Tampereen yliopisto

Veeti Ahvonen

DETERMINISTISEN ÄÄRELLISEN AUTOMAATIN MINIMOINTI

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Helmikuu 2020

Tiivistelmä

Veeti Ahvonen: Deterministisen äärellisen automaatin minimointi
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Helmikuu 2020

Tässä tutkielmassa tarkastellaan, miten voimme minimoida deterministisen äärellisen automaatin. Deterministinen äärellinen automaatti on minimaalinen, jos kaikilla saman kielen tunnistavilla deterministisillä äärellisillä automaateilla on vähintään yhtä paljon tiloja.

Huomaamme määrittelemällä tietyn relaation säännölliselle kielelle ja muodostamalla sen ekvivalenssiluokilla deterministisen äärellisen automaatin saamme halutun minimaalisen automaatin säännölliselle kielelle. Lisäksi konstruoimme algoritmin, jonka avulla voimme muokata suoraan deterministisen äärellisen automaatin minimaaliseksi.

Avainsanat: automaattiteoria, deterministinen äärellinen automaatti, minimointi, oikealta invariantti

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan determinististen äärellisten automaattien minimointia. Deterministinen äärellinen automaatti mielletään yleensä tietokoneena, joka koostuu äärellisestä määrästä tiloja ja siirtymiä. Näiden siirtymien ja tilojen avulla automaatti tunnistaa säännöllisen kielen eli kielen, jonka merkkijonot mukailevat tiettyjä säännöllisyyksiä. Deterministisyys kertoo, että tiedämme täsmälleen, miten automaatti on tunnistanut tietyn merkkijonon.

Esimerkiksi ohjelmointikielet ovat säännöllisiä kieliä. Siksi kääntäjä tunnistaa syntaksivirheet koodia jäsentäessä, sillä kielen merkkijonot voidaan muodostaa vain tietyillä säännöillä. Esimerkiksi ruotsin kieli ei ole säännöllinen kieli, sillä useissa sanoissa esiintyy poikkeuksia, jotka eivät noudata mitään säännöllisyyksiä, kuten epäsäännölliset verbit.

Sanomme, että deterministinen äärellinen automaatti on minimaalinen, jos muilla saman kielen tunnistavilla automaateilla on vähintään yhtä paljon tiloja. Meille herääkin kysymys, onko aina mahdollista löytää minimaalinen deterministinen äärellinen automaatti? Osoittautuu, että näin on, joten ensiksi luvussa 3 määrittelemme oikealta invariantin ekvivalenssirelaation säännöllisille kielille. Huomaamme luvussa 4, että kyseisen relaation ekvivalenssiluokilla muodostettu automaatti on minimaalinen automaatti. Lisäksi konstruoimme luvussa 4 algoritmin, jonka avulla voimme muokata suoraan deterministisen äärellisen automaatin minimaaliseksi.

Lukijalta odotetaan hyvät perustiedot joukko-opista ja diskreetistä matematiikasta. Esimerkiksi Tampereen yliopiston kurssi Johdatus matemaattiseen päättelyyn riittää oikein hyvin. Luvussa 2 käydään läpi esitietoja sekä deterministisen äärellisen automaatin matemaattinen malli.

2 Valmistelevia tarkasteluja

2.1 Aakkosta, merkkijono ja kieli

Käymme läpi luvussa 2 tarvittavia määritelmiä deterministisille äärellisille automaateille. Osassa kirjallisuutta voi olla merkinnällisiä eroja. Koska tutkielmassa käsitellään vain deterministisiä äärellisiä automaatteja voidaan yleisesti puhua vain automaateista.

Määritelmä 2.1 (vrt. [4, s. 28])**.** *Aakkosto* on äärellinen epätyhjä joukko symboleja. Tässä tutkielmassa käytetään yleensä aakkostolle merkintää Σ. Erityistapauksena käytetään aakkostosta $\{0, 1\}$ nimitystä *binääriaakkosto*.

Määritelmä 2.2 (vrt. [5, s. 47])**.** Olkoon Σ aakkosto. Merkinnällä Σ^+ tarkoitetaan äärellisten jonojen joukkoa $\bigcup_{n\geq 1} \Sigma^n$, joissa on siis yksi tai useampi aakkoston Σ symboli. Näistä jonoista käytetään nimitystä aakkoston *merkkijono*. Jos $m \in \mathbb{N}$ ja $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = w \in \Sigma^m$, niin merkkijonolle w voidaan käyttää lyhennettä $w = x_1x_2\cdots x_m$. Merkitään *tyhjää merkkijonoa* symbolilla ϵ, joka on siis merkkijono, jossa ei ole yhtään symbolia. Merkitään lisäksi $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\epsilon\}$, joka on siis aakkoston Σ kaikkien merkkijonojen joukko.

Määritelmä 2.3. Olkoon Σ aakkosto ja $L \subseteq \Sigma^*$. Kutsumme joukkoa L *kieleksi*.

Määritelmä 2.4 (vrt. [4, s. 29], [5, s. 47])**.** Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $w \in \Sigma^n$ merkkijono. Tällöin merkkijonon w *pituus* on $|w| = n$, joka siis kertoo merkkijonon symbolien lukumäärän. Huomataan, että $|\epsilon| = 0$.

Määritelmä 2.5. Olkoot $x_1x_2\cdots x_i = w$, $y_1y_2\cdots y_j = s \in \Sigma^*$ merkkijonoja. Tällöin niistä voidaan muodostaa *liitos* $x_1x_2\cdots x_iy_1y_2\cdots y_j = ws$ tai vastaavasti $y_1y_2\cdots y_jx_1x_2\cdots x_i = sw$, jonka pituus on $|ws| = |w| + |s| = i + j$. Huomataan, että $\epsilon\epsilon = \epsilon$ ja $\epsilon w = w = \epsilon w$. Ks. [4, s. 30].

Esimerkki 2.6. Olkoon $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ pienet latinalaiset aakkoset. Tällöin merkkijonot $automaatti, nen \in \Sigma^*$ ovat pienten latinalaisten aakkosten merkkijonoja. Merkkijonojen pituudet ovat $|automaatti| = 10$ ja $|nen| = 3$. Näistä voidaan muodostaa liitos $automaattinen$ ja lisäksi $|automaattinen| = 13$. Näistä voitaisiin myös muodostaa kieli $\{automaatti, nen\} \subseteq \Sigma^*$.

Näiden tarkastelujen jälkeen voimme määritellä deterministisen äärellisen automaatin.

2.2 Deterministisistä äärellisistä automaateista

Määritelmä 2.7 (vrt. [4, s. 46])**.** *Deterministinen äärellinen automaatti* on viisikko $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, missä

1. Q on äärellinen epätyhjä joukko *tiloja*, joita merkitään yleensä q,
2. Σ on aakkosto,
3. $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ on *siirtymäfunktio*,
4. $q_0 \in Q$ on *alkutila*,
5. F on *hyväksymistilojen* joukko.

Deterministinen äärellinen automaatti voidaan myös piirtää ks. [4, s. 48]. Piirtämistä on havainnollistettu seuraavan sivun kuvassa 2.1.

Deterministinen äärellinen automaatti on siis viisikko, jossa tiedämme jokaisen siirtymäfunktion kuvan olevan yksikäsitteinen. Jos deterministisen äärellisen automaatin siirtymäfunktion kuva on $\delta(q, a) = p$, niin sanomme, että *siirrymme* tilasta q tilaan p symbolilla a.

Määritelmä 2.8. Olkoot $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti, $q \in Q$, $a \in \Sigma^1$, $x \in \Sigma^*$ ja $xa = w \in \Sigma^*$. *Laajennettu siirtymäfunktio* $\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ määritellään seuraavasti.

