Lumi Suomalainen

ALARAJA-ARVO JA YLÄRAJA-ARVO

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Maaliskuu 2020

Tiivistelmä

Lumi Suomalainen: Alaraja-arvo ja yläraja-arvo
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Maaliskuu 2020

Tässä tutkielmassa käsittelemme lukujonojen alaraja-arvoa ja yläraja-arvoa. Tarkastelemme alaraja-arvon ja yläraja-arvon yksikäsitteisyyttä ja olemassaoloa. Todistamme myös, että rajoitetulla reaalilukujonolla on olemassa suppeneva osajono. Tätä tulosta sanotaan Bolzanon-Weierstrassin lauseeksi.

Avainsanat: raja-arvo, alaraja-arvo, yläraja-arvo, lukujono, suppeneminen, hajaantuminen, Bolzanon-Weierstrassin lause

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman luvussa 3 tarkastelemme lukujonojen alaraja-arvoa ja yläraja-arvoa.

Ensimmäiseksi määrittelemme alaraja-arvon ja yläraja-arvon käsitteet. Alaraja-arvo on arvo, jota lukujono lähestyy alapuolelta, kun muuttuja tai jonon indeksi lähestyy tiettyä arvoa. Vastaavasti yläraja-arvo on arvo, jota lukujono lähestyy yläpuolelta, kun muuttuja tai jonon indeksi lähestyy tiettyä arvoa. Määrittelemme myös, milloin lukujono lähestyy positiivista tai negatiivista ääretöntä. Toiseksi todistamme alaraja-arvon ja yläraja-arvon olevan yksikäsitteisiä. Kolmanneksi todistamme raja-arvon olevan olemassa vain silloin, kun yläraja-arvo ja alaraja-arvo ovat yhtä suuret.

Luvussa 4 todistamme, että rajoitetulla reaalilukujonolla on olemassa suppeneva osajono. Tätä tulosta sanotaan jonoja koskevaksi Bolzanon-Weierstrassin lauseeksi. Sitä ennen kuitenkin esitämme kuristusperiaatteen. Kuristusperiaatteen nojalla voimme määrittää lukujonon raja-arvon, kun tiedämme sitä suuremman tai yhtä suuren lukujonon ja sitä pienemmän tai yhtä suuren lukujonon raja-arvojen olevan yhtä suuret.

Luvussa 2 käymme läpi valmistelevia tarkasteluja, jotka pitävät sisällään lukujonoihin ja raja-arvoon liittyviä määritelmiä, lauseita ja esimerkkejä.

Lukijalta edellytämme joidenkin analyysin perusasioiden tuntemista. Lähdeteoksina käytämme Lebl'n teosta Basic analysis: Introduction to real analysis, Trenchin teosta Introduction to real analysis sekä Thomsonin, Brucknerin ja Brucknerin teosta Elementary real analysis.

2 Valmistelevia tarkasteluja

2.1 Lukujonot ja raja-arvo

Luku 2.1 pohjautuu Lebl'n teokseen [1, s. 43–45].

Määritelmä 2.1. (Reaali)lukujono on funktio $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Merkinnän $x(n)$ sijaan merkitsemme yleensä n:ttä alkiota alaindeksillä tähän tapaan: x_n. Käytämme merkintää $\{x_n\}$ tai tarkemmin merkintää

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

lukujonosta. Lukujono $\{x_n\}$ on rajoitettu, kun on olemassa sellainen $B \in \mathbb{R}$, että $|x_n| \leq B$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen, lukujono $\{x_n\}$ on rajoitettu aina, kun joukko $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu.

Määritelmä 2.2. Lukujonon $\{x_n\}$ sanotaan suppenevan kohti lukua $x \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $M \in \mathbb{N}$, että $|x_n - x| < \varepsilon$ jokaisella $n \geq M$. Luvun x sanotaan olevan lukujonon $\{x_n\}$ raja-arvo. Kirjoitetaan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Lukujonon, joka suppenee, sanotaan olevan suppeneva. Muuten lukujonon sanotaan olevan hajaantuva.

