Tampereen yliopisto

Meri Rosenberg

KIRJALLISEEN KIELENTÄMISEEN JOHTAVAT MURTOLUKUTEHTÄVÄT ALAKOULUSSA

Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta
Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2019

TIIVISTELMÄ

Meri Rosenberg: Kirjalliseen kielentämiseen johtavat murtolukutehtävät alakoulussa
Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma, 77 sivua, 23 liitesivua
Tampereen yliopisto
Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta
Huhtikuu 2019

Tutkimuksen tarkoituksena oli kehittää alakoulun 5. ja 6. vuosiluokalle murtolukutehtäviä matemaattisen osaamisen ja kirjallisen kielentämisen teoreettisiin viitekehyksiin nojautuen. Kehitetyissä tehtävissä operoidaan sekä symbolikielen, kuviokielen että luonnollisen kielen avulla varioiden näiden yhdistelmiä eri tavoin. Tehtävien avulla oppilas pääsee harjoittamaan matematiikan taitojaan monipuolisesti. Tutkimuksessa kehitettyjen tehtävien on tarkoitus olla sovellettavissa myös muille vuosiluokille sekä matematiikan eri aihealueille niiden sisältöä muokkaamalla.

Kyseessä oli kehittämistutkimus. Tutkimuksessa oltiin kiinnostuneita sekä oppilaan että opettajan näkökulmasta. Aineisto kerättiin keväällä 2018 kahdeksalta luokalta neljästä eri alakoulusta Pirkanmaalta, Etelä-Pohjanmaalta ja Kanta-Hämeestä. Opettajat (N=8) saivat murtoluku-jakson ajaksi tehtävät käyttöönsä osaksi omaa opetustaan muun työskentelyn ohelle. Oppilaat (N=135) tekivät murtolukutehtäviä jakson aikana opettajan valitsemalla tavalla esimerkiksi yhdessä tunnilla tai kotitehtävinä. Kehitettyjä murtolukutehtäviä oli seitsemän erilaista. Itse tehtävien ratkaisuja ei analysoitu tässä tutkimuksessa, vaan aineistona toimi oppilaiden osalta jokaisen murtolukutehtävän teon jälkeen arvioidut väittämät ja murtoluku-jakson lopuksi täytetty kyselylomake. Lomakkeessa oli kysymyksiä itse tehtävistä ja kirjallisesta kielentämisestä. Lomake sisälsi sekä väittämiä että avoimia kysymyksiä. Oppilaiden osalta taustamuuttujina olivat sukupuoli, opintomenestys matematiikassa ja äidinkielessä sekä kokemus itsestä matematiikan ja äidinkielen osaajana.

Opettajat vastasivat murtoluku-jakson jälkeen sähköiseen kyselyyn, joka sisälsi sekä Likert-asteikollisia väittämiä että avoimia kysymyksiä. Sekä oppilailta että opettajilta kerätyt aineistot analysoitiin kehittämistutkimukselle ominaista monimenetelmällistä tutkimusotetta hyödyntäen. Avoimet kysymykset analysoitiin teorialähtöisen sisällönanalyysin avulla tukeutuen kielentämisen teoriaan. Oppilaiden aineiston osalta tätä sisällönanalyysia jatkettiin kvantifioimalla. Väittämiä tarkasteltiin tilastollisin menetelmin esimerkiksi frekvenssien ja summamuuttujien avulla.

Tutkimuksen mukaan oppilaat kokivat kuviokielen luonnollista kieltä mielekkäämpänä matematiikan kirjallisia tehtäviä ratkaistaessa. Tytöt suhtautuivat murtolukutehtäviin sekä kirjalliseen kielentämiseen poikia myönteisemmin ja kokivat sekä luonnollisen kielen että kuviokielen käytön poikia mielekkäämpänä. Huomionarvoista oli, että symbolikieli ei erityisesti korostunut oppilaiden vastauksissa. Opettajat suhtautuivat tehtäviin pääasiassa positiivisesti. He toivat vastauksissaan esille murtolukutehtävien käyttöön liittyvinä haasteina matematiikan opetuksessa läsnäolevan kiireen sekä aikatauluongelmat. Lisäksi opettajien vastauksissa tuli toistuvasti esille opetuksen oppikirjakeskeisyys, ja perusteluissa murtolukutehtäviä verrattiin oppikirjassa oleviin tehtäviin.

Tutkimuksen perusteella matematiikan kirjallisen työskentelyn monipuolistaminen on tarpeen, sillä vain niin voidaan huomioida erilaiset oppijat monipuolisesti, tukea oppilaiden pystyvyyden tunnetta matematiikkaa kohtaan sekä laajentaa oppilaiden käsitystä matematiikasta. Jatkossa olisi vielä tarpeellista tutkia lisää sitä, voitaisiinko kielentämistehtävien lisäämisellä opetukseen saada tasoitettuja eroja tyttöjen ja poikien välillä heidän kokemansa matematiikka-ahdistuksen suhteen.

Avainsanat: alakoulu, kielentäminen, kehittämistutkimus, murtoluku, oppimateriaali

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014, 234) mukaan vuosiluokkien 3–6 matematiikan opetuksessa tavoitteena on ymmärtävä oppiminen, jossa oppilaiden kykyä omaksua matemaattisia käsitteitä ja rakenteita kehitetään. Tämä tukee oppilaiden tiedonkäsittely- sekä ongelmanratkaisutaitojen harjaantumista. Opetuksessa tulisi ottaa huomioon oppilaiden taidot esittää matemaattista ajatteluaan sekä matematiikan tehtävien ratkaisuja eri tavoin. Tällöin erilaisten ratkaisutapojen vertailusta muodostuu tärkeä osa opetusta. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 234.)

Tutkimusten mukaan matematiikan opetuksessa tukeudutaan usein oppikirjoihin ja opettajan oppaisiin. Tällöin näistä valmiista oppimateriaaleista on tullut opetusta eri tavoin strukturoivia tekijöitä, sillä niistä saadaan niin valmiita opetusvinkkejä, tehtäviä kuin kokeitakin. Kuitenkin alakoulun matematiikan oppikirjoissa tehtävät ovat pääasiassa sellaisia, joita ratkaistessaan oppilas pääse operoimaan pelkästään matematiikan symbolikielellä. Tehtävät eivät siten ohjaa kuvioiden käyttöön tai omin sanoin selittämiseen osana ratkaisuprosessia. Tällainen kirjallisten tehtävien ratkaisemistapa on muodostunut oppilaille rutiiniksi, ja sen jatkuva käyttäminen osaltaan muokkaa oppilaiden käsitystä matematiikasta. (Joutsenlahti 2009, 72–73; Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 411; Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 139.)

Pelkkä symbolikielen käyttäminen ei kuitenkaan kehitä oppilaan matemaattista ajattelua monipuolisesti edellä esitettyyn Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaiseen ymmärtävän oppimisen suuntaan, eikä myöskään tarjoa oppilaalle riittäviä mahdollisuuksia ajatuskulun esittämiseen. Lisäksi opettajan näkökulmasta tarkasteltuna oppilaan oppimisen arviointi saattaa vaikeutua, sillä oppilaan ajatteluprosessia voi olla hankala seurata ainoastaan symbolikielellä esitettyjen ratkaisujen pohjalta. Varsinkin opintojen edetessä tämä näkökulma korostuu, ja oppilaan odotetaan osaavan esittää tehtävän ratkaisuprosessin siten, että se on lukijan ymmärrettävissä. (Joutsenlahti 2009, 72–73; Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 411; Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 139.)

Symbolikielen lisäksi matematiikassa voidaan kirjallisessa työskentelyssä operoida kuviokielen sekä luonnollisen kielen avulla. Matemaattisen ajattelun ilmaisua näiden eri kielien avulla kutsutaan kielentämiseksi. Monipuolinen eri kielien käyttö edesauttaa oppilaan ajattelun jäsentymistä ja toisaalta helpottaa opettajan arviointityötä. Kun oppilaat pääsevät ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan heille luonnollisimmalla tavalla, he saavat onnistumisen elämyksiä, ja siten muokkaavat minäkuvaansa itsestään matematiikan oppijoina. (Joutsenlahti 2009, 73–77; Joutsenlahti & Rättyä 2010, 53; Lee 2006, 2–3.) Myös opetussuunnitelman perusteiden (2014, 17) oppimiskäsityksen mukaan kieli on, kehollisuuden sekä eri aistien ohella, yksi ajattelun ja oppimisen kannalta olennaisimmista asioista. Oppilaiden arvioinnissa tulee huomioida matemaattisen ajattelun esilletuominen symbolikielen lisäksi piirtämisen ja kielen avulla, minkä vuoksi oppilaille pitää tarjota monipuolisia mahdollisuuksia tehdä ratkaisuprosessiaan näkyväksi. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 17, 237.)

Matematiikan suullista sekä kirjallista kielentämistä on tutkittu eri tavoin, mutta tutkimusta kirjallisista kielentämistehtävätyypeistä ei alakoulun kontekstissa ole vielä tehty. Matematiikan kirjallisella kielentämistehtävällä tarkoitetaan tehtävää, jossa oppilaat ilmaisevat matemaattista sisältöä symbolikielen lisäksi kuviokielen sekä luonnollisen kielen avulla ja näitä kolmea eri kieltä erilaisin tavoin varioiden. Tässä tutkimuksessa kehitettiin tehtäviä matemaattisen osaamisen sekä kirjallisen kielentämisen teoreettisesta viitekehyksestä käsin ja tutkittiin, miten 5. sekä 6. luokkalaiset oppilaat kokivat kehitetyt kielentämistehtävät ja miten opettajat kokivat nämä tehtävät oman opetuksensa osana.

Kehitettyjen kielentämistehtävien aiheeksi valikoituivat murtoluvut, jotka ovat alakoulun matematiikassa haasteellinen aihe. McMullenin, Laakkosen, Hannula-Sormusen ja Lehtisen (2015) tutkimuksessa havaittiin, että alakoulun oppilailla on suuria ongelmia ymmärtää rationaaliluvun käsitettä. Näveri (2009) on tutkinut matemaattista osaamista peruskoulun päättövaiheessa. Kahden vuosikymmenen, 1980-luvun ja 2000-luvun, erot ovat huomattavat, sillä murtolukujen kerto- ja jakolaskutehtävien osaaminen on laskenut (Näveri 2009, 101). Lisäksi alakoulun oppilaiden murtolukujen ja jakolaskujen osaamisen on tutkittu ennustavan jopa oppilaan matemaattista osaamista lukio-opintoihin siirryttäessä (Siegler ym. 2012). Murtolukujen on nähty olevan yksi tehtäväsisällöistä, joiden hallinnassa ollessa vaikeuksia oppimistavoitteet eivät täyty ja oppilas tarvitsee lisää opetusta esimerkiksi tukiopetuksen muodossa (Räsänen, Närhi & Aunio 2010, 172–173).

Edellisten perusteella voidaan todeta, että murtolukujen opetusta olisi tarpeellista tutkia sekä kehittää, ja kielentäminen voisi toimia yhtenä välineenä tähän. Oppimateriaalitutkimus taas on tärkeää oppimateriaalien ollessa keskeinen elementti peruskoulun matematiikan opetuksessa (Joutsenlahti & Vainionpää 2008, 556). Näin ollen tutkimuksessa käytetyksi tutkimusmenetelmäksi valittiin kehittämistutkimus. Kehittämistutkimus on noussut ratkaisuehdotuksena opetuksen kentältä tutkimuksia kohtaan esitettyyn ongelmaan, jonka mukaan opetuksen ja oppimisen tutkimuksissa ei ole pystytty tuottamaan tarpeeksi käytännönläheistä tietoa, joka hyödyttäisi opettajien päivittäistä opetustyötä. Kehittämistutkimus on pyrkinyt vastaamaan näihin kysymyksiin tarkoituksenaan opetuksen kehittäminen tutkimuspohjaisesti siten, että kehittämisen kohteet valitaan päivittäisistä, autenttisista opetustilanteista. Kehittämisen jälkeen tavoitellaan saavutettavaksi tilaa, jossa kehittämisen kohteena olevan asian tila on muuttunut parempaan suuntaan. (Kananen 2012, 13; Pernaa 2013, 11.) Kehittämistutkimusta tarkastellaan tarkemmin luvussa 6.

Tutkimuksen tarkoituksena oli siis kehittää uutta oppimateriaalia, jonka avulla opettaa ja opiskella sekä tuottaa tietoa, joka hyödyttäisi opettajia luokkahuoneissa oppilaiden matemaattisen osaamisen kehittämistyössä. Tutkimuksessa kehitetyt murtolukutehtävät ovatkin heti otettavissa kokeiluun osaksi omaa opetusta tämän tutkielman liitteistä. Pienellä muuntelulla ja tehtävissä vaadittujen laskuproseduurien helpottamisella ne soveltuvat myös alemmille vuosiluokille. Sisältöaluetta vaihtamalla niitä voidaan käyttää myös muussa kuin murtolukujen opetuksessa.

Teoreettisen viitekehyksen kuvaaminen aloitetaan tarkastelemalla matemaattista osaamista, jonka useat ulottuvuudet tulisi huomioida matematiikan opetuksessa. Tämän jälkeen tarkastellaan kirjallista kielentämistä ja murtolukuja. Näiden kolmen luvun teoreettisen sisällön varaan tutkimuksen murtolukutehtävien kehitystyö rakentui. Luvussa 7 kuvataan tämän tutkimusprosessin keskeinen anti eli tutkimuksessa kehitetyt murtolukutehtävät ja niiden erityispiirteet. Tehtävien esittelyn jälkeen tarkastellaan tutkimuksen toteutusta ja saatuja tuloksia niin oppilaiden kuin opettajien osalta. Lopuksi kootaan yhteen tutkimuksessa toteutettu kehittämisprosessi tulkitsemalla saatuja tuloksia sekä tarkastellaan kehitettyjen murtolukutehtävien mahdollisia jatkokehittämistarpeita.

2 MATEMAATTINEN OSAAMINEN

Tutkimuksessa kehitettyjen murtolukutehtävien suunnittelussa hyödynnettiin Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) määrittelemiä matemaattisen osaamisen osa-alueita, joita tarkastellaan seuraavaksi antaen samalla esimerkkejä murtolukujen aihealueeseen liittyen. Näitä matemaattisen osaamisen osa-alueita on viisi, ja niihin kuuluvat *käsitteellinen ymmärtäminen (conceptual understanding)*, *proseduraalinen sujuvuus (procedural fluency)*, *strateginen kompetenssi (strategic competence)*, *mukautuva päättely (adaptive reasoning)* sekä *yritteliäisyys (productive disposition)*. (Joutsenlahti 2005, 96–97; Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, 116.)

Käsitteellisellä ymmärtämisellä viitataan ymmärrykseen matemaattisista käsitteistä, operaatioista ja relaatioista. Käsitteellisen ymmärtämisen omaava oppilas ymmärtää muutakin kuin yksittäisiä faktoja. Hän osaa siirtää matemaattisen käsitteen eri konteksteihin ja jäsentää tietonsa yhtenäiseksi kokonaisuudeksi. Tällöin myös asioiden mieleen painaminen ja muistaminen on tehokkaampaa, kun asioita ei ainoastaan opetella ulkoa. Käsitteellinen ymmärtäminen ei aina ilmene oppilaiden kyvyssä verbalisoida asioita, sillä ymmärrystä voi tapahtua, ennen kuin sitä osataan kunnolla sanallistaa. Kuitenkin tärkeä mittari käsitteelliselle ymmärtämiselle on kyky esittää matemaattisia ratkaisuja eri tavoin sekä kyky arvioida, miten hyödyntää erilaisia esitystapoja eri tarkoituksissa. Käsitteellinen ymmärtäminen kehittää argumentointitaitoja, sillä käsitteiden ja proseduurien välillä aletaan nähdä yhteyksiä. (Kilpatrick ym. 2001, 116, 118–119.) Käsitteellinen ymmärtäminen murtolukujen kohdalla tarkoittaa esimerkiksi sitä, että oppilas ymmärtää merkinnän "$\frac{m}{n}$" monet merkitykset (ks. Joutsenlahti & Perkkilä 2019, 4–5) ja osaa hyödyntää niitä tarkoituksenmukaisella tavalla. Lisäksi käsitteellisesti ymmärtävä oppilas kykenee siirtymään lukukäsityksessään kokonaisluvuista rationaalilukuihin ja esimerkiksi järjestämään murtoluvut koon mukaan oikeaan järjestykseen (Kilpatrick ym. 2001, 137).

Toiseen osa-alueeseen eli proseduraaliseen sujuvuuteen kuuluu tietämys matematiikan eri proseduureista eli toisin sanoen tieto siitä, millaisissa tilanteissa eri proseduureja voi hyödyntää sekä miten käyttää niitä tarkoituksenmukaisesti. Proseduraalinen sujuvuus tarkoittaa siis laskemisen sujuvuutta, joustavuutta ja tehokkuutta. Sitä tarvitaan erityisesti tukemaan käsitteellisen ymmärtämisen kehittymistä koskien paikkajärjestelmää ja rationaalilukuja. Ilman proseduraalista sujuvuutta oppilaat kohtaavat ongelmia yrittäessään ymmärtää matematiikan ratkaisuja ja ongelmia.

Oppilaiden pitäisi pystyä suorittamaan peruslaskutoimituksia kokonaisluvuilla ilman apuvälineitä, sillä taitoa tarvitaan arkipäiväisten algoritmien suorittamisessa. Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus linkittyvät toisiinsa, sillä tiettyä tasoa vaaditaan, jotta ymmärtävä oppiminen mahdollistuu, ja toisaalta proseduurien sujuva käyttö osaltaan vahvistaa ymmärtämistä. (Kilpatrick ym. 2001, 116, 121–122.) Proseduraalista sujuvuutta kehitetään murtolukujen osalta alakoulussa aina murtoluvun kokonaisluvulla kertomiseen ja jakamiseen asti (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 236).

Strateginen kompetenssi tarkoittaa kykyä muodostaa, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Tämän kyvyn omaavalla oppilaalla on erilaisia ongelmanratkaisustrategioita sekä ymmärrystä siitä, mihin tilanteisiin ne ovat sovellettavissa. Kohdatessaan ongelman, strategisen kompetenssin omaava oppilas ymmärtää ongelman keskeisimmät tekijät sekä osaa esittää nämä matematiikan symbolikielellä jättäen irrelevantit muuttujat pois. Tällainen oppilas ymmärtää tehtävän kannalta relevanttien muuttujien väliset suhteet esimerkiksi muuttujien suuruuden osalta. Tämän apuna oppilas voi hyödyntää esimerkiksi kuviokieltä. Strateginen kompetenssi kytkeytyy käsitteelliseen ymmärtämiseen sekä proseduraaliseen sujuvuuteen, sillä näiden osa-alueiden hallinta mahdollistaa joustavan ongelmanratkaisun. Proseduraalinen sujuvuus kehittyy, kun strategista kompetenssia hyödynnetään valittaessa tarkoitukseen sopivia proseduureja. Toisaalta strategisen kompetenssin kehittyminen on riippuvaista siitä, että hallitsee proseduureja vaivattomasti ja joustavasti. (Kilpatrick ym. 2001, 116, 124–129.)

Mukautuva päättely pitää sisällään kyvyn ajatella loogisesti sekä kyvyn perustella omia valintojaan. Jotta oppilas pystyy mukautuvaan päättelyyn, kolmen ehdon tulee täyttyä: 1) oppilaan tietopohjan pitää olla riittävän vahva, 2) tehtävän pitää olla ymmärrettävä sekä motivoiva ja 3) tehtävän kontekstin pitää olla oppilaalle tuttu. Murtolukujen kontekstissa mukautuva päättely linkittyy esimerkiksi murtolukujen suuruuden arviointiin. Jos kaksi murtolukua, jotka ovat lukua yksi pienempiä, lasketaan yhteen, ja oppilaan pitää arvioida tästä saatavan summan suuruus, mukautuvan päättelyn avulla hän kykenee päättelemään kahden lukua yksi pienemmän luvun summan olevan lukua kaksi pienempi. Mukautuva päättely linkittyy myös muihin matemaattisen osaamisen haaroihin kytkeytyen erityisesti strategiseen kompetenssiin. Strategista kompetenssia oppilas hyödyntää ongelman muodostamiseen, esittämiseen ja ratkaisustrategian valintaan, mutta mukautuvan päättelyn avulla oppilas perustelee valitun ongelmanratkaisustrategian oikeellisuuden. (Kilpatrick ym. 2001, 116, 130–131, 139.)

Matemaattisen osaaminen viides osa-alue eli yritteliäisyys kuvaa oppilaan luontaista taipumusta nähdä matematiikka mielekkäänä ja hyödyllisenä, mikä yhdistyy oppilaan uskoon omista kyvyistä sekä ahkeruuden merkityksestä matematiikan oppimisprosessissa. Tämä tarkoittaa sitä, että murtolukuoperaatiot pitäisi pystyä esittämään myös oppilaiden arkielämän kontekstissa, ja siten tehdä niiden merkityksellisyys näkyväksi. Uskoa omiin kykyihin puolestaan pystytään tukemaan tarjoamalla erilaisille oppijoille eri tapoja ratkaista matemaattisia ongelmia (Joutsenlahti 2010, 4). Oppilailla, jotka ovat yritteliäitä, on itsevarmuutta sekä omiin tietoihin että taitoihin liittyen. He uskovat, että matematiikan opiskelussa menestyminen on mahdollista riittävällä harjoittelulla. Tällöin matematiikka näyttäytyy oppilaalle selvitettävissä ja saavutettavissa olevana eikä mysteerinä, joka tuntuu olevan tavoittamattomissa. Tämän osa-alueen kehittymisessä opettajalla on tärkeä rooli, sillä hänen tulee omalla toiminnallaan motivoida ja tukea positiivista asennetta matematiikan opiskelua kohtaan. Yritteliäisyys kehittyy muiden matematiikan osaamisen osa-alueiden kehittyessä, ja toisaalta yritteliäisyyden vahvistuminen tukee muiden osa-alueiden kehittymistä. Esimerkiksi strategisen kompetenssin avulla ratkaistuiksi saadut ongelmat lisäävät uskoa itseen matematiikan oppijana, ja käsitteellisen ymmärtämisen kehittyessä uusien käsitteiden oppimisen myötä matematiikka muuttuu vähitellen ymmärrettävämmäksi ja siten mielekkäämmäksi. (Kilpatrick ym. 2001, 116, 131–133.)

Matemaattinen osaaminen ei ole yksiulotteinen ominaisuus, vaan kaikki edellä esitetyt osaamisen viisi eri osa-aluetta ovat toisistaan riippuvaisia matemaattisen osaamisen kehittyessä. Tällöin matematiikan opettamisessa tulee huomioida oppilaan edistyminen jokaisessa osa-alueessa, mikäli halutaan varmistaa oppimisen olevan kokonaisvaltaista ja tehokasta. Matemaattinen osaaminen kehittyy ajan kuluessa, ja sen edetessä jokaista haaraa pitäisi kehittää yhdessä muiden osa-alueiden kanssa. Oppilaat tarvitsevat paljon toistoja ja harjoituksia, joissa he pääsevät ratkaisemaan ongelmia, päättelemään, kehittämään ymmärrystä ja harjoittelemaan proseduureja samalla jatkuvasti rakentaen yhteyksiä aiemman tiedon sekä uuden tiedon välille. (Kilpatrick ym. 2001, 133–135.)

3 MATEMATIIKAN KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN

Tässä luvussa tarkastellaan matematiikan eri kieliä sekä kirjallista kielentämistä. Lisäksi esitellään erilaisia kielentämisen ajatukseen pohjautuvia sanallisten tehtävien ratkaisumalleja sekä kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppejä. Lopuksi tarkastellaan kielentämistä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) näkökulmasta sekä esitellään aikaisempia tutkimuksia matematiikan kielentämiseen liittyen.

3.1 Matematiikka ja kieli

Kielet voidaan jaotella luonnollisiin kieliin sekä keinotekoisiin kieliin. Luonnollisilla kielillä tarkoitetaan kansallisia kieliä, joiden avulla ihmiset pystyvät viestimään keskenään. Luonnollinen kieli on oppilaalla useimmiten hänen äidinkielensä. Keinotekoisiin kieliin kuuluvat formaalit kielet, joista yksi esimerkki on matematiikan symbolikieli. Formaalit kielet eroavat luonnollisista kielistä siinä, että ne ovat vakiintuneet yhtenevään muotoon, ja niiden merkintätavat ovat sovittuja ja siten yksikäsitteisiä. Lisäksi niiden käyttö on usein rajoittunutta, eikä niiden avulla voida ilmaista mitä tahansa. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 47; Ruohonen 2008.)

Matematiikan symbolikieleen kuuluu asiantuntijasanasto ja muodollisuus. Tämä mahdollistaa monitahoisten matemaattisten prosessien sekä käsitteiden ilmaisun. Matematiikan symbolikielin ilmaisussa formaaleille kielille ominaisesti kaikki epäolennainen jätetään pois ja pyritään mahdollisimman tiiviiseen esitysmuotoon, jossa kerrotaan vain välttämätön. Tämä on yksi matematiikan symbolikielen eroista luonnollisiin kieliin verrattuna. (Lee 2006, 12–13.)

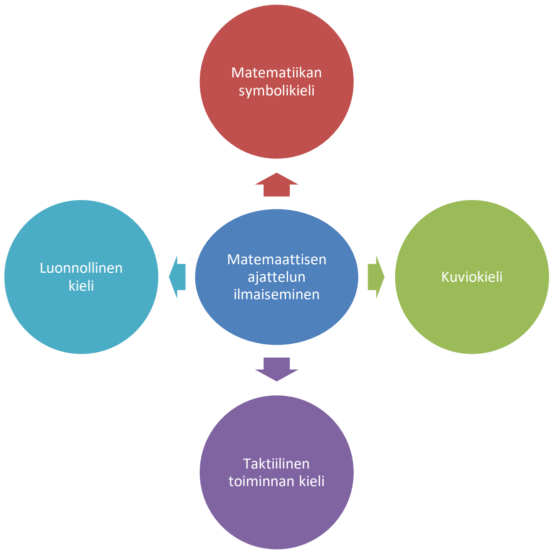
Matematiikkaa voidaan kuitenkin ilmaista symbolikielen lisäksi myös luonnollisen kielen sekä kuviokielen avulla (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 51–52). Ennen modernia-aikaa symboliset ilmaisut matematiikassa olivatkin vähäisiä, ja niitä esiintyi vain luonnollisen tekstin lomassa. Nykyään, kun ilmaisutapoja on useita, on toisinaan hankalaa erottaa, onko kielellinen ilmaus puhtaasti matemaattinen, luonnollista kieltä vai kuviokieltä. Nämä ilmaisut kytkeytyvät toisiinsa, ja toisaalta niillä operoidaan myös rinnakkain. Visuaalisella havainnollistamisella on mahdollista helpottaa symbolikielellä esitettyjen asioiden ymmärtämistä, ja luonnollisen kielen avulla pystytään selittämään ja kuvailemaan erilaisia visuaalisia kuvioita, kuten diagrammeja. Näin ollen esitysmuoto ei enää määrittele ilmaisun matemaattisuutta, vaan ilmaisun sisältämä merkitys. (Lemke 2003, 5.)

3.2 Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Vygotski (1982) toi jo varhain esille tutkimusta ajatuksen ja kielen välisestä yhteydestä. Hänen mukaansa ajatus ilmenee ja toteutuu sanassa. Ajatuksen muuttuessa puheeksi se jäsentyy uudelleen ja muuttaa muotoaan. (Vygotski 1982.) Oppilaiden täytyy oppia ilmaisemaan matematiikkaan liittyviä ajatuksiaan kielen avulla voidakseen oppia tehokkaasti. Pystyessään ilmaisemaan matemaattisia ajatuksiaan oppilas saa kokemuksen siitä, että hän ymmärtää ja kykenee operoimaan matematiikan eri kielillä. Puheen lisäksi eri tavoin ilmaisua tulee harjoitella myös kirjallisesti. Matematiikan symbolikielen vaatimukset ja käytännöt saattavat tehdä symbolikielen käytöstä oppilaalle hankalaa, ja sitä voidaankin verrata vieraan kielen oppimiseen. (Lee 2006, 2–3.)

Matemaattisella kielentämisellä tarkoitetaan tapaa, jolla oppilas ilmaisee matemaattista ajatteluaan joko suullisesti tai kirjallisesti eri matematiikan kielten avulla. Matemaattisella ajattelulla taas tarkoitetaan matemaattisen tiedon prosessointia, jota ajattelijan metakognitiot ohjaavat. Matemaattinen tieto koostuu käsitteellisestä eli konseptuaalisesta tiedosta, strategisesta tiedosta ja proseduraalisesta tiedosta. (Joutsenlahti 2005, 82–85; 2010, 4.)

