Tampereen yliopisto

Olli Kosma

THEONIN TIKAPUUT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Huhtikuu 2020

Tiivistelmä

Olli Kosma: Theonin tikapuut
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Tässä kandidaattitutkielmassa esitellään Theonin tikapuut ja sen laajennuksia. Theonin tikapuut ovat antiikin Kreikan aikainen Theon Smyrnalaisen (140 jaa.) kehittämä menetelmä luvun $\sqrt{2}$ likiarvon laskemiseksi. Menetelmässä muodostetaan kaksi sarakkeinen taulukko, jonka alkioiden arvot määritellään rivi kerrallaan rekursiivisesti. Sarakkeiden alkioihin viitataan termeillä x_n ja y_n, missä n on rivin numero. Neliöjuuren likiarvo lasketaan näiden alkioiden suhdeluvusta $\frac{y_n}{x_n}$. Ensimmäisellä rivillä alkioiden x_1 ja y_1 arvoksi asetetaan 1. Tämän jälkeen alkioiden arvot lasketaan rekursiivisista yhtälöistä $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ ja $y_n = x_n + x_{n-1}$, kun $n = 2, 3, \ldots$.

Tutkielmassa tehdään Theonin tikapuiden laajennus, jonka avulla voidaan laskea likiarvoja kaikille luvuille $\sqrt{c}$, missä c on luonnollinen luku. Tämä tehdään muuttamalla termin y_n rekursiiviseksi yhtälöksi $y_n = x_n + (c-1)x_{n-1}$.

Toinen tutkielman laajennus mahdollistaa toisen asteen yhtälön ratkaisun likiarvon laskemisen Theonin tikapuilla. Tällöin ratkaistavan toisen asteen yhtälön muotona käytetään yhtälöä $r^2 - br - c = 0$, missä b ja c ovat reaalilukuja. Nyt käytettävät rekursiiviset yhtälöt ovat $x_n = (1-b)x_{n-1} + y_{n-1}$ ja $y_n = cx_{n-1} + y_{n-1}$. Muuten menetelmä pysyy samana. Tutkielmassa havaitaan rajoituksia menetelmän käytölle, kuten millaisilla vakioiden b ja c arvoilla Theonin tikapuut antavat toisen asteen yhtälön ratkaisuja. Lisäksi Theonin tikapuut antavat yhtälölle vain yhden ratkaisun, vaikka toisen asteen yhtälöllä voi olla kaksi ratkaisua.

Avainsanat: Theonin tikapuut, neliöjuuri, toisen asteen yhtälö

Sisältö

1 Johdanto

Tässä kandidaattitutkielmassa tutustutaan Theonin tikapuihin ja sen laajennuksiin. Theonin tikapuut ovat antiikin Kreikan aikainen Theon Smyrnalaisen (140 jaa.) kehittämä menetelmä luvun $\sqrt{2}$ likiarvon laskemiseksi. Menetelmässä muodostetaan kaksi sarakkeinen taulukko, eli menetelmän ”tikapuut”, jonka arvot määritellään rekursiivisilla yhtälöillä rivi kerrallaan. Poikkeuksena tähän on ensimmäinen rivi, jolloin molempien rivien arvoksi asetetaan luku 1. Neliöjuuren likiarvo lasketaan sarakkeiden välisestä suhdeluvusta. Tutkielmassa sarakkeiden alkioihin viitataan termeillä x_n ja y_n, missä n on rivin numero. Theonin tikapuiden käyttökohteita voidaan laajentaa muuttamalla käytettäviä rekursiivisia yhtälöitä.

Luvussa 2 esitellään perinteinen Theonin tikapuut, jolla voidaan laskea luvun $\sqrt{2}$ likiarvo ja kuinka sitä voidaan laajentaa kaikkien luonnollisten lukujen neliöjuuren likiarvon määrittämiseen. Pykälässä 2.1 muodostetaan Theonin tikapuut rekursiivisilla yhtälöillä ja lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{2}$. Lisäksi pykälässä osoitetaan sarakkeiden suhdeluvun $\frac{y_n}{x_n}$ supistuvan kohti luvun $\sqrt{2}$ likiarvoa olettaen, että raja-arvo on olemassa. Tämän jälkeen pykälässä 2.2 tehdään Theonin tikapuiden laajennus, jonka avulla tikapuilla voidaan laskea likiarvo vapaavalintaiselle luvulle $\sqrt{c}$, missä c on luonnollinen luku. Laajennus toteutetaan muuttamalla rekursiivinen yhtälö termille y_n. Pykälässä 2.3 muodostetaan apuyhtälö, jota käytetään raja-arvon $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \sqrt{c}$ olemassaolon todistamiseen seuraavassa pykälässä 2.4.