Esimerkki 2.3. Lukujono $\left\{\frac{2}{3n}\right\}$ on suppeneva ja $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3n} = 0$.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $M \in \mathbb{N}$, että $0 < \frac{2}{3M} < \varepsilon$. Silloin jokaisella $n \geq M$ pätee yhtälö

$$|x_n - 0| = \left|\frac{2}{3n}\right| = \frac{2}{3n} \leq \frac{2}{3M} < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Lause 2.4. *Suppenevalla lukujonolla on yksikäsitteinen raja-arvo.*

Todistus. Oletetaan, että lukujonolla $\{x_n\}$ on raja-arvo x ja raja-arvo y. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Määritelmästä saamme alkion M_1, jolle pätee, että jokaisella $n \geq M_1$, $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vastaavasti löydämme sellaisen alkion M_2, että jokaisella $n \geq M_2$, $|x_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Valitaan $M = \max\{M_1, M_2\}$. Kun $n \geq M$, niin

$$\begin{aligned}|y - x| &= |x_n - x - (x_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |x_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Siis $|y - x| < \varepsilon$ jokaisella $\varepsilon > 0$, joten $|y - x| = 0$ ja $y = x$. Siitä johtuen raja-arvo (jos se on olemassa) on yksikäsitteinen. $\square$

2.2 Kohti ääretöntä hajaantuvat lukujonot

Sanotaan, että $\{x_n\}$ hajaantuu kohti ääretöntä, ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

jos millä tahansa reaaliluvulla a, $x_n > a$ suurilla indeksin n arvoilla. Vastaavasti sanotaan, että $\{x_n\}$ hajaantuu kohti negatiivista ääretöntä, ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

jos millä tahansa reaaliluvulla a, $x_n < a$ suurilla indeksin n arvoilla. Määritelmään 2.2 perustuen emme kuitenkaan sano lukujonoa $\{s_n\}$ suppenevaksi, ellei $\lim_{n\to\infty} x_n$ ole äärellinen. (Vrt. [2, s. 181].)

Esimerkki 2.5. Lukujono $\{\frac{n}{3} + \frac{2}{n}\}$ hajaantuu kohti ääretöntä, sillä kun a on mikä tahansa reaaliluku, niin

$$\frac{n}{3} + \frac{2}{n} > a, \quad \text{jos} \quad n \geq 3a.$$

Lukujono $\{\frac{1}{n} - n\}$ hajaantuu kohti negatiivista ääretöntä, sillä kun a on mikä tahansa reaaliluku, niin

$$\frac{1}{n} - n < a, \quad \text{jos} \quad n > \frac{1}{|a|}.$$

Siis kirjoitamme

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n}{3} + \frac{2}{n} \right\} = \infty$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} - n \right\} = -\infty.$$

2.3 Rajoitetut lukujonot

Tämä osio perustuu teokseen [1, s. 45–46].

Lause 2.6. *Suppeneva lukujono $\{x_n\}$ on rajoitettu.*

Todistus. Oletetaan, että $\{x_n\}$ suppenee kohti arvoa x. Näin ollen on olemassa sellainen $M \in \mathbb{N}$, että jokaisella $n \geq M$ pätee epäyhtälö $|x_n - x| < 1$. Olkoon $B_1 = |x| + 1$. Kun $n \geq M$, niin

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &< 1 + |x| = B_1. \end{aligned}$$

Joukko $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{M-1}|\}$ on äärellinen. Olkoon

$$B_2 = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{M-1}\}.$$

Olkoon $B = \max\{B_1, B_2\}$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_n| \leq B. \qquad \square$$

Huomautus. Rajoitettu lukujono ei välttämättä ole suppeneva.

Esimerkki 2.7. Osoitetaan, että lukujono $\left\{\frac{2n^4+1}{n^4}\right\}$, $n \geq 1$, suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+1}{n^4} = 2.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, ja määritellään sellainen $M \in \mathbb{N}$, että $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Silloin millä tahansa $n \geq M$ pätee

$$\left|\frac{2n^4+1}{n^4} - 2\right| = \left|\frac{2n^4+1-2n^4}{n^4}\right| = \left|\frac{1}{n^4}\right| = \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{M} < \varepsilon.$$

Siis $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+1}{n^4} = 2$.

