiden vaikuttaja. Opiskelijoiden piti kerrata paljon asioita, jolloin työmuisti ei kyennyt muistamaan kaikkea. Jos käyty asia eivät ole käsitelty kunnolla ja niistä jäi vähän epäselvää, niin asiat saattaa sekoittuvat keskenään ja antaa harhaa käsityksiä aiheesta [27]. Ratkaisuprosessissa huomattiin, että virheet esiintyivät eniten sievennyksissä. Useimmiten opiskelija suoritti monta välivaiheita kerrallaan, jolloin huolimattomuuden riski kasvaa.

Sievennyksissä opiskelijat ovat jakaneet yhtälöitä tuntemattomalla luvulla ilman erillinen nollalla-jakamistilanteen tarkistus. Opiskelijat keskittyivät yhtälön muokkaamiseen, ja unohtivat, että myös tietyille toimenpiteille vaadittiin erikoisen tarkistuksen. On mahdollista, että tämän kaltainen tilanne ei ole näkynyt paljon lukiossa, jolloin opiskelijoilta puuttui kokemusta tästä.

Analyysin jälkeen voidaan todeta, että opiskelijoilta puuttuu kriittistä ajattelua. Opiskelijat antoivat intuitiiviselle ajatukselle liian vapaat kädet. Eniten virheitä olisi voineet välttää, jos opiskelijat olisivat ajatelleet kriittisemmin.

7 TUTKIMUSKYSYMYKSIIN VASTAAMINEN JA YHTEENVETO

7.1 Tutkimukseen vastaaminen

Tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

1. Miten insinööriopiskelijat lähtisivät ratkaisemaan vaikeita tehtäviä?
2. Minkälaisia virheitä opiskelijat tekivät ratkaistessaan IMO-tehtäviä ja mistä virheet voisivat johtua?
3. Voidaanko hyödyntää kansainvälisten matematiikanolympialaisten tehtäviä yliopiston matematiikan opetuksessa?

Tutkimuskysymys 1 *(Miten insinööriopiskelijat lähtisivät ratkaisemaan vaikeita tehtäviä?)*

Alussa opiskelijat heti lähtivät tunnistamaan tehtävän informaatiot kuten oletukset sekä kysymystä. Tehtävien luonteiden takia, opiskelijoiden piti käyttää paljon matemaattisia laskutekniikoita. Tehtävissä vaadittiin hyvää algebrallisten tekniikoiden osaamista ja perusteorian ymmärtämistä, esimerkiksi määritelmät, ehtojen tunnistaminen.

Kilpatrikin matemaattisen osaamisen mallin mukaan, opiskelijat ovat palauttaneet mieleen lukiossa opittuja käsitteitä, algoritmeja, määritelmiä, tiesivät niistä, mutta he eivät kuitenkaan ymmärtäneet niitä kovin tarkasti. Heidän käsitteelliset ymmärrykset olivat puutteellisia. Opiskelijat palauttivat asiat mieleen muistilla sen sijaan, että etsisivät todelliset merkitykset. Proseduurien käyttö oli opiskelijoille sekä vahvuutena, että heikkoutena. He hallitsivat peruslaskutekniikoita, yhtälöiden ratkaisemista, mutta virheellisten algoritmien käyttö tuotti virheellisiä välivaiheita ja lopulta vääriä ratkaisuja. Rajoitetuilla resursseilla (tiedot ja menetelmät) ratkaisustrategian laatiminen oli hyvin vaikea. Tutkimuksessa huomattiin, että opiskelijat, joilla oli vahvempi käsitteellinen ymmärrys ja proseduraalinen sujuvuus, saisivat parempia ratkaisustrategioita. He, jotka käyttivät huonompia strategioita, heillä oli vääriä menetelmiä, ja yleensä jäivät ratkaisussa tiettyyn kohtaan jumiin. Mukautuvan päättelyn tarkastelussa, opiskelijat käyttivät enemmän muistia ja intuitiivista päättelyä kuin loogista ajattelua. Muisti oli yksi suurimmista tekijöistä, joilla oli niin suuri vaikutus opiskelijoiden matemaattiseen osaamiseen.

Tarkastellaan ajatteluprosessia opiskelijoiden ratkaistaessa IMO-tehtäviä. Burtonin mallin perusteella, opiskelijoiden lähestymistapa on deduktiivinen, eli he lähestyvät ongelmaa ensin hyödyntämällä opittuja teorioita, menetelmiä. Burtonin deduktiivisessa lähestymistavassa, ajatteluprosessit menivät seuraavasti: yleistäminen, otaksuminen ja täsmentäminen.