Matematiikkaa kielentäessä voidaan toimia multisemioottisesti edellä esitettyjen kolmen kielen avulla, joita siis ovat matematiikan symbolikieli, matematiikan luonnollinen kieli ja kuviokieli. Nämä kaikki kielet ovat myös matematiikan kirjallisissa tehtävissä ratkaisijan käytettävissä. Luonnollisen kielen avulla voidaan tuottaa käsitteille merkityksiä, symbolikielen avulla voidaan tarkastella käsitteiden määrällisiä muutoksia, ja kuviokielen avulla kuvata esimerkiksi käsitteiden välisiä yhteyksiä (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 414–415). Kirjallisten tehtävien lisäksi matematiikan opiskelussa voidaan hyödyntää toimintamateriaaleja, jolloin oppilas pääsee oppimaan kinesteettisesti käsin tekemisen kautta. Neljäs kieli on näin ollen taktiilinen toiminnan kieli, joka korostuu erityisesti alakoulun matematiikassa. Näiden eri kielien välillä toimimista tarkastellaan koodinvaihtona. Tarkoitus olisi, että oppilas hyödyntää kieliä tarkoituksenmukaisesti soveltaen tehtäviä ratkaistessaan, ja opettaja ohjaa oppilaan siirtymistä kielten välillä. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 51–52.) Kuviossa 1 on esitetty matematiikan kielen eri osa-alueet.



KUVIO 1. Matematiikan kielentäminen eli matemaattisen ajattelun ilmaiseminen neljän eri kielen avulla (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 52).

Matemaattisen ajattelun kielentämisen merkitys oppimisen ja opetuksen kannalta voidaan tiivistää ikäluokasta riippumatta seuraaviin kolmeen näkökulmaan:

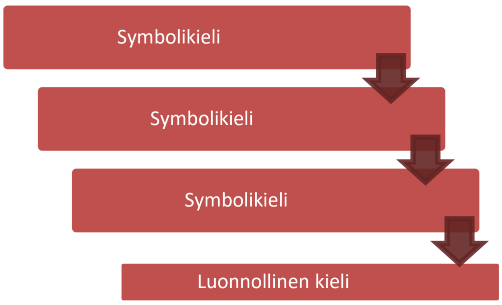
1. Suullisen sekä kirjallisen tuottamisen avulla kielentäjän oma ajattelu jäsentyy ja ymmärrys käsitteistä kasvaa.
2. Opettajan näkökulmasta tarkasteltuna kielentäminen tekee näkyväksi kielentäjän matemaattista ajattelua ja osaamista, jolloin arviointi helpottuu.
3. Vuorovaikutuksessa muiden kielentävien oppilaiden kanssa ryhmän jäsenten matemaattinen ajattelu kehittyy. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 53.)

Näistä näkökulmista ensimmäinen ja toinen näkyvät erityisesti kirjallisessa kielentämisessä. Kirjallinen kielentäminen kehittää oppilaan kykyä rakentaa merkityksiä. Ongelman jäsentäminen kielen avulla saattaa helpottaa ratkaisun löytämistä. Kirjallista kielentämistä tarkasteltaessa matemaattisella ongelmanratkaisulla ja kirjoittamisella on samanlaisia piirteitä, sillä molemmissa tavoitteena on ongelman selkeä muotoilu sekä ratkaiseminen. Kirjoittaessaan ratkaisua sanallisesti, oppilas joutuu pohtimaan, miten ilmaista asia tiivistetysti, ja näin ajatteluprosessi selkeytyy. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 411–419.) Toisaalta ratkaisun takana oleva ajatuskulku tulee paremmin näkyväksi, kun vaiheet on esitetty matematiikan eri kielillä (Joutsenlahti & Kulju 2017, 3). Kolmas näkökulma eli vuorovaikutus muiden oppilaiden kanssa toteutuu ensisijaisesti matematiikan suullisessa kielentämisessä, mutta liittyy myös kirjalliseen kielentämiseen esimerkiksi silloin, kun oppilaat auttavat toisiaan tai yhdessä pohtivat ratkaisuja matematiikan tehtäviin.

3.3 Sanallisen tehtävän ratkaisumallit

Joutsenlahti (2009, 78–81; 2010, 12) on kehittänyt matematiikan kirjalliseen kielentämiseen viisi erilaista ratkaisumallia, joita on mahdollista hyödyntää sanallisia matematiikan tehtäviä ratkaistaessa. Nämä mallit ovat nimeltään *standardi*-, *tiekartta*-, *päiväkirja*-, *kertomus*- sekä *kommenttimalli*.

Standardimalli esiintyy yleensä oppikirjojen tehtävissä, ja mallissa hyödynnetään pelkästään matematiikan symbolikieltä. Tässä mallissa tärkeää on matematiikan kielen hallinta ja sääntöjen mukainen esitystapa, johon sisältyy lauseke, laskut sekä vastaus yksikköineen. Esitystapa tukee tietyn mekaanisen kaavan oppimista, eikä siten tue oppilaan omaa ymmärrysprosessia. Lisäksi pelkällä symbolikielellä esitettyä prosessia voi olla lukijan hankala ymmärtää. (Joutsenlahti 2009, 78.) Kuviossa 2 on havainnollistettu standardimallin mukaan etenevää ratkaisuprosessia.



KUVIO 2. Ratkaisun eteneminen standardimallissa (Joutsenlahti 2009, 78).

Tiekarttamallissa ratkaisuprosessi esitetään aluksi kokonaan luonnollisella kielellä ja mahdollisesti täydentäen kuvioiden avulla. Tämän jälkeen esitetty prosessi toteutetaan matematiikan symbolikielellä. Tiekarttamallin toinen vaihe vastaa siis edellä esitettyä standardimallia, erona kuitenkin se, että ratkaisun alussa tehty ajatustyö tehdään tiekarttamallia hyödynnettäessä näkyväksi. (Joutsenlahti 2009, 80.) Kuviossa 3 on havainnollistettu tiekarttamallia.

KUVIO 3. Ratkaisun eteneminen tiekarttamallissa (Joutsenlahti 2009, 80).

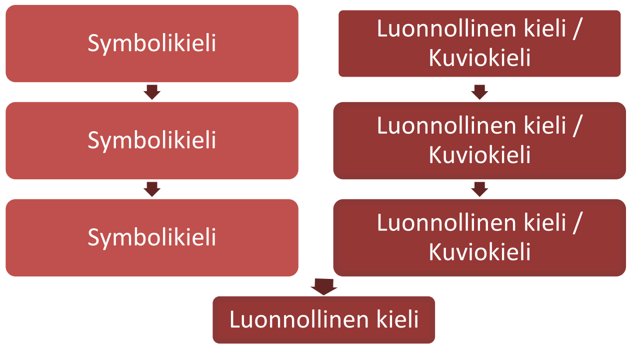
Päiväkirjamallissa ratkaisussa edetään pääsääntöisesti standardimallin mukaisesti symbolikieltä käyttäen. Ratkaisija voi kuitenkin hyödyntää luonnollista kieltä tai kuviokieltä sellaisissa tilanteissa, joissa hänellä on tarve selkeyttää omaa matemaattista ajatteluaan. Tässä mallissa symbolikieltä täydennetään luonnollisella kielellä ja (tai) kuviokielellä ensisijaisesti ratkaisijaa itseään varten. (Joutsenlahti 2009, 80–81.) Kuviossa 4 on havainnollistettu tehtävän ratkaisua päiväkirjamallin avulla.

KUVIO 4. Ratkaisun eteneminen päiväkirjamallissa (Joutsenlahti 2009, 80–81).

Kertomusmallissa luonnollinen kieli sekä matematiikan symbolikieli vuorottelevat, ja ratkaisussa apuna voidaan käyttää tarvittaessa myös kuviokieltä. Eri kielet tukevat ratkaisijan omaa ajattelu- ja ratkaisuprosessia, ja toisaalta ne tekevät ratkaisuprosessin lukijalle helposti seurattavaksi. Lukija pystyy näin arvioimaan ratkaisijan osaamista eli sitä, onko ratkaisija varmasi ymmärtänyt ratkaisunsa eri vaiheet. Tässä mallissa ratkaisu muodostaa johdonmukaisen sekä järkevän, kertomuksenomaisen kokonaisuuden. (Joutsenlahti 2009, 78–79.) Kuviossa 5 on havainnollistettu tehtävän ratkaisuprosessin etenemistä kertomusmallissa.

KUVIO 5. Ratkaisun eteneminen kertomusmallissa (Joutsenlahti 2009, 78–79).

Kommenttimallissa ratkaisussa käytetään symbolikielen lisänä luonnollista kieltä sekä tarvittaessa kuviokieltä. Matematiikan luonnollinen kieli ja kuviokieli sekä symbolikieli kulkevat sarakkeissa rinnakkain siten, että ratkaisija kommentoi jokaista vasempaan sarakkeeseen symbolikielellä kirjoittamaansa laskuvaihetta viereisessä oikeassa sarakkeessa luonnollisella kielellä ja (tai) kuviokielellä. Kommenttimalli soveltuu esimerkiksi uusien asioiden esittelyä varten, sillä rinnakkain kulkevat symbolikielen ja luonnollisen kielen tai kuviokielen merkinnät kuvaavat hyvin käsitteiden ja operaatioiden välisiä merkityksiä. (Joutsenlahti 2010, 12; Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 421.) Kommenttimalli on esitetty kuviossa 6.



KUVIO 6. Ratkaisun eteneminen kommenttimallissa (Joutsenlahti 2010, 12).

Edellä esitellyissä malleissa oletuksena on, että vastaus annetaan aina erillisenä sekä kokonaisena virkkeenä (Joutsenlahti 2009, 81). Tämän vuoksi kuvioissa on esitetty luonnollinen kieli viimeisenä ratkaisussa käytössä olevana kielenä. Näin on jopa standardimallissa, jossa muuten koko ratkaisun ajan operoidaan pelkällä matematiikan symbolikielellä. Mikäli vastaus opetellaan merkitsemään kokonaisena virkkeenä, tulevat yksiköt luontevammin mukaan, ja näin saadun vastauksen arvon mielekkyys tulee arvioitua tehtävänantoon suhteutettuna (Joutsenlahti 2009, 81). Tehtävänanto ja kysymys esitetään usein luonnollisella kielellä, minkä vuoksi on luontevaa antaa myös vastaus samalla kielellä.

3.4 Kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppejä

Matematiikan kirjalliseen kielentämiseen on kehitetty erilaisia kirjallisia kielentämistehtävätyyppejä, joita on lähdetty kehittelemään edellä esiteltyjä Joutsenlahden (2009) sanallisten tehtävien ratkaisumalleja hyödyntäen. Kielentämistehtävissä tarkoitus on, että oppilas pääsee tehtävän ratkaisua muodostaessaan operoimaan aiemmin esiteltyjen matematiikan eri kielten välillä koodinvaihtoa suorittaen. Seuraavassa esitellään näistä kirjallisen kielentämisen tehtävätyypeistä yksitoista.

1. *Koodinvaihtotehtävässä* oppilaan tehtävänä on esittää matematiikan symbolikielellä esitetyt ratkaisut luonnollisella kielellä tai päinvastoin; esittää luonnollisella kielellä esitetyt ratkaisut symbolikielellä. Ratkaisussa on mahdollista hyödyntää myös kuviokieltä.

2. *Täydennystehtävässä* oppilaan tulee täydentää ratkaisusta puuttuvat osat joko matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä tai kuviokielellä.

3. *Virheen etsintä -tehtävätyypissä* oppilaalle annetussa ratkaisussa on virheellisiä kohtia, jotka hänen tulee korjata oikeiksi.

4. *Ratkaisusta tehtävä -tehtävässä* oppilaalle annetaan valmis ratkaisu, joka voi olla esitettynä joko matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä tai kuviokielellä. Valmiin ratkaisun pohjalta oppilas laatii ratkaisuun sopivan tehtävänannon.

5. *Matematiikan konkretisointi -tehtävätyypissä* oppilaan tulee keksiä annetulle matemaattiselle sisällölle konkreettinen käyttötarkoitus arkielämästä.

6. *Ratkaisun järjestäminen -tehtävässä* oppilaalle annetaan matemaattisen tehtävän ratkaisun eri vaiheet sekalaisessa järjestyksessä. Oppilaan tehtävä on järjestää eri vaiheet oikeaan järjestykseen.

7. *Ratkaisun argumentointi -tehtävätyypissä* oppilaan on perusteltava joko annettua tai itse tekemäänsä ratkaisua. Perustellessaan oppilas hyödyntää matematiikan kielten eri osa-alueita.

8. *Tiedonseulonta-tehtävässä* oppilas tarkastelee hänelle annettua tehtävänantoa. Tarkoituksena on löytää tehtävänannosta tehtävän ratkaisuun tarvittava informaatio.

9. *Omin sanoin selitys -tehtävässä* oppilas selittää pyydetyn asian joko luonnollisen kielen tai kuviokielen avulla ilman matematiikan symbolikielen käyttämistä.

10. *Muutoksen kielentäminen kuvasta -tehtävässä* oppilas tarkastelee kuvasarjaa, jossa on kuvat tilanteista ennen ja jälkeen. Oppilaan tehtävä on kirjoittaa selitys kuvasarjassa tapahtuvasta muutoksesta matematiikan kielellä tai omin sanoin selittäen.

11. *Ratkaisuna sarjakuva -tehtävässä* oppilaat tuottavat sanallisen tehtävän ratkaisun sarjakuvana. (Joutsenlahti & Kulju 2017, 4; Joutsenlahti, Sarikka, Kangas & Harjulehto 2013, 4–5; Linnusmäki 2015, 32–33; Sarikka 2014, 25–26.)

Kaikki edellä esitellyt tehtävätyypit ovat sovellettavissa myös alakoulun matematiikan kirjalliseen työskentelyyn. Oleellista niissä on, että ratkaisija itse pääsee operoimaan jokaisella matematiikan kielellä monipuolisesti sekä vaihtelevasti tukeutumatta pelkästään esimerkiksi symbolikielen ilmaisuihin. Tässä tutkimuksessa hyödynnettiin osaa näistä tehtävätyypeistä murtolukutehtävien kehitystyössä. Näiden tehtävätyyppien valinnat ja niiden pohjalta kehitetyt murtolukutehtävät esitellään luvussa 7.

3.5 Kielentäminen opetussuunnitelmassa

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) oppimiskäsityksen mukaan oppilas on aktiivinen toimija. Kieli, kehollisuus sekä eri aistien hyödyntäminen ovat tärkeä osa ajattelu- ja oppimisprosessia. Erilaisten työtapojen vaihtelun avulla tuetaan paitsi yksilön oppimisprosessia, niin koko ryhmän oppimista. Työtapojen vaihtelu antaa oppilaalle tilaisuuden tuoda osaamistaan esiin eri tavoin. Oppilaille pitää antaa mahdollisuuksia itse valita erilaisia työtapoja. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 17, 30.)

Kielentäminen kytkeytyy myös opetussuunnitelman laaja-alaisiin tavoitteisiin. Ensimmäinen laaja-alaisista tavoitteista on ajattelu ja oppimaan oppiminen. Oppilasta autetaan vähitellen tiedostamaan oma tapa oppia ja kehittämään itselle suotuisia oppimisstrategioita. Tällöin huomiota kiinnitetään opiskelutapoihin. Neljäs laaja-alaisista osaamistavoitteista on monilukutaito, jolla tarkoitetaan erilaisten tekstien tuottamisen, tulkitsemisen ja arvottamisen taitoja. Opetussuunnitelma laajentaa tekstin käsittämään tietoa ilmaisevia symbolijärjestelmiä, jotka ovat niin sanallisia, kuvallisia, auditiivisia, numeerisia kuin kinesteettisiä sekä näiden erilaisia yhdistelmiä. Mahdollisimman rikas tekstiympäristö ja sitä hyödyntävä pedagogiikka ovat edellytyksiä oppimiselle. Opetuksen tuleekin tarjota tilaisuuksia erilaisten tekstien käyttöön. Oppimistilanteessa oppilaat tarkastelevat ja tuottavat itse, tai yhdessä toisten kanssa, monipuolisesti erilaisia tekstejä. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 20–23.)

Matematiikan tehtävä oppiaineena vuosiluokilla 3–6 on kehittää oppilaan matemaattista ajattelua. Opetuksessa luodaan pohja matemaattisten käsitteiden sekä rakenteiden ymmärtämiselle. Lisäksi tarkoituksena on kehittää oppilaiden kykyä tarkastella ja käsitellä tietoa sen eri muodoissa ja harjoitella ongelmanratkaisua. Opetuksen tavoitteena on tukea positiivista asennetta oppiainetta kohtaan sekä luoda myönteinen minäkuva itsestään matematiikan oppijana. Opetuksessa kehitetään oppilaiden taitoja esittää matemaattista ajatteluaan sekä tehtävien ratkaisuja eri tavoilla ja välineillä. Opetuksessa keskeistä on vertailla erilaisia ratkaisutapoja sekä ratkaista ongelmia monipuolisesti niin yksin kuin ryhmässä. Myös arvioinnissa otetaan huomioon matemaattisen ajattelun esille tuominen puheen, välineiden, piirtämisen ja kirjallisen työskentelyn avulla. Eriytettäessä matematiikan opetusta oppilaalle tarjotaan sopivia välineitä sekä vaihtoehtoisia työskentelymuotoja. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 234, 237.)

3.6 Aikaisemmat tutkimukset

Matematiikan kielentämistä on tutkittu eri kouluasteilla alakoulusta korkeakouluun. Joutsenlahti (2010) esittää *Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa* -artikkelissaan tuloksia tehdyistä opetuskokeiluista, jotka toteutettiin kahdessa eri lukiossa keväällä 2009. Opetuskokeilussa opiskelijoille opetettiin kirjallisen kielentämisen mallit tehtävien ratkaisua varten. Opiskelijoilta kerättiin kysely siitä, miten he kokivat kirjallisen kielentämisen. Esille nousi kolme näkökulmaa: 1) opiskelijat kokivat, että kirjallinen kielentäminen selkeytti omaa ajatteluprosessia, 2) kielentämisen avulla ratkaisu oli helpompi esittää muille ja 3) kirjallisten kielentämismallien käyttö ratkaisussa helpotti arviointia. Opiskelijoiden mielestä kielentämismalleja tulisi opettaa koulussa.

Alakoulussakin kielentämistä on tutkittu eri tavoin. Joutsenlahti ja Kulju (2017) esittelevät *Multimodal Languaging as a Pedagogical Model – A Case Study of the Concept of Division in School Mathematics* -artikkelissa toteuttamansa tapaustutkimuksen, jossa tietoa kerättiin opetustuokioiden kautta eräältä 4. vuosiluokalta. Tarkoituksena oli tutkia erilaisten kielentämistehtävien avulla, miten oppilaat ymmärtävät jakolaskun käsitteen. Lisäksi oppilailta kysyttiin, miten he kokivat kielentämisen. Oppituntien aikana oppilaat pääsivät ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan luonnollisen kielen sekä kuviokielen avulla. Tutkimuksen mukaan oppilaat pitivät kuviokielen sekä luonnollisen kielen käytöstä tehtävien ratkaisemisen apuna. Lisäksi Joutsenlahden ja Kuljun (2017) mukaan eri tavat ilmaista matemaattista ajattelua voivat tukea matematiikan käsitteiden oppimista, sekä opettajan näkökulmasta tarkasteltuna tukea oppimisen arviointia.

Vaikka kielentämistä on tutkittu kaikilla kouluasteilla, eri kielentämistehtävätyyppejä on testattu, tätä pro gradu -tutkielmaa edeltänyttä kandidaatintutkielmaa lukuun ottamatta, lähinnä lukiossa sekä korkeakoulussa. Joutsenlahti ym. (2013) käsittelevät *Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa* -artikkelissaan kielentämistä yliopistossa ja esittelevät erilaisia kielentämistä hyödyntäviä tehtävätyyppejä. Tehtävätyyppejä kokeiltiin yhdellä Tampereen teknillisien yliopiston insinöörimatematiikan kurssilla sekä Turun yliopiston matematiikan kurssilla. Opiskelijoilta kerättiin tehtäviin liittyvä palaute. Opiskelijoiden mielestä kielentämistehtävät auttoivat asioiden ymmärtämisessä. Joutsenlahden ym. (2013) mukaan artikkelissa esiteltävät kielentämistehtävätyypit ovat mukailtavissa peruskouluun.

Kielentämistä on tutkittu myös pro gradu -tutkielmissa sekä diplomitöissä. Sarikka (2014) on tutkinut diplomityössään tehtävätyyppejä korkeakoulujen lisäksi myös lukiossa. Tehtävät olivat lukiolaisille uusia. Mielipidekyselyssä lukiolaiset eivät kommentoineet tehtävien kielentämispuolta. Linnusmäki (2015) on tutkinut diplomityössään kielentämistä korkeakoulussa. Hän on tutkinut erilaisia kielentämistä hyödyntäviä tehtäviä sekä niiden soveltuvuutta yliopistomatematiikkaan Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan perusopinnoissa. Opiskelijat kokivat kielentämisen positiivisena asiana, ja luonnollisen kielen käyttö ratkaisuprosessissa symbolikielen lisänä lisäsi heidän mielestään asian ymmärrystä.

Kirjallisia kielentämisen tehtävätyyppejä on tutkittu tätä pro gradu -tutkielmaa edeltäneessä *Kirjallisia kielentämistehtäviä murtoluvuista 6. vuosiluokalle* -kandidaatintutkielmassa (Rosenberg 2017). Tutkimuksessa oppilaat tekivät kehitetyn murtolukutehtäväpaketin, joka sisälsi kuusi erilaista kielentämistehtävää. Ne kehitettiin aiemmin tässä luvussa esiteltyjen kielentämistehtävätyyppien pohjalta. Oppilaiden tekemien tehtävien ratkaisuja ei analysoitu tutkimuksessa, vaan aineistona toimi tehtävien tekemisen jälkeen oppilaiden täyttämä kyselylomake. Aineisto oli suppea, mutta joitakin viitteitä saatiin kehittämistutkimuksen jatkoa ajatellen. Oppilaat, erityisesti pojat, pitivät eniten tehtävästä, jossa pääsivät operoimaan kuviokielen avulla. Tytöt toivat esille myös luonnollisen kielen mielekkyyden. Symbolikieli sen sijaan ei juuri noussut esille oppilaiden vastauksista millään tavalla. Tutkimuksessa saatiin myös viitteitä siitä, että tehtävätyyppien sekä tehtävien aiheiden mielekkyys toimivat positiivisina tekijöinä oppilaiden tehtäviin suhtautumisessa.

4 MURTOLUVUT

Tässä luvussa esitetään murtoluvun määritelmä ja alakoulun matematiikan keskeisimmät laskutoimitukset murtoluvuilla. Luvussa tarkastellaan, miten Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) tuovat tavoitteissaan ja sisältöalueissaan murtoluvut esille, sillä vuosiluokilla 3–6 yhtenä käsitteellisenä ja tiedonalakohtaisena tavoitteena on tukea oppilaan lukukäsitteen laajentumista positiivisiin rationaalilukuihin (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 235). Lisäksi tarkastellaan lyhyesti, miten alakoulun eri oppikirjoissa käsitellään murtolukuja niin käsitteenä kuin erilaisilla laskuoperaatioilla. Murtoluvut ovat yksi pedagogisesti haastavampia aihealueita alakoulun matematiikassa, sillä niiden oppiminen vaatii merkittävää käsitteellistä muutosta oppilaan lukukäsityksen vähitellen laajentuessa luonnollisista luvuista rationaalilukuihin (McMullen ym. 2015, 14). Ne valikoituivat myös tutkimuksen matemaattiseksi sisältöalueeksi, ja siten tutkimuksessa kehitetyissä kielentämistehtävissä operoidaan murtoluvuilla.

4.1 Määritelmä

Murtoluvun määritelmä saadaan rationaaliluvun määritelmästä. Rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan esittää murtolukuina, desimaalilukuina tai prosenttilukuina. Rationaaliluvun määritelmän lähtökohtana on luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Liittämällä näihin luonnollisiin lukuihin negatiiviset luvut saadaan kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Lisäämällä kokonaislukuihin positiiviset ja negatiiviset luvut, jotka ovat muotoa $\frac{m}{n}$, jossa *m* on kokonaisluku ja *n* (≠0) luonnollinen luku, saadaan rationaaliluvut. Rationaalilukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{Q}$. (Kivelä 2000.)

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{m}{n}, n \neq 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tämä rationaaliluvun yleinen esitystapa on muunnettavissa myös desimaali- tai prosenttilukumuotoon. Murtoluvut ovat rationaalilukuja, jotka ovat aina muodossa $\frac{m}{n}$, jossa *m* on kokonaisluku ja *n* (≠0) on luonnollinen luku. Murtoluvussa *m* on nimeltään osoittaja ja *n* on nimeltään nimittäjä. Näin ollen murtoluku on siis yksi rationaaliluvun esitysmuodoista. (Kivelä 2000.)

Merkinnälle "$\frac{m}{n}$" voidaan antaa eri merkityksiä, joista yksi on edellä esitetty rationaaliluvun määritelmä. Useimmiten alakoulun matematiikassa "$\frac{m}{n}$" tulkitaan murtolukuna osana yhdestä kokonaisesta. Tämä voidaan laajentaa tarkoittamaan myös osaa kokonaisuudesta. Lisäksi merkinnällä "$\frac{m}{n}$" voidaan merkitä suhdetta, jakolaskua tai todennäköisyyttä. (Joutsenlahti & Perkkilä 2019, 4–5; Väisälä 1963.)

Tässä tutkimuksessa merkintä "$\frac{m}{n}$" tarkoittaa murtolukua eli osaa kokonaisesta tai kokonaisuudesta. Osaa kokonaisuudesta -tulkinta nähdään käsitteellisenä perustana rationaaliluvun muille tulkinnoille, ja murtolukujen laskuoperaatiot muodostavat perustan rationaalilukujen laskuproseduureille (Ni & Zhou 2005, 29). Seuraavaksi tarkastellaan näitä murtolukujen laskuoperaatioita. Esitettävissä laskutoimituksissa *m* on kokonaisluku ja *n* on nollasta poikkeava luonnollinen luku.

4.2 Laskutoimitukset

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet tuovat (2014, 236) vuosiluokkien 3–6 luvut ja laskutoimitukset -sisältöalueessaan esille murtoluvun käsitteen sekä murtolukujen käyttämisen peruslaskutoimituksissa. Murtolukujen peruslaskutoimituksissa joudutaan usein laventamaan tai supistamaan. Kaksi murtolukua ovat samat, jos toinen saadaan toisesta supistamalla tai laventamalla. Supistettaessa murtoluvun osoittaja sekä nimittäjä jaetaan samalla luvulla, ja vastaavasti lavennettaessa kerrotaan samalla luvulla.

$$\frac{m}{n} = \frac{pm}{pn}, missä\ p \neq 0, p \in \mathbb{N}$$

Murtoluku voidaan esittää yksinkertaisimmassa muodossaan supistamalla se osoittajan ja nimittäjän suurimmalla yhteisellä tekijällä, mikäli tällainen tekijä löytyy. (Kivelä 2000; Väisälä 1963, 49.)

Murtoluvut voidaan laskea yhteen sekä vähentää, kun niiden nimittäjät ovat samat. Yhteinen nimittäjä löytyy aina nimittäjien tulosta. Luvut siis lavennetaan toistensa nimittäjillä.

$$\frac{m}{n} \pm \frac{l}{k} = \frac{mk}{nk} \pm \frac{nl}{nk} = \frac{mk \pm nl}{nk}\ (n, k \neq 0)$$

Voi myös olla, että laventamalla suoraan toistensa nimittäjillä tulee yhteiseksi nimittäjäksi tarpeettoman suuri luku. Tällöin luvut lavennetaan sellaisella luvulla, että nimittäjäksi tulee pienin yhteinen jaettava eli pienin mahdollinen luku, joka on jaollinen kyseessä olevilla nimittäjillä. (Kivelä 2000; Väisälä 1963,16.)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014, 236) mukaan vuosiluokilla 3–6 murtolukujen kerto- ja jakolaskuissa kertojana ja jakajana toimii kokonaisluku. Murtoluvut kerrotaan kertomalla osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään (Kivelä 2000; Väisälä 1963, 17).