Määritelmä 2.8. Olkoon $\{x_n\}$ reaalilukujono, joka on ylhäältä rajoitettu ja epätyhjä. Jos M on pienin kaikista ylärajoista, sanotaan, että M on lukujonon $\{x_n\}$ pienin yläraja tai lukujonon $\{x_n\}$ supremum. Merkitään $M = \sup\{x_n\}$. ([3, s. 9])

Määritelmä 2.9. Olkoon $\{x_n\}$ reaalilukujono, joka on alhaalta rajoitettu ja epätyhjä. Jos m on suurin kaikista lukujonon $\{x_n\}$ alarajoista, sanotaan, että m on lukujonon $\{x_n\}$ suurin alaraja tai lukujonon $\{x_n\}$ infimum. Merkitään $m = \inf\{x_n\}$. (Ks. [3, s. 9])

Määritelmä 2.10. Lukujono $\{x_n\}$ on ei-vähenevä, jos $x_n \geq x_{n-1}$ kaikilla indeksin n arvoilla, ja ei-kasvava, jos $x_n \leq x_{n-1}$ kaikilla indeksin n arvoilla. Monotoninen lukujono on lukujono, joka on ei-kasvava tai ei-laskeva. Jos $x_n > x_{n-1}$ kaikilla indeksin n arvoilla, niin $\{x_n\}$ on kasvava, ja jos $x_n < x_{n-1}$ kaikilla indeksin n arvoilla, niin $\{x_n\}$ on laskeva.

Lause 2.11. *(a) Jos* $\{x_n\}$ *on ei-vähenevä, niin* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.
(b) Jos $\{x_n\}$ *on ei-kasvava, niin* $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

Todistus. Ks. [2, s. 182]

(a) Olkoon $\beta = \sup\{x_n\}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $\beta < \infty$, niin

$$\beta - \varepsilon < x_N \leq \beta$$

jollakin kokonaisluvulla N. Koska $x_N \leq x_n \leq \beta$, kun $n \geq N$, niin

$$\beta - \varepsilon < x_n \leq \beta, \quad \text{kun} \quad n \geq N.$$

Tästä seuraa, että $|x_n - \beta| < \varepsilon$, kun $n \geq N$, joten $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$ määritelmän 2.2 perusteella. Jos $\beta = \infty$ ja b on mikä tahansa reaaliluku, niin $x_N > b$ jollakin kokonaisluvulla N. Siis $x_n > b$, kun $n \geq N$, joten $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(b) Olkoon $\alpha = \inf x_n$. Jos $\alpha > -\infty$, niin jos $\varepsilon > 0$, niin

$$\alpha \leq x_N < \alpha + \varepsilon$$

jollain kokonaisluvulla N. Koska $\alpha \leq x_n \leq x_N$, jos $n \geq N$, niin

$$\alpha \leq x_n < \alpha + \varepsilon, \quad \text{jos} \quad n \geq N.$$

Tästä seuraa, että $|x_n - \alpha| < \varepsilon$, jos $n \geq N$, joten $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ määritelmän 2.2 perusteella. Jos $\alpha = -\infty$ ja a on mikä tahansa reaaliluku, niin $x_N < a$ jollakin kokonaisluvulla N. Siis $x_n < a$, kun $n \geq N$, joten $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. □

3 Alaraja-arvo ja yläraja-arvo

Tämä luku pohjautuu teokseen [2, s. 187–].

3.1 Alaraja-arvon ja yläraja-arvon olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Lause 3.1. *(a) Jos $\{x_n\}$ on ylhäältä rajoitettu eikä hajaannu kohti negatiivista ääretöntä, on olemassa sellainen yksikäsitteinen reaaliluku a, että jos $\varepsilon > 0$, niin*

$$x_n < a + \varepsilon \quad \text{suurilla indeksin } n \text{ arvoilla} \tag{3.1}$$

ja

$$x_n > a - \varepsilon \quad \text{äärettömän monella indeksin } n \text{ arvolla.} \tag{3.2}$$

(b) Jos $\{x_n\}$ on alhaalta rajoitettu eikä hajaannu kohti ääretöntä, on olemassa sellainen yksikäsitteinen reaaliluku b, että jos $\varepsilon > 0$, niin

$$x_n > b - \varepsilon \quad \text{suurilla indeksin } n \text{ arvoilla} \tag{3.3}$$

ja

$$x_n < b + \varepsilon \quad \text{äärettömän monella indeksin } n \text{ arvolla}. \tag{3.4}$$

Todistus. (Ks. [2, s. 187–188].)