Opiskelijat yleistivät kaavoja ja algoritmeja. He todennäköisesti ajattelivat, että kyseessä oli rutiinitehtäviä, joten he voisivat hyödyntää opittuja menetelmiä normaaliin tapaan, tapauksia riippumatta. Opiskelijat eivät lähteneet selvittämään tuntemattomia käsitteitä, kuten itseisarvoa, tai epäyhtälöä. He lähtivät sillä mentaliteetilla "kokeillaan tiettyä menetelmää ja katsotaan, mitä tästä tulee", siksi he välillä käyttivät väärää menetelmää. Tehtävät olivat mekaanisia, mutta perusasioiden ymmärtäminen oli myös tärkeä.

Deduktiivisen lähestymistavan toinen prosessi oli otaksuminen. Lukiossa saadaan usein kokemus, että kun muokataan yhtälöä tai lausetta tarpeeksi pitkälle, niin saadaan siitä sopivan muotoinen, jolloin sen ratkaiseminen olisi mahdollista. Valitettavasti tätä taktiikka ei voinut hyödyntää tässä tutkimuksessa. Opiskelijat yleistivät laskumenetelmiä ilman tarkkaa ymmärrystä ja perusteluja. Siksi he todennäköisesti tekivät virheitä ja saivat vääriä tuloksia. Tällöin monet ryhmät jäivät "sievennyskierteeseen". On hyvin todennäköistä, että opiskelijat ovat tehneet näitä virheitä myös lukiossa.

Täsmentämisen näkökulmassa, suurin osa opiskelijoista ei selventäneet käsitteitä, joita he eivät ymmärtäneet kunnolla. He luulivat, että käsitteet olivat heille jo tuttuja. Tämä näkyi erityisesti rutiinitehtävien (tehtävät 2 ja 3) käsitteistössä, ja symboleissa. Tehtävässä 1 opiskelijat ratkaisivat termejä $\cos x$, ja $\cos 2x$, mutta eivät ymmärtäneet ratkaisujen merkityksiä. Siksi he eivät tienneet mitä pitäisi tehdä, ja loivat sitten virheellisiä laskumenetelmiä.

Vakuuttamisprosessin määritelmän mukaan opiskelijat kyseenalaistavat tehtyjen päätösten ja ratkaisujen oikeellisuutta. Suurin osa opiskelijoilta puuttuu vakuuttamisprosessia. Jotkut löydetyt ratkaisuvaiheet, esimerkiksi neliöinti, olivat selkeästi virheellisiä, ja ne olivat korjattavissa, jos opiskelijat olisi voinut tarkastaa laskujaan. Koska tämän kaltaisia virheitä oli niin paljon, niin on todennäköistä, että opiskelijat eivät tarkastaneet kaikkia välivaiheitaan, Parhaiten onnistuneiden ryhmien ajatteluprosesseissa verrattuna muihin heikompiin ryhmiin, oli tarkempia ja joustavampi.

Laskuvirheet liittyivät aiheisiin, jotka ovat opiskelijoille hankalia, kuten itseisarvoon ja epäyhtälöihin. Ratkaisujen perusteella opiskelijat luottivat muistiinsa ja siellä oleviin rutiinilaskutoimituksiin. Usein virheet näyttivät johtuvan opiskelijoiden heikosta käsitteiden ymmärryksestä. Ryhmästä löytyi kuitenkin myös opiskelijoita, jotka osasivat aihealueiden teorian hyvin ja osasivat ratkaista tehtävät selkeästi muuta ryhmää paremmin.

Tutkimuskysymys 2 *(Minkälaisia virheitä opiskelijat tekivät ratkaistessaan IMO-tehtäviä ja mistä virheet voisivat johtua?)*

Kun tarkastellaan opiskelijoiden ratkaisuja, niin huomataan, että kaikilla ajattelun osa-alueilla on tullut virheitä, erityisesti proseduurien käytöstä. Taulukosta 6.3 huomattiin, että eniten tehtiin virheellisiä päättelyitä ja ne liittyivät usein yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiseen sekä määritelmien ymmärtämiseen. Näiden aiheiden osaaminen on pakollinen yliopiston matematiikan oppimisen kannalta ja siksi näiden aihealueiden opettamiseen on hyvä kiinnittää huomiota jo opintojen alusta lähtien. Opiskelijat tekivät myös virheitä merkinnöissä. Tämä ongelma toi epäselvyyksiä ja sekaannuksia ajatteluprosessille, mikä taas aiheuttaa lisää virheitä.