1. $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$.
2. $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$.

Jos $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$, niin sanomme, että automaatti A *hyväksyy* merkkijonon w, muuten sanomme että automaatti *hylkää* merkkijonon ks. [4, s. 49-50]. Vastaavasti kuten siirtymäfunktion tapauksessa, jos laajennetun siirtymäfunktion kuva on $\hat{\delta}(q, w) = p$, niin sanomme, että *siirrymme* tilasta q tilaan p merkkijonolla w.

Lause 2.9. *Olkoot $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti ja $x, y \in \Sigma^*$. Tällöin $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$, jokaiselle $q \in Q$.*

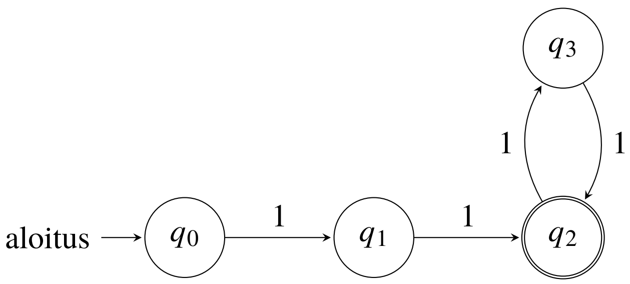
Todistus. Todistetaan induktiolla merkkijonon pituuden $|y| = n$ suhteen. Perusaskel $n = 0$, joten $y = \epsilon$. Siis saadaan $\hat{\delta}(q, x\epsilon) = \hat{\delta}(q, x) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), \epsilon)$. Seuraavaksi oletetaan, että väite pätee kaikille merkkijonoille z, jolle $0 < |z| < n$ ja todistetaan väite n pituisille merkkijonoille. Olkoon $y_1 y_2 \cdots y_n = y$ eli $|y| = n$. Saadaan $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(q, xy_1 y_2 \cdots y_n) = \delta(\hat{\delta}(q, xy_1 y_2 \cdots y_{n-1}), y_n)$. Tällöin $|y_1 y_2 \cdots y_{n-1}| = n - 1$, joten induktio-oletuksesta ja määritelmästä 2.8 saadaan, että

$$\begin{aligned}
\delta(\hat{\delta}(q, xy_1 y_2 \cdots y_{n-1}) y_n) &= \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y_1 y_2 \cdots y_{n-1}), y_n) \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n) \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y).
\end{aligned}$$

Siis induktioperiaatteen mukaan väite pätee. □

Määritelmä 2.10 (vrt. [4, s. 52]). Olkoon $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti. Tällöin $L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$ on deterministisen äärellisen automaatin A *tunnistama* kieli. Jos jokin deterministinen automaatti tunnistaa kielen, niin kutsumme sitä *säännölliseksi kieleksi*.

Esimerkki 2.11. Tarkastellaan seuraavaa determinististä äärellistä automaattia $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, missä $\delta = \{((q_0, 1), q_1), ((q_1, 1), q_2), ((q_2, 1), q_3), ((q_3, 1), q_2)\}$. Automaatti A on piirretty kuvassa 2.1. Tarkastellaan merkkijonoja 111 ja 11. Automaatti A hyväksyy merkkijonon 11, sillä $\hat{\delta}(q_0, 11) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 1), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$, joka on hyväksymistila. Automaatti A ei kuitenkaan hyväksy merkkijonoa 111, sillä $\hat{\delta}(q_0, 111) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 11), 1) = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 1), 1), 1) = \delta(\delta(q_1, 1), 1) = \delta(q_2, 1) = q_3$, joka ei ole hyväksymistila. Mainitsimme aikaisemmin, että automaateilla on tietty tapa siirtyä tilasta toiseen tilaan tietyllä merkkijonolla. Esimerkiksi voimme siirtyä tilasta q_1 tilaan q_3 merkkijonolla 11 ja vastaavasti symbolilla 1 voimme siirtyä tilasta q_1 tilaan q_2. Meillä on siis nuolten osoittama reitti, jossa käymme merkkijonon symbolin yksi kerrallaan läpi.



Kuva 2.1. Automaatti A

3 Äärellisten automaattien ekvivalenttisuus

Tässä kappaleessa tarkastelemme determinististen äärellisten automaattien ekvivalenttisuutta, jotta voimme myöhemmin todeta, että meillä on tosiaan olemassa minimaalinen äärellinen automaatti. Lukijalta oletetaan hyvät perustiedot joukko-opista. Esitietona voidaan pitää Tampereen yliopiston Johdatus matemaattiseen päättelyyn kurssia tai teosta [3]. Käytämme joukon A ekivalenssirelaation R ekvivalenssiluokille merkintää $[x]_R = \{ a \mid xRa \}$ ja $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$. Voimme myös olettaa tunnetuksi, että relaation R ekvivalenssiluokat A/R muodostavat joukon A osituksen. Ks. [3, s. 57–58].

3.1 Turhat ja saavutettavat tilat

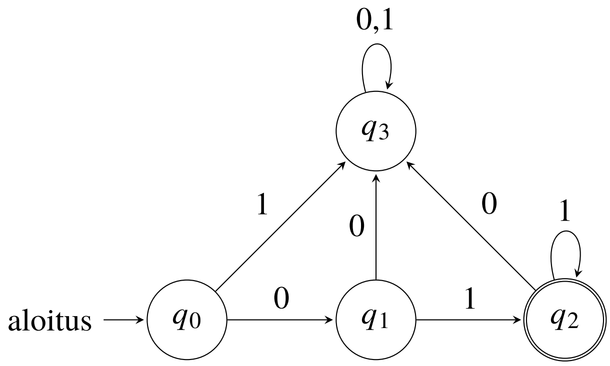
Seuraavaksi määritellemme *turhat* ja *saavutettavat* tilat deterministiselle äärellisen automaatille (vrt. [1, s. 73][4, s. 45 & s. 67]).

Määritelmä 3.1. Olkoon $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti. Sanomme, että tila $q \in Q$ on *saavutettava*, jos on olemassa merkkijono $w \in \Sigma^*$ siten että $\hat{\delta}(q_0, w) = q$. Vastaavasti sanomme, että tila on *saavuttamaton*, jos se ei ole saavutettava. Sanomme, että automaatti A on *saavutettava*, jos sen jokainen tila on saavutettava.

Koska jokaisen deterministisen äärellisen automaatin hyväksymän merkkijonon on täytynyt ensin siirtyä alkutilasta, niin määritelmän 3.1 mukaan saavuttamattomiin tiloihin ei voi siirtyä alkutilasta. Siis jokainen merkkijono, jonka deterministinen äärellinen automaatti hyväksyy ei voi olla siirtynyt saavuttamattomasta tilasta hyväksymistilaan. Siis saavuttamattomat tilat voidaan poistaa, eikä automaatin tunnistama kieli muutu.

Määritelmä 3.2. Olkoon $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti. Sanomme, että tila q on *turha*, jos ei ole olemassa merkkijonoa $w \in \Sigma^*$ siten että $\hat{\delta}(q, w) \in F$. Toisin sanoen automaatti ei hyväksy merkkijonoja, jotka ovat siirtyneet tilaan q, koska niistä ei voi siirtyä hyväksymistilaan.

Yleisesti kirjallisuudessa turhat tilat jätetään piirtämättä. Nimittäin meille riittää yksi turha tila, johon kaikki ei halutut siirtymät voidaan asettaa. Kuitenkin turhia tiloja ei voida poistaa, sillä muuten siirtymäfunktion funktionaalisuus voi kadota. Havainnollistetaan tätä kuvan 3.1 automaatilla, jossa on turha tila q_3. Lisäksi automaatti hyväksyy täsmälleen ne merkkijonot, joissa on alussa 01 ja jonka jälkeen mielivaltainen määrä symboleja 1.