(a) Koska $\{x_n\}$ on ylhäältä rajoitettu, on olemassa sellainen luku β, että $x_n < \beta$ kaikilla indeksin n arvoilla. Koska $\{x_n\}$ ei hajaannu kohti negatiivista ääretöntä, on olemassa sellainen luku α, että $x_n > \alpha$ riittävän suurilla indeksin n arvoilla. Jos määrittelemme, että

$$M_k = \sup\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+r}, \ldots\},$$

niin $\alpha \leq M_k \leq \beta$, joten $\{M_k\}$ on rajoitettu. Koska $\{M_k\}$ on ei-kasvava, se suppenee lauseen 2.11 perusteella. Olkoon

$$a = \lim_{k\to\infty} M_k. \tag{3.5}$$

Jos $\varepsilon > 0$, niin $M_k < a + \varepsilon$ suurilla indeksin k arvoilla. Koska $x_n \leq M_k$, kun $n \geq k$, a toteuttaa yhtälön (3.1). Jos (3.2) on epätosi jollakin positiivisella luvulla ε, on olemassa sellainen kokonaisluku K, että

$$x_n \leq a - \varepsilon, \quad \text{kun} \quad n \geq K.$$

Tästä seuraa, että

$$M_k \leq a - \varepsilon, \quad \text{kun} \quad k \geq K,$$

mikä on ristiriidassa yhtälön (3.5) kanssa. Siis a toteuttaa epäyhtälöt (3.1) ja (3.2).

Nyt on osoitettava, että a on ainoa reaaliluku, joka toteuttaa kyseiset epäyhtälöt. Jos $t < a$, epäyhtälö

$$x_n < t + \frac{a-t}{2} = a - \frac{a-t}{2}$$

ei voi olla voimassa suurilla indeksin n arvoilla, koska se olisi ristiriidassa epäyhtälön (3.2) kanssa silloin, kun $\varepsilon = \frac{a-t}{2}$. Jos $a < t$, niin epäyhtälö

$$x_n > t - \frac{t-a}{2} = a + \frac{t-a}{2}$$

ei voi olla voimassa äärettömän monella indeksin n arvolla, koska se olisi ristiriidassa epäyhtälön (3.1) kanssa silloin, kun $\varepsilon = \frac{t-a}{2}$. Siis a on ainoa reaaliluku, joka toteuttaa epäyhtälöt (3.1) ja (3.2).

(b) Koska $\{x_n\}$ on alhaalta rajoitettu, on olemassa sellainen luku β, että $x_n > \beta$ kaikilla indeksin n arvoilla. Koska $\{x_n\}$ ei hajaannu kohti ääretöntä, on olemassa sellainen luku α, että $x_n < \alpha$ riittävän suurilla indeksin n arvoilla. Jos määrittelemme, että

$$M_k = \inf\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+r}, \ldots\},$$

niin $\beta \leq M_k \leq \alpha$, joten $\{M_k\}$ on rajoitettu. Koska M_k on ei-laskeva, se suppenee. Olkoon

$$b = \lim_{k \to \infty} M_k. \tag{3.6}$$

Jos $\varepsilon > 0$, niin $M_k > b - \varepsilon$ suurilla indeksin k arvoilla. Koska $x_n \geq M_k$, kun $n \geq k$, b toteuttaa yhtälön (3.3). Jos (3.4) on epätosi jollakin positiivisella luvulla ε, on olemassa sellainen kokonaisluku K, että

$$x_n \geq b + \varepsilon, \quad \text{kun} \quad n \geq K.$$

Tästä seuraa, että

$$M_k \geq b - \varepsilon. \qquad \square$$

Määritelmä 3.2. Lauseessa 3.1 määriteltyjä lukuja a ja b kutsutaan lukujonon $\{x_n\}$ yläraja-arvoksi ja alaraja-arvoksi, ja merkitään

$$a = \limsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{ja} \quad b = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Määrittelemme myös, että

- $\limsup x_n = \infty$, jos $\{x_n\}$ ei ole ylhäältä rajoitettu,
- $\limsup x_n = -\infty$, jos $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$,
- $\liminf x_n = -\infty$, jos $\{x_n\}$ ei ole alhaalta rajoitettu,
- $\liminf x_n = \infty$, jos $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Huomautus. Lauseen 3.1 todistuksen perusteella

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

Esimerkki 3.3. Olkoon

$$\{x_n\} = \begin{cases} \frac{n+3}{3n}, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ -1, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Määritetään lukujonon alaraja-arvo ja yläraja-arvo. Ensin lasketaan alaraja-arvo:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\,\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Yllä olevan huomautuksen perusteella

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\,\{x_k : k \geq n\}.$$

Nyt nähdään, että

$$\sup\{x_k : k \geq n\} = \begin{cases} \frac{n+3}{3n}, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ \frac{n+4}{3(n+1)}, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Todistetaan nyt, että raja-arvo on $\frac{1}{3}$.