Virheet johtuivat opiskelijoiden matematiikan aihealueiden virhekäsityksistä. Opiskelijat luottivat heidän intuitiiviseen päättelyynsä, eivätkä pysähtyneet miettimään ongelmaa tarkemmin. Huomattiin myös sen, että kun opiskelijat tekivät monta sievennysvaihetta yhtä aikaa, työmuisti joutui tekemään enemmän työtä, jolloin todennäköisemmin opiskelija teki huolimattomuusvirheen.

Tutkimuksesta saadaan tärkeitä pointteja opetuksen kehitykselle. Ensimmäinen poiminta on se, että kannattaa keskittyä enemmän opiskelijoiden käsitteelliseen ymmärrykseen. Kun lähestytään uuteen asiaan, esitetään sitä mahdollisimman täsmällisesti, konkreettisesti, monimuotoisesti, sekä liittää sitä sekä vanhaan, että uuteen kontekstiin. Tällöin opiskelijat ymmärtäisivät asian tarkemmin ja osaisi esittää opittuja tietojaan monella tavalla (sanallisesti ja graafisesti). Kilpatrickin matemaattisen osaamisen piirteet vaikuttavat toisiinsa, joten vaikuttamalla yhteen piirteeseen, vaikutetaan samalla myös muihin piirteisiin. Toinen tärkeä poiminta on opettaa opiskelijoita ajattelemaan kriittisesti. Mitä he enemmän reflektoivat, kysyvät itseltään, sitä suurempi mahdollisuus he löytäisivät virheensä ja korjaa niitä. Koko prosessi tuo opiskelijoita lähemmäksi oikeaa vastausta.

Antamalla opiskelijoita tekemään IMO-tehtäviä, saatiin jonkinlaista käsitystä opiskelijoiden ajattelusta, osaamisesta ja ratkaisutavoista. Tehtävät ovat pakottaneet opiskelijoita lähestyä ongelmia eri näkökulmista, ja ne ovat korostaneet matematiikan perusasioiden merkitystä.

Tutkimuskysymys 3 *(Voidaanko hyödyntää kansainvälisten matematiikanolympialaisten tehtäviä yliopiston matematiikan opetuksessa?)*

Opiskelijat ovat päässeet tekemään Kansainvälisten Matematiikanolympialaisten tehtäviä. Vaikka tutkimuksessa oli vain puhtaasti matemaattisia tehtävä, eivätkä liity mihinkään alan sovellukseen, niin kuitenkin opiskelijat ovat päässeet haastamaan itseään, käyttäämään opittuja asioita ja ajatteluaan aktiivisesti.

Valitut IMO-tehtävät olivat hyödyllisiä, sillä saatiin tietyillä tasolla kuvattua opiskelijoiden matemaattista ajattelua, ja tunnistetaan opiskelijoiden heikkoudet ja vahvuudet. Tutkimuksessa käytetyt IMO-tehtävät olivat helpompia ja mekaanisempia verrattuna nykypäivään IMO-tehtäviin, joten yliopistoon sopivien tehtävien valinta voisi olla hankala. IMO:n suurimmat matemaattiset aiheet ovat geometria, alkeellinen lukuteoria, sarjat ja joukot, yksinmuuttujafunktiot sekä mallintaminen. Ensimmäisen vuoden matematiikan kursseilla käydään myös samat aiheet läpi paitsi alkeellista lukuteoriaa ja geometria. Mainittujen aiheiden mukanaan on myös perusalgebra. Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden matemaattisessa osaamisessa oli vielä paljon kehitettävää, siksi jos valitaan tehtäviä perusalgebran painotuksen mukaan, on todennäköisempää löytää sopivan tehtävän. Tutkimuksesta huomattiin, että käytetyt tehtävät olivat melko mekaanisia, niin silti saatiin tuotua esiin opiskelijoiden yleisempi virheitä.

Siispä voidaan hyödyntää ei pelkästään IMO-tehtäviä vaan myös pienempien kilpailujen tehtäviä. Ideana on antaa vaikeampia tehtäviä opiskelijoille ratkottavaksi, eli kunhan tehtävät ovat tarpeeksi haastavia, niin ne kelpaavat tämän tutkimuksen mielessä testitehtäviksi.