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{l}{k} = \frac{ml}{nk} \ (n, k \neq 0)$$

Jokaisella murtoluvulla $\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$ on olemassa käänteisluku. Luvun $\frac{m}{n}$ käänteisluku merkitään $\frac{n}{m}$. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on yksi.

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1 \ (n, m \neq 0)$$

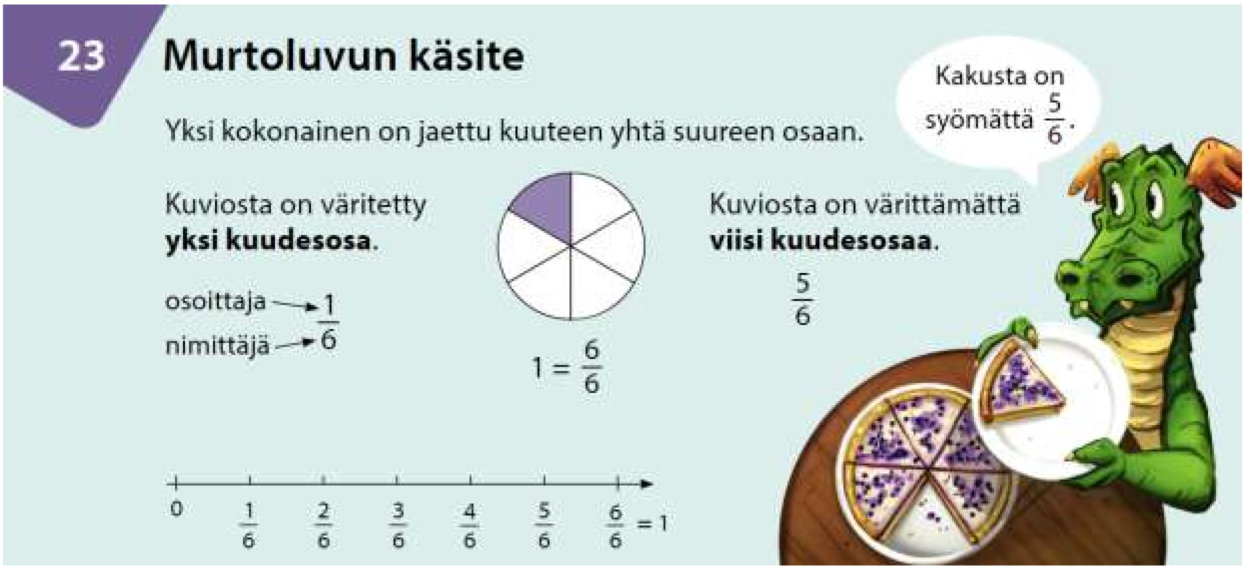
Murtolukujen osamäärä voidaan aina muuttaa tuloksi. Murtoluvut jaetaan kertomalla jaettava jakajan käänteisluvulla. (Kivelä 2000; Väisälä 1963, 17.)

$$\frac{m}{n} : \frac{l}{k} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl} \ (n, k, l \neq 0)$$

Alakoulussa murtolukujen laskutoimituksissa edetään samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskusta laventamisen ja supistamisen harjoitteluun, josta siirrytään harjoittelemaan erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua. Murtolukujen laskutoimituksissa edetään alakoulussa aina kokonaisluvuilla kertomiseen ja jakamiseen asti, kuten edellä kävi opetussuunnitelman osalta ilmi. Tämä havaitaan myös seuraavasta oppikirjatarkastelussa.

4.3 Murtoluvut oppikirjoissa

Matematiikan oppikirjat Kymppi 3 Kevät (2017), Tuhattaituri 3b (2015) ja Milli 3B (2018) käsittelevät murtolukua yhden kokonaisen yhtä suuriin osiin jakamisena. Murtoluku esitetään sekä luonnollisella kielellä, kuviokielellä että symbolikielellä. Kuviokielen esitys on ns. piirakkamalli eli joko suorakulmio tai ympyrä, joka on jaettu osiin. Kymppi 3 sekä Tuhattaituri 3b opettavat osoittajan kertovan valittujen osien määrän ja nimittäjän kertovan osien kokonaismäärän. Milli 3B poikkeaa tässä edellisistä, sillä osoittaja sekä nimittäjä nimetään murtoluvusta selittämättä käsitteitä enempää. Milli 3B -kirjassa esitetään murtoluvut myös lukusuoralla, kuten kuviosta 7 nähdään. Kaikissa näissä kirjoissa harjoitellaan murtolukujen vertailua sekä samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua. Kymppi 3 ja Milli 3B tuovat näiden lisäksi esille sekaluvut.



KUVIO 7. Murtoluvun käsitteen opettaminen Milli 3B -oppikirjassa (2018, 102).

Kymppi 4 Kevät -oppikirja (2017) esittää murtoluvun käsitteen määritellen murtoluvun tarkoittavan osaa kokonaisesta tai joukosta. Tätä tukemassa on kuviokielellä ympyrä, joka on jaettu osiin, mutta myös ryhmä yksittäisiä ympyröitä, joista osa on väritetty. Osien määrä on merkitty myös symbolikielellä, ja murtoluvun lukemisohje on esitetty luonnollisella kielellä. Kirjassa harjoitellaan sekaluvun ja murtoluvun yhteyttä, sekä samannimisten murtolukujen ja sekalukujen yhteen- ja vähennyslaskua. Uutena asiana harjoitellaan laventamista. Tuhattaituri 4b (2016) opettaa murtoluvun käsitteen samoin kuin Tuhattaituri 3b osoittajan ja nimittäjän avulla. Kirjassa harjoitellaan nyt myös sekalukua ja sen yhteyttä murtolukuun. Lisäksi harjoitellaan samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua ja uutena asiana supistamista ja laventamista. Tuhattaituri 4b etenee muita kirjasarjoja pidemmälle siirtymällä murtoluku-jakson lopuksi tarkastelemaan samannimisten ja erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua.

Kymppi 5 Kevät -oppikirja (2017) aloittaa opettamisen murtoluvun käsitteestä: nimittäjä sekä osoittaja nimetään, sekä tarkastellaan sekaluvun kokonais- ja murto-osaa palaamatta enää siihen, mikä murtoluku on. Kirjassa harjoitellaan murtoluvun ja sekaluvun muunnoksia, laventamista sekä uutena asiana murtoluvun supistamista. Yhteen- ja vähennyslasku tehdään samannimisillä murtoluvuilla. Lisäksi murtolukuja kerrotaan ja jaetaan kokonaisluvuilla. Kymppi 6 Kevät -kirja (2017) aloittaa murtoluku-jakson heti yhtä suurista ja samannimisistä murtoluvuista. Osoittajaa ja nimittäjää ei enää ole merkittynä näkyviin, vaan ne oletetaan tiedetyksi, sillä käsitteitä käytetään jatkuvasti ensimmäisestä luvusta lähtien. Murtoluku-jakso on aiempien Kymppi-kirjojen tavoin tehtävien osalta mekaanista laskemista: yhteen- ja vähennyslaskua samannimisillä ja erinimisillä murtoluvuilla sekä murtoluvun kertomista ja jakamista luonnollisilla luvuilla. Proseduurien opettamisesta on Kymppi 6 -oppikirjasta poimittu esimerkki kuvioon 8.

Murtoluvun kertominen

Kun kerrot murtoluvun luonnollisella luvulla

- kerro osoittaja
- nimittäjä ei muutu.

$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Sekaluvun kertominen

Sekaluku on ennen kertomista muutettava murtoluvuksi.

$$2 \cdot 1\frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{4}^{(2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

KUVIO 8. Murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla Kymppi 6 Kevät -oppikirjassa (2017, 24).

Tuhattaituri-sarja etenee muita kirjasarjoja nopeammin käsittäen lopulta silti samat opeteltavat proseduurit. Tuhattaituri 5a (2016) kertaa murtoluvun, osoittajan, nimittäjän, sekaluvun, supistamisen ja laventamisen. Lisäksi kirjassa harjoitellaan samannimisten ja erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua siirtyen harjoittelemaan murtolukujen kertomista kokonaisluvulla. Tuhattaituri 6a (2017), edellisten sisältöjen lisäksi, sisältää yhteen- ja vähennyslaskuja sekaluvuilla sekä murtoluvun jakamista kokonaisluvulla. Murtoluvun käsitteeseen ei enää palata, mutta supistaminen ja laventaminen käsitteinä kerrataan.

4.4 Murtolukujen oppiminen

Murtolukujen oppiminen vaatii oppilaiden lukukäsityksen kehittymistä. Kokonaislukujen osalta oppilailla on yleensä jo kouluun tullessaan kehittynyt osaamista, mutta rationaalilukujen kohdalla koulun ulkopuolista kokemusta on vähemmän. Opettajien aktiivinen rooli on tärkeä kehitettäessä oppilaiden epämuodollista ymmärtämistä vähitellen muodollisempaan käsitteiden ja proseduurien verkostoon. (Kilpatrick ym. 2001, 231–233.)

Oppilaiden lukukäsitys ennen murtolukuihin tutustumista nojaa kokonaislukuihin, ja ongelmana on usein oppilaan pyrkimys operoida murtoluvuilla samoin kuin kokonaisluvuilla. Esimerkiksi kahden murtoluvun "$\frac{1}{4}$" ja "$\frac{1}{6}$" suuruutta vertailtaessa tyypillinen virhe on sanoa jälkimmäisen luvun olevan suurempi perustellen sitä sillä, että ”kuusi on suurempi kuin neljä”. Näin toimiessaan oppilas ei ymmärrä osoittajan ja nimittäjän välisestä suhteesta muodostuvaa murtolukua, vaan näkee symbolisessa esitystavassa kaksi itsenäistä, toisistaan erillistä lukua. Sama kokonaislukuajattelu siirtyy myös murtolukujen proseduureihin, ja esimerkiksi yhteenlaskutilanteissa osoittajia ja nimittäjiä saatetaan käsitellä toisistaan erillisinä lukuina laskien molemmat luvut erikseen yhteen. Oppilaat tukeutuvat sitkeästi näihin kokonaislukujen ominaisuuksiin siirtäen niitä myös murtolukuihin, ja se on yksi merkittävistä syistä murtolukujen käsitteellisen ymmärtämisen vaikeuksille. (Moss 2005, 310; Stafylidou & Vosniadou 2004, 509, 515; Vamvakoussi 2015, 51.)

Murtoluvut tarjoavat lapsille ensimmäisen mahdollisuuden oppia, että suurin osa kokonaislukujen ominaisuuksista ei olekaan kaikkien lukujen yleisiä ominaisuuksia. Tämän hahmottaminen vaatii oppilaalta sekä proseduraalista sujuvuutta että käsitteellistä ymmärtämistä. Käsitteellinen ymmärtäminen pitää sisällään tiedon siitä, mitä murtoluvut ovat. Tähän kuuluu esimerkiksi ymmärrys siitä, että murtoluvut jatkuvat äärettömästi ja että niillä on ominaisuus, joka on ainoana yhteistä kaikille reaaliluvuille. Tämä yhteinen ominaisuus on suuruus, jonka ymmärtäminen pitää sisällään kyvyn sijoittaa ja järjestää murtoluvut lukusuoralle. Proseduraaliseen sujuvuuden kehittyminen kohtaa murtolukujen alueella erilaisia vaikeuksia kuin kokonaisluvuilla operoitaessa, sillä eri murtolukuproseduurien komponentit ovat toistensa kanssa monitahoisissa yhteyksissä. Tästä esimerkkinä on, että murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku vaatii yhteiset nimittäjät, mutta kerto- ja jakolaskun kohdalla näin ei tarvitse olla. (Siegler & Pyke 2013, 1994–1995.)

Murtolukujen keskeisiä olemuksia ilmentävät jo edellä esiin noussut suuruus sekä tiheys, joiden ymmärtäminen asettaa omat haasteensa (Tuominen 2016, 113). Murtoluvun suuruuden hahmottaminen ei ole yhtä luontevaa kuin luonnollisilla luvuilla, ja suuruuden määrittäminen vaatii ymmärrystä siitä, että suuruus esitetään kahden termin välisenä suhteena eikä kyseessä ole kaksi erillistä kokonaislukua. Oppilaan pitää myös pystyä laajentamaan ymmärrystään käsittäen, että murtoluvulla on tiheys, joka tarkoittaa sitä, että minkä tahansa kahden murtoluvun välistä voidaan löytää rajattomasti muita lukuja. Tämä muutos on suuri ottaen huomioon sen, että aiemmin opetetut kokonaisluvut ovat toisistaan erillisiä, ja seuraava luku voidaan löytää mille tahansa luvulle. (McMullen ym. 2015, 15; Moss 2005, 313–315.)

Murtolukujen oppimiseen omat lisähaasteensa tuo aiemmin tässä luvussa esitellyn merkinnän "$\frac{m}{n}$" monet merkitykset. Nykyisessä opetuksessa ei usein kiinnitetä huomiota näiden eri merkitysten kehittämiseen, vaan opetuksen painopiste on laskuproseduurien harjoittelussa, mikä on havaittavissa myös edeltävästä nykyään käytössä olevien oppikirjojen tarkastelusta. Opintojen edetessä tulee ilmi myös se, että rationaaliluku voidaan esittää monessa eri muodossa murtoluvun ollessa vain yksi esitysmuodoista desimaaliluvun sekä prosenttiluvun ohella. Tämän lisäksi, että on olemassa useita esitystapoja, on näiden tapojen sisällä vielä loputon määrä mahdollisuuksia esittää sama luku (esim. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$). Näiden eri esitystapojen välillä oppilaan pitäisi pystyä operoimaan joustavasti ja tarkoituksenmukaisesti. (McMullen ym. 2015, 15; Moss 2005, 313–315.)

Kilpatrick ym. (2001) tuo edellä mainittujen näkökulmien lisäksi ensinnäkin esille sen, että murtolukujen opetuksessa tulisi hyödyntää oppilailla jo olevaa epämuodollista tietoa. Lapsille on usein tuttua koulun ulkopuolelta reilu jako, jossa kaikki osalliset saavat yhtä paljon. Tästä päästään luontevasti siirtymään yhtä suuriin osiin jakamiseen, josta voidaan vähitellen laajentaa käsittelyä koskemaan yhtä suuria murtolukuja. Toiseksi matemaattinen osaaminen on usein pirstaleista murtolukujen suhteen. Oppilaat saattavat muistaa proseduurien laskusäännöt, mutta eivät osaa yhdistää niitä käsitteelliseen ymmärtämiseen. Heille ei myöskään ole kehittynyt riittävää strategista kompetenssia, joka auttaisi virheiden havaitsemisessa. (Kilpatrick ym. 2001, 231–240.)

Matematiikan opetus on usein sääntöpohjaista, mikä tarkoittaa sitä, että opetuksella pyritään tukemaan proseduurien nopeaa ja tarkkaa toteuttamista. Tällöin oppilaille esitellään uusi algoritmi ja siihen liittyvät säännöt, näytetään esimerkkien avulla toiminta ja pyydetään oppilaita harjoittelemaan sitä toisiaan toistavissa tehtävissä. Oppilaat oppivat, että tehokkain tapa saada oikea vastaus, on seurata opetettuja vaiheita, eikä proseduurien ymmärrystä koeta tarpeellisena. Jotta tämä muuttuisi, opetuksessa pitäisi käyttää riittävästi aikaa siihen, että uusille luvuille kehitetään merkityksiä. Lisäksi pitäisi hyödyntää apuna konkreettisia malleja, kuvia ja merkityksellisiä konteksteja. Näin voidaan tukea matemaattisen osaamisen eri osa-alueiden välisten yhteyksien säilymistä. (Kilpatrick ym. 2001, 231–240.)

5 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tämän tutkimuksen tehtävänä on kehittää murtolukujen aihealueeseen kirjallisia kielentämistehtäviä.

Kehittämistyö pohjautui luvussa 3 esiteltyyn kirjalliseen kielentämiseen ja valmiina oleviin kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppeihin sekä luvussa 2 tarkasteltuun matemaattisen osaamisen viitekehykseen. Tehtävien sisältöalueena on murtoluvut. Kehittämisprosessin jälkeen kehitetyt murtolukutehtävät vietiin murtoluku-jakson ajaksi tutkimuksessa mukana olleiden kahdeksan opettajan käyttöön osaksi heidän opetustaan.

Tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita tarkastelemaan sekä oppilaiden että opettajien näkökulmia sekä kokemuksia koskien matematiikan kirjallista kielentämistä. Oppilaiden osalta tavoitteena on tutkia sitä, miten he kokevat tehtävät ja sitä kautta kirjallisen kielentämisen. Oppilaiden kohdalla ollaan kiinnostuneita sukupuolen, opintomenestyksen ja koettujen omien matemaattisten ja äidinkielen taitojen vaikutuksista näihin kokemuksiin.

Opettajien osalta tavoitteena on tutkia sitä, miten opettajat kokevat tehtävät opetuksensa osana ja muun työskentelyn, esimerkiksi oppikirjojen, rinnalla. Lisäksi tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita siitä, mitä opettajat ovat kehitetyistä murtolukutehtävistä mieltä sekä millaisia havaintoja he tekevät murtoluku-jakson aikana tehtäviin liittyen. Tutkimuksen tarkoituksena on tarjota matematiikan oppituntien kirjalliseen työskentelyyn erilaisia työskentelyvaihtoehtoja sekä toimintamahdollisuuksia uusien kirjallista kielentämistä hyödyntävien tehtävien myötä.

Tutkimuksen tutkimuskysymykset ovat:

1. Miten oppilaat kokevat kirjalliset kielentämistehtävät?
    1.1. Miten kokemukset tyttöjen ja poikien välillä eroavat toisistaan?
    1.2. Minkälaisia eroja opintomenestys matematiikassa aiheuttaa näihin kokemuksiin?
    1.3. Minkälaisia eroja opintomenestys äidinkielessä aiheuttaa näihin kokemuksiin?
    1.4. Minkälaisia eroja kokemus itsestä matematiikan osaajana aiheuttaa näihin kokemuksiin?
    1.5. Minkälaisia eroja kokemus itsestä äidinkielen osaajana aiheuttaa näihin kokemuksiin?

2. Miten opettajat kokevat kielentämistehtävät osana omaa opetustaan?
    2.1. Miten opettajat arvioivat tutkimuksen kielentämistehtäviä?
    2.2. Millaisia havaintoja opettajat tekivät tutkimuskokeilun aikana?

Tutkimuksen keskiössä ovat kehitetyt murtolukutehtävät sekä niiden avulla kerätty tutkimustieto niin oppilailta kuin opettajilta. Tutkimusmenetelmänä on kehittämistutkimus. Menetelmää tarkastellaan seuraavassa luvussa kuvaamalla sen teoreettista viitekehystä tuoden samalla esille, miten menetelmä toteutui tässä tutkimuksessa.

6 KEHITTÄMISTUTKIMUS

Tutkimusmenetelmänä on kehittämistutkimus, jossa yhdistetään teoriapohjaista kehittämistä sekä empiiristä tutkimusta. Menetelmän avulla pyritään selvittämään vastauksia erilaisiin koulutuksen ja kasvatuksen innovaatioita koskeviin kysymyksiin kuten siihen, miten innovaatiot toimivat opetuksen käytänteissä, millaisissa konteksteissa niitä voidaan hyödyntää, ja mitkä ovat ne syyt innovaatioiden toimivuuden tai toimimattomuuden taustalla. Kehittämistutkimuksessa pyritään selittämään yhteyksiä teorian, kehitetyn artefaktin ja käytännön välillä. (Design-Based Research Collective 2003, 5.)

Kehittämistutkimus on tutkimusmenetelmänä opetusalalla melko uusi, sillä ensimmäiset tutkimusartikkelit julkaistiin vasta 1990-luvulla. Tuolloin menetelmän englanninkielinen nimi oli *design-experiment*, joka sittemmin on muotoutunut nimityksiin *design research* tai *design-based research (DBR)*, joista jälkimmäinen on vakiintunut englanninkieliseen kirjallisuuteen (ks. esim. Design-based Research Collective 2003). Lisäksi englanninkielisessä kirjallisuudessa kehittämistutkimukseen voidaan viitata myös *action research* -termillä. Suomeksi tämä tarkoittaa kuitenkin toimintatutkimusta, mikä on eri asia, sillä Suomessa kehittämistutkimus sekä toimintatutkimus nähdään eri metodeina esimerkiksi tutkijan toisistaan eroavan roolin vuoksi. (Kananen 2012, 39, 42.) Suomenkielisessä tutkimuskirjallisuudessa *kehittämistutkimuksen* ohella on myös käytössä englanninkielisestä termistä lainattu käsite *design-tutkimus* (ks. esim. Juuti & Lavonen, 2013).

Kehittämistutkimuksella on pragmatistinen viitekehys, jonka mukaan todellisuuteen vaikuttaa myös ihmisen toiminta. Tietoa saadaan sekä hankitaan toiminnan kautta, minkä jälkeen kokemuksia reflektoidaan. Kehittämistutkimuksessa saatava tieto on konstruktio, joka rakentuu kehittämisprosessin aikana. Tällöin oppimisesta, opetuksesta ja opiskelusta saatava tieto on löydettävissä opettajien ja oppilaiden välisestä vuorovaikutuksesta niin toistensa kuin artefaktin kanssa. Tutkija on vuorovaikutuksessa opettajan kanssa ja välillisesti myös oppilaiden kanssa. Juutin ja Lavosen (2013, 50) mukaan kehittämistutkimuksen ydin on suunnatussa toiminnassa. Tällöin koulussa ja luokkahuoneessa tapahtuvia toimintoja suunnataan uusilla tavoilla, kehitetään täysin uusia tapoja toimia ja reflektoidaan näiden uusien tapojen käyttöä. (Juuti & Lavonen 2013, 47–51.)

Opinnäytetyön tekijä voi erottaa kehittämistutkimuksessa kaksi prosessia, jotka kietoutuvat toisiinsa. Kanasen (2012, 45) mukaan ensimmäinen vaihe on kehittämistyö, jonka kohteena on esimerkiksi jokin prosessi tai tuote. Tässä tutkimuksessa tämä kehittämistyö kohdistui kirjallista kielentämistä hyödyntäviin matematiikan tehtäviin. Toinen vaihe on itse tutkimus, joka tässä toteutui niin, että kehitettyjä tehtäviä testattiin käytännössä. Testaamisvaiheessa kerättiin kokemuksia murtolukutehtävien toimivuudesta niin oppilailta kuin opettajilta. Kehittämistutkimukselle tyypillinen syklisyys toteutui siten, että ensimmäinen sykli tehtiin jo aiemmin kandidaatintutkielmassa kehittämällä tehtäviä ja kokeilemalla niitä ensimmäisen kerran. Toinen sykli jatkui luontevasti osana tätä pro gradu -tutkielmaa.

6.1 Kehittämisen syklit

Juuti ja Lavonen (2009, 166) määrittelevät kolme tekijää, jotka kuuluvat kehittämistutkimukseen. Ensimmäinen tekijä on, että kehittämisprosessissa saadaan uutta tietoa opettamisesta, opiskelusta ja oppimisesta. Toiseksi kehittämistutkimuksessa kehitetään artefakteja, joiden tehtävä on auttaa opettajaa toimimaan tavoitteiden mukaisesti. Artefaktin on oltava sellainen, että se on otettavissa käyttöön laajemminkin kuin vain tutkimukseen liittyen. Kolmas tekijä on kehittämisprosessin iteratiivisuus eli se, että prosessin luonne on syklinen. (Juuti & Lavonen 2009, 166.)

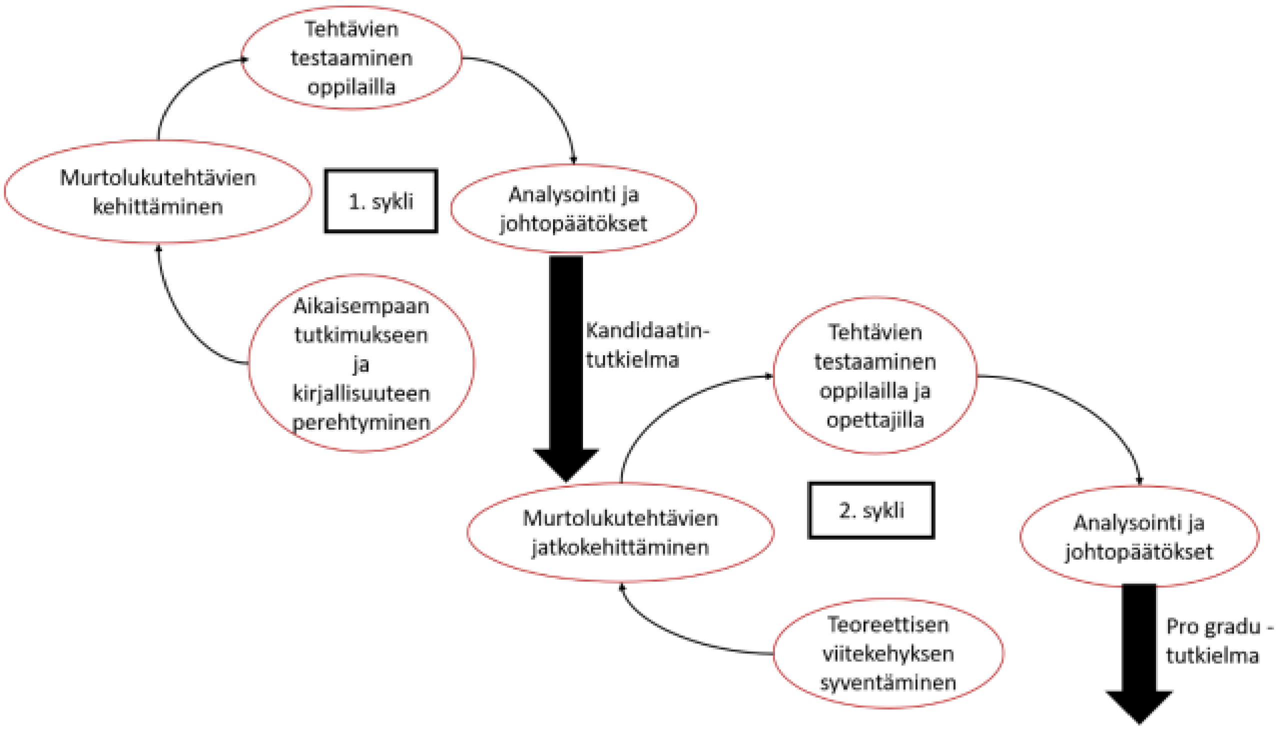
Myös Design-Based Research Collective (2003, 5) nostaa esille kehittämistutkimukselle ominaisen piirteen syklisyydestä, jossa kehittämisen tavoitteet ja kehittämisteoriat kietoutuvat yhteen. Kehittämisen täytyy johtaa jaettaviin teorioihin, joiden avulla tutkimuksen päätelmät saadaan jaettua opettajille sekä muille kasvatuksen ja koulutuksen parissa työskenteleville. Lisäksi tutkimuksen osana pitää olla kuvaus siitä, miten kehittämisprosessissa syntynyt artefakti toimii oikeissa olosuhteissa. Nämä kuvaukset pitää olla dokumentoitavissa. (Design-Based Research Collective 2003, 5.)

Kehittämistutkimuksen eteneminen pohjautuu pragmatistiseen viitekehykseen. Kun jokin toiminta tietyssä tilanteessa koetaan ongelmallisena, tutkimusprosessi pääsee käyntiin. (Juuti & Lavonen 2009, 167.) Kehittämistutkimuksen etenemisprosessia Edelson (2002, 108, 112) lähestyy kolmella eri kysymyksellä, joihin tutkimuksessa pitäisi pyrkiä vastaamaan. Ensimmäinen kysymys on, miten kehittämisprosessissa edetään. Tämä on kehittämisprosessin näkökulma. Toinen kysymys koskee sitä, mitä tarpeita ja mahdollisuuksia kehittämisellä nähdään olevan. Tällöin kyseessä on ongelma-analyysi. Kolmas kysymys koskee kehittämisen seurauksena syntyvää tuotetta, johon kehittäminen johtaa eli kyseessä on kehittämistuotoksen näkökulma. Nämä kolme kysymystä ovat päätöksien sarja, joka kehittäjän täytyy tehdä kehittämisprosessin aikana. Kaikissa näissä vaikuttaa myös kehittämiskonteksti. (Edelson 2002, 108, 112.)