Luvussa 3 tehdään Theonin tikapuiden laajennus, jonka avulla Theonin tikapuiden menetelmää voidaan käyttää myös toisen asteen yhtälöiden ratkaisemiseen. Pykälässä 3.1 esitellään toisen asteen yhtälön ratkaisemiseen käytettävät termien x_n ja y_n rekursiiviset yhtälöt, sekä toisen asteen yhtälön muoto. Pykälässä 3.2 ratkaistaan esimerkkinä kolme toisen asteen yhtälöä Theonin tikapuiden avulla. Sarakkeiden suhdeluvun $\frac{y_n}{x_n}$ todistetaan supistuvan toisen asteen yhtälön ratkaisun likiarvoksi pykälässä 3.3. Pykälässä 3.4 osoitetaan pykälän 2.3 kaltaisen apuyhtälön olevan voimassa myös toisen asteen yhtälön rekursiivisilla yhtälöillä. Viimeisessä pykälässä 3.5 määritetään millaisilla vakioiden b ja c arvoilla Theonin tikapuille löytyy raja-arvo ja menetelmää voidaan käyttää toisen asteen yhtälön ratkaisemiseen.

Kandidaattitutkielman lähteenä on käytetty matemaattisia artikkeleita. Lukijan taustatietoina oletetaan olevan analyysin ja algebran perusteet.

2 Neliöjuuren likiarvon laskeminen Theonin tikapuilla

2.1 Luvun $\sqrt{2}$ laskeminen Theonin tikapuilla

Theonin tikapuut on antiikin Kreikan aikainen iteratiivinen menetelmä luvun $\sqrt{2}$ likiarvon laskemiseksi. Menetelmä on nimetty Theon Smyrnalaisen (140 jaa.) mukaan. [1, s. 222]

Menetelmässä muodostetaan taulukko, jossa on kaksi saraketta ja useita rivejä. Jatkossa taulukon vasemmanpuoleisen sarakkeen alkioita ovat termit x_n ja oikeanpuoleisen sarakkeen alkioita termit y_n, missä n on rivin numero. Taulukko on menetelmän "tikapuut" ja rivit "tikapuun poikkipuita". Ensimmäisellä rivillä, kun $n = 1$, molempien sarakkeiden arvoksi asetetaan 1. Tämän jälkeen muilla riveillä, kun $n > 1$, sarakkeiden alkioiden arvot määritellään rekursiivisesti yhtälöillä

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{2.1}$$

ja

$$y_n = x_n + x_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \dots). \tag{2.2}$$

Rivin $n = 2$ alkioiden arvot saadaan siis yhtälöistä $x_2 = x_1 + y_1 = 1 + 1 = 2$ ja $y_2 = x_2 + x_1 = 2 + 1 = 3$. Taulukossa 2.1 on esitetty Theonin tikapuiden ensimmäiset seitsemän poikkipuuta.

Taulukko 2.1. Theonin tikapuiden ensimmäiset seitsemän poikkipuuta

x_n	y_n
1	1
2	3
5	7
12	17
29	47
70	99
169	239

Neliöjuuren likiarvo saadaan sarakkeiden suhdeluvusta $\frac{y_n}{x_n}$. Rivillä $n = 3$ olisi kahden neliöjuuren likiarvo siis $\frac{y_3}{x_3} = \frac{7}{5} = 1{,}4$. Taulukossa 2.2 on esitetty Theonin tikapuiden mukainen likiarvo luvulle $\sqrt{2}$ ensimmäisen 12 iteraation aikana. Taulukosta on nähtävissä, että neliöjuuren likiarvon tarkkuus on riippuvainen iteraatioiden lukumäärästä. Likiarvosta tulee tarkempi, mitä enemmän iteraatioita on.

Taulukko 2.2. Theonin tikapuut $\sqrt{2}$ likiarvon laskemiseksi

n	x_n	y_n	$\frac{y_n}{x_n}$
1	1	1	1,00000000
2	2	3	1,50000000
3	5	7	1,40000000
4	12	17	1,41666667
5	29	41	1,41379310
6	70	99	1,41428571
7	169	239	1,41420118
8	408	577	1,41421569
9	985	1393	1,41421320
10	2378	3363	1,41421362
11	5741	8119	1,41421355
12	13860	19601	1,41421356

Osoitetaan seuraavaksi suhdeluvun $\frac{y_n}{x_n}$ olevan luvun 2 neliöjuuren likiarvo (vrt. [1, s. 223–224]).