7.2 Tutkimuksen laadun huomiointi

Tutkimuksessa on käytetty kolme trigonometrista tehtävää, jotka olivat melkein kaikki rutiinitehtäviä, siksi eivät välttämättä kuvaa mitenkään täydellisesti opiskelijoiden matemaattista ajattelua. Jos sen sijaan olisimme valinneet yhden avoimen tehtävän, esimerkiksi mallintamiseen liittyvään, sen avulla olisimme saaneet erilaisia ratkaisuja ja poimintoja.

Testitehtävien tekeminen tapahtuu luokkatilassa, jossa oli myös muita opettajia ohjaamassa. Aineistonkerääminen oli hallinnassa. Tehtävien tekemiseen annettiin aikaa yksi tunti. Aika oli vähän verrattuna oikeaan kilpailuun. Annettiinko opiskelijoille tarpeeksi aikaa ratkaista tehtäviä? Aika oli tarpeeksi, sillä opiskelijoiden ei ole pakko saada tehtävät ratkaistua, vaan riitti että he yrittivät. Mutta jos annettaisiin lisää aikaa tehtäville, niin todennäköisesti enemmän ryhmiä saisivat varmasti laskettua tehtäviä 2 ja 3. Tehtävä 1 oli hankala, koska opiskelijoiden piti ensin ymmärtää, mitä tehtävässä pitää tehdä, lisäksi tehtävätyyppi ei ollut kovin tuttu opiskelijoille. Kuitenkin mitä enemmän aikaa annetaan opiskelijoille, sitä enemmän tutkimusdataa saadaan, jolloin saadaan myös kuvattua opiskelijoiden osaamista paremmin.

Luvussa 3 oli tehty Kansainvälisten Matematiikkaolympialaisten tehtävien aiheiden luokittelua. Luokittelu pohjautuivat tehtävänantoihin ja malliratkaisuihin, ja siksi siihen ei voida täysin luottaa.

Opiskelijoiden ratkaisujen analysoinnissa yritettiin nostaa esille vain tärkeimpiä virheitä, joilla on iso vaikutus matematiikan oppimisessa. Siksi joitakin pienempiä ja yksittäisimpiä virheitä eivät ole välttämättä huomioitu. Opiskelijoiden ratkaisuja vertailtiin keskenään myös, jotta ratkaisujen arviointikriteerit pysyisivät samana koko arviointiprosessin aikana. Tällä yritettiin kattaa, että arviointi olisi mahdollisimman objektiivinen.

Tutkimustulokset eivät ole kovin yksiselitteisiä, ja opiskelijoiden ratkaisulle ei ole annettu tarkkaa arvosanaa. Tästä syystä opiskelijoiden matemaattista ajattelua oli huomattavasti hankalampi tutkia, sillä analyysityökaluna käytettiin vain suunta-antavia teorioita ja malleja. Tästä ongelmasta johtuen, analyysistä tulee hyvin tulkinnanvaraiseksi, joka vaikuttaa hyvin paljon tutkimuksen luotettavuuteen. Pohdinnan tarkastelukriteerit pohjautuivat kuitenkin teoreettiseen viitekehykseen, johon voitiin siis luottaa, sillä nämä teoriat ovat käytetty myös muissa tutkimuksissa. Testi tehtiin yliopiston ensimmäisen vuoden opiskelijoiden matemaattista ajattelua, ja ne ovat saman suuntaisia Pohjolaisen [41] tutkimuksen kanssa. Tehty tutkimus osoitti myös sen, että on mahdollista hyödyntää IMO-tehtäviä [29].

Vaikuttiko ryhmien jäsenten lukumäärä suorituksiin? Tässä tutkimuksessa sitä oli vaikea nähdä. Testiä tehtiin lukuvuoden alussa, jolloin opiskelijoiden tasot saattoivat vaihdella ryhmässä voimakkaasti. Tutkimuksen aikana on opiskelijaryhmässä voinut olla tilanteita, joissa ryhmän ainoa osaava opiskelija tekee kaiken, tai ryhmä, jossa jäsenet tekevät erikseen kukin omalla tavalla. Tämän todettua, kahden ja kolmen hengenryhmien lukumäärällä ei ole merkitystä. Yksinlaskijoita oli kaksi, joten nämä ryhmät eivät ole vertailukelpoisia muihin ryhmiin verrattuna. Vaikeita tehtäviä kannattaa kuitenkin tehdä pienessä ryhmässä. Sofronioun tutkimuksen [45] mukaan ryhmässä oppiminen syventämään asian ymmärtämistä. Ryhmässä työskentelyssä opiskelijat yrittävät ajatella kriittisemmin, pyrkivät ymmärrykseen ulkolukua sijaan. Siksi vaikeita tehtäviä kannattaa ratkaista pienessä ryhmässä.