Kehittämisprosessissa määritetään itse prosessi sekä siinä mukana olevat ihmiset. Prosessiin kuuluu oleellisena osana myös kehittymisen rajoitteiden määrittäminen. Ongelma-analyysissa luonnehditaan tavoitteet, tarpeet ja mahdollisuudet yhdessä haasteiden ja rajoitteiden kanssa. Nämä kaikki kuuluvat kehittämistilaan, jossa kehittäjän täytyy valita kehittämisratkaisuun saatavilla olevat ja soveltuvat vaihtoehdot ja olla valmis tekemään kompromisseja rajoitteet huomioon ottaen. Ongelma-analyysi on pakollinen, sillä aidon kehittämistarpeen valinnan pitää perustua oikealle ja perustellulle ongelmalle. Kehittämistarpeen määrittelyä kutsutaan tarveanalyysiksi, joka voidaan tehdä empiirisesti, teoreettisesti tai näitä tapoja yhdistäen. Kehittämistuotos taas on eräänlainen ratkaisu kehittäjien pyrkimyksille hyödyntää mahdollisuudet sekä huomioida rajoitteet ja kompromissit, jotka tulivat esiin ongelma-analyysissa. Tuotos kehittyy prosessin edetessä, kun kehittäjien ymmärtäminen syvenee. (Edelson 2002, 108–109; Pernaa 2013, 17.)

Kehittämistutkimus tapahtuu sykleissä toimien todenmukaisissa oppimisen olosuhteissa (Bell, Hoadley & Linn 2004, 77). Kehittämissyklin ensimmäinen vaihe on nykytilan tarkastelu. Tässä vaiheessa rajataan kehittämistyön kohde. (Kananen 2015, 41.) Kehittämissykleissä teoreettiset ja kokeelliset vaiheet nivoutuvat yhteen. Kehittämissyklin vaiheita ovat kehittämis-, arviointi- ja raportointivaiheet, joiden avulla artefaktia kehitetään ja arvioidaan toisiaan seuraavissa sykleissä. Kokeileminen käytännössä tarjoaa mahdollisuuden kerätä lisää tietoa jatkokehittämistä varten. Tutkimukseen kuuluu siis oleellisena osana formatiivinen arviointi. Ongelma-analyysissa etsitään uudelleen tarkennuksia, ja tuotosta kehitetään ja arvioidaan uudelleen. (Edelson 2002, 106–111, Pernaa 2013, 17–18.)

Aksela ja Pernaa (2013) käsittelevät artikkelissan *Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä* erikseen pro gradu -tutkielmassa toteutettavia kehittämistutkimusprosesseja, jotka yleensä koostuvat yhdestä tai kahdesta syklistä. Yhden syklin mallissa toteutetaan *teoreettinen ongelma-analyysi*, jossa tutkimus aloitetaan tutkimalla aikaisempaa kirjallisuutta. Tällöin selvitetään aikaisemmat tutkimukset aiheesta ja kyetään selvittämään tarpeet aiheille, joita tulisi tutkia lisää. Lisäksi tehdään *empiirinen ongelma-analyysi,* joka vastaa Edelsonin (2002, 108–109) määrittelemää tarveanalyysiä. Tämän avulla täydennetään kirjallisuudesta esille nousseita tutkimustarpeita. Näitä kahta vaihetta seuraa *kehittämisvaihe,* jossa valmistetaan artefakti edellä esiteltyihin vaiheisiin nojaten. Lopuksi jäljellä on vielä *raportointi* eli opinnäytetyön kirjoittaminen, jossa kaikki vaiheet dokumentoidaan. Kahden syklin mallissa vaiheet ovat samat, mutta empiirinen ongelma-analyysi ja kehittämisvaihe toistetaan kahteen otteeseen ennen raportointiin siirtymistä. (Aksela & Pernaa 2013, 185–186.) Kuviossa 9 on esitetty tämän tutkimuksen kehittämissyklit edellä kuvattua Akselan ja Pernaan (2013) esitystä mukaillen.



KUVIO 9. Kehittämistutkimuksen syklien toteutuminen tässä tutkimuksessa.

Ensimmäinen sykli toteutui kandidaatintutkielmassa, ja toinen sykli tässä pro gradu -tutkielmassa. Molemmista sykleistä on havaittavissa samoja vaiheita, joiden toteutus on kuitenkin toisistaan poikkeava laajuudeltaan esimerkiksi murtolukutehtävien testaamisen osalta sekä aineiston keräämisen osalta. Molemmat syklit ovat alkaneet teoreettiseen viitekehykseen tutustumalla, sillä teorian pohjalle itse kehittämistyö on rakentunut. Tehtäviä on testattu käytännössä erilaisilla tutkimusasetelmilla ja kerätty tässä yhteydessä aineistoa. Aineiston keräämisen jälkeen tuloksia analysoidaan. Yhdessä nämä kaksi sykliä muodostavat kokonaisen kehittämisprosessin, jonka yhteydessä on valmistunut kaksi tutkielmaa. Tämä tutkimus noudattaa väljästi Edelsonin (2002) määritelmää, sillä esimerkiksi ongelma-analyysi toteutettiin teoreettisesti kirjallisuuteen tutustuen empiirisen tarveanalyysin sijaan.

6.2 Monimenetelmällinen tutkimusote

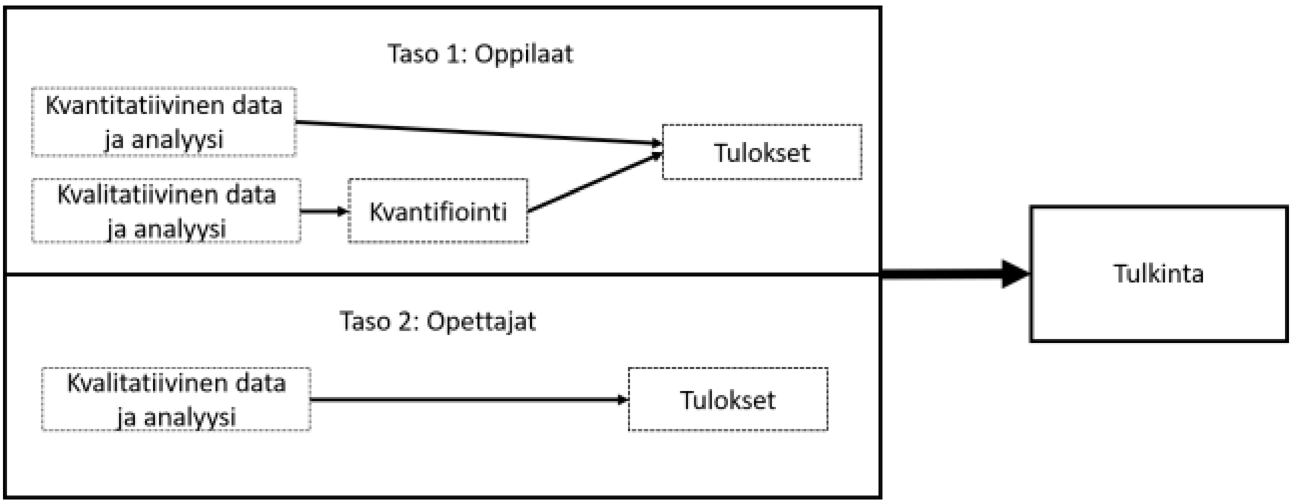
Kehittämistutkimusta ei nähdä erillisenä tutkimusmenetelmänä, vaan pikemminkin tutkimusmenetelmien joukkona. Tästä joukosta valitaan tutkimusmenetelmiä siten, että ne parhaiten soveltuisivat tilanteeseen ja kehittämiskohteen tutkimiseen. Kehittämistutkimus onkin *monimenetelmäinen tutkimusote.* (Collins, Joseph & Bielaczyc 2004, 36; Kananen 2012, 19.) Englannin kielessä käytössä on yleensä termi *"mixed methods"* (ks. esim. Creswell 2014; Creswell & Plano Clark 2018; Edmonds & Kennedy 2013). Mixed methods -termi voidaan myös nähdä osana laajempaa nousevien metodien (englanniksi "emergent methods") kokonaisuutta, joilla tarkoitetaan uuden teknologian myötä esiin nousseita vaihtoehtoisia metodeja. Tällä viitataan siihen, että kehittyneen tietokonepohjaisen teknologian avulla esimerkiksi kvalitatiivisesta datasta voidaan tehdä kvantitatiivisia mittauksia. (Hesse-Biber 2010, 212.)

Monimenetelmällisessä tutkimusotteessa dataa sekä kerätään että analysoidaan kvalitatiivisesti ja kvantitatiivisesti. Tutkijan pitää tutkimuksen suunnitteluvaiheessa harkita, miten nämä kaksi osa-aluetta painottuvat juuri hänen tutkimuksessaan. Molempia voidaan painottaa yhtä paljon, tai toinen voi olla tutkimuksen ajan suuremmassa roolissa. Lisäksi tärkeää on suunnitella näiden kahden metodihaaran yhdistäminen. Tutkimuksessa toteutettavat kvantitatiiviset ja kvalitatiiviset osat voivat olla samanaikaisia, peräkkäisiä, sisäkkäisiä tai monikerroksisia. Näiden sekoittuminen voi tapahtua tutkimuksen eri vaiheissa. Onnistuakseen monimenetelmällisyyden toteuttamisessa tutkijalla pitää olla käsitys näiden kahden suuntauksen toisistaan erottavista piirteistä, jotta hän voi hyödyntää molempia tarkoituksenmukaisella tavalla. (Edmonds & Kennedy 2013, 146.)

Monimenetelmäinen tutkimusote on ongelmakeskeinen, jossa tutkimusongelma ohjaa tutkimuksen tekoa (Leavy 2017, 165). Monimenetelmäisessä tutkimusotteessa on erilaisia lähestymistapoja, joista yksi on *upotettu* lähestymistapaa. Tätä hyödynnetään silloin, kun kvantitatiivinen tai kvalitatiivinen ulottuvuus on toista ulottuvuutta isommassa roolissa. Lisäksi on olemassa kaksi lähestymistapaa, joissa molemmissa kvantitatiiviset ja kvalitatiiviset osat ovat peräkkäisiä. Ensimmäistä nimitetään *selittäväksi* lähestymistavaksi. Tällöin kvalitatiivista dataa käytetään tulkinnassa ja kvantitatiivisella data-analyysilla saatujen tulosten selventämisessä. Tässä tutkimuksen painotus on kvantitatiivisessa lähestymistavassa, ja kvalitatiivista käytetään tukemassa tätä. Toinen peräkkäinen lähestymistapa on *tutkiva*, joka painottaa kvalitatiivista menetelmää. Tässä lähestymistavassa tutkija seuraa kvalitatiivisesta analyysistä löydettyjä havaintoja kvantitatiivisella analyysilla. (Creswell & Plano Clark 2018, 222–223; Edmonds & Kennedy 2013, 157, 163–168.)

Lähestymistavoista neljäs on *yhtyvä ja rinnakkainen* lähestymistapa. Tapa on eniten käytetyin, ja tässä tavassa kerätään samanaikaisesti kvantitatiivista ja kvalitatiivista dataa. Tällöin painotetaan molempia lähestymistapoja yhtä paljon, eikä toinen tapa korostu. Tähän lähestymistapaan kuluu erilaisen, mutta toistaan täydentävän datan kerääminen samasta tutkimuksen kohteena olevasta ilmiöstä. Tulkinnassa kvantitatiivinen ja kvalitatiivinen lähestymistapa yhdistyy. (Creswell & Plano Clark 2018, 221–222; Edmonds & Kennedy 2013, 149.)

Yhtyvässä ja rinnakkaisessa lähestymistavassa ideana on kerätä aineistoa sekä kvalitatiivisessa että kvantitatiivisessa muodossa käyttäen samoja tai rinnakkaisia muuttujia ja käsitteitä (Creswell 2014, 222). Tämän lähestymistavan sisällä on olemassa erilaisia suuntauksia. Aineiston muuntamismalli sallii tutkijan edelleen kerätä kvantitatiivisen ja kvalitatiivisen datan rinnakkain. Kerättyä aineistoa on kuitenkin mahdollista muuntaa joko kvalitatiivisesta kvantitatiiviseen tai päinvastoin. Aineiston vahvistamismallissa kvantitatiivista dataa vahvistetaan kvalitatiivisesta aineistosta saatavilla löydöksillä. Lisäksi on mahdollista hyödyntää monitasoista mallia, jossa tutkijalla on mahdollisuus hyödyntää aineistoon erilaisia, kulloinkin tarkoituksenmukaisia metodologisia tekniikoita. Kattavaa tulkintaa varten saadut kvantitatiiviset ja kvalitatiiviset tulokset eri tasoilta yhdistetään. (Edmonds & Kennedy 2013, 150.) Seuraavassa kuviossa 10 on pyritty avaamaan lähestymistapojen jakautumista ja yhdistymistä tässä tutkimuksessa mukaillen Edmondsin ja Kennedyn (2013) luonnehtimia esityksiä eri lähestymistavoista.



KUVIO 10. Monimenetelmällisen tutkimusotteen lähestymistapojen jakautuminen ja yhdistyminen tässä tutkimuksessa.

Tutkimuksessa kerättiin oppilailta sekä kvalitatiivista että kvantitatiivista dataa. Kvantitatiivista dataa analysoitiin määrällisin keinoin, ja kvalitatiivista dataa analysoitiin teorialähtöisellä sisällönanalyysilla, jota jatkettiin määrällisesti kvantifioimalla. Näistä molemmista koostuvat oppilaiden aineistosta saatavat tulokset. Opettajilta kerättiin pääasiassa laadullista dataa, jota analysoitiin laadullisesti teorialähtöisen sisällönanalyysin avulla kooten näin opettajien kokemuksia tarkastelun alle. Teorialähtöisen sisällönanalyysin pohjana oli matematiikan kirjallisen kielentämisen teoreettinen viitekehys. Tulkinnassa tulokset tuotiin yhteen, ja pyrittiin muodostamaan kokonaisvaltaisempi kuva tutkittavasta ilmiöstä. Aineiston analysointia tarkastellaan tarkemmin luvussa 8.

7 MURTOLUKUTEHTÄVÄT

Tutkimuksessa kehitettiin seitsemän erilaista tehtävää. Kaikki tutkimuksessa käytetyt tehtävät olivat murtolukujen aihealueeseen suunniteltuja. Jokainen tutkimustehtävä toteutettiin sekä 5. että 6. vuosiluokalla. Kielentämistehtävätyypit molemmilla vuosiluokilla olivat samat, mutta matemaattista sisältöä jouduttiin hieman joissakin tehtävissä helpottamaan 5. vuosiluokan oppilaita varten. Seuraavassa on esitelty, millaisia tehtäviä tutkimuksessa kehitettiin nojautuen teoreettisessa viitekehyksessä luvussa 3 esiteltyyn kielentämisen teoriaan sekä luvussa 2 esitettyihin Kilpatrickin ym. (2001) matemaattisen osaamisen osa-alueisiin. Tutkimuksessa oli tarkoitus ottaa mukaan mahdollisimman erilaisia tehtävätyyppejä, joissa symbolikieli, kuviokieli ja luonnollinen kieli, sekä näiden kolmen matematiikan kielen yhdistelmät ilmenevät eri tavoin. Kehitetyt murtolukutehtävät ovat löydettävissä alkuperäisessä koossaan liitteistä 1–12.

Tehtävän 1 *kerro mitä tiedät* -tehtävätyyppi (liite 1) oli kielentämistehtävätyyppi, joka kehitettiin osana kandidaatintutkielmaa (Rosenberg 2017, 24). Tehtävätyypissä tarkoituksena on kertoa pyydetystä asiasta, tässä tapauksessa murtoluvuista, annettuja käsitteitä käyttäen luonnollisella kielellä. Tarvittaessa kuviokieltä tai matematiikan symbolikieltä saa käyttää apuna ratkaisussa. Tehtävässä huomioiduksi tulee erityisesti käsitteellisen ymmärtämisen osa-alue. Käsitteelliseen ymmärtämiseen kuuluu matemaattisten operaatioiden sekä käsitteiden ymmärtämisen lisäksi myös se, että käsitteiden ja proseduurien välillä aletaan nähdä yhteyksiä ja näistä osataan argumentoida. (Kilpatrick ym. 2001, 116–119.) Tällaisen tehtävän avulla opettaja pystyy tarkastelemaan, mitä oppilaat jo opetetusta asiasta tietävät, puuttua mahdollisiin virhekäsityksiin tai arvioida asioita, jotka vielä vaativat perehtymistä (Lee 2006, 3). Tämä tehtävä toteutettiin sekä kartoittavana tehtävänä ennen murtoluku-jakson alkua että lisäksi sen päätyttyä jakson aikana opittua testaavana. Tehtävä toteutettiin samanlaisena niin 5. kuin 6. vuosiluokan opetusryhmissä.

Tutkimustehtävä 2 oli matemaattiselta sisällöltään samanlainen 5. ja 6. vuosiluokalla (liite 2). Tehtävässä oli kaksi kuvasarjaa, ja oppilaan tehtävänä oli tarkastella kuvia ja kirjoittaa selitys matematiikan symbolikielellä. Kyseessä oli *muutoksen kielentäminen kuvasta* -tehtävätyyppi. Tehtävässä rohkaistiin keksimään mahdollisimman monta eri selitystä vihjaten kiinnittämään huomiota osiin jaetun ympyrän väritettyjen osien lisäksi myös värittämättömien osien lukumäärään.

Tehtävän toisessa kuvasarjassa tutkittiin murtolukujen supistamista, ja toisessa kuvasarjassa laventamista, ja oppilaita pyydettiin myös nimeämään, kumpi toiminto oli kyseessä. Tehtävässä tarvittiin strategista kompetenssia, jossa oppilaille annettu valmis ongelma tulee esittää matematiikan symbolikielellä, jolloin myös proseduraalisen sujuvuuden tulee olla hyvä (Kilpatrick ym. 2001, 124).

Tutkimustehtävässä 3 (liitteet 3 ja 4) kyseessä oli *omin sanoin selitys* -tehtävä. Oppilasta pyydettiin ratkaisemaan tehtävä ilman matematiikan symbolikielen käyttöä. Tarkoituksena oli hyödyntää luonnollista kieltä ja kuviokieltä. Lisäksi ohjeistuksena oli lopuksi antaa vastaus kokonaisena virkkeenä. Sanallinen tehtävänanto rakennettiin niin, että lukumääriä ei annettu valmiina, vaan oppilaiden piti ratkaista tehtävä murtolukuina annettujen osuuksien perusteella. Tässä 6. vuosiluokan tehtävässä (liite 3) kysyttiin puuttuvaa osuutta, ja 5. vuosiluokan tehtävässä (liite 4) kaikki osuudet olivat annettuja, ja kysyttiin osuuksista suurinta. Tehtävässä oppilaat tarvitsivat mukautuvaa päättelyä eli kykyä loogiseen ajatteluun ja reflektointiin (Kilpatrick ym. 2001, 129). Oppilaat harjoittelivat päätelmien perustelua sekä esittämistä välttäen matematiikan symbolikielen käyttöä, jolloin tarvittiin myös käsitteellistä ymmärtämistä.

Tehtävä 4 (liitteet 5 ja 6) yhdisti kaksi eri tehtävätyyppiä, *ratkaisun järjestämisen* ja *ratkaisun argumentoinnin*. Tehtävässä harjoiteltiin laskujärjestystä, ja tarkoituksena oli järjestää matematiikan symbolikielellä annetut murtolukuihin liittyvät laskuvaiheet oikeaan järjestykseen ja perustella tehdyt vaiheet luonnollisen kielen avulla. Tehtävän helpottamiseksi ensimmäinen ja viimeinen vaihe oli perusteluineen annettu valmiiksi. 5. vuosiluokan tehtävässä (liite 6) laskuvaiheita oli yksi vähemmän eikä mukana ollut erinimisten murtolukujen yhteenlaskua, toisin kuin 6. vuosiluokan tehtävässä (liite 5). Tehtävässä korostui erityisesti proseduraalinen sujuvuus sekä kyky selittää omin sanoin, jolloin tuodaan esille proseduurien sekä käsitteiden välisiä yhteyksiä (Kilpatrick ym. 2001, 119). Oppilaalla voi olla myös kehittynyt proseduraalinen sujuvuus ilman ymmärrystä proseduurien takana vaikuttavista syistä. Tämän vuoksi tehtävässä tärkeänä osana oli perustella luonnollisella kielellä laskuvaiheille valitsemansa järjestys.

Tehtävä 5 (liitteet 7 ja 8) laadittiin *ratkaisusta tehtävä* -tehtävätyypin pohjalta. Tehtävässä esitettiin valmis ratkaisu matematiikan symbolikielellä niin, että ratkaisussa oli mukana yksikkö *kg* (vuosiluokka 6) tai *kg* ja *g* (vuosiluokka 5). Tämän valmiin ratkaisun pohjalta oppilasta pyydettiin laatimaan ratkaisuun sopiva sanallinen tehtävänanto. 6. vuosiluokan oppilailla valmis ratkaisu oli monimutkaisempi sisältäen yhteen- ja jakolaskua (liite 7), ja 5. vuosiluokan tehtävä sisälsi vain yhteenlaskua (liite 8). Tehtävässä oppilaat saivat rakentaa sanallisen merkityksen matematiikan symbolikielelle sekä luoda itse kontekstin vastakohtana perinteisille matematiikan ongelmien ratkaisemisille (Joutsenlahti & Kulju 2017, 4). Sanallisen tehtävän muodostaminen paljastaa, miten oppilas on ymmärtänyt annetun laskulausekkeen. Lisäksi oppilaat saivat tällaisen tehtävän avulla mahdollisuuden luoda luvuille merkityksiä omasta kokemuspiiristään. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 424.) Tehtävässä korostui matemaattisista osa-alueista strateginen kompetenssi eli kyky muodostaa, ratkaista ja esittää matemaattisia ongelmia. Kyvyn kehittymiseksi oppilaat tarvitsevat yhtä lailla kokemuksia myös ongelmien muodostamisesta kuin totutusta valmiiden ongelmien ratkaisusta. (Kilpatrick ym. 2001, 124). Tässä oppilaat harjoittelivat ongelman muodostamista ja esittämistä valmiin ratkaisun pohjalta.

Tutkimustehtävä 6 oli *täydennystehtävä* (liitteet 9 ja 10), jossa oli sanallinen tehtävänanto sekä ratkaisua varten ruudukko, johon sisältyi kolme saraketta: matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli ja kuviokieli. Tehtävän ratkaisu muodostui taulukon kolmelle riville siten, että valmiiksi annettiin ratkaisun vaihe kahdella kielellä, ja kolmas puuttuva kieli oppilaan tuli itse täydentää. Lopuksi tässäkin tehtävässä pyydettiin vastausta kokonaisena virkkeenä. 5. vuosiluokan oppilailla matemaattinen sisältö liittyi yhteenlaskuun ja osuuksien vertailuun (liite 10), kun 6. vuosiluokan tehtävän sisältö käsitti myös murtoluvun kertomista tai jakamista riippuen ratkaisutavasta (liite 9). Tässä tehtävässä oppilaat tarvitsivat niin proseduraalista sujuvuutta, strategista kompetenssia kuin mukautuvaa päättelyäkin. Tehtävässä tuli esille Kilpatrickin ym. (2001, 116) määrittelemien matemaattisen osaamisen osa-alueiden linkittyminen toisiinsa, sillä tehtävän ratkaisussa ne tukivat toinen toistaan.

Tehtävässä 7 (liitteet 11 ja 12) oppilaille annettiin sanallinen tehtävänanto, johon heidän piti laatia *ratkaisu sarjakuvana*. Ratkaisussa oli mahdollista hyödyntää eri matematiikan kieliä oppilaan oman valinnan mukaisesti. 5. vuosiluokan oppilaille tehtävää helpotettiin antamalla luku, josta lähteä laskemaan eri osuuksia (liite 12). 6. vuosiluokan oppilaita taas vaadittiin lähteä rakentamaan ratkaisua ikään kuin takaperin antamalla jäljelle jäävä osuus lukumääränä ja muut murtolukuina (liite 11). Sarjakuvaa ratkaisuna käyttäen tehtävässä päästiin harjoittelemaan myös tekstitaitoja. Sarjakuvan avulla on helppo seurata ja arvioida oppilaan ratkaisuprosessia. (Joutsenlahti & Kulju 2017, 4.) Tässä tehtävässä, niin kuin myös tehtävissä 3 ja 6, pyydettiin lopuksi vastausta kokonaisena virkkeenä. Tehtävässä tarvittiin strategista kompetenssia. Matemaattinen ongelma oli esitetty valmiina, jolloin oppilas pääsi harjoittelemaan ongelmanratkaisua sekä esittämistä kuviokielen avulla. Tehtävästä luotiin paitsi tehtävätyyppinä motivoiva, niin myös aiheeltaan ajankohtainen ja kiinnostava, millä osaltaan pyrittiin tukemaan oppilaan yritteliäisyyttä.

Seuraavassa taulukossa 1 on vielä tiivistettynä esitetty murtolukutehtävien keskeiset piirteet. Taulukon kahden viimeisimmän sarakkeen avulla voi tarkastella, millaista koodinvaihtoa oppilaan piti tehtävässä suorittaa.

TAULUKKO 1. Tutkimuksessa kehitettyjen murtolukutehtävien keskeisimmät piirteet.

Tehtävä	**Kielentämistehtävätyyppi**	**Tehtävän kuvaus**	**Tehtävässä annetut kielet**	**Kielet, joilla tehtävässä operoidaan**
1	Kerro mitä tiedät	Omin sanoin kertominen pyydetystä asiasta annettuja käsitteitä käyttäen	Luonnollinen kieli	Luonnollinen kieli
2	Muutoksen kielentäminen kuvasta	Kuviokielellä esitettyjen kuvasarjojen tapahtumien kertominen symbolikielellä	Kuviokieli	Matematiikan symbolikieli
3	Omin sanoin selitys	Sanallisen tehtävän ratkaisun esittäminen kuviokielen avulla ja omin sanoin ilman symbolikielen käyttöä	Luonnollinen kieli	Luonnollinen kieli ja/tai kuviokieli
4	Ratkaisun järjestäminen ja argumentointi	Väärässä järjestyksessä symbolikielellä annettujen laskuvaiheiden järjestäminen ja vaiheiden perustelu luonnollisella kielellä	Symbolikieli, luonnollinen kieli	Symbolikieli, luonnollinen kieli
5	Ratkaisusta tehtävä	Symbolikielellä annettuun valmiiseen ratkaisuun tulee keksiä sanallinen tehtävänanto	Symbolikieli	Luonnollinen kieli
6	Täydennystehtävä	Sanallisen tehtävän ratkaiseminen rinnakkain symbolikielellä, luonnollisella kielellä ja kuviokielellä. Jokaisella kielellä on annettu valmiiksi ratkaisun vaiheita.	Symbolikieli, kuviokieli, luonnollinen kieli	Symbolikieli, kuviokieli, luonnollinen kieli
7	Ratkaisu sarjakuvana	Sanallisen tehtävän ratkaiseminen kuviokielen avulla sarjakuvana	Luonnollinen kieli	Kuviokieli

8 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tässä luvussa esitellään aineiston hankinta sekä siihen liittyvät eri vaiheet. Tämän jälkeen tarkastellaan aineiston analysointiin käytettyjä menetelmiä sekä tutkimuksessa oppilaiden osalta käytettyjä tausta- ja summamuuttujia.

8.1 Aineiston hankinta

Aineisto hankittiin keväällä 2018 neljästä eri koulusta, joista jokaisesta mukana oli kaksi luokkaa. 5. vuosiluokkia oli mukana kolme ja 6. vuosiluokkia viisi. Tutkimuksessa mukana olleet koulut sijaitsevat Pirkanmaalla, Etelä-Pohjanmaalla sekä Kanta-Hämeessä, ja ne valikoituivat mukaan harkinnanvaraisesti saavutettavuuden kannalta. Tutkimusluvat hoidettiin aluksi kunnan tasolla jokaisen kunnan vaatimalla tavalla hakemalla joko tutkimuslupaa sähköisesti tai olemalla muutoin yhteydessä kuntaan. Tämän jälkeen tutkimuslupa pyydettiin koulujen rehtoreilta ja lopuksi oppilaiden huoltajilta paperisella lomakkeella (liite 13). Opettajien tehtäväksi jäi kontrolloida, kenellä oppilaista oli lupa osallistua tutkimukseen. Kaikilla oppilailla oli silti mahdollisuus tehdä murtolukutehtävät, vaikka niitä ei olisikaan luovutettu tutkimuskäyttöön.