Muodostetaan aluksi yhtälö jakamalla yhtälö (2.2) yhtälöllä (2.1), jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{x_n + x_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}.$$

Jaetaan oikean puolen murtoluvun nimittäjä ja osoittaja termillä x_{n-1}, jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{x_n}{x_{n-1}} + 1}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{x-1}}}.$$

Sijoitetaan oikeanpuoleiseen lausekkeeseen termin x_n paikalle yhtälön (2.1) antama arvo, jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1}} + 1}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{x-1}}} = \frac{2 + \frac{y_{n-1}}{x_{x-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{x-1}}}.$$

Oletetaan, että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = r$ on olemassa, jollain reaaliluvulla r. Raja-arvon olemassaolo todistetaan myöhemmin tässä luvussa. Sijoitetaan raja-arvo r yhtälöön, jolloin

$$r = \frac{2+r}{1+r}.$$

Kerrotaan puolittain oikean puolen nimittäjällä $1 + r$, jolloin

$$r + r^2 = 2 + r.$$

Vähennetään yhtälöstä r, jolloin

$$r^2 = 2.$$

Otetaan neliöjuuri puolittain, jolloin

$$r = \sqrt{2}.$$

Näin ollen $r = \sqrt{2}$, kun $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = r$.

2.2 Luonnollisten lukujen neliöjuuren laskeminen Theonin tikapuilla

Tehdään Theonin tikapuiden laajennus, jonka avulla voidaan laskea likiarvo mille tahansa luvulle $\sqrt{c}$, missä c on luonnollinen luku ja $c \geq 1$. Nyt rekursiiviset yhtälöt sarakkeiden alkioille x_n ja y_n ovat

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{2.3}$$

ja

$$y_n = x_n + (c-1)x_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{2.4}$$

Huomataan, että alkion x_n määrittävät yhtälöt (2.1) ja (2.3) ovat samat. Sen sijaan alkion y_n määrittävissä yhtälöissä, (2.2) ja (2.4), on erona termin x_{n-1} kerroin. Mikäli $c = 2$, eli luvun 2 neliöjuurta määrittäessä, ovat yhtälöt (2.2) ja (2.4) samat. Lasketaan esimerkiksi laajennuksen käytöstä likiarvo luvulle $\sqrt{5}$, jolloin yhtälö (2.4) on $y_n = x_n + (5-1)x_{n-1} = x_n + 4x_{n-1}$. Taulukossa 2.3 on esitetty poikkipuut ja neliöjuuren likiarvot, kun $c = 5$.

Osoitetaan seuraavaksi laajennuksen sarakkeiden suhdeluvun $\frac{y_n}{x_n}$ olevan luvun $\sqrt{c}$ likiarvo, kun x_n ja y_n on määritelty yhtälöillä (2.3) ja (2.4). Osoitus tehdään samalla tavalla kuin kahden neliöjuuren yhteydessä.

Taulukko 2.3. Theonin tikapuut luvun $\sqrt{5}$ likiarvon määrittämiseksi

n	x_n	y_n	$\frac{y_n}{x_n}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = 1{,}0000$
2	2	6	$\frac{6}{2} = 3{,}0000$
3	8	16	$\frac{16}{8} = 2{,}0000$
4	24	56	$\frac{56}{24} = 2{,}3333$
5	80	176	$\frac{176}{80} = 2{,}2000$
6	256	576	$\frac{576}{256} = 2{,}2500$
7	832	1856	$\frac{1856}{832} = 2{,}2308$
8	2688	6016	$\frac{6016}{2688} = 2{,}2381$
9	8704	19456	$\frac{19456}{8704} = 2{,}2353$
10	28160	62976	$\frac{62976}{28160} = 2{,}2364$

Muodostetaan yhtälö jakamalla yhtälö (2.4) puolittain yhtälöllä (2.3)

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{x_n + (c-1)x_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}.$$

Jaetaan oikeanpuoleisen murtoluvun nimittäjä ja osoittaja luvulla x_{n-1}, jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{x_n}{x_{n-1}} + (c-1)}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}.$$

Tehdään oikeanpuoleiseen lausekkeeseen termin x_n yhtälön (2.3) mukainen sijoitus, jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1}} + (c-1)}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}} = \frac{c + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}.$$

Oletetaan, että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = r$ on olemassa jollakin reaaliluvulla r. Sijoitetaan tämä yhtälöön molemmille puolille, jolloin

$$r = \frac{c + r}{1 + r}.$$

Kerrotaan yhtälö vasemman puolen nimittäjällä $1 + r$, jolloin

$$r + r^2 = c + r.$$

Vähennetään yhtälöstä r, jolloin

$$r^2 = c.$$

Otetaan neliöjuuri puolittain, jolloin

$$r = \sqrt{c}.$$

Näin ollen $r = \sqrt{c}$, kun $\lim_{x\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = r$.