Tutkimukseen osallistuneiden opiskelijoiden tasoerot saattoivat olla isoja ja tutkimusotos on kohtuullisen pieni (39 ryhmää). Tällöin tätä tutkimusta ei anna yleistä kuvaa yliopiston ensimmäisen vuoden opiskelijoiden matemaattisesta ajattelusta, eikä tutkimusta voi siksi yleistää. Tutkimuksen tarkoitus oli antaa opettajille keino ja kehitysidea, jolla voidaan tarkastella opiskelijoiden ajattelua ja osaamista.

Tutkimusta on mahdollista toistaa ja sitä kannattaakin toistaa, paremmilla ehdoilla. Tehtäviä voisi olla enemmän ja niiden tyyppien ja tasojen vaihtelu olisi suurempi. Voitaisiin käyttää myös muiden kilpailujen tehtäviä. Testin tekemisen jälkeen voitaisiin tehdä kyselyä opiskelijoilta, mitä mieltä olivat tehtävistä. Annettaisiin enemmän aikaa tehtävien ratkaisemiseen.

LÄHTEET

[1] *2020 Mathematics Subject Classification*. 6. maaliskuuta 2020. URL: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html.

[2] M. Ahtee. *Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan*. Oy Edita Ab, 2000.

[3] E. Ala-Maakala. Matemaattinen ajattelu ja sähköiset ylioppilaskokeet. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, 2016. URL: http://urn.fi/URN:NBN:fi:uta-201612122779.

[4] S. M. Avital ja S. J. Shettleworth. Objectives for Mathematics Learning: Some Ideas for the Teacher. *Bulletin* 3 (1968).

[5] D. B. McLeod. Researh on affect in mathematics education: a reconceptualisation. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Toim. D. A. Grouws. National Council of Teacher of Mathematics, 1992. Luku 23.

[6] L. Burton. Mathematical Thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education* 15.1 (1984), 35–49.

[7] J. I. D. Campbell. *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press, 2005.

[8] D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic ja N. Petrovic. *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*. Springer, 2004.

[9] T. Dreyfus ja T. Eisenberg. On different facets of mathematical thnking. *The nature of Mathematical Thinking*. Toim. R. J. Sterberg ja T. Ben-Zeev. Lawrence Erlbaum Assosicates, 1996. Luku 9, 253–284.

[10] R. Driver. *The pupil as scientist?* Open University Press, 1983.

[11] M. Elbrink. Analyzing and Addressing Common Mathematical Errors in Secondary Education: an honors thesis. Barchelor Thesis. Ball State University, 2007.

[12] J. Erkkilä. "HAASTETTA, HUPIA, VERTA JA KYYNELEITÄ", Lukiolaisten suhtautuminen matematiikan opiskeluun. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, 2009. URL: http://urn.fi/urn:nbn:fi:uta-1-19835.

[13] J. Eskola ja J. Suoranta. *Johdatus laadullliseen tutkimukseen*. Ellibs, 1998.

[14] Greer ja Mulhern. *New Directions in Mathematics Education, Between the Ears*. Routledge, 1989.

[15] *IMO 2019, 60th International Matehamtical Olympiad*. 22. huhtikuuta 2020. URL: https://www.imo2019.uk/.

[16] *International Mathematical Olympiad Foundation*. 6. maaliskuuta 2020. URL: https://imof.co/.

[17] *International Mathematical Olympiad, Problems*. 22. huhtikuuta 2020. URL: https://www.imo-official.org/problems.aspx.

[18] J. Joutsenlahti. Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa. Lisensiaatintutkimus. Tampereen yliopisto, 1995.

[19] J. Joutsenlahti. Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1900-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Akateeminen väitöskirja. Tampereen yliopisto, 2005. URL: http://urn.fi/urn:isbn:951-44-6204-1.

[20] E. Kangasniemi. *Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia, 1989.

[21] E. Kangasniemi. *Opettajan uskomukset ja opetusmenetelmät sekä oppilaiden oppimistulokset matematiikassa*. Jyväskylän yliopisto, 2000.

[22] P. Kenderov. Competitions and mathematics education. *Proceedings oh the International Congress of Mathematicians, Vol. 3, 2006-01-01, ISBN 978-3-03719-022-7, pags. 1583-1598* 3 (tammikuu 2006).