Aineistoa läpikäytäessä sitä karsittiin siten, että minimivaatimus analysointivaiheeseen hyväksyttäväksi oli, että oppilaalla oli oltava neljä tehtävää tehtynä ja näiden lisäksi vastattuna kyselylomakkeeseen tai vaihtoehtoisesti tämän sijaan riitti, että oppilaalla oli vähintään kuusi tehtyä tehtävää ilman täytettyä kyselylomaketta. Tähän päädyttiin sen vuoksi, että kyselylomakkeessa piti myös arvioida tehtyjä tehtäviä esimerkiksi nimeämällä suosikkitehtävä. Tämän arvion tekeminen vaatii, että on osallistunut tarpeeksi usean tehtävän tekoon. Näin oppilaista koostuvan aineiston lopulliseksi kooksi muodostui 135 oppilasta. Opettajia tutkimuksessa oli mukana yksi jokaiselta luokalta eli yhteensä kahdeksan opettajaa. Yksi näistä oli opetusharjoittelija. Tuloksien esittelyssä opetusharjoittelijan vastauksia ei tarkastella erikseen anonymiteetin säilymisen vuoksi.

Oppilaiden osalta aineiston hankintaan kuuluivat paperille kopioidut tutkimustehtävät (liitteet 1–12) sekä paperinen kyselylomake (kysymykset tarkasteltavissa liitteestä 14). Murtolukutehtävät pitivät sisällään seitsemän erilaista kielentämistehtävää murtolukujen aihealueelta. Yksi näistä tehtävistä (kerro mitä tiedät -tehtävä, liite 1) tehtiin sekä ennen jakson alkua testaamassa ennakkotietoja että sen päätyttyä testaamassa jakson aikana opittua. Näin tehtyjä tehtäviä kertyi yhteensä kahdeksan. Oppilaat merkitsivät niin tekemänsä tehtävät kuin kyselylomakkeet nimikirjaimilla, joten edes tutkijan ei ollut mahdollista tunnistaa yksittäistä vastaajaa. Nimikirjaimia käytettiin, jotta saman oppilaan vastauksien yhdistäminen onnistuisi.

Murtoluku-jakso oli tehtävien teon aikana käynnissä kaikissa tutkimukseen osallistuneissa luokissa, ja tutkimustehtävissä esiintyneet sisällölliset asiat olivat linkitettyjä luokassa käytössä olleen oppikirjan etenemisjärjestykseen. Opettajilla oli ehdotuksena runko, minkä kappaleen yhteydessä kukin tehtävä olisi suositeltavaa tehdä tehtävän vaatiman sisällönosaamisen vuoksi. Suositus oli, että tehtäviä ei tehtäisi (ensimmäistä tehtävää lukuun ottamatta) ennen ehdotettua kohtaa, mutta tekemisen siirtäminen myöhempään kohtaan oli mahdollista. Lisäksi opettajilla oli vapaus hyödyntää tehtäviä parhaaksi katsomallaan tavalla esimerkiksi kotitehtävinä. Jokaisen tehtävän yhteydessä oppilaille oli tehtäväpaperin kääntöpuolella 3–6 väittämää koskien ko. tehtävässä käytettyjä kielentämisen eri kieliä (liite 15).

Jakson lopuksi oppilaille teetettiin paperinen kyselylomake, joka oli vakioitu eli kaikilta oppilailta kysyttiin samat asiat samassa järjestyksessä. Kyselylomake sisälsi viisitoista 4-portaista väittämää, jossa 1=”täysin eri mieltä”, 2=”jokseenkin eri mieltä”, 3=”jokseenkin samaa mieltä” ja 4=”täysin samaa mieltä”. Väitteissä ei siis ollut neutraalia ”En osaa sanoa” -vaihtoehtoa, vaan kaksi saman mielisyyttä ja kaksi erimielisyyttä kuvaavaa vastausvaihtoehtoa. Asteikollisissa väittämissä tutkijan tulee pohtia ”En osaa sanoa” -vastausvaihtoehdon tarpeellisuus ja mahdollinen ongelmallisuus analyysissä. Joskus saattaa olla perusteltua jättää asteikosta pois vaihtoehto ”En osaa sanoa” ja pakottaa vastaaja valitsemaan jokin mielipide väittämien suhteen. (Vilkka 2007, 109.) Tässä tutkimuksessa oppilaiden osalta neutraalivaihtoehto jätettiin pois, sillä paperikyselyssä vastaamatta jättäminen on aina mahdollista, ja lisäksi väitteet eivät koskeneet eettisesti ongelmallisia asioita. Väittämät koskivat kirjallista kielentämistä, ja ne pyrittiin operationalisoimaan niin, että oppilaat pystyisivät niitä arvioimaan. Lisäksi kyselylomake sisälsi kysymyksiä murtolukutehtävistä, kuten *”Pidin eniten tutkimustehtävästä numero…”*. Näihin tehtäviin liittyviin kysymyksiin pyydettiin myös perusteluita avointen kysymysten muodossa. Kyselylomakkeen liitteenä oli vielä oppilailla käytössä kooste kaikista murtoluku-jakson aikana tehdyistä tehtävistä muistutuksena sekä vastaamisen tukena.

Jakson jälkeen opettajille lähetettiin sähköpostin välityksellä linkki sähköiseen kyselyyn, joka sisälsi yhdeksän 5-portaista Likert-asteikollista väittämää koskien opetusjaksoa. Likert-asteikossa oli käytössä asteikko, jossa 1=”täysin eri mieltä”, 2=”jokseenkin eri mieltä”, 3=”ei samaa eikä eri mieltä” ja 4=”jokseenkin samaa mieltä” ja 5=”täysin samaa mieltä”. Väitteissä oli oppilaiden väitteistä poiketen mukana myös ”En osaa sanoa” -vaihtoehto, sillä sähköisessä kyselyssä vastauksen onnistuneen palauttamisen vuoksi jokaiseen kohtaan vaadittiin vastausta. Lisäksi opettajien kyselyssä oli kaksitoista avointa kysymystä, joista neljä liittyi tutkimustehtävien arviointiin ja loput kokemukseen tutkimustehtävien käytöstä opetuksen osana (liite 16). Sähköisessä kyselylomakkeessa oli vielä kuvakooste kaikista murtolukutehtävistä tehtävänumeroineen vastaamista tukemassa.

Kaikki tarvittava materiaali eli murtolukutehtävät, kyselylomakkeet, tehtäväkoosteet jokaiselle oppilaalle sekä ohjeet opettajalle tulostettiin etukäteen, ja jokaiselle luokalle kerättiin oma kansio, jossa näitä säilytettiin. Opettajat myös tavattiin kasvokkain yhtä opettajaa lukuun ottamatta ennen murtoluku-jakson alkua, ja tehtävät sekä niihin liittyvät seikat käytiin yhdessä keskustellen läpi, ja tällöin oli mahdollista esittää tarkentavia kysymyksiä. Opettajille oli myös jaettu tutkijan sähköposti ja puhelinnumero, mikäli jakson aikana ilmenisi tarvetta kysyä lisäohjeita tai -tarkennuksia.

8.2 Aineiston analysointi

Tutkimus on survey- eli kyselytutkimus, jossa tutkimusaineistoa kerättiin valmiiksi jäsennetyillä lomakkeilla (Nummenmaa, Holopainen & Pulkkinen 2017, 16–17; Holopainen & Pulkkinen 2012, 21). Sekä oppilaiden että opettajien kyselyt sisälsivät väittämiä ja avoimia kysymyksiä. Määrällistä aineistoa analysoitiin IBM SPSS Statistics 25 -ohjelman avulla, ja laadulliseen aineistoon hyödynnettiin sisällönanalyysissa apuna ATLAS.ti 8 -ohjelmaa.

Tutkimuksen laadullista aineistoa eli avoimia kysymyksiä lähestyttiin sisällönanalyysin avulla. Sisällönanalyysi on tekstianalyysia, jonka avulla on tarkoitus saada tutkimuksen kohteena olevasta ilmiöstä tiivistetty, sanallinen kuvaus. Tarkoitus on tällöin selvittää, miten merkityksiä tuotetaan tekstissä. Sisällönanalyysi voidaan jaotella aineistolähtöiseen, teorialähtöiseen sekä teoriaohjaavaan sisällönanalyysiin. Tässä tutkimuksessa avointen kysymysten analyysiin valikoitui teorialähtöinen sisällönanalyysi. Teorialähtöisessä sisällönanalyysissä aineiston luokittelu perustuu aikaisempaan käsitejärjestelmään, kuten teoriaan, malliin tai käsitteisiin. Tässä tutkimuksessa tämä tarkoitti kirjallisen kielentämisen teoriaan tukeutumista. Teorialähtöisen sisällönanalyysin ensimmäisessä vaiheessa muodostetaan analyysirunko, jonne koostetaan aineistosta erilaisia luokituksia tai kategorioita. Vaikka kyseessä on teoriaan nojaava lähestymistapa, aineistoa tarkastellaan silti noudattaen aineistolähtöisen sisällönanalyysin periaatteita. Tällä tarkoitetaan sitä, että aineistosta voidaan poimia runkoon sopivien asioiden lisäksi myös sen ulkopuolelle jääviä asioita, joista voidaan muodostaa aineistolähtöisesti uusia luokituksia. (Tuomi & Sarajärvi 2018, 117, 121–133.) Näin toimittiin myös tässä tutkimuksessa, sillä aluksi teoriasta poimittiin esimerkiksi matematiikan eri kielet ja tutkittiin näiden ilmenemistä perusteluissa. Lisäksi aineistosta toistuvasti nousevien seikkojen avulla muodostettiin uusia luokkia.

Sisällönanalyysia voidaan tekstin analysoinnin ja luokittelun jälkeen jatkaa kvantifioimalla, jota voidaan käyttää sisällönanalyysin apuna tuomassa erilaista näkökulmaa. Kvantifiointi kuuluu kuitenkin sisällön erittelyyn, jossa tekstin sisältöä kuvataan kvantitatiivisesti. Sisällönanalyysilla taas tarkoitetaan aina tutkimusaineiston sanallista kuvausta. Näiden liittäminen samaan tutkimukseen on metodien tasolla monimenetelmällinen lähestymistapa. (Tuomi & Sarajärvi 2018, 119, 135–138.) Kvantifiointia hyödynnettiin tarkasteltaessa, kuinka moni oppilas tuo vastauksissaan esille saman asian perustellessaan tekemäänsä valintaa esimerkiksi vähiten pidetyksi tai opettavaisimmaksi tehtäväksi. Kvantifioinnin avulla on mahdollista saada selkeyttä, vaikka sitä on kritisoitu siitä, että kvalitatiiviset aineistot ovat usein liian pieniä kvantifiointiin (Tuomi & Sarajärvi 2018, 137). Tässä tutkimuksessa oppilaista koostuvan aineiston koko oli riittävä myös määrälliseen tarkasteluun, jota toteutettiin kvantifioinnin lisäksi tilastollisilla menetelmillä tutkien esimerkiksi eri muuttujien välisiä mahdollisia riippuvuuksia.

Määrällistä aineistoa analysoitiin eri tavoin. Opettajien osalta kyselyn yhdeksää väittämää tarkasteltiin frekvenssijakauman avulla. Oppilaiden aineiston ollessa suurempi ja taustamuuttujien muodostamien ryhmien ollessa eri kokoisia tarkastelussa hyödynnettiin suhteellisia frekvenssejä. Oppilaiden kyselylomakkeessa oli myös kysymyksiä, joihin vastattiin valitsemalla tehtävän numero. Tällaisia olivat esimerkiksi ”Opin eniten tehtävästä numero…” ja ”Minulle vaikein oli tehtävä numero…”. Koska kyseessä on laatueroasteikollinen muuttuja, frekvenssien laskeminen on yksi tärkeimmistä kuvailevista tilastollisista menetelmistä (Nummenmaa 2009, 60). Näissä hyödynnettiin myös suhteellisia frekvenssejä vertailtavien ryhmien ollessa eri kokoisia. Oppilaiden aineiston analysointia varten muodostettiin lisäksi kaksi summamuuttujaa, jotka esitellään myöhemmin tässä luvussa.

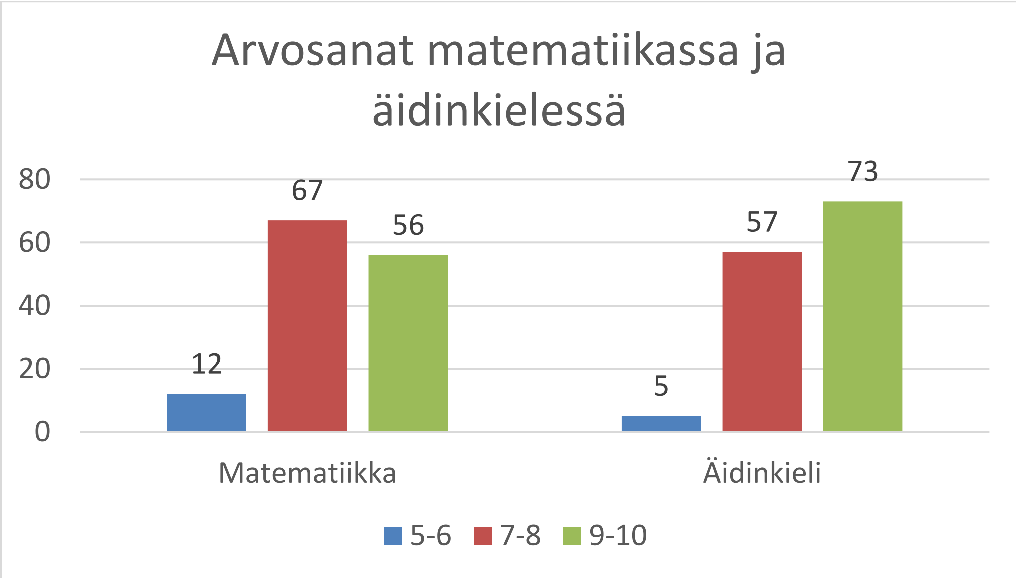
Oppilaiden määrällistä aineistoa tarkasteltiin myös tilastollisen merkitsevyyden avulla. Tarkastelu edellytti oikean tilastollisen testin valintaa. Tätä varten tutkittiin Kolmogorov-Smirnovin testillä, ovatko muuttujat normaalisti jakautuneita. Tässä tutkimuksessa mikään tutkittava summamuuttuja ei noudattanut normaalijakaumaa (liite 18). Näin ollen tutkimuksessa käytetyksi testeiksi valikoituivat jakaumasta riippumattomat testit (Nummenmaa, Holopainen & Pulkkinen 2017, 7). Mann-Whitneyn U-testiä käytettiin, kun ryhmittelevät muuttujat eli sukupuoli, kokemus omista matematiikan taidoista ja kokemus omista äidinkielen taidoista muodostivat kaksi vertailtavaa ryhmää (ks. Holopainen & Pulkkinen 2012, 197–198; Nummenmaa 2009, 261–263). Kun ryhmittelevä muuttuja opintomenestyksen kohdalla muodosti kolme ryhmää, tilastollisen merkitsevyyden mittaamiseen käytettiin Kruskal-Wallisin testiä (ks. Nummenmaa 2009, 266–267).

Oppilaiden osalta kyselyssä ilmeni myös puuttuvia tietoja. Puuttuvat tiedot voidaan huomioida poistamalla kaikki havaintoyksiköt, jotka ovat antaneet puuttuvia tietoja (Vilkka 2007, 108). Menettelyä kutsutaan pudottamiseksi, mutta tällaisessa menettelyssä tietoa katoaisi. Onkin mahdollista ja suositeltavaa käyttää parittaista pudotusta, jossa tilastoyksikkö huomioidaan sellaisissa analyyseissä, joihin tilastoyksikkö on antanut tarvittavan tiedon. Jos tarvittavaa tietoa ei ole, tilastoyksikköä ei huomioida kyseisessä analyysissä, mutta sitä ei kuitenkaan poisteta koko aineistosta. (Nummenmaa 2009, 158–159.) Kuten edellisessä luvussa kuvattiin, aineistoa karsittiin, jos oppilaalla ei ollut tehtyjä tehtäviä neljä tai enemmän täytetyn kyselylomakkeen ohella tai jos tehtyjä tehtäviä ei ollut vähintään kuusi ilman täytettyä kyselylomaketta. Lisäksi aineiston analysointivaiheessa käytettiin parittaista pudotusta eli oppilaat otettiin mukaan niihin analyyseihin, joissa käytettyihin kysymyksiin he olivat vastanneet.

8.2.1 Taustamuuttujat

Oppilaiden aineisto koostuu 135 oppilaasta. Taustamuuttujina oppilaiden osalta ovat vuosiluokka, sukupuoli, viimeisin arvosana niin matematiikassa kuin myös äidinkielessä sekä kokemus itsestä matematiikan ja äidinkielen osaajana. Sukupuoli valikoitui taustamuuttujaksi, sillä aikaisemmissa tutkimuksissa on havaittu eroja etenkin matematiikan asenteisiin liittyen sukupuolten välillä (Metsämuuronen 2013; Tuohilampi & Hannula 2013). Kielentämisessä, erityisesti luonnollisen kielen osalta, kielellinen osaaminen ja matematiikan osaaminen linkittyvät toisiinsa, minkä vuoksi on mielekästä tarkastella oppilaan saamia arvosanoja ja kokemuksia itsestä näissä oppiaineissa sukupuolen ohella taustamuuttujina. Myös tutkimuksissa on äidinkielen osalta havaittu yhteys matematiikan osaamiseen (Metsämuuronen 2013).

5. luokkalaisia tutkimuksessa mukana oli 49 ja 6. luokkalaisia 86. Vuosiluokkatietoa ei käytetä taustamuuttujana aineiston analysointivaiheessa, mutta se on aineistoa oleellisesti kuvaileva seikka. Oppilaista tyttöjä oli 84 ja poikia 51. Kuviossa 11 on esitetty oppilaiden jakautuminen viimeisimmän arvosanan mukaan sekä matematiikassa että äidinkielessä. Arvosanan osalta jaottelussa oli käytössä kolme ryhmää, joista ensimmäinen sisältää kaikki 9–10 arvosanan saaneet, toinen 7–8 arvosanan saaneet ja kolmas arvosanan 5–6 saaneet oppilaat.



KUVIO 11. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden matematiikassa ja äidinkielessä saamien arvosanojen lukumäärät ryhmiteltynä kolmeen ryhmään.

Tutkimukseen osallistuneista oppilaista puolet eli suurin osa on saanut viimeisimpänä arviona matematiikasta arvosanan seitsemän tai kahdeksan (ks. kuvio 11). Äidinkielen osalta löytyy eniten kiitettävää ja erinomaista osaamista. Molemmissa oppiaineissa kahden ensimmäisen ryhmän osalta jakautuminen on tasaisempaa, mutta kolmas ryhmä eli arvosanan viisi tai kuusi saaneet oppilaat, ovat selkeässä vähemmistössä.

Lisäksi taustamuuttujana käytettiin oppilaiden arviota siitä, miten he kokevat itsensä matematiikan ja äidinkielen osaajina. Kyselylomakkeessa piti arvioida väitettä ”Minä olen hyvä matematiikassa” asteikolla 1–4, joista kaksi ensimmäistä kuvasivat erimielisyyttä ja kaksi viimeisintä samanmielisyyttä. Kyselylomakkeen täytti 124 oppilasta, ja heistä 120 vastasi tähän väitteeseen. Heistä väitteen kanssa täysin samaa mieltä tai jokseenkin samaa mieltä oli 92 oppilasta, ja täysin eri mieltä tai jokseenkin eri mieltä oli 28 oppilasta. Äidinkielen osalta piti arvioida samalla 4-portaisella asteikolla väitettä ”Minä olen hyvä äidinkielessä”. Kyselylomakkeen täyttäneistä 124 oppilaasta tätä väittämää arvioi 121 oppilasta, joista väitteen kanssa jokseenkin samaa mieltä tai täysin samaa mieltä oli 94 oppilasta. Erimielisiä väitteen kanssa oli 27 oppilasta.

8.2.2 Summamuuttujat

Oppilaiden vastauksien tarkastelua varten luotiin kaksi summamuuttujaa, joissa molemmissa yhdistettiin kolme eri väitettä (liite 17). Summamuuttujat muodostettiin, sillä haluttiin tiivistää samaan muuttujaan usean samaa asiaa mittavaan muuttujan tiedot. Summamuuttujien osalta käytettiin keskiarvomuuttujaa, sillä näin muodostetun muuttujan mittayksikkö säilyi samana kuin alkuperäisten muuttujien. Lisäksi tällöin puuttuvat tiedot eivät muodostu ongelmallisiksi, sillä keskiarvo lasketaan kaikista niistä kysymyksistä, joihin tutkittava on vastannut. (Nummenmaa 2009, 161–162.)

Ensimmäinen summamuuttuja koski kuviokielen käytön koettua hyödyllisyyttä matematiikan kirjallisessa kielentämisessä. Tähän yhdistettiin väitteet *”Pidän piirtämisestä matematiikan tehtävien ratkaisemisessa”, ”Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä”* ja *”Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa”.* Toinen summamuuttuja liittyi luonnollisen kielen koettuun mielekkyyteen matematiikan kirjallisia tehtäviä ratkaistaessa. Tähän summamuuttujaan yhdistettiin väitteet *”Pidän kirjoittamisesta matematiikan tehtävien ratkaisemisessa”, ”Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä”* ja *”Omin sanoin selittäminen minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa”.*

Edellä esiteltyjen summamuuttujien avulla haluttiin yhdistää samaa asiaa mittaavien muuttujien dataa luotettavuuden parantamiseksi. Tällöin on välttämätöntä tarkastella, että luodut muuttujat mittaavat samaa ominaisuutta (Nummenmaa 2009, 162). Kuviokielen ja luonnollisen kielen mielekkyyttä mittaavat summamuuttujat voitiin perustellusti luoda, sillä niiden reliabiliteettia testattaessa arvot olivat riittävät (ensimmäisellä summamuuttujalla .86 ja toisella .85). Tällöin muuttujajoukot ovat sisäisesti yhtenäisiä.

9 TUTKIMUSTULOKSET

9.1 Miten oppilaat kokevat kirjallisen kielentämisen?

9.1.1 Sukupuolen vaikutus kokemuksiin kielentämisestä

Oppilaat vastasivat murtoluku-jakson jälkeen teetetyssä kyselyssä viiteentoista pääasiassa kirjallista kielentämistä koskevaan väittämään. Mitta-asteikko väittämissä oli 4-portainen, jossa 1=”täysin eri mieltä”, 2=”jokseenkin eri mieltä”, 3=”jokseenkin samaa mieltä” ja 4=”täysin samaa mieltä”. Koska aineistoon hyväksyttiin myös oppilaita, joilla oli vähintään kuusi tehtyä tehtävää, mutta kysely täyttämättä, lopullisen kyselylomakkeen väittämiin vastasi yhteensä 124 oppilasta. Kyselylomakkeen täyttäneistä oppilaista tyttöjä oli 78, ja poikia oli 46. Sukupuolta taustamuuttujana on kuvattu edellisessä luvussa 8. Taulukossa 2 on esitetty sukupuolen mukaan jaoteltuna prosenttiosuuksina, kuinka suuri osa oppilaista oli väitteiden kanssa täysin samaa mieltä tai jokseenkin samaa mieltä. Loppuosa vastanneista oppilaista oli täysin eri mieltä tai jokseenkin eri mieltä, sillä en osaa sanoa -vaihtoehtoa ei näissä väittämissä ollut.

TAULUKKO 2. Sukupuolen mukaan jaotellut prosenttiosuudet niistä oppilaista, jotka ovat olleet väitteen kanssa jokseenkin samaa mieltä tai täysin samaa mieltä. Suluissa on annettu ko. väitettä arvioineiden oppilaiden määrä, mikäli se poikkeaa kyselyyn vastanneiden kokonaismäärästä.

Väittämä	Tytöt (n=78)	Pojat (n=46)	Yhteensä (n=124)
V1 Pidän piirtämisestä matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	82% (n=77)	59%	73% (n=123)
V2 Pidän kirjoittamisesta matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	59% (n=76)	39%	52% (n=122)
V3 Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.	71% (n=75)	56% (n=45)	65% (n=120)
V4 Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	75% (n=76)	63%	71% (n=122)
V5 Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.	50%	31% (n=45)	43% (n=123)
V6 Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	60%	31% (n=45)	50% (n=123)
V7 Minä olen hyvä matematiikassa.	82% (n=76)	68% (n=44)	77% (n=120)
V8 Minä olen hyvä äidinkielessä.	83%	67% (n=43)	78% (n=121)
V9 Olen valmis käyttämään aikaa matematiikan tehtävien ratkaisuun.	81%	56% (n=43)	72% (n=121)
V10 Matematiikan tehtävän ratkaisua, jossa on käytetty apuna kuvioita tai sanoja, on helppo muidenkin kuin tehtävän tekijän ymmärtää.	81% (n=77)	61%	73% (n=123)
V11 Tutkimustehtävien kaltaiset tehtävät voisivat auttaa oppilasta, joka on aiemmin kokenut matematiikan hankalana.	76% (n=75)	58% (n=45)	69% (n=120)
V12 Tutkimustehtävät olivat minulle uudenlaisia tehtäviä.	76% (n=74)	73% (n=44)	75% (n=118)
V13 Tutkimustehtävät olivat minulle haastavampia kuin oppikirjasta tekemäni tehtävät.	65% (n=75)	57% (n=42)	62% (n=117)
V14 Voisin käyttää omin sanoin selittämistä apuna matematiikan tehtävien ratkaisemisessa myös jatkossa.	51% (n=75)	31% (n=45)	43% (n=120)
V15 Voisin käyttää piirroksia apuna matematiikan tehtävien ratkaisemisessa myös jatkossa.	71% (n=72)	49% (n=45)	62% (n=117)

Taulukosta 2 nähdään, että tytöt suhtautuvat poikia myötämielisemmin niihin väitteisiin, joissa kuviokieli ja omin sanoin selittäminen mainitaan positiivisena tekijänä matematiikan tehtävien ratkaisuissa (V1–V6). Kuitenkin näistä kahdesta kielestä kuviokielen käyttö on mielekkäämpi sekä tyttöjen että poikien mielestä. Tytöistä yli 70 prosenttia näkee sen auttavan tehtävänantojen ymmärtämisessä ja tehtävien ratkaisemisessa (V3–V4), ja neljä viidesosaa tytöistä mainitsee pitävänsä piirtämisestä matematiikan tehtävien ratkaisujen osana (V1). Pojilla prosentit eivät ole yhtä korkeat, mutta heilläkin piirtäminen koetaan useimmiten mielekkäämpänä verrattuna sanalliseen, omin sanoin selittämiseen. Pojista noin kolme viidesosaa pitää piirtämisestä matematiikan tehtäviä ratkaistaessa, kun luonnollisen kielen kohdalla vastaava osuus on kaksi viidesosaa.

Painottuminen kuviokielen puolelle näkyy myös väitteissä V14–V15, joissa tarkoituksena oli testata, olisivatko oppilaat valmiita jatkossakin hyödyntämään kielentämistä matematiikan tehtävien ratkaisuissa. Luonnollista kieltä on tytöistä valmis hyödyntämään puolet ja pojista noin kolmannes. Kuviokielen kohdalla myönteisyys nousee, ja pojistakin jo puolet ajattelevat voivansa jatkossakin käyttää piirroksia apuna tyttöjen kohdalla osuuden ollessa jälleen suurempi ollen 70 prosenttia. Lisäksi pojista noin kolme viidesosaa oli väitteen V11 kanssa ainakin jokseenkin samaa mieltä siitä, että tutkimustehtävien kaltaisista tehtävistä voisi olla apua oppilaalle, jolla on haasteita matematiikassa. Tytöistä kolme neljäsosaa oli myötämielisiä tämän väitteen kanssa. Tytöt ovat poikia valmiimpia käyttämään aikaa matematiikan tehtävien ratkaisemiseen, mitä vaaditaan kielentämisen malleja hyödynnettäessä. Pojista vain vähän yli puolet oli samaa mieltä tämän väitteen V9 kanssa.

Sukupuolen vaikutusta kokemuksiin luonnollisen kielen sekä kuviokielen käytöstä tarkasteltiin myös aiemmin luvussa 8 esiteltyjen murtoluku-jakson lopussa täytetyn kyselylomakkeesta luotujen summamuuttujien avulla. Kuviokielen mielekkyyttä olivat mittaamassa taulukossa 2 esitetyistä väittämistä väittämät V1, V3 ja V4. Vastaavasti luonnollisen kielen mielekkyyttä mitattiin yhdistämällä väittämät V2, V5 sekä V6 yhdeksi summamuuttujaksi. Tilastollisesti merkitsevästi ($p=.001$) voidaan todeta, että tytöt suhtautuivat myönteisemmin luonnollisen kielen käyttöön matematiikan tehtävien ratkaisuissa. Kuviokielen osalta ero ei ollut yhtä selvä ($p=.054$), joskin lähellä merkitsevyyttä. Tilastollisten testien taulukointi ja arvot ovat nähtävissä liitteessä 16.