Kuva 3.1. Automaatti turhalla tilalla

3.2 Kielen ekvivalenssiluokista

Ensin määrittelemme kaksi relaatiota, jonka jälkeen tarkastelemalla niiden ekvivalenssiluokkia. Tulemme huomaamaan, että kielen säännöllisyydellä ja näiden ekvivalenssiluokkien välillä on yhteys.

Määritelmä 3.3. Relaatio $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ on *oikealta invariantti* ekvivalenssirelaatio jos se on ekvivalenssirelaatio ja jos $x \sim y$, niin $xz \sim yz$, kaikille $z \in \Sigma^*$.

Määritelmä 3.4 (vrt. [5])**.** Olkoot L aakkoston Σ kieli ja $x, y \in L$. Määritellään kielen L relaatio $\simeq_L$ siten että $x \simeq_L y$, jos ja vain jos kaikilla $z \in \Sigma^*$ pätee, $xz \in L$ jos ja vain jos $yz \in L$. Relaatiota voidaan merkitä ilman kieleen viittaavaa alaindeksiä $\simeq$, jos on selvää minkä kielen relaatio kyseessä.

Lause 3.5. *Aakkoston Σ kielen L relaatio $\simeq_L$ on oikealta invariantti ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Todistetaan ensin refleksiivisyys. Selvästi jokaiselle $x \in L$ pätee $x \simeq_L x$, sillä joko $xc \notin L$ tai $xc \in L$, missä $c \in \Sigma^*$. Siis $\simeq_L$ on refleksiivinen. Todistetaan symmetrisyys, joten oletetaan $x \simeq_L y$ ja osoitetaan $y \simeq_L x$. Siis kaikilla $c \in \Sigma^*$ pätee $yc \in L$ jos ja vain jos $xc \in L$. Siis relaation $\simeq_L$ määritelmän mukaan pätee $y \simeq_L x$ eli relaatio $\simeq_L$ on symmetrinen. Todistetaan lopuksi transitiivisuus, joten oletetaan $x \simeq_L y$, $y \simeq_L z$ ja osoitetaan $x \simeq_L z$. Jos olisi olemassa sellainen merkkijono $c \in \Sigma^*$, että joko $xc \in L$ ja $zc \notin L$ tai $zc \in L$ ja $xc \notin L$, niin silloin molemmissa tapauksissa $yc \notin L$ ja $yc \in L$ relaation $\simeq_L$ määritelmän perusteella. Tämä on ristiriita, joten täytyy olla, että kaikilla $c \in \Sigma^*$ pätee $xc \in L$ jos ja vain jos $zc \in L$ eli $x \simeq_L z$. Siis relaatio $\simeq_L$ on myös transitiivinen. Täten koska relaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen se on ekvivalenssirelaatio.

Lisäksi relaatio $\simeq_L$ on oikealta invariantti ekvivalenssirelaatio. Kaikille $c, z \in \Sigma^*$ pätee liitoksen määritelmän 2.5 mukaan $zc \in \Sigma^*$. Jos $x \simeq_L y$, niin myös kaikille $c, z \in \Sigma^*$ pätee $xzc \in L$ jos ja vain jos $yzc \in L$ eli $xz \simeq_L yz$. Siis relaatio $\simeq_L$ on oikealta invariantti ekvivalenssirelaatio. □

Määritelmä 3.6. Olkoon $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti. Määritellään uusi relaatio $\simeq_\delta \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ siten, että $x \simeq_\delta y$, jos ja vain jos $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$.

Apulause 3.7. Determinististen äärellisen automaatin $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ relaatio $\simeq_\delta$ on oikealta invariantti ekvivalenssirelaatio.

Todistus. Todistetaan ensin, että relaatio $\simeq_\delta$ on refleksiivinen. Olkoon $x \in L$, silloin ei voi olla, että $\hat{\delta}(q_0, x) \neq \hat{\delta}(q_0, x)$, joten relaatio on refleksiivinen. Todistetaan symmetrisyys, joten oletetaan, että $x \simeq_\delta y$. Tällöin $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$ eli $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, x)$. Siis relaatio $\simeq_\delta$ on symmetrinen. Todistetaan transitiivisuus, joten oletetaan, että $x \simeq_\delta y$ ja $y \simeq_\delta z$. Tällöin $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$ ja $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, z)$, joten $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, z)$. Siis relaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, joten se on ekvivalenssirelaatio.

Lisäksi relaatio $\simeq_\delta$ on oikealta invariantti ekvivalenssirelaatio. Jos $x \simeq_\delta y$ eli $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$, niin lauseen 2.9 avulla saadaan, että $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, y), z) = \hat{\delta}(q_0, yz)$ eli $xz \simeq_\delta yz$, missä $z \in \Sigma^*$. □

Apulause 3.8. Olkoon R joukon A ekvivalenssirelaatio ja $x, y \in A$. Tällöin $[x]_R = [y]_R$ jos ja vain jos xRy.

Todistus. Ks. [3, s. 57]. □

Seuraavaksi esitellään yhteys kielen säännöllisyydelle ja ekvivalenssiluokkien lukumäärän äärellisyydelle.

Lause 3.9 (vrt. [5, s. 60–61], [2, s. 108–109])**.** *Olkoon L aakkoston Σ kieli. Seuraavat kolme väitettä ovat yhtäpitäviä:*

(i) Kieli L on säännöllinen.

(ii) Kieli L on äärellinen yhdiste jonkin oikealta invariantin ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokkia, jolla on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia.

(iii) Relaatiolla $\simeq_L$ on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $(i) \Rightarrow (ii)$. Oletetaan siis, että kieli L on säännöllinen kieli, joten on olemassa deterministinen äärellinen automaatti $A = (Q, \Sigma, \delta q_0, F)$, joka tunnistaa sen. Apulauseen 4.2 mukaan relaatio $\simeq_\delta$ on oikealta invariantti ekvivalenssirelaatio. Huomataan, että relaation $\simeq_\delta$ ekvivalenssiluokat ovat $E_q = \{ x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) = q \}$, missä q on saavutettava tila, sillä muuten ekvivalenssiluokka on tyhjä. Koska tiloja on äärellinen määrä, niin ekvivalenssiluokkia on äärellinen määrä. Lisäksi huomataan, että $\bigcup_{q \in F} E_q = L = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) = q \in F \}$ määritelmän 2.10 mukaan.

Seuraavaksi osoitetaan, että $(ii) \Rightarrow (iii)$. Oletetaan siis, että kieli L on äärellinen yhdiste oikealta invariantin ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokkia, jolla on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia. Olkoon $x \sim y$, joten kaikille $z \in \Sigma^*$ pätee $xz \sim yz$ eli apulauseen 3.8 mukaan $[xz]_\sim = [yz]_\sim$. Siis $xz \in [xz]_\sim \in L/\sim$ jos ja vain jos $yz \in [yz]_\sim \in L/\sim$. Koska kieli L on äärellinen yhdiste relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkia, niin kaikilla $z \in \Sigma^*$ pätee $xz \in L$ jos ja vain jos $yz \in L$ eli määritelmän 3.4 mukaan $x \simeq_L y$. Lisäksi koska relaatiolla $\sim$ on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia ja se on vahvempi relaatio kuin $\simeq_L$, niin silloin sillä on vähintään yhtä monta ekvivalenssiluokkaa kuin relaatiolla $\simeq_L$. Siis myös relaatiolla $\simeq_L$ on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia.