[23] L. Killian, E. Cahill, C. Ryan, D. Suther ja D. Taccetta. Errors That Are Common in Multiplication. *JSTOR Journal, The Arithmetic Teacher* 27.5 (1980), 22–25.

[24] J. Kilpatrick, J. Swafford ja B. Findell. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press, 2001.

[25] T. Krook. Matematiikan esimerkit funktiokäsitteen opetuksessa. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, 2014. URL: http://urn.fi/URN:NBN:fi:uta-201406051604.

[26] V. A. Krutetskij ja J. Kilpatrick. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press, 1976.

[27] M. Kyttälä ja K. Kanerva. Työmuisti ja matemaattiset taidot. *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Toim. J. Joutsenlahti, H. Silfverberg ja P. Räsänen. Porvo: Niilo Mäki Instituutti, 2018. Luku 2, 220–239.

[28] J. Laarni ja P. Saariluoma. Ihmisen tiedonkäsittely. *Moderni kognitioteide*. Toim. P. Saariluoma, M. Kamppinen ja A. Hautamäki. Helsinki: Gaudeamus, 2001.

[29] M. Lehtinen. Ainedidaktiikan teorian ja käytännön tutkiminen, Matematiikkakilpailut ja matematiikan opetuksentutkimus - tarvitsevatko ne toisiaan? *Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja* A.18 (1995), 135–146.

[30] M. Lehtinen. *Kilpailumatematiikan opas. 2. painos*. Suomen matemaattinen yhdistys, Valmennusjaosto, 2017.

[31] J. Leino. matemaattisten kykyjen ja ajattelunprosessien kehittäminen kouluopetuksessa. *Helsingin yliopiston kasvatusteiteen laitos TUTKIMUKSIAl* 66 (1978).

[32] M.-L. Malmivuori. The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regulation of personal learning process : the case of mathematics. Väitöskirja. Helsingin yliopisto, 2001.

[33] D. B. McLeod ja V. M. Adams. *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*. New York: Springer-Verlag, 1989.

[34] Z. Mevarech ja B. Kramarski. *Critical Maths for Innovative Societies: The Role of Metaognitive Pedagogies*. OECD Publishing, 2014.

[35] T. Myllykoski, P. Mattila, S. Ali-Löytty, T. Kaarakka ja E. Viro. Yliopistomatematiikan sähköisten tehtävien virheluokittelun ja matemaattisen ajattelun kehittäminen. *FMSERA Journal* 2.1 (2018).

[36] I. Niiniluoto. Uskomuksia ilman tietoa?: *Könisberg*. Toim. T. Vehkavaara. Tampereen, 2000, 112–113.

[37] L. Oppenheimer ja R. P. Hunting. Relating fractions & decimals: Listening to students talk. *Reston* 4.5 (1999), 318–321.

[38] E. Pajarre. *Minä DI-opiskelijana - Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kokemuksia ja odotuksia yliopisto-opiskelusta*. Tampereen teknillinen yliopisto, 2012.

[39] E. Pehkonen. *The State-of-Art in Mathematics-related Belief Research: results of the MAVI activites*. Helsingin yliopisto, 1998.

[40] H. Perter B., F. Sister Jane ja H. John. Materials Development in Support of Mathematical Thinking. *ACM SIGCSE Bulletin* 35.2 (2003), 185–190.

[41] S. Pohjolainen, H. Raassina, K. Silius, M. Huikkola ja E. Turunen. *TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittäminen*. Tampereen teknillinen yliopisto, 2006.

[42] A. Poikola, P. Kola ja K. A. Hintikka, toim. *Julkinen data - johdatus tietovarantojen avaamiseen*. Liikenne- ja viestintäministeriö, Edita Prima Oy, 2010.

[43] G. Polya. *How to solve it : a new aspect of mathematical method*. Princeton university Press, 1971.

[44] M. J. Prince ja R. M. Felder. Inductive Teaching and Learning Methods: Definitions, Comparisons, and Research Bases. *Journal of Engineering Education* 95.2 (2006).

[45] A. Sofroniou ja K. Poutos. Investigating the Effectiveness of Group Work in Mathematics. *Education Sciences* 6.30 (2016).

[46] R. J. Sternberg ja T. Ben-Zeev. *The nature of matehmatical thinking*. Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

[47] M. Toivola, P. Peura ja M. Humaloja. *Flipped learning - Käänteinen oppiminen*. Edita Publishing Oy, 2017.