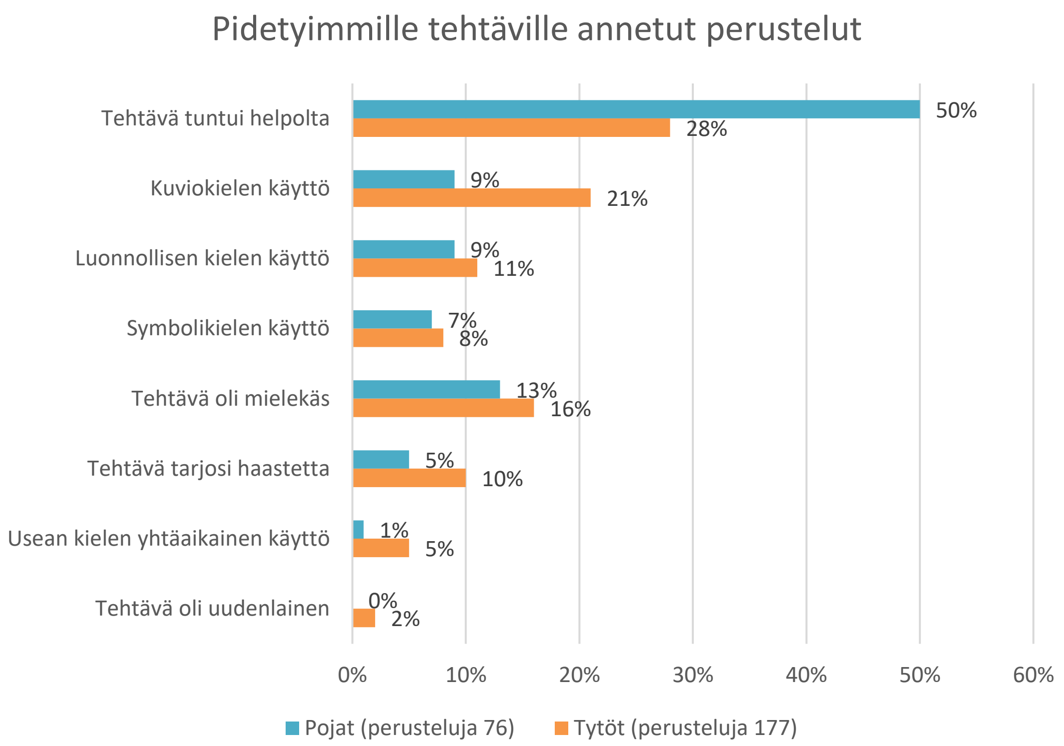
Samanlaisia tuloksia havaitaan tarkastelemalla myös oppilaiden murtolukutehtävien yhteydessä arvioimia väittämiä (liite 19). Näissäkin käytössä oli varsinaisen kyselylomakkeen tavoin neliportainen asteikko. Tehtävän 1 ja 4 väittämiä tarkastellessa nähdään, että tytöt kokivat poikia useammin luonnollisen kielen käytön helppona, ja he myös pitivät siitä poikia enemmän. Tehtävän 2, 3, 5 sekä 7 väittämiä tarkastellessa havaitaan, että tytöt kokivat poikia enemmän kuviokielen hyödyttävän heidän ratkaisuprosessiaan. He myös kokivat osaavansa operoida sillä poikia paremmin. Tehtävässä 6 oli käytössä kirjallisen kielentämisen kaikki kolme kieltä rinnakkain. Mikään kolmesta kielestä ei erottunut muita enemmän tehtävän ymmärtämistä helpottavana seikkana. Tehtävien yhteydessä olleita väitteitä tarkastelemalla on havaittavissa, että tytöt suhtautuivat luonnollisen kielen sekä kuviokielen käyttöön poikia positiivisemmin.

Oppilaita pyydettiin kyselylomakkeessa viidentoista väittämän lisäksi valitsemaan omasta mielestään parhaiten sopiva tehtävä kuuteen eri kohtaan. Ensimmäiseksi pyydettiin valitsemaan tehtävä, josta he pitivät eniten ja tehtävä, josta he pitivät toiseksi eniten. Lisäksi pyydettiin valitsemaan tehtävä, josta piti vähiten, tehtävä, josta he kokivat oppineensa eniten ja vielä tutkimustehtävien helpoin sekä vaikein tehtävä. Kahden ensimmäisen osalta maininnat laskettiin yhteen, ja tulokset ovat nähtävillä taulukosta 3. Mainintoja kertyi yhteensä 225, joista 149 oli tyttöjen antamia ja 76 poikien laittamia. Tyttöjen suosikkitehtäväksi muodostui kuviokieltä käyttävä tehtävä 7 eli sarjakuvatehtävä. Pojilla mainintojen ero ei ollut yhtä selkeä, mutta eniten mainintoja sai luonnollista kieltä hyödyntävä tehtävä 1 eli kerro mitä tiedät -tehtävä.

TAULUKKO 3. Tutkimustehtävien eniten pidetyn ja toiseksi eniten pidetyn tehtävän saamat maininnat prosentteina eroteltuina sukupuolittain. Alimmalla rivillä on prosenttiosuus kaikista maininnoista.

		Pidetyimmät murtolukutehtävät						
		Tehtävä 1	**Tehtävä 2**	**Tehtävä 3**	**Tehtävä 4**	**Tehtävä 5**	**Tehtävä 6**	**Tehtävä 7**
Tytöt	Pidetyin tehtävä (n=75)	12%	15%	7%	16%	13%	4%	33%
	2. Pidetyin tehtävä (n=74)	12%	15%	18%	14%	9%	11%	22%
Pojat	Pidetyin tehtävä (n=35)	31%	14%	9%	20%	3%	3%	20%
	2. Pidetyin tehtävä (n=41)	27%	20%	2%	12%	20%	10%	10%
Osuus kaikista maininnoista (225)		18%	16%	10%	15%	12%	7%	23%

Oppilailta pyydettiin tehtävien valitsemisen lisäksi perusteluja sille, miksi he valitsivat suosikikseen juuri tietyn tehtävän. Nämä perustelut ovat luokiteltuina sukupuolittain kuviossa 12. Tehtävän koettu helppous oli eniten mainittu perustelu sekä tytöillä että pojilla. Helppous liittyi oppilaiden perusteluissa itse tehtävään, tehtävänantoon tai siihen, että vaadittu matemaattinen sisältö oli oppilaan oman kokemuksen mukaan hallinnassa. Tytöillä seuraavaksi eniten nostettiin esiin kuviokielen käyttö suosikkitehtävään liittyvänä positiivisena asiana. Luonnollinen kieli ja symbolikieli jäivät maininnoissa kuviokielestä jälkeen. Pojilla mikään matematiikan kolmesta kielestä ei erityisesti erottunut perusteluissa. Sekä tytöillä että pojilla tehtävän koettu mielekkyys nousi myös tärkeänä tekijänä esille. Mielekkyys piti sisällään kommentit siitä, että ”tehtävää oli mukava tehdä” tai ” aihe oli ajankohtainen”.



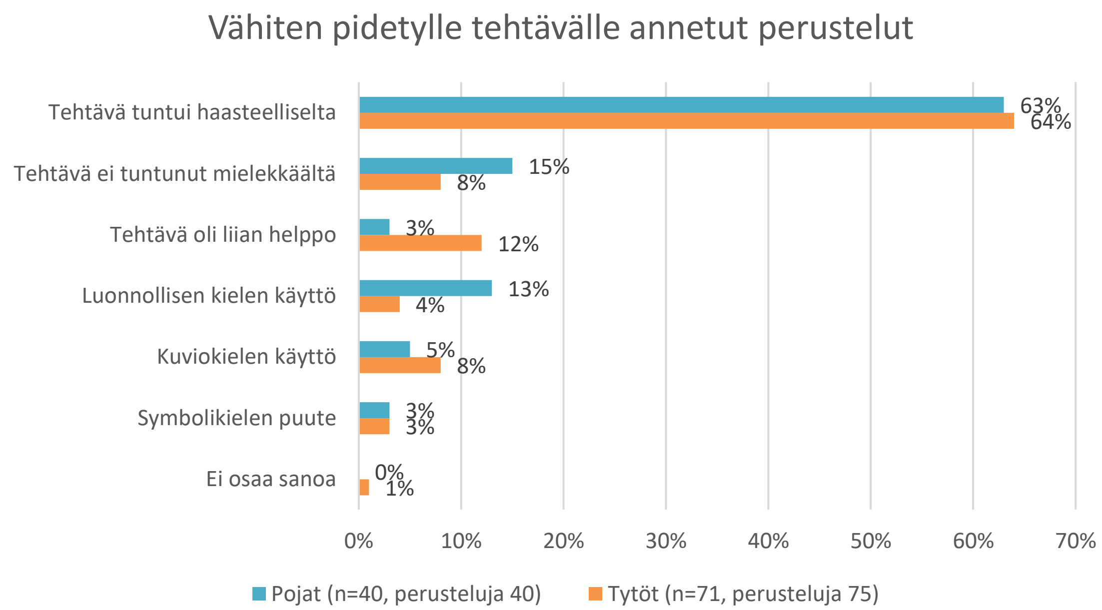
KUVIO 12. ”Mistä tehtävästä pidit eniten” ja ”Mistä tehtävästä pidit toiseksi eniten” -kysymysten perustelut esiteltyinä sukupuolittain. Prosentteina on esitetty, kuinka moni annetuista perusteluista koski ko. vastausluokkaa. Samasta perustelusta on voitu poimia maininta useampaan kuin yhteen luokkaan.

Oppilaita pyydettiin suosikkitehtävien lisäksi valitsemaan tehtävä, josta he pitivät vähiten. Nämä tulokset on esitetty taulukossa 4. Tytöt pitivät vähiten tehtävästä 6 (täydennystehtävä), jossa piti samassa tehtävässä käyttää niin symbolikieltä, kuviokieltä kuin luonnollistakin kieltä. Tehtävä sai heiltä 25 mainintaa. Poikien kohdalla jako ei ole yhtä selkeä, vaan maininnat jakautuvat tasaisemmin eri tehtävien välille niin, että tytöiltä selvästi eniten mainintoja saanut tehtävä ei poikien kohdalla selkeästi erotu muista.

TAULUKKO 4. Vähiten pidettyjen murtolukutehtävien saamat maininnat prosentteina eroteltuina sukupuolittain. Alimmalla rivillä on prosenttiosuus kaikista maininnoista.

Vähiten pidetyimmät murtolukutehtävät							
	Tehtävä 1	**Tehtävä 2**	**Tehtävä 3**	**Tehtävä 4**	**Tehtävä 5**	**Tehtävä 6**	**Tehtävä 7**
Tytöt (n=73)	3%	14%	12%	10%	14%	34%	14%
Pojat (n=42)	10%	19%	17%	17%	12%	12%	12%
Osuus kaikista (n=114)	5%	16%	14%	12%	13%	26%	13%

Perustellessaan vähiten pidettyä tehtävää oppilaat toivat esille muutamissa perusteluissaan niin luonnollisen kielen käytön, kuviokielen käytön sekä symbolikielen vähäisyyden tehtävää kohti koetuissa negatiivisissa tunteissa. Suurin osa maininnoista niin tytöillä (n=71) ja pojilla (n=40), koski kuitenkin tehtävässä koettuja haasteita, joita ei useimmiten avattu sen enempää. Nämä maininnat pitivät sisällään lyhyet kommentit siitä, että ”tehtävä oli vaikea” tai ”tehtävää oli vaikea ymmärtää”. Perusteluissaan oppilaat toivat myös esille sen, että vähiten miellyttävä tehtävä saattoi olla myös vähiten motivoiva. Vähiten pidetylle tehtävälle annettuja perusteluita voi tarkastella kuviosta 13.



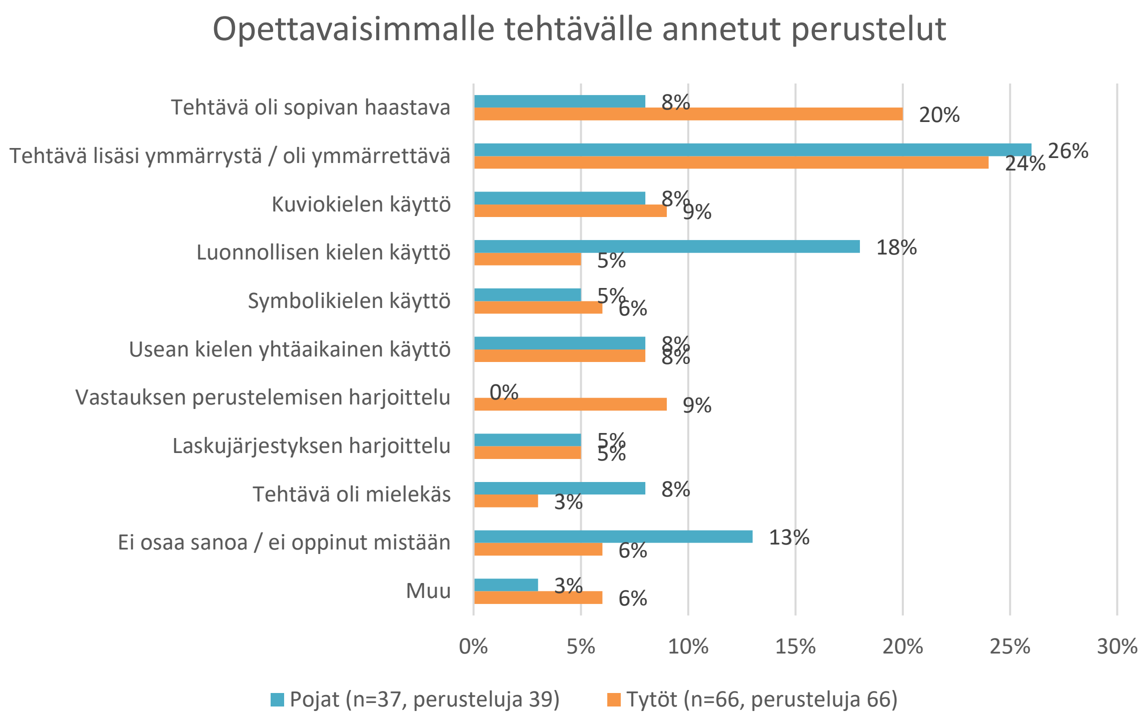
KUVIO 13. ”Mistä tehtävästä pidät vähiten” -kysymykseen annetut perustelut sukupuolittain jaoteltuina. Prosentteina on esitetty, kuinka moni annetuista perusteluista koski ko. vastausluokkaa. Samasta perustelusta on voitu poimia maininta useampaan kuin yhteen luokkaan.

Opettavaisinta tehtävää kysyttäessä oli paljon puuttuvia vastauksia. Tähän vastanneet tytöt (n=66) kokivat oppineensa eniten tehtävistä 4 (ratkaisun järjestäminen ja argumentointi) ja 5 (ratkaisusta tehtävä), jotka molemmat saivat heiltä kaksitoista mainintaa. Tässä kysymyksessä pojat (n=37) olivat samoilla linjoilla, sillä tehtävä 4 sai heiltäkin eniten mainintoja. Kaiken kaikkiaan siis tehtävä 4 näyttäytyi oppilaiden mielestä opettavaisimpana tehtävänä. Näitä tuloksia voi tarkastella alla olevasta taulukosta 5.

TAULUKKO 5. Opettavaisimpien tutkimustehtävien saamat maininnat prosentteina eroteltuina sukupuolittain. Alimmalla rivillä on prosenttiosuus kaikista maininnoista.

Opettavaisimmat murtolukutehtävät							
	Tehtävä 1	**Tehtävä 2**	**Tehtävä 3**	**Tehtävä 4**	**Tehtävä 5**	**Tehtävä 6**	**Tehtävä 7**
Tytöt (n=66)	14%	14%	17%	18%	18%	14%	6%
Pojat (n=37)	16%	11%	8%	30%	8%	8%	19%
Osuus kaikista (n=103)	15%	13%	14%	22%	15%	12%	11%

Opettavaisimman tehtävän valinnan perusteluja voi tarkastella kuviosta 14. Sekä tytöillä (n=66) että pojilla (n=37) korostui itse tehtävän ymmärrettävyys tai tehtävän avulla lisääntynyt ymmärrys. Tämä piti sisällään uuden asian harjoittelua, mieleen palauttamista ja siten uudelleen oppimista tai sitä, että tehtävä oli ymmärrettävä joko sisällöltään tai tehtävänannoltaan. Tytöt perustelivat opittavuutta myös tehtävältä vaaditulla sopivalla haastavuudella. Molemmat toivat esille perusteluissaan myös matematiikan kolme eri kieltä. Pojilla näistä selkeästi korostui luonnollisen kielen käyttö oppimista tukevana seikkana. Oppilaiden perusteluista kävi ilmi usean kielen yhtäaikainen käyttö oppimista parantavana asiana, ja tytöt toivat esille myös perustelemisen taitojen harjoittelun. Matematiikan proseduureihin liittyen esille nousi laskujärjestyksen harjoitteleminen, joka olikin opettavaisimmaksi tehtäväksi valikoituneen tehtävän 4 keskeinen sisältö.



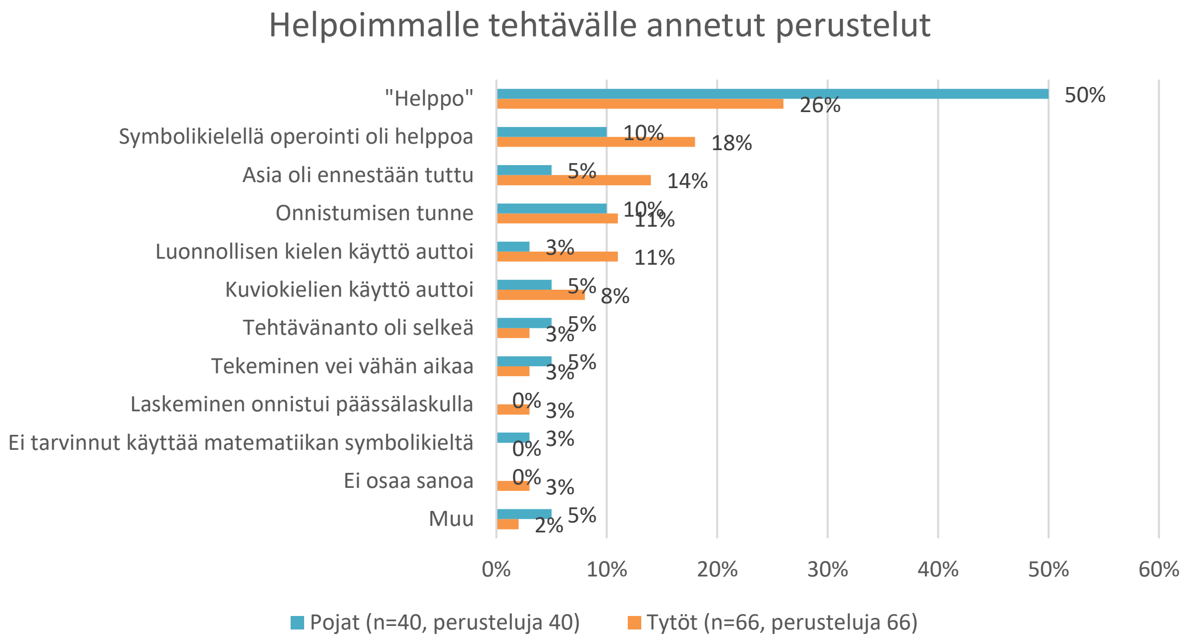
KUVIO 14. Opettavaisimmalle tehtävälle annetut perustelut sukupuolittain jaoteltuina. Prosentteina on esitetty, kuinka moni annetuista perusteluista koski ko. vastausluokkaa. Samasta perustelusta on voitu poimia maininta useampaan kuin yhteen luokkaan.

Helpoin ja vaikein tehtävä erottuivat tytöillä selkeästi. Helpoimpana tehtävänä tytöillä (n=73) esiin nousi tehtävä 7 (ratkaisu sarjakuvana). Seuraavana oli tehtävä 1, joka jäi 15 prosenttiyksikön päähän. Näin ollen tyttöjen eniten pidetty tehtävä oli myös heidän mielestään helpoin. Pojilla ei tässäkään mikään tehtävä noussut esiin yhtä erottuvasti kuin tytöillä, mutta valinnat noudattivat samanlaista järjestystä tyttöjen kanssa. Helpoimmaksi tehtäväksi pojat (n=42) valitsivat tehtävän 7, ja toisena oli tehtävä 1, mutta näiden tehtävien välinen ero oli vain viisi prosenttiyksikköä. Oppilaiden valinnat helpoimmaksi murtolukutehtäväksi on esitetty taulukossa 6.

TAULUKKO 6. Helpoimpien murtolukutehtävien saamat maininnat prosentteina eroteltuina sukupuolittain. Alimmalla rivillä on prosenttiosuus kaikista maininnoista.

	Helpoimmat murtolukutehtävät						
	Tehtävä 1	**Tehtävä 2**	**Tehtävä 3**	**Tehtävä 4**	**Tehtävä 5**	**Tehtävä 6**	**Tehtävä 7**
Tytöt (n=73)	22%	11%	5%	18%	5%	1%	37%
Pojat (n=42)	26%	7%	0%	14%	14%	7%	31%
Osuus kaikista (n=115)	24%	10%	4%	17%	9%	4%	35%

Helpoimman tehtävän perusteluita tarkasteltaessa yleisin perustelu, jota tyttöjen (n=66) perusteluista neljäsosa käsitteli ja poikien (n=40) perusteluista puolet, oli, että ”tehtävä oli helppo”. Tämä erotettiin omaksi vastausluokakseen esiintymien runsauden vuoksi. Tällaisissa kommenteissa perusteluiden antama informaatio jäi niukaksi, sillä näissä tapauksissa perustelua ei avattu tuota enempää. Tytöillä seuraavaksi yleisin perustelu oli symbolikielen käyttäminen, jonka mainitsi viidesosa. Luonnollisen ja kuviokielen nosti esille noin kymmenesosa tytöistä. Pojistakin kymmenesosa oli sitä mieltä, että matematiikan kielistä tärkein kieli lisäämässä tehtävän koettua helppoutta oli symbolikieli. Luonnollinen kieli ja kuviokieli eivät korostuneet yhtä paljon kuin symbolikieli. Näitä perusteluiden vastausluokkia ja niiden saamia esiintymiä voi tarkastella alla olevasta kuviosta 15.



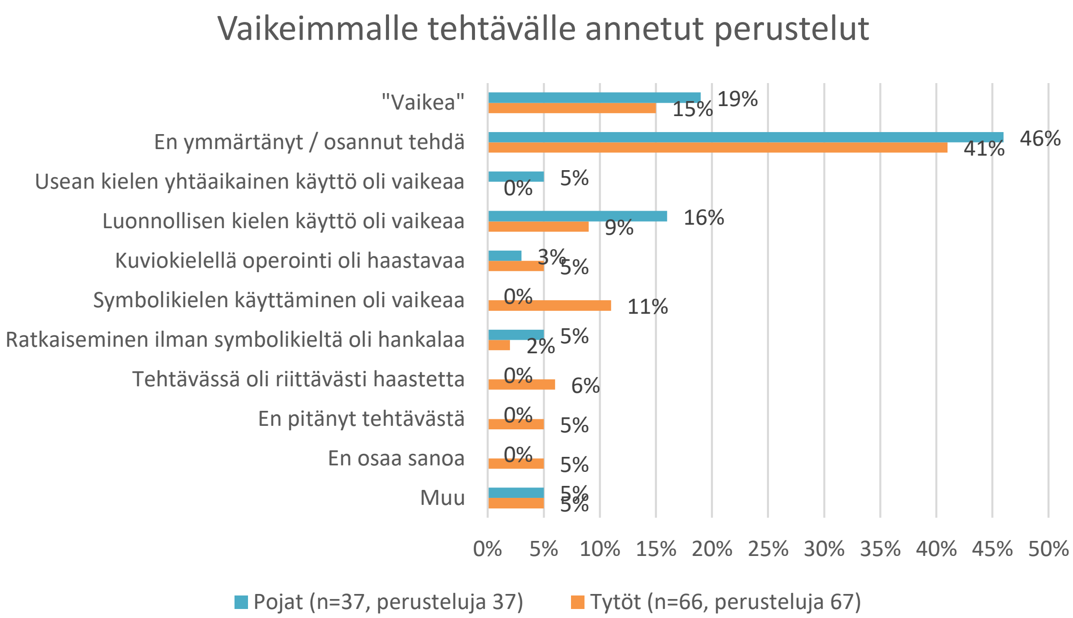
KUVIO 15. Helpoimmalle tehtävälle annetut perustelut sukupuolittain jaoteltuina. Prosentteina on esitetty, kuinka moni annetuista perusteluista koski ko. vastausluokkaa. Samasta perustelusta on voitu poimia maininta useampaan kuin yhteen luokkaan.

Vaikeimpien murtolukutehtävien saamat maininnat on esitelty taulukossa 7. Vaikeimmaksi tehtäväksi tytöt (n=70) kokivat tehtävän 6 eli ratkaisun täydentämistehtävän. Vähiten pidetty tehtävä tuntui tytöistä siis myös vaikeimmalta. Näin ollen tämä noudatti samaa linjaa pidetyimmän ja helpoimman tehtävän valinnan kanssa. Vaikeimmasta tehtävästä pojat (n=42) olivat tyttöjen kanssa jälleen samaa mieltä, ja tehtävä 6 sai heiltä kolmasosan maininnoista. Kaiken kaikkiaan siis vaikeimpana tehtävänä erottui tehtävä 6, jossa ratkaisu piti esittää rinnakkain kaikilla kolmella matematiikan eri kielellä.

TAULUKKO 7. Vaikeimpien murtolukutehtävien saamat maininnat prosentteina eroteltuina sukupuolittain. Alimmalla rivillä on prosenttiosuus kaikista maininnoista.

Vaikeimmat murtolukutehtävät							
	Tehtävä 1	**Tehtävä 2**	**Tehtävä 3**	**Tehtävä 4**	**Tehtävä 5**	**Tehtävä 6**	**Tehtävä 7**
Tytöt (n=70)	1%	13%	11%	11%	16%	41%	6%
Pojat (n=42)	5%	17%	12%	21%	10%	31%	5%
Yhteensä (n=112)	3%	14%	12%	15%	13%	38%	5%

Vaikeinta tehtävää perusteltaessa ”Vaikea” -perustelu otettiin edellisen tavoin omaksi vastausluokakseen, joskaan se ei korostunut oppilaiden vastauksissa yhtä paljon kuin vastaavasti ”Helppo” -maininta helpompaa tehtävää perusteltaessa. Suurin osa perusteluista, niin tytöillä (n=66) kuin pojilla (n=37), liittyi siihen, että oppilas ei ymmärtänyt tehtävää tai osannut tehdä sitä. Kymmenesosa tytöistä toi esille perusteluissaan symbolikielen käyttöön liittyviä vaikeuksia, kun taas pojista yksikään ei nostanut tätä esille. Pojat sen sijaan toivat tyttöjä useammin perusteluissaan esille luonnollisen kielen käyttämisen haasteet tehtävää vaikeuttavana seikkana. Haasteet ratkaista tehtävä ilman symbolikielen käyttöä sekä kuviokielellä operoinnin vaikeudet tuotiin myös esille, mutta ne saivat selkeästi vähemmän mainintoja. Kuviossa 16 on esitetty vaikeaksi koetulle tehtävälle annetut perustelut sukupuolittain.



KUVIO 16. Vaikeimmalle tehtävälle annetut perustelut sukupuolittain jaoteltuina. Prosentteina on esitetty, kuinka moni annetuista perusteluista koski ko. vastausluokkaa. Samasta perustelusta on voitu poimia maininta useampaan kuin yhteen luokkaan

9.1.2 Opintomenestyksen vaikutus kokemuksiin kielentämisestä

Kyselylomakkeeseen vastanneista 124 oppilaasta 11 kuului matematiikassa arvosanan 5–6 saaneisiin, 61 oppilasta olivat saaneet arvosanan 7–8, ja loput 52 oppilasta olivat saaneet arvosanan 9–10. Arvosana-taustamuuttujaa on esitelty tarkemmin luvussa 8. Kolmen matematiikan arvosanaryhmän eroja oppilaan kielentämiseen suhtautumisessa on tarkasteltu taulukossa 8.