2.3 Apuyhtälön $y_n - \sqrt{c}x_n = (1 - \sqrt{c})^n$ todistus

Todistetaan yhtälö induktiolla luvun n suhteen (vrt.[1, s. 224]).

$$y_n - \sqrt{c}x_n = (1 - \sqrt{c})^n \tag{2.5}$$

Perusaskel: Kun $n = 1$, niin $x_1 = 1$ ja $y_1 = 1$, jolloin

$$1 - \sqrt{c} \cdot 1 = (1 - \sqrt{c})^1$$

joten yhtälö (2.5) on silloin tosi.
Induktio-oletus: Oletetaan yhtälön pitävän paikkansa, kun $n = N$, ts.

$$y_N - \sqrt{c}x_N = (1 - \sqrt{c})^N.$$

Induktioväite:

$$y_{N+1} - \sqrt{c}x_{N+1} = (1 - \sqrt{c})^{N+1}$$

Todistus: Todistetaan induktioväite oikealta vasemmalle:

$$(1-\sqrt{c})^{N+1} = (1-\sqrt{c})^N(1-\sqrt{c}) \overset{\text{IO}}{=} (y_N-\sqrt{c}x_N)(1-\sqrt{c}) = (cx_N+y_N)-\sqrt{c}(x_N+y_N)$$

Yhtälön (2.3) perusteella $x_{N+1} = x_N + y_N$, joten

$$(cx_N + y_N) - \sqrt{c}(x_N + y_N) = (cx_N + y_N) - \sqrt{c}x_{N+1}.$$

Vastaavasti yhtälöiden (2.3) ja (2.4) perusteella

$$(cx_N + y_N) = (c - 1)x_N + x_N + y_N = (c - 1)x_N + x_{N+1} = y_{N+1}.$$

Nyt

$$(cx_N + y_N) - \sqrt{c}x_{N+1} = y_{N+1} - \sqrt{c}x_{N+1}.$$

Näin ollen

$$(1 - \sqrt{c})^{N+1} = y_{N+1} - \sqrt{c}x_{N+1},$$

eli induktioväite on tosi.
Induktioperiaatteen nojalla $(1 - \sqrt{c})^n = y_n - \sqrt{c}x_n$, kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

□

2.4 Raja-arvon olemassaolon todistaminen

Suhdeluku $\frac{y_n}{x_n}$ suppenee kohti raja-arvoa $r = \sqrt{c}$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen rivi-indeksi n_1, että $|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{c}| < \varepsilon$, kun $n \geq n_1$. Erotuksen $|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{c}|$ tulisi siis supeta kohti nollaa.

Todistus 1. (vrt.[1, s. 225]) Muodostetaan aluksi yhtälö jakamalla yhtälö (2.5) termillä x_n, jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{c} = \frac{(\sqrt{c}-1)^n}{x_n}.$$

Koska $c \geq 1$ ja $x_n \geq 1$ kaikilla luvuilla n, niin voimme laittaa yhtälön vasemman puolen itseisarvoksi, jolloin saamme yhtälön muotoon

$$|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{c}| = \frac{(\sqrt{c}-1)^n}{x_n}. \tag{2.6}$$

Muokataan seuraavaksi yhtälö (2.3) muotoon, jossa voimme esittää alkion x_n pelkillä sarakkeen x arvoilla. Yhtälön (2.4) mukaisesti y_{n-1} voidaan esittää muodossa $y_{n-1} = x_{n-1} + (c-1)x_{n-2}$. Sijoitetaan tämä lauseke yhtälöön (2.3), jolloin

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-1} + (c-1)x_{n-2} = 2x_{n-1} + (c-1)x_{n-2}.$$

Tästä yhtälöstä voidaan havaita, että $x_n > (c-1)x_{n-2}$. Vastaavasti, koska $x_{n-2} = 2x_{n-3} + (c-1)x_{n-4}$, niin $x_n > (c-1)^2 x_{n-4}$. Samalla tavalla havaitaan, että koska $x_{n-4} = 2x_{n-5} + (c-1)x_{n-6}$, niin $x_n > (c-1)^3 x_{n-6}$. Näin jatkamalla havaitaan, että $x_{2n} > (c-1)^n$ ja $x_{2n+1} > (c-1)^n$. Käytetään seuraavaksi tätä havaintoa yhtälössä (2.6).