[48] A. Woolfol. *Educational Psychology, ninth edition*. Pearson Education, Inc., 2005.

[49] F. Xie, L. Zhang, X. Chen ja Z. Xin. Is Spatical Ability Related to Mathematical Ability: a Meta-analysis. *Educational Psychology Review* 37 (2020), 113–155.

[50] R. Yrjönsuuri. *Lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppiminen*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos, 1990.

A TRIGONOMETRISET KYSYMYKSET - LIITE

Nimet: (1-3 henkilöä)

- Luentomonisteen käyttö on sallittua.
- Älä käytä laskinta tehtävää tehdessäsi.
- Liitä suttupaperit mukaan ratkaisuun.

Ratkaisuja on tarkoitus analysoida Tuan Von diplomityössä.

☐ Annan luvan käyttää ratkaisuani tutkimuksessa.

☐ En anna lupaa käyttää ratkaisuani tutkimuksessa.

Kysymys 1:

Olkoon x kulma (eli reaaliluku). Olkoot a, b ja c mielivaltaisia reaalilukuja. Luku $\cos x$ toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0.$$

Johda sellainen toisen asteen yhtälö, jonka toteuttaa luku $\cos(2x)$. Eli etsi sellaiset kertoimet k, m ja n, että yhtälö

$$k \cos^2(2x) + m \cos(2x) + n = 0.$$

Vertaa näitä yhtälöitä tapauksessa $a = 4, b = 2$ ja $c = -1$.

Ratkaisu:

Nimet: (1-3 henkilöä)

- Luentomonisteen käyttö on sallittua.
- Älä käytä laskinta tehtävää tehdessäsi.
- Liitä suttupaperit mukaan ratkaisuun.

Ratkaisuja on tarkoitus analysoida Tuan Von diplomityössä.

☐ Annan luvan käyttää ratkaisuani tutkimuksessa.

☐ En anna lupaa käyttää ratkaisuani tutkimuksessa.

Kysymys 2:

Ratkaise täydellisesti yhtälö

$$\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1.$$

Ratkaisu:

Nimet: (1-3 henkilöä)

- Luentomonisteen käyttö on sallittua.
- Älä käytä laskinta tehtävää tehdessäsi.
- Liitä suttupaperit mukaan ratkaisuun.

Ratkaisuja on tarkoitus analysoida Tuan Von diplomityössä.

☐ Annan luvan käyttää ratkaisuani tutkimuksessa.

☐ En anna lupaa käyttää ratkaisuani tutkimuksessa.

Kysymys 3: Määritä kaikki välin $0 \le x \le 2\pi$ luvut x, jotka toteuttavat epäyhtälöt

$$2\cos x \le |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \le \sqrt{2}.$$

Ratkaisu:

B TEHTÄVIEN RATKAISUT - LIITE

Testin kysymys 1 - IMO 1959, tehtävä 3

Olkoon x kulma (eli reaaliluku). Olkoot a, b ja c mielivaltaisia reaalilukuja. Luku $\cos x$ toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0.$$

Johda sellainen toisen asteen yhtälö, jonka toteuttaa luku $\cos 2x$. Eli etsi sellaiset kertoimet k, m ja n, että yhtälö

$$k\cos^2 2x + m\cos 2x + n = 0.$$

Vertaa näitä yhtälöitä tapauksessa $a = 4, b = 2$ ja $c = -1$.

Ratkaisu:

Koska $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$, niin $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2x + 1)}$ kaikilla x:n arvoilla.

Tällöin voidaan lähteä oletuksesta

$$\begin{aligned}
a\cos^2 x + b\cos x + c &= 0\\
\frac{1}{2}a(\cos 2x + 1) \pm b\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\cos 2x + 1} + c &= 0\\
\frac{1}{2}a(\cos 2x + 1) + c &= \mp b\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\cos 2x + 1}\\
(\frac{1}{2}a(\cos 2x + 1))^2 + c^2 + ac(\cos 2x + 1) &= \frac{b^2}{2}(\cos 2x + 1)\\
\frac{a^2}{4}(\cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x) + c^2 + ac(\cos 2x + 1) &= \frac{b^2}{2}(\cos 2x + 1)\\
\frac{a^2}{4}\cos^2 2x + \cos 2x(\frac{a^2}{2} + ac - \frac{b^2}{2}) + (\frac{a^2}{4} + ac + c^2 - \frac{b^2}{2}) &= 0
\end{aligned}$$

Edellisestä yhtälöstä voidaan merkitä $k = \frac{a^2}{4}$, $m = (\frac{a^2}{2} + ac - \frac{b^2}{2})$ sekä $n = (\frac{a^2}{4} + ac + c^2 - \frac{b^2}{2})$, ja ovat reaalilukuja.