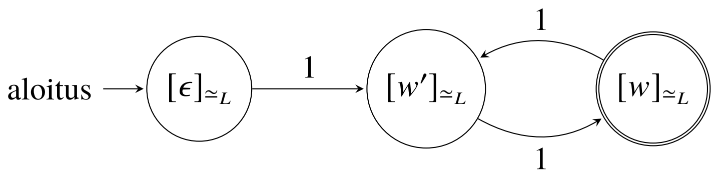
Lopuksi osoitetaan, että $(iii) \Rightarrow (i)$. Oletetaan siis, että relaatiolla $\simeq_L$ on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia ja osoitetaan, että L on säännöllinen kieli. Konstruoidaan relaation $\simeq_L$ ekvivalenssiluokista uusi deterministinen äärellinen automaatti. Määritellään $Q = \Sigma^*/\simeq_L = \{ [w]_{\simeq_L} \mid w \in \Sigma^* \}$, $F = \{ [w]_{\simeq_L} \mid w \in L \} = L/\simeq_L$ ja $\delta = Q \times \Sigma \to Q$ siten, että $\delta([w]_{\simeq_L}, a) = [wa]_{\simeq_L}$. Muodostetaan näistä uusi automaatti $A = (Q, \Sigma, \delta, [\epsilon]_{\simeq_L}, F)$. Selvästi automaatin konrstruktion perusteella A on deterministinen äärellinen automaatti, joka tunnistaa kielen L eli $L(A) = L$. Nimittäin $L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}([\epsilon]_{\simeq_L}, w) = [w]_{\simeq_L} \in F \}$, joukon F ja $[w]_{\simeq_L}$ määritelmän mukaan $[w]_{\simeq_L} \in F$ jos ja vain jos $w \in L$. Lisäksi automaatti on äärellinen ekvivalenssiluokkien lukumäärän äärellisyyden nojalla. Siis L on säännöllinen kieli, sillä deterministinen äärellinen automaatti A tunnistaa sen.

Siis koska $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$, niin $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ eli väittämät ovat yhtäpitäviä. $\square$

Käytetään jatkossa kohdan $(iii) \Rightarrow (i)$ konstruoidusta automaatista A merkintää $\mathrm{Min}(L) = A$. Huomaamme myöhemmin, että säännöllisen kielen L automaatti $\mathrm{Min}(L)$ on itse asiassa juuri haluttu *minimaalinen automaatti*.

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan uudelleen esimerkin 2.11 kuvan 2.1 automaattia. Huomataan, että se tunnistaa säännöllisen kielen L, jossa on vähintään kahden mittaisia parillisen mittaisia merkkijonona. Nimittäin parittomalla merkkijonolla laajennettu siirtymäfunktio saa arvokseen joko q_1 tai q_3. Vastaavasti parillisella merkkijonolla q_0 tai q_2. Itse asiassa kyseisellä säännöllisellä kielellä on vain kolme relaation $\simeq_L$ ekvivalenssiluokkaa.

Huomataan kaikilla, että $w \in \{1\}^{2n}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee, että tyhjä merkkijono $\epsilon \not\simeq_L w$, sillä $\epsilon\epsilon \notin L$ ja $w\epsilon \in L$. Lisäksi kaikilla $w' \in \{1\}^{2n+1}$, missä $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $\epsilon \not\simeq_L w'$, sillä $|\epsilon 1| \notin 2\mathbb{Z}_+$ ja $|w'1| \in 2\mathbb{Z}_+$ eli $\epsilon x \notin L$ ja $w'x \in L$. Selvästi parilliset ja parittomat merkkijonot eivät voi olla samassa ekvivalenssiluokassa, sillä vain toisessa on aina parillinen määrä merkkejä. Siis $\mathrm{Min}(L) = (\{[\epsilon]_{\simeq_L}, [w]_{\simeq_L}, [w']_{\simeq_L}\}, \{1\}, \delta, [\epsilon]_L, \{[w]_{\simeq_L}\})$, missä $\delta = \{(([\epsilon]_{\simeq_L}, 1), [w']_{\simeq_L}), (([w']_{\simeq_L}, 1), [w]_{\simeq_L}), (([w]_{\simeq_L}, 1), [w']_{\simeq_L})\}$, $w' \in \{1\}^{2m+1}$, $w \in \{1\}^{2n}$, $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Saadaan kuvan 3.2 mukainen automaatti.



Kuva 3.2. Automaatti $\mathrm{Min}(L)$

4 Deterministisen äärellisen automaatin minimointi

Tässä kappaleessa käymme läpi determinististen äärellisten automaattien *minimointia*. Lähestymme ongelmaa edellisessä kappaleessa käytyjen ekvivalenssiluokkien kautta.

4.1 Minimaalinen deterministinen äärellinen automaatti

Määritelmä 4.1. Deterministinen äärellinen automaatti $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ on säännöllisen kielen $L(A)$ *minimaalinen* automaatti, jos kaikilla muilla saman kielen tunnistavilla deterministisillä äärellisillä automaateilla on vähintään yhtä paljon tiloja. Toisin sanoen jos $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ on deterministinen äärellinen automaatti ja $L(A) = L(A')$, niin $|Q| \leq |Q'|$.

Määritelmä 4.2. Olkoot $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti ja $q, p \in Q$. Sanomme, että tilat q ja p ovat *ekvivalentteja*, jos kaikille $w \in \Sigma^*$ pätee $\hat{\delta}(q, w) \in F$ jos ja vain jos $\hat{\delta}(p, w) \in F$. Merkitään tätä relaatiota $q \sim_\delta p$. Muuten sanomme, että tilat ovat *erottuvia*.

Apulause 4.3. Olkoon $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti. Tällöin relaatio $\sim_\delta$ on ekvivalenssirelaatio.

Todistus. Todistetaan refleksiivisyys. Olkoot $q \in Q$ ja $w \in \Sigma^*$. Tällöin ei voi samaan aikaan päteä $\hat{\delta}(q, w) \notin F$ ja $\hat{\delta}(q, w) \in F$, joten $q \sim_\delta q$. Siis relaatio on refleksiivinen. Todistetaan symmetrisyys, joten oletetaan $q \sim_\delta p$. Tällöin pätee $\hat{\delta}(q, w) \in F$ jos ja vain jos $\hat{\delta}(p, w) \in F$ eli pätee $\hat{\delta}(p, w) \in F$ jos ja vain jos $\hat{\delta}(q, w) \in F$. Siis $p \sim_\delta q$, joten relaatio on symmetrinen. Todistetaan transitiivisuus, joten oletetaan $q \sim_\delta p$ ja $p \sim_\delta t$. Jos olisi olemassa merkkijono $w \in \Sigma^*$ siten että joko $\hat{\delta}(q, w) \in F$ ja $\hat{\delta}(t, w) \notin F$ tai $\hat{\delta}(q, w) \notin F$ ja $\hat{\delta}(t, w) \in F$, niin molemmissa tapauksissa $\hat{\delta}(p, w) \in F$ ja $\hat{\delta}(p, w) \notin F$. Tämä on ristiriita joten täytyy olla, että $\hat{\delta}(q, w) \in F$ jos ja vain jos $\hat{\delta}(t, w) \in F$ eli $q \sim_\delta t$. Siis relaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiinen, joten se on ekvivalenssirelaatio. □

Pelkästään saavuttamattomat tilat poistamalla saamme deterministisen äärellisen automaatin, jolla on vähemmän tiloja kuin alkuperäisellä automaatilla ja se tunnistaa saman kielen. Esimerkin 3.10 tapauksessa ekvivalenssiluokat on helppo nähdä. Toisaalta, kun tiloja ja symboleja lisätään niiden löytäminen vaikeutuu. Kuitenkin on helpompi proseduurinen tapa konstruoida vastaava automaatti.