Olkoon $\varepsilon > 0$, ja määritellään sellainen $M \in \mathbb{N}$, että $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Silloin millä tahansa parittomalla indeksillä $n \geq M$ pätee

$$\begin{aligned}\left|\frac{n+3}{3n} - \frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{n+3-n}{3n}\right| \\ &= \left|\frac{3}{3n}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{M} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Myöskin millä tahansa parillisella indeksillä $n \geq M$ pätee

$$\begin{aligned}\left|\frac{n+4}{3(n+1)} - \frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{n+4-n-1}{3(n+1)}\right| \\ &= \left|\frac{3}{3n+3}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{M+1} \\ &\leq \frac{1}{M} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Siis $\limsup_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$.

Lause 3.4. *Jokaisella reaalilukulukujonolla $\{x_n\}$ on yksikäsitteinen yläraja-arvo a, ja yksikäsitteinen alaraja-arvo b, ja*

$$b \leq a. \tag{3.7}$$

Todistus (vrt. [2, s. 189]). Lukujen a ja b olemassaolo ja yksikäsitteisyys seuraavat lauseesta 3.1 ja määritelmästä 3.2. Jos a ja b ovat äärellisiä, niin yhtälöistä 3.1 ja 3.3 seuraa, että

$$b - \varepsilon < a + \varepsilon$$

jokaisella luvulla $\varepsilon > 0$, mistä seuraa epäyhtälö 3.7. Jos $b = -\infty$ tai $a = \infty$, niin epäyhtälö 3.7 on ilmeinen. Jos $b = \infty$ tai $a = -\infty$, niin epäyhtälö 3.7 seuraa suoraan määritelmästä 2.2. □

Esimerkki 3.5.

$$\limsup_{n\to\infty}\{y^{n^2}\} = \begin{cases} \infty, & |y| > 1, \\ 1, & |y| = 1, \\ 0, & |y| < 1, \end{cases}$$

ja

$$\liminf_{n\to\infty}\{y^{n^2}\} = \begin{cases} \infty, & y > 1, \\ 1, & y = 1, \\ 0, & |y| < 1, \\ -1, & y = -1, \\ -\infty, & y < -1. \end{cases}$$

Lisäksi

$$\limsup_{n\to\infty} n^4 = \liminf_{n\to\infty} n^4 = \infty,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\,(-1)^n\big(1 + \frac{1}{2n}\big) = 1, \liminf_{n\to\infty}\,(-1)^n\big(n + \frac{1}{2n}\big) = -1,$$

ja

$$\limsup_{n\to\infty}\,[3 + 3(-1)^n]n = \infty, \liminf_{n\to\infty}\,[3 + 3(-1)^n]n = 0.$$

Lause 3.6. *Jos* $\{x_n\}$ *on reaalilukujono, niin*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \tag{3.8}$$

jos ja vain jos

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x. \tag{3.9}$$

Todistus. Jos $x = \pm\infty$, niin ekvivalenssit yhtälöissä 3.8 ja 3.9 seuraavat suoraan niiden määritelmistä. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (äärellinen), niin määritelmästä 2.2 seuraa, että 3.1 – 3.4 ovat voimassa, kun a ja b korvataan alkiolla x. Siitä johtuen 3.9 seuraa alkioiden a ja b yksikäsitteisyydestä.

Todistetaan sitten implikaatio toiseen suuntaan. Oletetaan, että $a = b$ ja merkittäköön alkiolla x niiden yhteistä arvoa. Tällöin epäyhtälöistä 3.1 ja 3.3 seuraa, että

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

suurilla indeksin n arvoilla, ja 3.8 seuraa määritelmästä 2.2 ja raja-arvon $\lim_{n\to\infty} x_n$ yksikäsitteisyydestä 2.4 $\square$

4 Bolzanon-Weierstrassin lause

Seuraava luku perustuu teokseen [1, s. 65–66].

Rajoitettu lukujono ei ole välttämättä suppeneva, mutta Bolzanon-Weierstrassin lauseen perusteella voimme ainakin löytää rajoitetulle lukujonolle suppenevan osajonon. Tässä luvussa esitämme version Bolzanon-Weierstrassin lauseesta lukujonoille. Ensin kuitenkin esitämme kuristusperiaatteen, jota tarvitsemme Bolzanon-Weierstrassin lauseen todistuksessa.

Lause 4.1 (Kuristusperiaate)**.** *Olkoot $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ja $\{x_n\}$ lukujonoja, joille pätee, että*

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \textit{kaikilla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oletetaan, että $\{a_n\}$ ja $\{b_n\}$ suppenevat ja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Tällöin $\{x_n\}$ suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Todistus. Olkoon $x := \lim a_n = \lim b_n$. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu.