Tutkitaan ensin yhtälöä (2.6), kun rivin indeksi on parillinen luku:

$$|\frac{y_{2n}}{x_{2n}} - \sqrt{c}| = \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n}}{x_{2n}} < \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n}}{(c-1)^n} = (\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1})^n,$$

ja vastaavasti rivin indeksin ollessa pariton luku:

$$|\frac{y_{2n+1}}{x_{2n+1}} - \sqrt{c}| = \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n+1}}{x_{2n+1}} < \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n+1}}{(c-1)^n} = (\sqrt{c}-1)(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1})^n.$$

Koska $(\sqrt{c}-1) < (\sqrt{c}+1)$ kaikilla luonnollisilla luvuilla c, niin $\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1} < 1$. Täten $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1})^n = 0$. Näin ollen erotus $|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{c}|$ on siis lopulta mielivaltaisen pieni, joten $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \sqrt{c}$. □

3 Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen Theonin tikapuilla

3.1 Johdanto toisen asteen yhtälön ratkaisemiseen Theonin tikapuilla

Muuttamalla sarakkeiden rekursiivisia yhtälöitä Theonin tikapuita voidaan soveltaa myös toisen asteen yhtälön ratkaisemiseen. Yleensä toisen asteen yhtälön normaalimuoto on $ar^2 + br + c = 0$, kun $a \neq 0$. Theonin tikapuiden laajennuksessa käytetään kuitenkin toisen asteen yhtälölle hieman erilaista normaalimuotoa, joka on

$$r^2 - br - c = 0. \tag{3.1}$$

Theonin tikapuita käyttäessä pitää huomioida siis, että ratkaistava yhtälö on yhtälön (3.1) muodossa, jotta rekursiivisissa yhtälöissä käytettävät vakiot b ja c ovat oikein. Nyt sarakkeiden rekursiiviset yhtälöt ovat

$$x_n = (1 - b)x_{n-1} + y_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{3.2}$$

ja

$$y_n = cx_{n-1} + y_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{3.3}$$

Kuten neliöjuuren tapauksessa, niin $x_1 = 1$ ja $y_1 = 1$.Yhtälön ratkaisun likiarvo lasketaan sarakkeiden välisestä suhdeluvusta $\frac{y_n}{x_n}$. [3, s. 1–2]

Johdetaan seuraavaksi toisen asteen yhtälön juurien kaavat. Aloitetaan johtaminen yhtälöstä (3.1):

$$r^2 - br - c = 0.$$

Siirretään vakio c, jolloin

$$r^2 - br = c.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla 4, jolloin

$$4r^2 - 4br = 4c.$$

Lisätään yhtälön molemmille puolille b^2, joten

$$4r^2 - 4br + b^2 = b^2 + 4c$$

$$(2r-b)^2 = b^2 + 4c.$$

Otetaan neliöjuuri puolittain, jolloin

$$2r - b = \pm\sqrt{b^2+4c}.$$

Siirretään vakio b, jolloin

$$2r = \pm\sqrt{b^2+4c} + b.$$

Jaetaan yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin on muodostettu toisen asteen yhtälön juurien kaavat

$$r = \frac{b+\sqrt{b^2+4c}}{2} \tag{3.4}$$

ja

$$r = \frac{b-\sqrt{b^2+4c}}{2}. \tag{3.5}$$

Vaikka on osoitettu, että toisen asteen yhtälöillä voi olla kaksi ratkaisua, niin Theonin tikapuut antavat kuitenkin yleensä vain yhden ratkaisun.

3.2 Esimerkkejä toisen asteen yhtälöiden ratkaisemisesta Theonin tikapuilla

Ratkaistaan toisen asteen yhtälöitä esimerkiksi Theonin tikapuiden soveltamisesta.

Esimerkki 3.1. Ratkaistaan yhtälö $-3r^2 - 6r + 24 = 0$ Theonin tikapuiden avulla.

Muutetaan yhtälö yhtälön (3.1) mukaiseksi. Jaetaan yhtälö luvulla -3, jolloin $r^2 + 2r - 8 = 0$, missä $b = -2$ ja $c = 8$. Rekursiiviset yhtälöt ovat

$$x_n = (1-(-2))x_{n-1} + y_{n-1} = 3x_{n-1} + y_{n-1}$$

ja

$$y_n = 8x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Nyt voidaan muodostaa Theonin tikapuut, jonka ensimmäiset kahdeksan poikkipuuta ratkaisun likiarvolla on esillä taulukossa 3.1. Taulukosta on havaittavissa, että likiarvot supistuvat kohti lukua 2.