Oletuksesta saatiin muotoa

$$k\cos^2 2x + m\cos 2x + n = 0,$$

ja toiseen asteen yhtälön ratkaisuna on $\cos 2x$.

Jos $a = 4, b = 2$ ja $c = -1$, saadaan $k = 4, m = 2$ ja $n = -1$, eli tässä tapauksessa, molemmat $\cos 2x$ ja $\cos x$ toteuttavat saman toisen asteen yhtälön.

Testin kysymys 2 - IMO 1961, tehtävä 3

Ratkaise täydellisesti yhtälö

$$\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ \Rightarrow \cos^2(2x) &= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - (2\sin x \cos x)\sin x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \Rightarrow \cos^2(3x) &= 16\cos^6 x - 24\cos^4 x + 9\cos^2 x \end{aligned}$$

Saadaan, että

$$\begin{gathered} \cos^2 x + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + 16\cos^6 x - 24\cos^4 x + 9\cos^2 x = 1 \\ 16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x = 0 \\ \cos^2 x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 6) = 0. \end{gathered}$$

Tulon nollasäännön perusteella, yhtälö pätee jos $\cos^2 x = 0$ tai $(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 6) = 0$. Koska $\cos^2 x = 0$, saadaan $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, missä n on kokonaisluku. Tarkastellaan vielä tulon toista osaa:

$$
\begin{gathered}
16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 6 = 0 \\
\cos^2 x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 6}}{2 \cdot 16} = \frac{20 \pm 4}{32} = \frac{5 \pm 1}{8} \\
\cos^2 x = \frac{1}{2} \text{ tai } \cos^2 x = \frac{3}{4} \\
\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ tai } \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\
x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \text{ tai } x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ missä } n \in \mathbb{Z}.
\end{gathered}
$$

Ratkaisut ovat siis

$$
\begin{cases}
x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\
x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, & \qquad n \in \mathbb{Z} \\
x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n
\end{cases}
$$

Testin kysymys 3 - IMO 1965, tehtävä 1

Määritä kaikki välin $0 \leq x \leq 2\pi$ luvut x, jotka toteuttavat epäyhtälöt

$$2\cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}.$$

Ratkaisu:

Tutkitaan oikeanpuoleinen yhtälö:

$$
\begin{gathered}
|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}, \qquad -1 \leq \sin 2x \leq 1(\text{ juurettava ok.}) \\
(\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x})^2 \leq 2 \\
(1 + \sin 2x) + (1 - \sin 2x) - 2\sqrt{1 + \sin 2x}\sqrt{1 - \sin 2x} \leq 2 \\
2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} \leq 2 \\
-2\sqrt{\cos^2 2x} \leq 0 \\
-2 \cdot |\cos 2x| \leq 0
\end{gathered}
$$

ja yhtälö toteutuu kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

Tutkitaan nyt vasemmanpuoleinen:

$$2\cos x \leq |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}|$$

ja koska itseisarvo on ≥ 0, tällöin $\cos x \leq 0$, josta seuraa että $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

Tai muuten

$$\cos x \geq 0 \iff x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tai } x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \tag{B.1}$$

Voidaan nyt siis korottaa epäyhtälöä kahdella:

$$4\cos^2 x \leq (\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x})^2 \tag{B.2}$$
$$4\cos^2 x \leq 2 - 2|\cos 2x| \tag{B.3}$$
$$2\cos^2 x \leq 1 - |\cos 2x| \tag{B.4}$$
$$2(\frac{\cos 2x + 1}{2}) \leq 1 - |\cos 2x| \tag{B.5}$$
$$\cos 2x \leq -|\cos 2x|| \tag{B.6}$$
$$-\cos 2x \geq |\cos 2x| \tag{B.7}$$

Kun $\cos 2x > 0$, epäyhtälöstä tulee muotoon $-\cos 2x \geq \cos 2x$, joka on epätosi. Epäyhtälö B.7 on siis voimassa kun sekä $\cos 2x \leq 0$, että ehto B.1 toteuttavat, eli $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ tai $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

Sekä vasen, että oikeanpuoleisen ehdot täyttävät, x on oltava $[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ välillä.