Siksi ensiksi näytämme, että jos L on säännöllinen kieli, niin automaatti $\mathrm{Min}(L)$ on minimaalinen. Sen jälkeen määritellemme determinististen äärellisten automaattien *isomorfismin* ja algoritmin minimaalisen deterministisen äärellisen automaatin löytämiseen. Lopuksi näytämme, että algoritmin tuottama automaatti on isomorfinen automaatin $\mathrm{Min}(L)$ kanssa.

Lause 4.4. *Olkoon L aakkoston Σ säännöllinen kieli. Tällöin* $\mathrm{Min}(L) = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *on kielen L minimaalinen deterministinen äärellinen automaatti.*

Todistus. Aikaisemmin todistetun lauseen 3.9 kohdan $(iii) \Rightarrow (i)$ perusteella automaatti $\mathrm{Min}(L)$ on deterministinen äärellinen automaatti, joka tunnistaa säännöllisen kielen $L = L(\mathrm{Min}(L))$. Riittää siis todistaa, ettei ole olemassa automaattia, jolla olisi aidosti vähemmän tiloja kuin automaatilla $\mathrm{Min}(L)$.

Olkoon automaatti $A = (T, \Sigma, \gamma, t_0, L)$, joka tunnistaa kielen L eli $L(A) = L$. Lauseen 3.9 kohdasta $(i) \Rightarrow (ii)$ huomataan, että ekvivalenssirelaation $\simeq_\gamma$ ekvivalenssiluokat ovat $E_t = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\gamma}(t_0, x) = t \in T\}$, missä t on saavutettava tila. Siis ekvivalenssirelaation $\simeq_\gamma$ ekvivalenssiluokkia on korkeintaan tilojen T verran. Lisäksi huomataan, että relaatio $\simeq_\gamma$ on vahvempi kuin relaatio $\simeq_L$. Siis relaatiolla $\simeq_\gamma$ on vähintään yhtä paljon ekvivalenssiluokkia kuin relaation $\simeq_L$ ekvivalenssiluokkia eli tiloja Q. Siis tiloja T on vähintään yhtä monta kuin tiloja Q. Siis $\mathrm{Min}(L)$ on minimaalinen automaatti, jolle $L(\mathrm{Min}(L)) = L$, sillä A oli mielivaltainen. □

Algoritmi 4.5 (vrt. [1, s. 75–76], [4, s.159–161])**.** Olkoon $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti. Määritellään uusi deterministinen äärellinen automaatti seuraavasti.

(i) Poistetaan automaatin A saavuttamattomat tilat $N \subseteq Q$ ja merkitään seuraavasti $\mathrm{Acc}(A) = (Q', \Sigma, \gamma, q_0, F')$, missä $Q' = Q \setminus N$, $\gamma = \delta \setminus ((N \times \Sigma) \times N)$ ja $F' = F \setminus N$. Selvästi $\mathrm{Acc}(A)$ on deterministinen äärellinen automaatti, joka edelleen tunnistaa saman kielen.

(ii) Muodostetaan automaatista $\mathrm{Acc}(A)$ uusi automaatti seuraavasti. Uusi tilojen joukko on $Q'' = Q'/{\sim_\gamma}$. Uusi alkutila on ekvivalenssiluokka $s \in Q''$, missä $q_0 \in s$. Uusi hyväksymistilojen joukko on F'', johon kuuluvat ekvivalenssiluokat $h \in Q''$, jolle pätee $h \subseteq F'$. Nimittäin ekvivalenssiluokka h

ei voi sisältää muita kuin hyväksymistiloja, koska muuten ne olisivat erottuvia merkkijonolla ϵ. Uusi siirtymäfunktio $\gamma' \colon Q'' \times \Sigma \to Q''$ määritellään seuraavasti. Jos $\gamma(q, w) = p$, niin $\gamma'([q]_{\sim_\gamma}, w) = [p]_{\sim_\gamma}$. Selvästi γ' on funktio, sillä ekvivalenssiluokka on yksikäsitteinen kaikille tiloille. Jälleen saadaan edelleen uusi deterministinen äärellinen automaatti, jota merkitään $\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A)) = (Q'', \Sigma, \gamma', s, F'')$.

Toisin sanoen uusi automaatti $\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A))$ ei voi sisältää tiloja jotka olisivat ekvivalentteja eli kaikki tilat ovat keskenään erottuvia jollain merkkijonolla. Selvästi algoritmi 4.5 pysähtyy, sillä algoritmi saa syötteekseen vain äärellisiä automaatteja.

Määritelmä 4.6. Olkoot $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ja $A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ deterministisiä äärellisiä automaatteja. Tällöin ne ovat *isomorfisia*, jos on olemassa bijektio $f \colon Q \to Q'$, joka on *homomorfismi* eli seuraavat ehdot ovat voimassa.

(i) $f(q_0) = q'_0$.

(ii) $q \in F$ jos ja vain jos $f(q) \in F'$.

(iii) $\delta(q, w) = p$ jos ja vain jos $\delta'(f(q), w) = f(p)$.

Sanotaan, että $f \colon Q \to Q'$ on isomorfismi automaattien A ja A' välillä.

Apulause 4.7. Olkoot $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ja $B = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ deterministisiä äärellisiä automaatteja, joiden välillä on isomorfismi $f \colon Q \to Q'$. Tällöin $\hat{\delta}(q, w) = p$ jos ja vain jos $\hat{\delta}'(f(p), w) = f(p)$, missä $\hat{\delta}$ on automaatin A ja $\hat{\delta}'$ on automaatin A' laajennettu siirtymäfunktio.

Todistus. Todistetaan induktiolla merkkijonon $|w| = n$ pituuden suhteen. Käydään ensin läpi perusaskel. Olkoon $|w| = 0$, joten $w = \epsilon$. Tällöin $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$, siis siirtymäfunktion määritelmän 2.8 mukaan täytyy olla $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$ jos ja vain jos $\hat{\delta}'(f(q), \epsilon) = f(q)$. Tehdään induktio-oletus, että väite vätee merkkijonoille joiden pituus on pienempi kuin n ja osoitetaan, että väite pätee merkkijonoille joiden pituus on n. Olkoon $w = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma^n$ eli $|w| = n$ ja $\hat{\delta}(q, w) = p$. Määritelmän 2.8 mukaan $\hat{\delta}(q, x_1 x_2 \cdots x_n) = \delta(\hat{\delta}(q, x_1 x_2 \cdots x_{n-1}), x_n) = p$. Siis induktio-oletuksen mukaan, koska $|x_1 x_2 \cdots x_{n-1}| = n - 1$ ja $|x_n| = 1$, niin $\delta(\hat{\delta}(q, x_1 x_2 \cdots x_{n-1}), x_n) = p$ jos ja vain jos $\delta'(\hat{\delta}'(f(q), x_1 x_2 \cdots x_{n-1}), x_n) = f(p)$ eli $\hat{\delta}'(f(q), x_1 x_2 \cdots x_n) = f(p)$. □

Käytämme apulausetta 4.7 seuraavan lauseen todistamiseen.

Lause 4.8. *Olkoot* $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *ja* $B = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ *deterministisiä äärellisä automaatteja, jotka ovat isomorfisia. Tällöin* $L(A) = L(B)$.