Ratkaistaan vertailuksi yhtälö myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, jolloin ratkaisuiksi saadaan

$$r = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot(-3)\cdot 24}}{2(-3)} = \frac{6 \pm 18}{-6} = \begin{cases} \frac{6+18}{-6} = -4, \\ \frac{6-18}{-6} = 2. \end{cases}$$

Taulukko 3.1. Theonin tikapuut yhtälön ratkaisemiseksi

n	x_n	y_n	$\frac{y_n}{x_n}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = 1{,}00000$
2	4	9	$\frac{9}{4} = 2{,}25000$
3	21	41	$\frac{41}{21} = 1{,}95238$
4	104	209	$\frac{209}{104} = 2{,}00961$
5	521	1041	$\frac{1041}{521} = 1{,}99808$
6	2604	5209	$\frac{5209}{2604} = 2{,}00038$
7	13021	26041	$\frac{26041}{13021} = 1{,}99992$
8	65104	130209	$\frac{130209}{65104} = 2{,}00001$

Yhtälöllä on siis kaksi ratkaisua, $r = -4$ tai $r = 2$, joista toinen, $r = 2$, saatiin laskettua Theonin tikapuiden avulla.

Esimerkki 3.2. Ratkaistaan Theonin tikapuilla yhtälö $r^2 + 2r = 0$.

Nyt yhtälön vakiot ovat $b = -2$ ja $c = 0$, joten rekursiiviset yhtälöt ovat

$$x_n = (1 - (-2))x_{n-1} + y_{n-1} = 3x_{n-1} + y_{n-1}$$

ja

$$y_n = y_{n-1}.$$

Koska molempien sarakkeiden ensimmäisen rivin alkioiden arvot ovat 1, niin $y_n = y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = 1$. Täten toisen asteen yhtälön ratkaisuksi saadaan $\frac{1}{x_n}$. Toisaalta on havaittavissa, että x_n on aina positiivinen ja kasvava, joten $\frac{1}{x_n}$ supistuu kohti lukua 0.

Toisaalta $r^2 + 2r = r(r+2)$, joten yhtälön ratkaisut ovat $r = 0$ ja $r = -2$. Theonin tikapuiden avulla löydettiin siis ratkaisuista suurempi.

Esimerkki 3.3. Ratkaistaan yhtälö $r^2 - 2r - 3 = 0$ Theonin tikapuilla.

Ratkaistavan yhtälön vakiot ovat $b = 2$ ja $c = 3$, joten rekursiiviset yhtälöt ovat

$$x_n = (1 - 2)x_{n-1} + y_{n-1} = -x_{n-1} + y_{n-1}$$

ja

$$y_n = 3x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Taulukkoon 3.2 on muodostettu Theonin tikapuut yhtälölle $r^2 - 2r - 3 = 0$. Tikapuista on havaittavissa ongelma, sillä alkio x_n on joka toisella rivillä 0, johtuen sarakkeen rekursiivisen yhtälön negatiivisesta kertoimesta termiä x_{n-1} kohtaan.

Taulukko 3.2. Theonin tikapuut yhtälölle $r^2 - 2r - 3 = 0$

x_n	y_n
1	1
0	2
2	2
0	4
4	4
0	8
8	8

Lisäksi muiden rivien mukainen suhdeluku $\frac{y_n}{x_n} = 1$ ei selvästikään ole yhtälön ratkaisu, sillä sijoittamalla $r = 1$ yhtälöön saadaan $1^2 - 2 - 3 = -4 \neq 0$.

Yhtälölle on kuitenkin ratkaisuja ja toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaisesti

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3, \\ \frac{2-4}{2} = -1. \end{cases}$$

Täten Theonin tikapuilla ei voida ratkaista yhtälöitä tapauksissa, missä $b = 2$.

Ratkaistaan esimerkki uudestaan käyttämällä erilailla määritettyjä rekursiivisia yhtälöitä. Nyt Casey Horganin ja Kurt Herzingering,[2, s. 151], mukaiset rekursiiviset yhtälöt ovat

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{3.6}$$

ja

$$y_n = cx_{n-1} + (1 + b)y_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \dots). \tag{3.7}$$

Sijoitetaan vakiot $b = 2$ ja $c = 3$ rekursiivisiin yhtälöihin (3.6) ja (3.7), jolloin

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

ja

$$y_n = 3x_{n-1} + (1 + 2)y_{n-1} = 3x_{n-1} + 3y_{n-1} = 3(x_{n-1} + y_{n-1}) = 3x_n.$$

Rekursiivisien yhtälöiden perusteella $\frac{y_n}{x_n} = \frac{3x_n}{x_n} = 3$. Näin ollen vaihtoehtoisilla rekursiivisilla yhtälöillä löydettiin yhtälön ratkaisuista suurempi.