Määritetään sellainen M_1, että kaikilla $n \geq M_1$ on voimassa, että $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}$, ja sellainen M_2, että kaikilla $n \geq M_2$ on voimassa, että $|b_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}$. Merkitään, että $M := \max\{M_1, M_2\}$. Oletetaan, että $n \geq M$. Silloin

$$\begin{aligned} |x_n - a_n| = x_n - a_n \leq b_n - a_n & \\ &= |b_n - x + x - a_n| \\ &\leq |b_n - x| + |x - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Tämän tiedon avulla arvioimme, että

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x + a_n - a_n| \\ &\leq |x_n - a_n| + |a_n - x| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lause on nyt todistettu. □

Lause 4.2. *Oletetaan, että reaalilukujono $\{x_n\}$ rajoitettu. Silloin on olemassa suppeneva osajono $\{x_{n_i}\}$.*

Todistus. Lukujono on rajoitettu, joten on olemassa kaksi lukua $a_1 < b_1$, joille pätee $a_1 \leq x_n \leq b_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritellään osajono $\{x_{n_i}\}$ ja kaksi lukujonoa $\{a_i\}$ ja $\{b_i\}$ niin, että $\{a_i\}$ on monotonisesti kasvava, $\{b_i\}$ on monotonisesti vähenevä, $a_i \leq x_{n_i} \leq b_i$ ja että $\lim a_i = \lim b_i$. Se, että x_{n_i} suppenee, seuraa kuristusperiaatteesta.

Määritellään lukujonot induktiivisesti. Epäyhtälö $a_i < b_i$ pätee aina ja $x_n \in [a_i, b_i]$ aina äärettömän monella $n \in \mathbb{N}$. Olemme jo määritelleet alkiot a_1 ja b_1. Merkitään, että $n_1 := 1$ ja tällöin $x_{n_1} = x_1$.

Nyt oletetaan, että johonkin arvoon $k \in \mathbb{N}$ saakka olemme määritelleet osajonon $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ ja lukujonot $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Olkoon $y := \frac{a_k+b_k}{2}$. Selvästi $a_k < y < b_k$. Jos on olemassa äärettömän monta $j \in \mathbb{N}$, joilla $x_j \in [a_k, y]$, niin $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := y$, ja valitaan $n_{k+1} > n_k$ siten, että $x_{n_{k+1}} \in [a_k, y]$. Jos ei ole olemassa äärettömän monta alkiota $j \in \mathbb{N}$ siten, että $x_j \in [a_k, y]$, niin on oltava äärettömän monta indeksin j arvoa, joilla $x_j \in [y, b_k]$. Tässä tapauksessa valitaan $a_{k+1} := y$, $b_{k+1} := b_k$, ja valitaan $n_{k+1} > n_k$, joille on voimassa $x_{n_{k+1}} \in [y, b_k]$.

Nyt olemme määritelleet lukujonot. Jäljelle jää osoittaa, että $\lim a_i = \lim b_i$. On selvää, että raja-arvot ovat olemassa, sillä lukujonot ovat monotonisia. On ilmeistä, että $b_i - a_i$ puolittuu joka vaiheessa. Siispä $b_{i+1} - a_{i+1} = \frac{b_i - a_i}{2}$. Induktiolla saamme, että

$$b_i - a_i = \frac{b_1 - a_1}{2^{i-1}}$$

Olkoon $x := \lim a_i$. Lukujono $\{a_i\}$ on monotoninen, joten

$$x = \sup\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Olkoon nyt $y := \lim b_i = \inf\{b_i, i \in \mathbb{N}\}$. On ilmeistä, että $y \leq x$, sillä $a_i < b_i$ kaikilla i. Koska lukujonot ovat monotonisia, niin jokaisella indeksin arvolla i on voimassa

$$y - x \leq b_i - a_i = \frac{b_1 - a_1}{2^{i-1}}.$$

Koska $\frac{b_1 - a_1}{2^{i-1}}$ on mielivaltaisen pieni, niin $y - x = 0$. Kuristusperiaatteen nojalla lause on nyt todistettu. $\square$

Lähteet

[1] Lebl, J. *Basic analysis: Introduction to real analysis*, 2013.

[2] Trench, W. F. *Introduction to real analysis*, 2013.

[3] Thomson - Bruckner - Bruckner *Elemantary real analysis, 2008.*