Todistus. Koska automaatit ovat isomorfisia on olemassa bijektio $f\colon Q \to Q'$, joka on homomorfismi. Apulauseen 4.7 mukaan $\hat{\delta}(q_0, w) = p$ jos ja vain jos $\hat{\delta}'(f(q_0), w) = f(p)$. Lisäksi määritelmän 4.6 mukaan $p \in F$ jos ja vain jos $f(p) \in F'$ ja $f(q_0) = q_0' \in F'$. Siis $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ jos ja vain jos $\hat{\delta}'(f(q_0), w) \in F'$, joten määritelmän 2.10 mukaan

$$L(A) = \{\, w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \,\} = \{\, w \in \Sigma'^* \mid \hat{\delta}'(f(q_0), w) \in F' \,\} = L(B).$$

Siis automaatit tunnistavat saman kielen eli $L(A) = L(B)$. □

Nyt meillä on kaikki työkalut, jotta voimme todistaa seuraavan lauseen.

Lause 4.9 (vrt. [1, s. 77–78])**.** *Olkoon* $A = (T, \Sigma, \delta', q_0, E)$ *deterministinen äärellinen automaatti ja* $L = L(A)$ *sen tunnistama säännöllinen kieli. Tällöin automaatti* $\mathrm{Min}(L) = (Q, \Sigma, \delta, [\epsilon]_{\simeq_L}, F)$ *on isomorfinen automaatin* $\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A)) = (Q', \Sigma, \gamma', s, F')$ *kanssa ja* $|Q'| = |Q|$, *missä* $\mathrm{Acc}(A) = (T', \Sigma, \gamma, q_0, E')$.

Todistus. Määritellään kuvaus $f\colon Q' \to Q$, jolle pätee

$$f([q]_{\sim_\gamma}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid \hat{\gamma}(q_0, w) \in [q]_{\sim_\gamma} \,\},$$

missä $q \in T'$. Osoitetaan, että kuvaus f on hyvin määritelty ja bijektio. Oletetaan, että $[q_1]_{\sim_\gamma} = [q_2]_{\sim_\gamma}$, missä $q_1, q_2 \in T'$. Olkoot $w \in f([q_1]_{\sim_\gamma})$ ja $w' \in f([q_2]_{\sim_\gamma})$, joten $\hat{\gamma}(q_0, w) \in [q_1]_{\sim_\gamma}$ ja $\hat{\gamma}(q_0, w') \in [q_2]_{\sim_\gamma}$ eli apulauseen 3.8 mukaan $\hat{\gamma}(q_0, w) \sim_\gamma \hat{\gamma}(q_0, w')$. Relaation $\sim_\gamma$ määritelmän 4.2 mukaan jokaiselle merkkijonoille $v \in \Sigma^*$ pätee $\hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, w), v) \in E'$ jos ja vain jos $\hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, w'), v) \in E'$. Edelleen lauseesta 2.9 ja $E' \subseteq E$ saadaan, että jokaiselle merkkijonoille $v \in \Sigma^*$ pätee $\hat{\gamma}(q_0, wv) \in E$ jos ja vain jos $\hat{\gamma}(q_0, w'v) \in E$. Siis kaikille merkkijonoille $v \in \Sigma^*$, $w \in f([q_1]_{\sim_\gamma})$ ja $w' \in f([q_2]_{\sim_\gamma})$ pätee $wv \in L(A) = L$ jos ja vain jos $w'v \in L(A) = L$. Tällöin relaation määritelmän 3.4 mukaan $w \simeq_L w'$ eli apulauseen 3.8 mukaan $f([q_1]_{\sim_\gamma}) = [w]_{\simeq_L} = [w']_{\simeq_L} = f([q_2]_{\sim_\gamma})$, joten f on hyvin määritelty.

Osoitetaan injektiivisyys, joten oletetaan, että $f([q_1]_{\sim_\gamma}) = f([q_2]_{\sim_\gamma})$, $\hat{\gamma}(q_0, w) \in [q_1]_{\sim_\gamma}$ ja $\hat{\gamma}(q_0, w') \in [q_2]_{\sim_\gamma}$, missä $w, w' \in \Sigma^*$ ja $q_1, q_2 \in T'$. Eli saadaan $f([q_1]_{\sim_\gamma}) = [w]_{\simeq_L} = [w']_{\simeq_L} = f([q_2]_{\sim_\gamma})$, joten relaation määritelmän 3.4 ja apulauseen 3.8 mukaan kaikille merkkijonoille $v \in \Sigma^*$ pätee $wv \in L(A) = L$ jos ja vain jos $w'v \in L(A) = L$. Siis kaikille $v \in \Sigma^*$ pätee $\hat{\gamma}(q_0, wv) \in E$ jos ja vain jos $\hat{\gamma}(q_0, w'v) \in E$ eli lauseen 2.9 mukaan $\hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, w), v) \in E$ jos ja vain jos $\hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, w'), v) \in E$. Siis määritelmän 4.2 mukaan $q_1 \sim_\gamma \hat{\gamma}(q_0, w) \sim_\gamma \hat{\gamma}(q_0, w') \sim_\gamma q_2$ eli $[q_1]_{\sim_\gamma} = [q_2]_{\sim_\gamma}$. Siis f on injektio.

Osoitetaan surjektiivisuus, joten oletetaan, että $Y \in Q$ eli $Y \in \Sigma^*/\simeq_L$ ja osoitetaan $f([\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma}) = \{\, x \in \Sigma^* \mid \hat{\gamma}(q_0, x) \in [\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma} \,\} = Y$, missä $w \in Y$. Huomataan, että $\hat{\gamma}(q_0, w) \in [\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma}$, joten $w \in f([\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma})$. Siis $Y \subseteq f([\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma})$. Oletetaan $w' \in f([\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma})$. Kuvauksen f määritelmän mukaan $\hat{\gamma}(q_0, w') \in [\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma}$, joten $\hat{\gamma}(q_0, w') \sim_\gamma \hat{\gamma}(q_0, w)$. Siis määritelmän 4.2 mukaan kaikille merkkijonoille $z \in \Sigma^*$ pätee $\hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, w), z) \in E'$ jos ja vain jos $\hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, w'), z) \in E'$. Edelleen lauseen 2.9 ja $E' \subseteq E$ nojalla saadaan, että kaikille $z \in \Sigma^*$ pätee $\hat{\gamma}(q_0, wz) \in E$ jos ja vain jos $\hat{\gamma}(q_0, w'z) \in E$ eli kaikille $z \in \Sigma^*$ pätee $wz \in L(A)$ jos ja vain jos $wz' \in L(A)$. Siis määritelmän 3.9 nojalla saadaan $w' \simeq_L w$, joten $w' \in Y$. Siis $f([\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma}) \subseteq Y$, joten saadaan haluttu tulos $f([\hat{\gamma}(q_0, w)]_{\sim_\gamma}) = Y$.

Osoitetaan vielä, että f on homomorfismi. Koska $q_0 \in s$ ja $f(s) = \{\, w \mid \hat{\gamma}(q_0, w) \in s \,\}$, niin nähdään $\hat{\gamma}(q_0, \epsilon) \in f(s)$, joten $f(s) = [\epsilon]_{\simeq_L}$. Olkoon $[q_3]_{\sim_\gamma} \in F'$, missä $q_3 \in T'$. Ensinnäkin $f([q_3]_{\sim_\gamma}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid \hat{\gamma}(q_0, w) \in [q_3]_{\sim_\gamma} \,\}$. Koska $[q_3]_{\sim_\gamma} \subseteq E' \subseteq E$ algoritmin määritelmän 4.5 mukaan, niin $f([q_3]_{\sim_\gamma}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid \hat{\gamma}(q_0, w) \in [q_3]_{\sim_\gamma} \,\} \subseteq \{\, w \mid \hat{\gamma}(q_0, w) \in E \,\} = L(A)$ eli $f([q_3]_{\sim_\gamma}) \in F$.