3.3 Osoitus suhdeluvun $\frac{y_n}{x_n}$ supistumisesta toisen asteen yhtälön ratkaisuksi

Osoitetaan seuraavaksi, että sarakkeiden suhdeluku $\frac{y_n}{x_n}$ supistuu kohti toisen asteen yhtälön ratkaisua (vrt. [3, s. 3]).

Muodostetaan aluksi yhtälö jakamalla yhtälö (3.3) puolittain yhtälöllä (3.2), jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{cx_{n-1} + y_{n-1}}{(1-b)x_{n-1} + y_{n-1}}.$$

Jaetaan muodostetun yhtälön oikea puoli termillä x_{n-1}, jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{c + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{(1-b) + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}.$$

Oletetaan, että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = r$ on olemassa, jonka sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$r = \frac{c + r}{1 - b + r}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain nimittäjällä $(1 - b + r)$, jolloin

$$r - br + r^2 = c + r.$$

Vähennetään yhtälöstä puolittain luku $(c + r)$, jolloin

$$r^2 - br - c = 0.$$

On siis osoitettu, että mikäli $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = r$ on olemassa, niin $\frac{y_n}{x_n}$ supistuu kohti yhtälön $r^2 - br - c = 0$ ratkaisua.

3.4 Apuyhtälön $y_n - rx_n = (1-r)^n$ todistus

Olemme aiemmin todistaneet pykälässä 2.3, että Theonin tikapuiden rekursiivisille yhtälöille pätee $y_n - \sqrt{c}x_n = (1 - \sqrt{c})^n$. Todistetaan vastaavan yhtälön

$$y_n - rx_n = (1-r)^n, \tag{3.8}$$

olevan voimassa myös toisen asteen yhtälön rekursiivisilla yhtälöillä. Todistus tehdään induktiolla luvun n suhteen (vrt. [3, s. 4]).

Perusaskel: Kun $n = 1$, niin $x_1 = 1$ ja $y_1 = 1$, jolloin

$$1 - r \cdot 1 = (1-r)^1$$

joten yhtälö (3.8) on silloin tosi.

Induktio-oletus: Oletetaan yhtälön pitävän paikkansa, kun $n = N$, ts.

$$y_N - rx_N = (1-r)^N.$$

Induktioväite:

$$y_{N+1} - rx_{N+1} = (1-r)^{N+1}.$$

Todistus:

Todistetaan induktioväite oikealta vasemmalle:

$$(1-r)^{N+1} = (1-r)(1-r)^N \overset{\text{IO}}{=} (1-r)(y_N - rx_N) = y_N - rx_N - ry_N + r^2 x_N = (r^2 x_N + y_N) - (x_N + y_N)r.$$

Toisen asteen yhtälö (3.1) voidaan uudelleen järjestää muotoon $r^2 = br + c$, jolloin

$$\begin{aligned}(r^2 x_N + y_N) - (x_N + y_N)r &= ((br + c)x_N + y_N) - (x_N + y_N)r \\ &= brx_N + cx_N + y_N - x_N r y_N r = (cx_N + y_N) - ((1-b)x_N + y_N)r.\end{aligned}$$

Tarkastellaan yhtälöitä (3.2) ja (3.3), kun $n = N + 1$. Tällöin $x_{N+1} = (1-b)x_N + y_N$ ja $y_{N+1} = cx_N + y_N$. Näiden perusteella

$$(cx_N + y_N) - ((1-b)x_N + y_N)r = y_{N+1} - x_{N+1}r,$$

joten induktioväite on tosi.

Induktioperiaatteen nojalla $y_n - rx_n = (1-r)^n$, kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

□

3.5 Vakioihin b ja c liittyvät rajoitukset raja-arvon olemassaololle

Esimerkin 3.3 perusteella tiedetään, että joillakin vakioiden b ja c arvoilla Theonin tikapuilla ei voida ratkaista toisen asteen yhtälöä riippuen määritellyistä rekursiivisista yhtälöistä. Määritetään tässä pykälässä, millaisilla vakioiden b ja c rajoituksilla voimme ratkaista toisen asteen yhtälön eli milloin on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = r$, kun rekursiivisina yhtälöinä käytetään yhtälöitä (3.2) ja (3.3).