TAULUKKO 8. Matematiikan arvosanan mukaan eroteltuina prosenttiosuudet niistä oppilaista, jotka ovat olleet väitteen kanssa jokseenkin samaa mieltä tai täysin samaa mieltä. Suluissa on annettu ko. väitettä arvioineiden oppilaiden määrä, mikäli se poikkeaa kyselyyn vastanneiden kokonaismäärästä.

Väittämä	5–6 (n=11)	7–8 (n=61)	9–10 (n=52)
V1 Pidän piirtämisestä matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	64 %	74 %	75% (n=51)
V2 Pidän kirjoittamisesta matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	46 %	41 %	66% (n=50)
V3 Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.	73 %	64% (n=59)	64% (n=50)
V4 Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	82 %	67 %	72% (n=50)
V5 Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.	50% (n=10)	38 %	48 %
V6 Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	55 %	47 %	52 %
V7 Minä olen hyvä matematiikassa.	40% (n=10)	64% (n=58)	98 %
V8 Minä olen hyvä äidinkielessä.	64 %	70 %	90% (n=50)
V9 Olen valmis käyttämään aikaa matematiikan tehtävien ratkaisuun.	70% (n=10)	70% (n=59)	75 %
V10 Matematiikan tehtävän ratkaisua, jossa on käytetty apuna kuvioita tai sanoja, on helppo muidenkin kuin tehtävän tekijän ymmärtää.	82 %	70% (n=56)	75% (n=49)
V11 Tutkimustehtävien kaltaiset tehtävät voisivat auttaa oppilasta, joka on aiemmin kokenut matematiikan hankalana.	55 %	70% (n=56)	71% (n=49)
V12 Tutkimustehtävät olivat minulle uudenlaisia tehtäviä.	90% (n=10)	76% (n=59)	70% (n=49)
V13 Tutkimustehtävät olivat minulle haastavampia kuin oppikirjasta tekemäni tehtävät.	73 %	66% (n=56)	55% (n=50)
V14 Voisin käyttää omin sanoin selittämistä apuna matematiikan tehtävien ratkaisemisessa myös jatkossa.	50% (n=10)	46 %	39% (n=49)
V15 Voisin käyttää piirroksia apuna matematiikan tehtävien ratkaisemisessa myös jatkossa.	70% (n=10)	67 %	55% (n=47)

Arvosanaryhmien mukaankin tarkastellessa kuviokieli korostuu apuvälineenä matematiikan tehtäviä ratkottaessa luonnollista kieltä useammin positiivisessa merkityksessä, eikä mikään kolmesta ryhmästä koe omin sanoin selittämisen auttavan tehtävänratkaisemisessa kuviokieltä enemmän.

Mitä alempaan arvosanaryhmään oppilas kuului, sitä useammin hän koki tutkimustehtävät uudenlaisina sekä toisaalta myös haastavampina kuin oppikirjan tehtävät (V12–V13). Alimmasta arvosanaryhmästä vain puolet on sitä mieltä, että tutkimustehtävien kaltaisista tehtävistä voisi olla apua matematiikassa haasteita kokeneille oppilaille (V11). Kuitenkin he ovat muiden ryhmien edustajia halukkaampia hyödyntämään kuviokieltä ja luonnollista kieltä myös jatkossa (V14–V15), ja kokevat sellaisen ratkaisun, jota on esitetty eri tavoin eri kielien avulla, olevan helposti ymmärrettävissä (V10).

Tarkasteltaessa matematiikan ja äidinkielen opintomenestystä taustamuuttujana summamuuttujissa ei löydetty tilastollista merkitsevyyttä kuviokielen tai luonnollisen kielen käytön mielekkyyteen liittyen. Tilastollisten testien taulukointi on nähtävissä liitteestä 17.

9.1.3 Koettujen omien taitojen aiheuttamat erot kokemukseen kielentämisestä

Oppilaiden kokemusta omista matematiikan taidoista tarkasteltiin suhteessa kokemuksiin luonnollisen kielen ja kuviokielen käytöstä matematiikan tehtävien ratkaisemisessa aiemmin esiteltyjen summamuuttujien avulla. Oppilaat, jotka arvioivat olevansa hyviä matematiikassa, kokivat useammin luonnollisen kielen käytön positiivisena tekijänä matematiikan tehtäviä ratkaistaessa ($p=.013$) verrattaessa niihin oppilaisiin, jotka eivät kokeneet olevansa hyviä matematiikassa. Kuviokielen osalta vastaavaa merkitsevyyttä ei saatu.

Kokemuksen itsestä matematiikan osaajana lisäksi tarkasteltiin kokemusta omista äidinkielen taidoista suhteessa kokemuksiin luonnollisen kielen ja kuviokielen käytöstä samojen summamuuttujien avulla. Äidinkielen oppiaineessa itsensä hyvänä kokeneet oppilaat kokivat kuviokielen käytön hyödyllisempänä apuvälineenä matematiikan kirjallisia tehtäviä ratkaistaessa ($p=.002$) verrattaessa oppilaisiin, jotka eivät kokeneet omaavansa yhtä hyviä äidinkielen taitoja. Luonnollisen kielen osalta tilastollista merkitsevyyttä ei näiden kahden ryhmän välillä ollut. Tilastollisten testien taulukointi, sekä matematiikan että äidinkielen osaamiskokemuksien osalta, on esitetty liitteessä 17.

9.2 Miten opettajat kokevat kielentämistehtävät opetuksensa osana?

9.2.1 Opettajien kokemuksia tutkimustehtävistä

Tutkimukseen osallistui kahdeksan opettajaa, joista yksi oli opettajaopiskelija. He arvioivat yhdeksää tutkimustehtäviä koskevaa väittämää 5-portaisella Likert-asteikolla, jossa 1=”täysin eri mieltä”, 2=”jokseenkin eri mieltä”, 3=”ei samaa eikä eri mieltä”, 4=”jokseenkin samaa mieltä” ja

5=”täysin samaa mieltä”. Nämä väittämät ja niiden vastauksien frekvenssit ovat nähtävissä taulukosta 9. Taulukkoa tarkastelemalla havaitaan, että tutkimustehtävien käyttöönotto koettiin helpoksi, eikä niiden koettu aiheuttaneen suurempia haasteita opetukselle (V1, V4). Lisäksi tutkimuksessa mukana olleet opettajat ovat valmiita antamaan oppilaille mahdollisuuden perustella kokeessa vastaustaan myös muilla tavoin kuin pelkällä symbolikielellä, ja vastaavanlaisten kielentämistehtävien käyttö jatkossa oman opetuksen osana nähtiin mahdollisena ja tarpeellisena (V6, V8–V9). Vastaukset jakautuivat eniten väitteiden V2, V3 ja V7 kohdalla. Tutkimustehtävien rooliin suhteessa muuhun oppimateriaaliin eivät kaikki opettajat olleet tyytyväisiä (V3).

TAULUKKO 9. Opettajien (n=8) kyselyn sisältämien väittämien saamat frekvenssit Likert-asteikolla, jossa 1=”täysin eri mieltä”, 2=”jokseenkin eri mieltä”, 3=”ei samaa eikä eri mieltä”, 4=”jokseenkin samaa mieltä” ja 5=”täysin samaa mieltä”.

Väittämä	1	2	3	4	5	Yht.
V1 Tutkimustehtävien käyttöönotto oli minulle helppoa.	0	0	0	4	4	8
V2 Tutkimustehtävät tukivat opetustani murtoluku-jaksolla.	0	1	1	4	2	8
V3 Tutkimustehtävät tukivat käytössä olevaa muuta oppimateriaalia.	0	2	1	4	1	8
V4 Tutkimustehtävien käyttö aiheutti haasteita opetukselleni murtoluku-jakson aikana.	0	5	2	0	0	8
V5 Tutkimustehtävistä oli helppo seurata oppilaan ratkaisun kulkua.	0	1	3	4	0	8
V6 Voisin antaa oppilaalle kokeessa mahdollisuuden perustella vastaustaan myös kuvin tai omin sanoin selittäen.	0	0	0	5	3	8
V7 Tutkimustehtävien kaltaisista tehtävistä ei ole hyötyä oppilaan arvioinnissa.	3	2	2	1	0	8
V8 Tutkimustehtävien kaltaisten tehtävien käyttö matematiikan opetuksessa on tarpeetonta.	5	3	0	0	0	8
V9 Voisin jatkossakin käyttää vastaavanlaisia tehtäviä opetukseni osana.	0	0	0	4	4	8

Väittämien lisäksi opettajia pyydettiin mainitsemaan tehtävä, joka tuki eniten oppilaan oppimista. Tässä useimmiten esiin nostettiin tehtävä 1, sillä siinä esiintyneiden käsitteiden selittäminen ja siten ymmärtäminen koettiin olevan murtolukujen opiskelun ydinasia. Näissä perusteluissa esiin nousi luonnollinen kieli ja sen avulla selittämisen tärkeys, mutta myös kuviokieli, kuten alla olevasta sitaatista on havaittavissa. Siteerattu opettaja on valinnut oppilaan oppimista parhaiten tukeneeksi tehtäväksi tehtävän 7, jossa ratkaisu piti esittää sarjakuvana.

> *”Piirtämisellä asia aukenee helpommin ja kiinnostaa kaikkia oppilaita. Ikään kuin matematiikka hiukan unohtuisi, kun saavat piirtää.”* (O8)

Opettavaisimman tehtävän lisäksi kysyttiin tehtävää, jossa oppilaat tarvitsivat vähiten apua, ja tehtävää, jossa oppilaat tarvitsivat eniten apua. Näiden osalta vastaukset jakautuivat eri tehtäville niin, että tehtävä, joka koettiin toisessa luokassa oppilaille helpoimpana, aiheuttikin toisessa luokassa enemmän avun tarvetta. Tehtävissä 5 ja 7 koettiin vähiten avun tarvetta, mutta tehtävä 5 mainittiin myös tehtävänä, jossa tarvittiin eniten apua. Näitä opettajien antamia mainintoja eri tehtäville on kuvattu taulukossa 10.

TAULUKKO 10. Opettajien (n=8) antamat maininnat eri tehtäville kysyttäessä opettavaisinta tehtävää, tehtävää, jossa oppilaat tarvitsivat apua vähiten ja tehtävää, jossa apua tarvittiin eniten. ”EOS”-sarake tarkoittaa, ettei opettaja kysyttäessä nimennyt tiettyä tehtävää.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	EOS	Yht.
Tehtävä, joka tuki parhaiten oppilaan oppimista	3	2	0	0	0	1	1	1	8
Tehtävä, jossa oppilaat tarvitsivat vähiten apua	1	0	0	1	2	0	2	2	8
Tehtävä, jossa oppilaat tarvitsivat eniten apua	0	1	1	0	2	1	1	2	8

Näiden valintaa perusteltaessa yksi opettaja oli hyödyntänyt tehtäviä pääasiassa kotitehtävinä, minkä vuoksi hän ei osannut nimetä tehtäviä, joissa oppilaat tarvitsivat eniten sekä vähiten apua. Toinen opettaja oli ottanut linjan, jonka mukaan hän ei auttanut oppilaita tehtävien teossa ja siitä syystä ei osannut nimetä helpointa ja vaikeinta tehtävää. Tehtävä 7 oli osoittautunut osalle niin helpoksi, että tehtävän ratkaiseminen onnistui ilman kuvan piirtämistä. Tehtävä 4 nähtiin helpoimpana sen vuoksi, että se oli murtolukutehtävistä lähimpänä oppikirjojen mekaanista laskujärjestyksen harjoittelua. Tehtävän 5 valintaa perusteltiin esimerkiksi sillä, että oppilailla oli matala kynnys ratkaista tehtävä, sillä he eivät pelänneet väärää vastausta. Alla oleva sitaatti on opettajan, jonka mielestä tehtävässä 5 oppilaat tarvitsivat vähiten apua.

> *”Oppilaista oli mukavaa tehdä itse tehtäviä. Tässä tehtävässä eivät pelänneet väärää vastausta.”* (O3)

Vaikeimman tehtävän eli sellaisen, jossa oppilaiden koettiin tarvinneen eniten apua, perusteluissa ilmeni eri tehtävien kohdalla ilman symbolikieltä vaadittujen ratkaisujen haasteet. Tämän toi esiin kolme opettajaa, mikä on puolet kaikista niistä opettajista, jotka osasivat nimetä jonkun tehtävän muita tehtäviä haastavampana.

Tehtävää, jossa olisi kehitettävää, kysyttäessä vain yksi opettajista antoi tiettyä tehtävää koskevan suoran kehittämisehdotuksen koskien tutkimustehtävän 2 käsittelemää supistamista ja laventamista.

> *”Supistaminen ja laventaminen ovat lapselle käsitteitä, joiden ymmärtäminen on hankalaa. Tehtävätyyppi toi idean hienosti esille, mutta sitominen johonkin käytännön asiaan, jossa asia toteutuu, auttaisi lapsia muistamaan käsitteet paremmin.”* (O4)

Muiden opettajien vastaukset tehtävien kehittämisehdotuksia kysyttäessä olivat ”en osaa sanoa” -tyyppisiä, ja yhden vastaajan mukaan kokonaisuutena kaikissa tehtävissä olisi kehittämistä, sillä tehtävien ei koettu kulkevan riittävästi kirjasarjan mukana. Tätä toivottua kehittämissuuntaa ei kuitenkaan vastauksessa avattu enempää. Kaksi opettaja toi tehtävien yleiseen ulkoasuun liittyen esille huomion siitä, että ne poikkesivat paljon kirjan tehtävistä, ja niihin olisi toivottu myös motivoimisen vuoksi enemmän väriä ja kuvitusta.

9.2.2 Opettajien havaintoja murtoluku-jakson aikana

Tehtävien käyttöön liittyneinä haasteita opetuksen näkökulmasta kysyttäessä yksi asia nousi ylivoimaisesti esille. Puolet opettajista toi esiin aikatauluongelmat sekä jatkuvan kiireen matematiikan tunneilla ilman tutkimustehtävienkin läsnäoloa. Eräs opettaja kuvasi tilannetta näin:

> *”Tahti on tiukka opetuksessa, joten tehtäville ja niiden käsittelylle ei jäänyt tarpeeksi aikaa.”* (O2)

Yhden opettajan mukaan tehtävät eivät seuranneet kirjasarjaa tarpeeksi hyvin, mikä aiheutti haasteita. Loput kolme kuvasivat opetuksen haasteet oppilaiden tehtäviä kohtaan kokemien haasteiden kautta. Oppilaiden kohdalla esiin tulleet haasteet näkyivät opettajien kommenteissa lisääntyneenä avun tarpeena sekä tutkimustehtävien vertailemisessa tuttuihin oppikirjan tehtäviin. Oppikirjan koettiin olevan oppilaille tärkeä, ja tutkimustehtävät näyttäytyivät oppilaille lisätyönä oppikirjatehtävien lisäksi. Matematiikan eri kielien näkökulmasta tarkasteltuna haasteina vaihteli vastauksissa sekä kuviokielen että luonnollisen kielen runsas käyttö tutun oppikirjan painottuessa symbolikielen suuntaan. Lisäksi haasteena koettiin tehtävien uudenlaisuus verrattuna aiempaan.

Oppilaiden asenteita tehtäviä kohtaan opettajat kuvasivat vaihtelevasti. Kolme opettajaa toi esiin eron asenteissa jakautuneen oppilaiden taitojen mukaan niin, että oppilailla, joilla oli muutenkin haasteita matematiikan opiskelussa, oli myös muita enemmän haasteita tutkimustehtävien kanssa. Eräs opettajista toi myös esiin erot sukupuolten välillä toteamalla, että pojat luovuttivat tehtävien suhteen tyttöjä helpommin. Yksi opettajista ei kokenut asenteissa olleen eroja lainkaan, ja yhden opettajan kertoman mukaan oppilaat suhtautuivat tehtäviin motivoituneesti. Lisäksi vastauksissa tuli esille tehtävien erilaisuuden aiheuttamat reaktiot.

> *"Kaikkeen uuteen on usein torjuvaa asenne. Se näkyi."* (O7)

Opettajia pyydettiin myös kuvailemaan tehtävien käyttöä osana omaa opetusta, sekä niihin mahdollisesti liittyneitä hyötyjä. Tehtäviä hyödynnettiin opetuksessa niin kertaustehtävinä, kotitehtävinä kuin myös arvioinnin tukena, kuten seuraava sitaatti osoittaa.

> *"Käytin tehtäviä myös oman arviointini tukena, tehtävien kautta näin ketkä olivat ymmärtäneet asiat ja ketkä ei. Yritän saada oppilaita perustelemaan ratkaisutapojaan, joten tämä sopi oikein hyvin opetustapaani."* (O2)

Tehtävien koettiin tuovan vaihtelua tunnille matematiikan kirjan tehtävien sijaan, ja kuviokielen sekä luonnolliset kielen hyödyt nousivat opettajien vastauksista esille.

> *"Kuvallistamisesta oppilaat hyötyisivät paljon ja nämä tehtävät herättivät siihen suuntaan."* (O8)

Puolet opettajista eivät kokeneet tai osanneet sanoa tehtävien vaikuttaneen oppilaiden oppimisprosessiin murtoluku-jakson aikana, ja toinen puoli opettajista toi esiin perustelemisen taitojen kehittymisen sekä luonnollisen kielen, että kuviokielen avulla. Kaiken kaikkiaan tehtävistä jakson aikana saadut hyödyt koettiin murtolukujen kokonaisvaltaisen opiskelun kautta. Kuviokielen koettiin olleen apuna tehtävien ratkaisemisen onnistumisessa, ja ratkaisun monipuolinen vaiheistaminen ja siten perustelemisen harjoitteleminen nousi esiin tutkimustehtävien keskeisenä matematiikan opetusta ja oppimista tukevana seikkana.

10 TULOSTEN TARKASTELU

Tässä tutkimuksessa kehitettiin murtolukutehtäviä alakoulun 5. ja 6. vuosiluokalle. Oppilaista (N=135) koostuva aineisto oli laaja, mikä mahdollisti erilaisten tilastollisten testien tekemisen. Vaaditun tilastollisen aineiston koosta on olemassa erilaisia kriteerejä, mutta esimerkiksi Nummenmaa (2009, 60) mainitsee määrällisessä tutkimuksessa tarvittaviksi havainnoksi yli 25 havaintoa, jolloin voidaan luotettavasti määrittää tunnuslukuja, eikä pienen aineiston yksittäiset muiden havaintojen suuruusluokasta poikkeavat havainnot pääse vääristämään tunnuslukuja. Tämän tutkimuksen aineiston avulla päästiin jo tarkastelemaan, millaiset asiat oppilaiden vastauksissa alkavat nousta toistuvasti esille. Tutkimuksessa haluttiin selvittää, miten oppilaat ja opettajat kokevat kirjallista kielentämistä hyödyntävät murtolukutehtävät. Oppilaiden kokemuksia tarkasteltaessa oltiin kiinnostuneita sukupuolen, opintomenestyksen matematiikassa ja äidinkielessä sekä omien koettujen matematiikan ja äidinkielen taitojen vaikutuksista näihin kokemuksiin.

Oppilaiden osalta aineistosta nousi esiin erilaisia seikkoja. Kaiken kaikkiaan tytöt suhtautuivat kielentämiseen poikia positiivisemmin. Tytöt suhtautuivat tilastollisesti merkitsevästi poikia useammin positiivisesti luonnollisen kielen käyttöön matematiikan kirjallisessa kielentämisessä. Lisäksi yksi tutkimuksessa mukana olleista opettajista toi esiin eroja sukupuolten välillä kuvailemalla, että tytöt jaksoivat tehdä tehtäviä poikia sinnikkäämmin. Samanlaisia tuloksia on saatu myös Joutsenlahden ja Kuljun (2017, 7) tutkimuksessa, jossa tytöt pitivät enemmän luonnollisen kielen käyttämisestä. Tämän tutkimuksen tuloksia tarkasteltaessa käy kuitenkin ilmi, että niin tytöt kuin pojat suhtautuivat kuviokielen käyttöön matematiikan kirjallisessa kielentämisessä positiivisemmin verrattaessa sitä luonnollisen kielen käyttöön. Kuviokielenkin osalta erot olivat merkittäviä tyttöjen hyväksi, vaikkakaan tarkastelussa ei ilmennyt tilastollista merkitsevyyttä.

Tytöt arvioivat selkeästi pidetyimmäksi tehtäväksi ratkaisu sarjakuvana -tehtävän, kun taas pojat pitivät eniten kerro mitä tiedät -tehtävästä, jossa piti luonnollisen kielen avulla kertoa annettuja käsitteitä hyödyntäen murtoluvuista. Eniten pidettyä tehtävää perusteltiin tehtävän koetulla helppoudella ja mielekkyydellä. Tutkimuksessa helpoin ja pidetyin tehtävä kulkivat käsi kädessä, samoin myös vaikein ja vähiten pidetyin. Tehtävien pitää selkeästi olla sopivan tasoisia, jotta motivaatio niitä kohtaan säilyy. Vaikeiden tehtävien kohdalla oli valintoja ja perusteluja tarkasteltaessa havaittavissa sinnikkyyden ja yritteliäisyyden puutetta. Lisäksi tehtävän koettu mielekkyys joko miellyttävänä tehtävätyyppinä tai aiheen kiinnostavuuden osalta nousi oppilaiden vastauksissa esille sekä pidetyimmän tehtävän että käänteisesti vähiten pidetyimmän tehtävän perusteluissa. Tämä puoltaa sitä, että tehtävät tulisi pyrkiä sitomaan oppilaiden omaan kokemuspiiriin. Näin voidaan osaltaan tukea oppilaiden kykyä nähdä matematiikka merkityksellisenä.

Myös kaikki kirjallisen kielentämisen kolme kieltä nousivat perusteluissa mielekkyyttä lisäävänä tekijänä esille. Huomionarvoista on, että symbolikieli esiintyi näissä perusteluissa matematiikan kielistä vähiten eikä se kokonaiskuvassa korostu, sillä sekä poikien että tyttöjen pidetyimmissä tehtävissä ei operoida symbolikielen avulla. Näitä huomiota tukee myös vähiten pidetylle tehtävälle annettujen perustelujen tarkastelu. Useimmiten vähiten pidetyimmän tehtävän perusteluissa esiin nousi tehtävän koettu haastavuus ja se, että tehtävä ei tuntunut mielekkäältä. Symbolikielen puute mainitaan kyllä tehtävän mielekkyyttä vähentävänä tekijänä, mutta sen suhteellinen osuus kaikista maininnoista jäi verrattain pieneksi.

Joutsenlahti (2009, 72–73) on nostanut esille sen, että oppikirjoissa usein esiintyvä sanallisen tehtävän ratkaisun malli (standardimalli) ei ohjaa käyttämään luonnollista kieltä tai kuviokieltä ratkaisun tukena tai selvennyksenä. Lisäksi luvun 4 oppikirjatarkastelusta kävi ilmi, että oppikirjoissa harjoitellaan pääasiassa symbolikielen käyttöä ja proseduraalista sujuvuutta. Tällöin olisi voinut ajatella, että oppilaat odottavat matematiikan kirjallisilta tehtäviltä tiettyä kaavaa. Kuitenkin symbolikielen käyttöön liittyvien mainintojen vähäisyys oppilaiden antamien perustelujen osalta on silmiinpistävää. Kaikkia perusteluja tarkastellessa havaitaan, että matematiikan kielistä symbolikieli nousi ainoastaan useimmiten esille helpointa ja vaikeinta murtolukutehtävää valittaessa. Symbolikieli koettiin matematiikan kielistä helpoimmaksi, mikä käy ilmi helpoimman tehtävän perusteluiden tarkasteluista. Tytöt toivat myös vaikeimmaksi koetun tehtävän valintaa perustellessaan esille symbolikielen käyttöön liittyneitä haasteita, mikä erosi poikien perusteluista, joissa tällaisia mainintoja ei ollut ollenkaan.

Opettavaisin tehtävä oppilaiden mielestä oli tehtävä 4, jossa piti järjestää laskuvaiheet oikeaan järjestykseen ja antaa näille vaiheille perustelut. Kiinnostavaa on, että oppimisen kannalta hyödyllisimpänä kielenä pojat kokivat luonnollisen kielen, vaikka he toivat myös vaikeimman tehtävän perusteluissa esille haasteita sen käytössä. Tytöillä mikään matematiikan kielistä ei korostu oppimista lisäävänä seikkana yhtä vahvasti kuin pojilla.

Pyydettäessä oppilaita nimeämään opettavaisinta tehtävää ilmeni eniten puutteita, mikä luultavasti kertoo siitä, että oppilaat kokivat opettavaisimman tehtävän arvioinnin hankalana. Muita pyydettyjä asioita, kuten pitämistä tai tehtävän koettua helppoutta, on luultavasti helpompi lapsen arvioida ja tuoda esille. Kaiken kaikkiaan puuttuvia arvoja ilmeni oppilaiden osalta pitkin aineistoa, mutta aineistoa analysoitaessa kävi ilmi, että tiettyjen kohtien tai osioiden puuttuvat arvot olivat usein saman luokan oppilailta. Joillakin luokilla jäi syystä tai toisesta jokin tehtävä tai kyselylomakkeen osa tekemättä. Esimerkiksi yhden luokan opettaja ei ollut antanut oppilailleen ollenkaan kyselylomaketta tehtäessä tehtävien arviointia varten paperia, johon kaikki murtolukutehtävät olivat vielä koottuna muistin tueksi vastaamisen helpottamiseksi. Tämä kävi suoraan ilmi oppilaiden avoimien kysymysten vastauksista. Nämä jäivät kyllä harmittamaan, sillä ohjeista pyrittiin tekemään mahdollisimman selkeät, ja ne käytiin sekä suullisesti että kirjallisesti läpi. Lisäksi opettajilla oli missä vaiheessa tahansa mahdollisuus ottaa yhteyttä tutkijaan ja kysyä lisätietoja, mikäli olisi ollut tarvetta. Samasta koulusta oli myös aina mukana kaksi opettajaa, jolloin kollegaltakin olisi ollut mahdollista kysyä neuvoa. Onneksi otanta oli sen verran suuri, että lopullisen aineiston koko oli silti riittävä.

Sukupuoli taustamuuttujana oli mielenkiintoinen ottaa tarkasteluun, sillä vaikka matematiikan taidoissa ei tyttöjen ja poikien välillä ole havaittu suuria eroja, on niitä havaittu asenteissa sitäkin enemmän. Tytöt kokevat poikia useammin matematiikka ahdistusta (Huotilainen 2019, 216). Matematiikkakuva, eli oppilaan tunteet sekä motivaatio matematiikkaa kohtaan, vaikuttaa esimerkiksi oppilaan osoittamaan sinnikkyyteen haastavia tai uusia tehtäviä ratkaistaessa. Lisäksi sillä on iso vaikutus oppilaan jatko-opinto- ja uravalintoihin. (Hannula & Holm 2018, 135.) Tuohilammen ja Hannulan (2013, 243–249) mukaan matematiikasta pitäminen heikentyy jo alakoulussa. Sukupuolierot ovat 6. vuosiluokalla erityisen suuria poikien hyväksi niin, että poikien kokonaisasenne (pystyvyyden tunne sekä pitäminen) on korkeampaa. Tulosten pohjalta on erityisen tärkeää tukea tyttöjen itseluottamusta matematiikassa. Tuohilammen ja Hannulan mukaan asenteisiin, tunteisiin ja minään liittyviin käsityksiin tulee kiinnittää opetuksessa huomiota, sillä myönteinen asenne edistää myös oppimista. (Tuohilampi & Hannula 2013, 243–249.) Aunola ja Nurmi (2018, 64) havaitsivat, että tyttöjen ja poikien väliset erot asenteissa matematiikkaa kohtaan alkavat eriytyä jo alkuopetuksen aikana poikien hyväksi, vaikka taidoissa ei ollut eroavaisuuksia.

Kielentäminen ja matematiikan usean kielen käyttö pelkän symbolikielellä operoinnin lisäksi voisi toimia matematiikan tehtävien ratkaisuja kohti motivaatiota lisäävänä seikkana. Tulosten perusteella tämä vaikuttaisi olevan erityisesti seikka, jonka tytöt kokevat mielekkäänä. Tällöin kielentäminen voisi olla osaltaan ratkaisuna tasaamassa sukupuolten välisiä eroja matematiikkaa kohtaan koetuissa asenteissa. Positiivisen matematiikka kuvan ylläpitäminen liittyy oleellisesti myös luvussa 2 esitettyyn Kilpatrickin ym. (2001) määrittelemään matemaattiseen osaamiseen yritteliäisyyden osa-alueeseen, jonka keskeinen ajatus on tukea oppilaan uskoa omiin kykyihinsä ja auttaa näkemään ahkeruuden merkitys osana matematiikan oppimista. Myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 234) on huomioitu tämä, sillä matematiikan opetuksen yksi tarkoitus on tukea oppilaiden myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan, ja siten vahvistaa oppilaan positiivista minäkuvaa matematiikan oppijana.