Lopuksi riittää osoittaa $f(\gamma'([q_1]_{\sim_\gamma}, a)) = \delta(f([q_1]_{\sim_\gamma}), a)$, missä $a \in \Sigma$ ja $q_1 \in T'$. Olkoon $w \in f([q_1]_{\sim_\gamma})$, joten $\hat{\gamma}(q_0, w) \in [q_1]_{\sim_\gamma}$ ja $f([q_1]_{\sim_\gamma}) = [w]_{\simeq_L}$. Asetetaan $\gamma(q_1, a) = q_2$, jolloin suoraan algoritmin määritelmästä 4.5 saadaan, että $\gamma'([q_1]_{\sim_\gamma}, a) = [q_2]_{\sim_\gamma}$ ja siirtymäfunktion δ määritelmästä $\delta(f([q_1]_{\sim_\gamma}), a) = \delta([w]_{\simeq_L}), a) = [wa]_{\simeq_L}$. Nyt $\gamma(q_1, a) = \gamma(\hat{\gamma}(q_0, w), a) = \hat{\gamma}(q_0, wa) = q_2$, joten saadaan haluttu tulos

$$\begin{aligned} f(\gamma'([q_1]_{\sim_\gamma}, a)) &= f([q_2]_{\sim_\gamma}) \\ &= f([\hat{\gamma}(q_0, wa)]_{\sim_\gamma}) \\ &= [wa]_{\simeq_L} \\ &= \delta(f([q_1]_{\sim_\gamma}), a). \end{aligned}$$

Siis f on kuvaus ja erityisesti isomorfismi eli $\mathrm{Min}(L) = (Q, \Sigma, \delta, [\epsilon]_{\simeq_L}, F)$ on isomorfinen $\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A)) = (Q', \Sigma, \gamma', s, F')$ kanssa. Koska $f : Q' \to Q$ on bijektio, niin $|Q'| = |Q|$. □

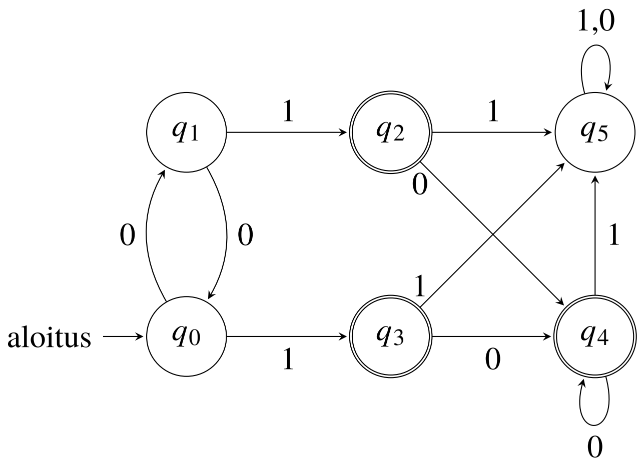
Seuraus 4.10. *Olkoot A deterministinen äärellinen automaatti ja $L(A)$ sen tunnistama säännöllinen kieli. Tällöin algoritmin 4.5 tuottama automaatti* $\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A)) =$

$(Q', \Sigma, \gamma', s, F')$ *on kielen* $L(A)$ *minimaalinen automaatti.*

Todistus. Lauseesta 4.4 seuraa, että $\mathrm{Min}(L(A)) = (Q, \Sigma, \delta, [\epsilon]_{\simeq_L}, F)$ on kielen $L(A)$ minimaalinen automaatti. Edelleen lauseesta 4.9 seuraa, että $\mathrm{Min}(L)$ on isomorfinen $\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A))$ kanssa ja $|Q'| = |Q|$. Lauseesta 4.8 seuraa, että $L(\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A))) = L(\mathrm{Min}(L)) = L(A)$. Siis algoritmin 4.5 tuottama automaatti $\mathrm{Dist}(\mathrm{Acc}(A))$ on kielen $L(A)$ minimaalinen automaatti. □

4.2 Esimerkkejä

Esimerkki 4.11. Olkoon $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, 0, 1, \delta, q_0, \{q_2, q_3, q_4\})$, missä $\delta = \{((q_0, 0), q_1), ((q_0, 1), q_3), ((q_1, 0), q_0), ((q_1, 1), q_2), ((q_2, 0), q_4), ((q_2, 1), q_5), ((q_3, 0), q_4), ((q_3, 1), q_5), ((q_4, 0), q_4), ((q_4, 1), q_5), ((q_5, 0), q_5), ((q_5, 1), q_5)\}$. Käytetään algoritmia 4.5 sen minimoimiseen.



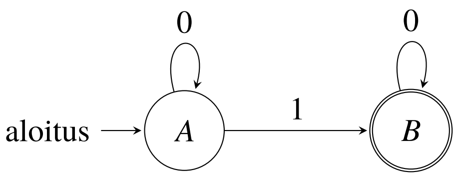
Kuva 4.1. Automaatti A

Kuvasta 4.1 havaitaan välittömästi, että automaatti A ei sisällä saavuttamattomia tiloja. Toisaalta se sisältää turhan tilan q_5, joten se voidaan, jatkossa jättää piirtämättä. Voimme siis suoraan siirtyä tarkastelemaan erottuvia ja ekvivalentteja tiloja.

Tarkastellaan ensin tiloja q_4, q_3 ja q_2. Huomataan, että tilat eivät ole erottuvia millään merkkijonolla $x \in 0^*$ ja toisaalta ne eivät ole erottuvia symbolilla 1. Nimittäin siirtymäfunktion δ määritelmän mukaan kaikkien kuva on tila q_5. Kuitenkin, koska tila q_5 on turha tila, niin millään merkkijonolla ei päästä hyväksymistilaan. Siis tilat q_4, q_3 ja q_2 ovat ekvivalentteja eli ne kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan.

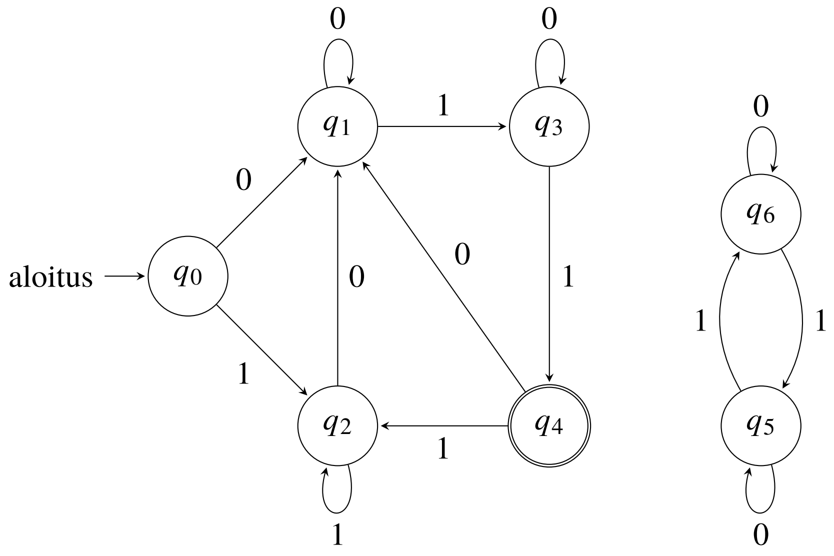
Tarkastellaan seuraavaksi tiloja q_0 ja q_1. Huomataan, että millään merkkijonolla $x \in 0^*$ tilat eivät ole erottuvia, sillä ne ovat edelleen, joko tilassa q_0 tai q_1 toisin sanoen ne eivät ole erottuvia merkkijonolla, joka ei sisällä yhtään symbolia 1. Kuitenkin symbolilla 1 molemmat ovat siirtymäfunktion δ määritelmän mukaan joko tilassa q_2 tai q_3. Relaation $\sim_\delta$ transitiivisuuden nojalla, koska tilat q_2 ja q_3 ovat ekvivalentteja, niin millään merkkijonolla $1y$, missä $y \in \Sigma^*$, tilat q_0 ja q_1 eivät voi olla erottuvia. Siis tilat q_0 ja q_1 eivät voi olla erottuvia myöskään millään merkkijonolla $x1y$, missä $x \in \{0\}^*$ ja $y \in \Sigma^*$ toisin sanoen merkkijonolla, jossa vähintään yksi symboli 1. Siis tilat q_0 ja q_1 eivät ole erottuvia millään merkkijonolla $x \in \Sigma^*$ eli ne ovat ekvivalentteja.