Vakioiden rajoituksia määrittäessä tulee huomioida, että kaikilla toisen asteen yhtälöillä ei ole reaalisia nollakohtia. Toisen asteen yhtälöiden ratkaisukaavoista (3.4) ja (3.5) on havaittavissa, että toisen asteen yhtälöillä on olemassa reaalisia ratkaisuja, kun $b^2 + 4c \geq 0$.

Pykälässä 2.4 todistettiin raja-arvon olemassaolo osoittamalla erotuksen $|\frac{y_n}{x_n} - r|$ olevan lopulta äärimmäisen pieni, mutta ei kuitenkaan nolla.

Muodostetaan aluksi erotuksen yhtälö jakamalla yhtälö (3.8) puolittain termillä x_n, jolloin

$$\frac{y_n}{x_n} - r = \frac{(1-r)^n}{x_n}.$$

Otetaan yhtälöstä itseisarvo puolittain. Nyt

$$|\frac{y_n}{x_n} - r| = \frac{|1-r|^n}{|x_n|}, \tag{3.9}$$

missä yhtälön vasen puoli on haluttu erotus. Raja-arvon olemassaolon todistuksessa pitää siis tutkia, kuinka vakioiden b ja c arvot vaikuttavat yhtälön oikeaan puoleen $\frac{|1-r|^n}{|x_n|}$ ja milloin tämä suppenee kohti lukua 0.

Todistetaan raja-arvon olemassaolo tilanteessa, missä $b \leq 1$ ja $c > 0$ (vrt. [3, s. 4–5]).

Kun $b \leq 1$ ja $c > 0$, niin $b^2 + 4c \geq 0$ on aina tosi, joten toisen asteen yhtälöillä on tällöin aina olemassa ratkaisuja. Lisäksi nyt rekursiivisten yhtälöiden (3.2) ja (3.3) termit ovat aina positiivisia ja kasvavia. Tällöin suhdeluku $\frac{y_n}{x_n}$ on aina positiivinen eli toisen asteen yhtälöille saadaan aina positiivisia ratkaisuja Theonin tikapuilla. Ratkaisukaavojen yhtälöistä yhtälö (3.4) antaa aina positiivisen ratkaisun, joten nyt sovellettava ratkaisukaava on

$$r = \frac{\sqrt{b^2+4c} + b}{2}.$$

Koska x_n on positiivinen ja kasvaa rajatta, niin riittää osoittaa että $|1 - r| \leq 1$. Sijoitetaan termin r paikalle ratkaisukaavan antama arvo termille. Nyt $|1 - \frac{\sqrt{b^2+4c}+b}{2}| \leq 1$, jolloin itseisarvon poistamalla

$$-1 \leq 1 - \frac{\sqrt{b^2+4c} + b}{2} \leq 1.$$

Vähennetään epäyhtälöstä luku 1, jolloin

$$-2 \leq -\frac{\sqrt{b^2+4c} + b}{2} \leq 0.$$

Kerrotaan epäyhtälö luvulla -2, jolloin

$$\sqrt{b^2+4c} + b \leq 4.$$

Siirretään vakio b, jolloin

$$\sqrt{b^2+4c} \leq 4 - b.$$

Molemmat puolet ovat positiivisia, joten voimme korottaa epäyhtälön puolittain neliöön

$$b^2 + 4c \leq 16 - 8b + b^2.$$

Vähennetään epäyhtälöstä b^2 ja siirretään $8b$ vasemmalle puolelle, jolloin

$$4c + 8b \leq 16.$$

Jaetaan epäyhtälö puolittain luvulla 4, jolloin saadaan

$$c + 2b \leq 4.$$

Näin ollen, kun

$$b \leq 1, c > 0 \text{ ja } c + 2b \leq 4,$$

niin $|r - 1| \leq 1$, jolloin $\frac{y_n}{x_n}$ supistuu kohti toisen asteen yhtälön ratkaisua.

Lähteet

[1] Giberson, Shaun & Osler, Thomas. (2004). Extending Theon's Ladder to Any Square Root. The College Mathematics Journal. 35, 222–226.

[2] Horgan, Casey & Herzinger, Kurt. (2014). A further investigation of using Theon's ladder to find roots of quadratic equations, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45:1, 150–158

[3] Osler, Thomas. (2007). Using Theon's ladder to find roots of quadratic equations. Mathematics and Computer Education, 42.1.