Selvästi nähdään, että tilat q_0 ja q_1 ovat erottuvia tilojen q_2, q_3 ja q_4 kanssa merkkijonolla 0. Saadaan kolme ekvivalenssiluokkaa ja merkitään $A = \{q_0, q_1\}$, $B = \{q_2, q_3, q_4\}$ ja $C = \{q_5\}$. Saadaan uusi tilojen joukko $Q' = \{A, B, C\}$, siirtymäfunktio $\delta' = \{((A,0),A),((A,1),B),((B,0),C),((B,1),C),((C,0),C),((C,1),C)\}$, alkutila A ja hyväksymistilojen joukko $\{B\}$. Saadaan kuvan 4.2 mukainen automaatti, josta C jätetty piirtämättä sillä se oli turha. Automaatti tunnistaa kielen, jossa jokaisessa merkkijonossa tasan yksi symboli 1 ja mielivaltainen määrä nollia.

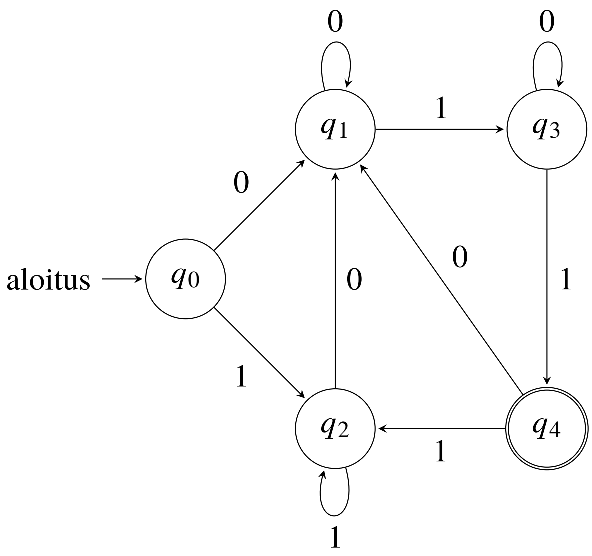


Kuva 4.2. Automaatti Dist(Acc(A))

Esimerkki 4.12. Olkoon $B = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, 0, 1, \delta, q_0, \{q_4\})$, missä $\delta = \{((q_0,0),q_1),((q_0,1),q_2),((q_1,0),q_1),((q_1,1),q_3),((q_2,0),q_3),$ $((q_2,1),q_2),((q_3,0),q_3),((q_3,1),q_4),((q_4,0),q_1),((q_4,1),q_2),((q_5,0),q_5),$ $((q_5,1),q_6),((q_6,0),q_6),((q_6,1),q_5)\}$. Jälleen käytetään algoritmia 4.5 sen minimoimiseen. Kuvasta 4.3 havaitaan välittömästi, että automaatti B sisältää saavuttamattomia tiloja. Muodostetaan algoritmin avulla kuvan 4.4 mukainen uusi automaatti Acc(B).



Kuva 4.3. Automaatti B



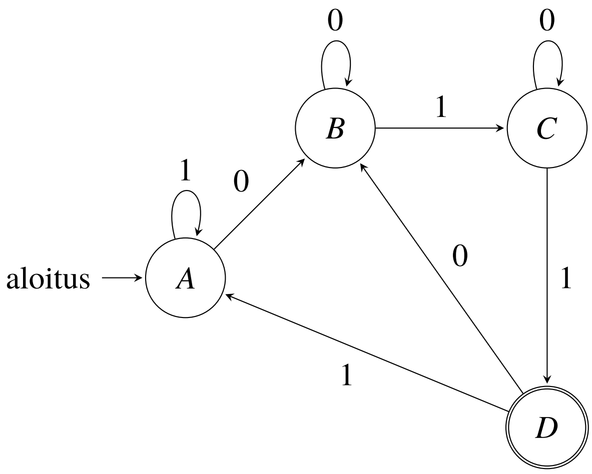
Kuva 4.4. Automaatti $\mathrm{Acc}(B)$

Tarkastellaan ensin automaatin $\mathrm{Acc}(B)$ tilaa q_3. Huomataan, että tila ei voi olla ekvivalentti minkään muun tilan kanssa, sillä merkkijono 1 erottaa sen muista tiloista. Huomataan myös, että tila q_1 ei voi olla minkään tilan kanssa ekvivalentti, sillä merkkijono 11 erottaa sen muista tiloista. Selvästi tila q_4 ei voi olla ekvivalentti minkään tilan kanssa, sillä se on ainoa hyväksymistila.

Tarkastellaan lopuksi tiloja q_0 ja q_2. Olkoon γ automaatin $\mathrm{Acc}(B)$ siirtymäfunktio. Merkkijonoilla $0x$, missä $x \in \Sigma^*$ toisin sanoen merkkijonoissa, missä ensimmäinen symboli on 0, niin $\hat{\gamma}(q_0, 0x) = \hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, 0), x) = \hat{\gamma}(q_1, x) = \hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_2, 0), x) =$

$\hat{\gamma}(q_2, 0x)$ eli ne ovat samassa tilassa. Lisäksi merkkijonoilla $1x$, missä $x \in \Sigma^*$ toisin sanoen merkkijonoilla, missä ensimmäinen symboli on 1, niin $\hat{\gamma}(q_0, 1x) = \hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_0, 1), x) = \hat{\gamma}(q_2, x) = \hat{\gamma}(\hat{\gamma}(q_2, 1), x) = \hat{\gamma}(q_2, 0x)$ eli ne ovat samassa tilassa. Siis tilat q_0 ja q_2 ovat ekvivalentteja.

Saadaan siis neljä ekvivalenssiluokkaa ja merkitään $A = \{q_0, q_2\}$, $B = \{q_1\}$, $C = \{q_3\}$ ja $D = \{q_4\}$. Saadaan uusi tilojen joukko $Q' = \{A, B, C, D\}$, siirtymäfunktio $\delta' = \{((A, 0), B), ((A, 1), A), ((B, 0), B), ((B, 1), C), ((C, 0), C), ((C, 1), D), ((D, 0), B), ((D, 1), A)\}$, alkutila A ja hyväksymistilojen joukko $\{D\}$. Saadaan kuvan 4.5 mukainen automaatti Dist(Acc(B)).



Kuva 4.5. Automaatti Dist(Acc(B))

Lähteet

[1] Anderson, J., &, Head, T., *Automata theory with modern application*, Cambridge University Press, 2006.

[2] Ebbinghaus, H.-D., &, Flum, J. *Finite model theory*, Springer, Germany, 1991.

[3] Enderton, H. B., *Elements of set theory*, Academic Press, New York, 1997.

[4] Hopcroft, J. E., Motwani, R., &, Ullman J. D. *Introduction to automata theory, languages, and computation*, 2nd ed., Addison-Wesley, United States of America, 2001.

[5] Pippenger, N. *Theories of computability*, Cambringe University Press, New York, 1997.