Tarkasteltaessa oppilaan arvosanaa äidinkielessä sekä matematiikassa taustamuuttujana ei saatu tilastollista merkitsevyyttä luonnollisen kielen tai kuviokielen koetun mielekkyyden välillä. Näin ollen tämän tutkimuksen perusteella ei voida todeta olevan eroja heikoimmin tai paremmin näissä oppiaineissa menestyvien oppilaiden välillä tarkastellessa kokemuksia kirjallisesta kielentämisestä. Kuitenkin matematiikan arvosanaryhmien välisiä eroja tarkastellessa kuviokieli korostui positiivisessa mielessä luonnollista kieltä enemmän, kuten myös yllä olevasta sukupuolten välisestä tarkastelusta kävi ilmi. Lisäksi alimpien arvosanaryhmien oppilaat kokivat tehtävät muita haastavampina ja uudenlaisina. Oppiaineessa ollessa haasteita sen sisältöjen ilmaiseminen on hankalaa. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, 422) tuovatkin ilmi, että matematiikan kielentämistä pitäisi harjoitella toistuvasti ja systemaattisesti. Vasta tällöin sen avulla on mahdollista saada aikaan hyötyjä oppimiselle esimerkiksi Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014, 234) mukaan tavoiteltavan ymmärtävän oppimisen muodossa.

Oppilaan kokemus itsestä matematiikan osaajana oli tilastollisesti merkitsevä luonnollisen kielen suhteen niin, että oppilaat, jotka kokivat olevansa hyviä matematiikassa, pitivät luonnollista kieltä useammin hyödyllisempänä matematiikan kirjallisten tehtävien ratkaisuissa kuin oppilaat, jotka eivät kokeneet olevansa hyviä matematiikassa. Itsensä hyväksi matematiikassa kokevilla on matemaattisista osa-alueista yritteliäisyys kehittynyt. Tällöin heillä on uskoa myös omiin taitoihin esittää matematiikan sisältöjä eri tavoin, vaikka vastaukset eivät aina olisikaan oikein. Eri kielien käyttöä pitäisi rohkaista jokaisen lapsen osalta. Äidinkielen osalta tilastollinen merkitsevyys saatiin niin, että äidinkielessä itsensä hyvänä kokeneet oppilaat olivat useammin sitä mieltä, että kuviokieli on mielekästä matematiikan kirjallisessa työskentelyssä.

Edellisten perusteella voidaan jälleen todeta, että oppilaalle jokin kielistä on usein muita luontevampi, ja tämän taustalla vaikuttavat monta tekijää. Asia on perusteltavissa tässä esiteltyjen tutkimustulosten lisäksi esimerkiksi sillä, että luvussa 3 esitetyt matematiikan neljä eri kieltä noudattavat muun muassa Gardnerin (2006, 8–18) jaottelua lahjakkuuksista, sillä jaottelussakin esiintyvät esimerkiksi loogis-matemaattinen, verbaalis-lingvistinen, visuaalis-spatiaalinen sekä kehollis-kinesteettinen lahjakkuus. Oppilaan mahdollisesti huono matematiikan minäkuva voisi parantua, kun hän saisi operoida ratkaisuissaan itselle luontevimmalla tavalla (Joutsenlahti 2009, 73).

Kehittämistutkimuksessa opettajan rooli nousee olennaisesti esille, minkä vuoksi tässä kehittämistutkimuksen toisessa vaiheessa oltiin kiinnostuneita myös opettajan näkökulmasta ja siitä, miten hän kokee tutkimustehtävät. Juutin & Lavosen (2009, 174) mukaan olisi hedelmällistä tukeutua tutkijoiden ja opettajien reflektiivisiin keskusteluihin artefaktin kokeilun jälkeen. Heidän mukaansa myöskään tutkijan ei kuulu testata artefaktia, vaan aidossa tilanteessa testaajana toimii opettaja oman luokkansa kanssa. Tutkijan tehtävä on tällöin esimerkiksi havainnoida tai tehdä kysely oppilaiden kokemuksista. (Juuti & Lavonen 2009, 174, 169.) Tässä reflektiivisiä keskusteluja ei päästy aineiston suuren koon vuoksi toteuttamaan, mutta opettajan antamat vastaukset toimivat heidän kokemustensa avaajina. Opettajat saivat myös rauhassa toteuttaa tehtäviä omaan opetukseen sopivalla tavalla, mikä näkyi myös opettajien kommenteissa, joissa avattiin eri tapoja, joilla tehtäviä oli hyödynnetty.

Kehittämistutkimuksessa kehitetyn artefaktin pitää olla sellainen, että opettaja pystyy ottamaan sen käyttöön ilman täydennyskoulutusta, mikä tarkoittaa sitä, että artefaktin pitää olla linjassa opettajan asenteiden ja tavoitteiden kanssa sekä kohdata opettajan aineenhallintataitojen kanssa. Tämä tarkoittaa artefaktin osalta tavoiteltavaa hyvää käytettävyyttä. Mikäli opettajat eivät ota artefaktia käyttöön, kehittämistutkimuksen yksi tärkeimmistä tavoitteista, eli opetuksen kehittäminen, jää täyttämättä. (Juuti & Lavonen 2009, 158–159, 170–171; 2013, 63.) Tässä tutkimuksessa osa opettajista toi esille tehtävien sopineen hyvin omaan opetustapaan. Toisaalta osa toi esille myös tehtävien uutuuden ja erilaisuuden verrattuna oppikirjan tehtäviin. Hyvää käytettävyyttä uudenlaisten tehtävien kohdalla tavoiteltiin kuitenkin monipuolisen ohjeistuksen avulla. Tämän voidaan todeta toteutuneen, sillä opettajat kokivat tehtävien käyttöönoton helppona eivätkä kokeneet niiden aiheuttaneen suuria haasteita opetukselle.

Useimmiten toistuva ongelma, jonka opettajat kokivat, oli jatkuva kiire ja aikataulun joustamattomuus, sillä matematiikan tunneilla oli heidän kertomansa mukaan paljon tehtävää myös ilman tutkimuksen murtolukutehtävien läsnäoloa. Lisäksi opettajien vastauksissa murtolukutehtävien ja oppikirjan välistä suhdetta kuvattiin toistuvasti, ja oppikirjan koettiin olevan asia, jonka myös oppilaat kokevat tärkeänä. Tämä on varmasti tapa, johon oppilaat ovat tottuneet. Aluksi käydään uutta asiaa, tehdään mahdollisesti yhdessä siihen liittyviä harjoituksia, ja lopuksi lasketaan tehtäviä omasta kirjasta. Matematiikan tunneilla noudatetaan usein tiettyä ja samaa kaavaa, sillä tutkimusten mukaan opettajan oppaat ja oppikirjat useimmiten määräävät oppitunnin rakenteen. Opettajille on saatavilla valmiit opetusvinkit, kokeet ja tehtävät, joita hyödynnetään paljon. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 139.) Koska valmiit oppimateriaalit ovat niin keskeisiä ja paljon käytettyjä, on tulosten kannalta mielenkiintoista, että kielentäminen on terminä alkanut näkyä myös opettajan oppaiden opetusvinkeissä (ks. esim. Open Kymppi 3 Kevät).

Tähän tutkimukseen osallistuneet opettajat olivat valmiita antamaan oppilaille mahdollisuuden perustella vastauksiaan matematiikan kokeessa myös luonnollisen kielen ja kuviokielen avulla. Lisäksi murtolukutehtävät olivat opettajan vapaasti hyödynnettävissä, ja niitä olikin käytetty myös arvioinnin tukena. Arviointi on yksi kirjallisen kielentämisen koetuista hyödyistä, kuten luvussa 3 tuli ilmi. Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018, 428) mukaan oppilaille pitäisi antaa kokeessa pisteitä, jos vastauksensa pystyy perustelemaan esimerkiksi luonnollisen kielen tai kuviokielen avulla, vaikka itse laskulausekkeen tekeminen olisi haastavaa. Kirjallisessa työskentelyssä ylipäätään usean kielen käyttö paljastaa nopeasti, onko oppilas ymmärtänyt keskeiset asiat ja menetelmät. Opettaja pystyy näin suorittamaan jatkuvaa arviointia sekä suunnittelemaan omaa opetustaan oppilaiden osaamisen tason tullessa esiin. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 53–54; Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 428.) Tässä tutkimuksessa tämä tuli esiin esimerkiksi tehtävän 1 kohdalla oppilaan selittäessään auki murtolukuihin keskeisesti liittyviä käsitteitä.

Tarkasteltaessa sekä opettajien ja oppilaiden antamia vastauksia huomionarvoista on, että kaikille tutkimuksen tehtäville näyttää olevan tarvetta. Aina löytyy joku oppilas, jota jokin tehtävä miellyttää, vaikka taas jonkun toisen mielestä se sama tehtävä voi olla epämiellyttävin. Tämä näkyy hyvin myös opettajien nimetessä opettavaisinta, eniten apua sekä vähiten apua vaatinutta tehtävää. Vastaukset jakaantuivat eri tehtävien välille. Oppilaat ovat myös matemaattisilta taidoiltaan ja ominaisuuksiltaan heterogeenisia, mikä tarkoittaa sitä, että opetuksessa pitää pystyä monipuolisesti tarjoamaan eri tapoja oppia ja harjoitella. Pelkkä matematiikan symbolikielen käyttäminen antaa matematiikasta ja sen ulottuvuuksista liian yksipuolisen kuvan, joka osaltaan vaikuttaa oppilaiden pystyvyyden tunteisiin matematiikkaa kohtaan ja laajemmin ajateltuna nämä vaikutukset siirtyvä myös oppilaan jatko-opintovalintoihin. Oppikirjoissa kyllä usein esitetään asiat kaikilla kolmella eri kielellä, kuten luvun 4 oppikirjatarkastelussa kävi ilmi. Edellä esitettyjen näkökulmien kannalta oleellisinta kuitenkin on, että myös oppilaat itse pääsisivät operoimaan näillä kaikilla kielillä.

11 LOPUKSI

Tässä luvussa tarkastellaan tutkimuksen luotettavuutta ja eettisiä näkökulmia erityisesti siltä kannalta, että kyseessä oli alaikäisiin lapsiin kohdistuva tutkimus. Lopuksi tarkastellaan kehittämisprosessin tarkasteluun oleellisesti kuuluvia jatkokehittämistarpeita sekä pohditaan tutkimuksen kuluessa esiin nousseita jatkotutkimusmahdollisuuksia.

11.1 Tutkimuksen luotettavuus ja eettiset näkökulmat

Kehittämistutkimuksen luotettavuuden arviointiin liittyen on löydettävissä erilaisia lähestymistapoja. Kanasen (2015, 111) mukaan kehittämistutkimuksen luotettavuuden arviointiin vaikuttaa se, ettei kyseessä ole oma tutkimusotteensa vaan monimenetelmäinen tutkimusote. Tällöin hänen mukaansa luotettavuuden tarkastelu pitää valita käytettävien menetelmien mukaan, mikä tarkoittaa sitä, että laadullisen tutkimuksen osaan käytetään laadullisen tutkimuksen luotettavuuden kriteeristöä, ja vastaavasti määrälliseen osaan määrällisiä luotettavuuden arviointitapoja.

Edelsonin (2002, 117–118) mukaan kehittämistutkimuksen tavoite on erilainen kuin perinteisessä empiirisessä tutkimuksessa. Sen vuoksi niitä ei voida arvioida samojen standardien mukaan. Kehittämistutkimuksen arviointiin soveltuvat mittarit ovat hänen mukaansa uutuus ja hyödyllisyys. Kehittämisellä pitäisi tuottaa uusia teorioita, joista on hyötyä ratkaistaessa tärkeitä ongelmia. Lisäksi Edelson puhuu kehitettyjen teorioiden selittävästä voimasta, jolla viitataan siihen, että teorian pitää antaa selityksen asioille, joita on noussut esille kehittämisprosessin eri vaiheissa. (Edelson 2002, 117–118.)

Juuti ja Lavonen (2009, 174–175) ehdottavat kahta näkökulmaa kehittämistutkimuksen luotettavuuden arviointiin. Toinen näkökulma rajautuu osien arviointiin ja toinen kokonaisuuden arviointiin. Kokonaisuuden arviointiin kuuluu se, kuinka uusi ja hyödyllinen kehitetty artefakti on. Osien arviointiin sisältyy aineiston keräyksen ja analysoinnin kuvaus sekä se, miten tutkija osoittaa ottaneensa huomioon opettajan merkityksen. Heidän mukaansa ihmistieteiden yleisiä tutkimusmenetelmiä hyödyntämällä voidaan osien arvioinnissa osoittaa luotettavuutta.

Yleisemmin tarkasteltuna tutkimusmenetelmien luotettavuutta käsitellään yleensä kahden käsitteen, validiteetin ja reliabiliteetin, avulla. Validiteetilla tarkoitetaan tutkimuksen pätevyyttä eli sitä, että tutkimus on kohdistunut siihen, mitä oli tarkoitus tutkia, ja reliabiliteetilla viitataan tulosten luotettavuuteen sekä toistettavuuteen. Käsitteet ovat kehittyneet määrällisen tutkimuksen piirissä, joten ne vastaavat lähinnä määrällisen tutkimuksen tarpeisiin. Laadulliseen tutkimukseen sen sijaan sovelletaan Lincolnin ja Guban (1985) kehittämää luokittelua neljään luokkaan, joita ovat: 1) uskottavuus, 2) siirrettävyys, 3) luotettavuus ja varmuus sekä 4) vahvistettavuus. (Tuomi & Sarajärvi 2018, 160–162.)

Pernaan (2011, 13) mukaan kehittämistutkimus on luotettavuusanalyysin näkökulmasta tarkasteltuna haastava tutkimusmenetelmä. Hän on arvioinut kehittämistutkimuksen luotettavuutta yhdistämällä Design-Based Research Collectiven (2003) määrittelemät kehittämistutkimuksen kriteerit edellä mainittuihin Lincolnin ja Guban (1985) luokitteluun. Pernaan mukaan seuraavaksi listatut kohdat toimivat kehittämistutkimuksen luotettavuuden arvioinnin tukena.

- Kehittämisen tulee olla kokonaisvaltaista. Näin kehittämistuloksena syntyy ohjaavia malleja sekä teorioita ja kuvailevia teorioita (uskottavuus ja siirrettävyys).
- Kehittämisessä tulee edetä syklisessä prosessissa. Sen tulee sisältää jatkuvaa kehittämistä ja arviointia (uskottavuus, luotettavuus ja vahvistettavuus).
- Kehittämisessä pyritään teorioihin, joiden tulee olla siirrettävissä opetusalan ammattilaisten käyttöön (siirrettävyys).
- Kehittämisprosessiin kuuluu testaaminen autenttisissa olosuhteissa (siirrettävyys, luotettavuus ja vahvistettavuus).
- Kaikki syklit tulee dokumentoida huolellisesti (siirrettävyys, luotettavuus ja vahvistettavuus). (Design-Based Research Collective 2003; Pernaa 2011, 13–15; Tuomi & Sarajärvi 2018, 160–162.)

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan luotettavuutta Pernaan kriteereihin nojautuen, sillä niissä yhdistyvät useiden kehittämistutkimuksen luotettavuutta tarkastelleiden kirjoittajien näkökulmat. Tutkimuksessa toteutui kehittämistutkimukselta vaadittu syklinen prosessi siten, että pro gradu -tutkielmassa toteutui kehittämistutkimuksen toinen sykli ensimmäisen syklin ollessa kandidaatintutkielmassa toteutettu tutkimus. Tutkimuksen vaiheet on dokumentoitu tarkasti ja liitetty raportoinnin oheen tarpeelliset tiedostot, esimerkiksi tutkimuksessa käytössä olleet tehtävät, kyselylomakkeet ja tilastollisten testien dokumentaatio, jolloin nekin ovat lukijan tarkasteltavissa. Tärkeää on pyrkiä avaamaan eri vaiheet huolellisesti, jotta lukija pystyy seuraamaan tutkimuksen kulkua sekä arvioimaan sen luotettavuutta. Tällöin pystytään vastaamaan myös toistettavuuden haasteeseen kuvaamalla tutkimuskontekstia asiaan kuuluvalla tavalla. Näitä kuvauksia Bell, Hoadley & Linn (2004, 79) nimittävät kehitysnarratiiveiksi. Näissä narratiiveissa kuvataan kehitetyt artefaktit, oppimisen kontekstit ja aktiviteetit sekä kehittämisprosessin käytännöt. Luotettavuuden takaamiseksi kehitysnarratiiveissa tulee kuvata yhtä lailla onnistumiset kuin epäonnistumisetkin.

Yksi keino lisätä tutkimuksen luotettavuutta on triangulaatio, jossa samassa tutkimuksessa hyödynnetään useampaa kuin yhtä lähestymistapaa. Kehittämistutkimuksessa tämä näkyy juurikin aiemmin esiin tulleessa monimenetelmällisessä tutkimusotteessa, jossa yhdistetään kvalitatiivista ja kvantitatiivista lähestymistapaa. Tällöin kyseessä on menetelmätriangulaatio. (Kananen 2012, 179–180.) Menetelmätriangulaatiota hyödynnettiin myös tässä tutkimuksessa käyttäen aiemmin luvussa 6 esiteltyä monimenetelmällistä tutkimusotetta.

Luotettavuuden lisäksi tutkimusta on tarpeen tarkastella myös eettisten näkökulmien toteutumisen osalta. Etenkin lapsia tutkittaessa eettiset näkökulmat sekä tutkimuksen luottamuksellisuus korostuvat eri tavoin kuin täysi-ikäisiä tutkittaessa. Tutkimuksessa pyydettiin lupa oppilaiden huoltajilta tutkimukseen osallistumiseksi. Ikärajana huoltajien suostumisen pyytämiseen on pidetty niin 12 kuin 15 vuoden ikärajoja. (Nieminen 2010, 36–37.) Oppilaat vastasivat nimimerkeillä, jolloin jo aineiston analysointivaiheessa yksittäisen vastaajan tunnistaminen oli mahdotonta, sillä tutkija ei tavannut oppilaita eikä hänellä ollut heidän koko nimiään missään tutkimuksen vaiheessa tiedossa. Oppilaiden tuloksia ei kirjattu eikä analysoitu yksilöiden. Opettajien osalta kyselylomakkeisiin ei myöskään vastattu nimellä, ja yhden luokanopettajaopiskelijan vastaukset käsiteltiin yhdessä muiden opettajien vastauksien kanssa, jotta pystyttiin takaamaan hänen anonymiteetin säilyminen. Lisäksi luvun 9 tulosten opettajien aineistositaatit on tehty täysin tunnistamattomiksi. Tutkimuseettiseltä kannalta tarkasteltuna ihmisten yksityisyyden kunnioittamisen onkin nähty olevan yksi tärkeimpiä asioita (Kuula 2006, 124).

Tutkimuksen teossa on pyritty noudattamaan Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (2012) määrittelemää hyvää tieteellistä käytäntöä. Kuten luvussa 8 kuvattiin, tutkimusta varten hankittiin tarvittavat tutkimusluvat eri tahoilta. Näissä informoinneissa kävi ilmi tutkijan nimi ja yhteystiedot, tutkimuksen tavoite, tutkimukseen osallistumisen vapaaehtoisuus, tutkimuksessa annettujen tietojen tunnistamattomuus sekä aineiston hankintatapa ja käyttötarkoitus. Paitsi että tutkimuksesta informoitiin kuntien ja koulujen tasolla, edellä mainitut asiat Kuula (2011, 102) on nimennyt asioiksi, jotka myös tutkittaville pitää informoida. Niin tehtiin myös tässä tutkimuksessa. Lisäksi tutkimuksen teon eri vaiheissa on noudatettu rehellisyyttä ja huolellisuutta esimerkiksi raportoimalla eri vaiheista tarkasti sekä viittaamalla muiden tutkijoiden julkaisuihin asianmukaisella tavalla.

11.2 Murtolukutehtävien jatkokehittäminen

Yhteenvetona voisi todeta, että kehitetyt murtolukutehtävät olivat suhteellisen onnistuneita erityisesti siinä, että ne sisälsivät monipuolisesti erilaisia tehtäviä. Tämä näkyi sekä oppilaiden että aineistossa siinä, että kaikki tehtävät saivat mainintoja. Tämä oli myös tavoitteena, ja tehtävät pyrittiin kehittämään niin, että ne huomioisivat matemaattisen osa-alueen ja kirjallisen kielentämisen eri kielet mahdollisimman monipuolisesti ja vaihtelevasti.

Konkreettisina kehitysehdotuksina opettajat toivat esille tehtävien motivoinnin lisäämisen niiden ulkoasun avulla. Tehtäviä tulisi jatkossa monipuolistaa ulkoasultaan lisäämällä mukaan monipuolisesti värejä ja kuvia. Nyt niiden ulkoasu jäi minimalistiseksi pääasiassa käytännön syiden eli suurten kopiomäärien vuoksi. Lisäksi tehtävissä esiintyvät värit piti tässä valita sellaisiksi, että ne erottuisivat myös mustavalkotulostuksessa toisistaan. Nämä ulkoasuun liittyvät tekijät ovat tärkeitä asioita, sillä niiden avulla voidaan lisätä tehtävien kiinnostavuutta.

Lisäksi yksi opettaja toi esille kehittämisehdotuksen koskien tehtävää 2, jossa kuvasarjoissa esitettiin supistamista sekä laventamista. Näiden sitominen vielä johonkin oppilaalle merkitykselliseen asiaan tukisi oppilaan ymmärtävää oppimista ja siten myös asian muistamista. Supistaminen ja laventaminen ovat kuitenkin murtolukujen laskutoimitusten keskeisiä proseduureja, ja niitä tarvitaan myöhemmin esimerkiksi erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuissa.

11.3 Jatkotutkimusehdotuksia

Tutkimuksessa jatkettiin tätä tutkimusta edeltäneessä kandidaatintutkielmassa aloitettua linjaa, jossa mentiin ikään kuin tehtävät edellä. Vastaavia kirjallisia kielentämistehtäviä ei ole aikaisemmin tutkittu peruskoulussa, jolloin ei ollut saatavilla aikaisempaa tutkimustietoa juuri tästä aiheesta. Tällöin tutkimus suunnattiin ensisijaisesti tehtäviin ja niistä saatavaan tietoon oppilaiden sekä opettajien mielipiteiden ja kokemusten kautta. Jatkossa olisi tarpeellista tarkastella myös oppilaiden tehtävien ratkaisuja ja niiden sisällöstä esiin nousevia asioita.

Nyt tutkimuksessa oli mukana useampi luokka, sillä haluttiin laadullisen aineiston ohella kerätä kattava määrällinen aineisto. Tämä päätös oli osaltaan vaikuttamassa siihen, ettei tutkija ollut matematiikan tunneilla oppimistilanteissa mukana. Tutkimusasetelman muuttamisella olisi varmasti mahdollista hankkia vielä uudenlaisempaa tietoa työskentelemällä esimerkiksi saman luokan kanssa pitkäkestoisemmin. Mahdollistahan olisi toteuttaa vaikka kokonainen murtoluku-jakso tai muu matemaattisen aihealueen jakso hyödyntämällä pelkästään suullista ja kirjallista kielentämistä. Tällöin olisi vielä paremmat mahdollisuudet tutkia, millaisia vaikutuksia tällaisella työskentelytapojen muutoksella on oppilaiden oppimiseen.

Lisäksi olisi tarpeellista tutkia lisää matematiikka-ahdistusta ja matematiikkaa kohtaan koettuja tunteita sekä opetustapojen muutosten vaikutusta näihin. Tytöt kokevat poikia enemmän matematiikka-ahdistusta, ja tämän tutkimusten tulosten mukaan tytöt suhtautuivat poikia myönteisimmin sekä luonnollisen kielen että kirjallisen kielen käyttöön osana matematiikan kirjallista työskentelyä. Tällöin olisi tarpeellista tutkia, voitaisiinko työtapojen muutoksella saada aikaan muutoksia myös matematiikkaa kohtaan koettuihin asenteisiin.

LÄHTEET

Aksela, M. & Pernaa, J. (2013). Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla. Jyväskylä: PS-kustannus, 181–200.

Aunola, K. & Nurmi, J–E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 54–68.

Bell, P., Hoadley C.M. & Linn, M.C. (2004). Design-Based Research in Education. Teoksessa M.C. Linn, E.A. Davis & P. Bell (toim.) Internet Environments for Science Education. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 73–85.

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. The Journal of the Learning Sciences, 13 (1), 15–42.

Creswell, J. W. (2014). Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches. Los Angeles: SAGE Publications.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2018). Designing and conducting mixed methods research. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An Emerging paradigm for educational inquiry. Educational Researcher, 32 (1), 5–8.

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. The Journal of the Learning Sciences, 11, 105–121.

Edmonds, W. A. & Kennedy T. D. (2013). An applied reference guide to research designs: quantitative, qualitative, and mixed methods. Los Angeles: SAGE Publications.

Gardner, H. (2006). Multiple intelligences: New horizons. New York: BasicBooks.

Hannula, M. S. & Holm, M. E. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 132–154.

Hesse-Biber, S. N. (2010). Mixed methods research: merging theory with practice. New York: Guilford Publications.

Holopainen, M. & Pulkkinen, P. (2012). Tilastolliset menetelmät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Huotilainen, M. (2019). Näin aivot oppivat. Jyväskylä: PS-Kustannus.

Joutsenlahti, J. (2005). Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä - 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampere: Tampere University Press.

Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen päivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9. Rovaniemi: Lapin yliopisto, 71–86.

Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa M. Asikainen, P. Hirvonen & K. Sormunen (toim.) Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikka ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Joensuu: Itä-Suomen yliopisto, 3–15.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2017). Multimodal Languaging as a Pedagogical Model – A Case Study of the Concept of Division in School Mathematics. Education Sciences 7 (1), 9.

Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. (2019). Sustainability Development in Mathematics Education—A Case Study of What Kind of Meanings Do Prospective Class Teachers Find for the Mathematical Symbol “$\frac{2}{3}$”? Sustainability 11 (2), 457.

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014. Jyväskylä: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura, 45–61.

Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J. & Harjulehto, P. (2013) Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa. Teoksessa M. Hähkiöniemi, H. Leppäaho, P. Nieminen & J. Viiri (toim.) Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Assosiation. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House, 59–70.

Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 410–430.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2008). Oppikirja vai harjoituskirja? Perusopetuksen luokkien 1–6 matematiikan oppimateriaalin tarkastelua MOT-projektissa. Teoksessa A. Kallioniemi (toim.) Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktinen symposiumi 8.2.2008 Helsingissä (osa 2). Tutkimuksia no. 299. Helsinki: Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitos, 547–558.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Opetushallitus, 137–148.

Juuti, K. & Lavonen, J. (2009). Design-based research ainedidaktisen tutkimuksen metodologisena lähestymistapana. Teoksessa Teoksessa R. Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen päivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9. Rovaniemi: Lapin yliopisto, 157–180.

Juuti, K. & Lavonen, J. (2013). Design-tutkimukseen osallistuvien opettajien rooli tutkimuksen eri vaiheissa. Teoksessa J. Pernaa (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla. Jyväskylä: PS-kustannus, 45–67.

Kananen, J. (2012). Kehittämistutkimus opinnäytetyönä. Kehittämistutkimuksen kirjoittamisen käytännön opas. Jyväskylä: Jyväskylän ammattikorkeakoulu.

Kananen, J. (2015). Kehittämistutkimuksen kirjoittamisen käytännön opas. Miten kirjoitan kehittämistutkimuksen vaihe vaiheelta. Jyväskylä: Jyväskylän ammattikorkeakoulu.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy Press.

Kivelä, S. (2000). M niin kuin matematiikka: Lukiotason matematiikan tietosanakirja. https://matta.hut.fi/matta2/isom/html/index.html. Luettu 27.1.2019.

Kuula, A. (2006). Yksityisyyden suoja tutkimuksessa. Teoksessa J. Hallamaa, V. Launis, S. Lötjönen & I. Sorvali (toim.) Etiikkaa ihmistieteille. Helsinki: Suomalaisen kirjallisuuden seura, 124–140.

Kuula, A. (2011). Tutkimusetiikka. Aineistojen hankinta, käyttö ja säilytys. Tampere: Vastapaino.

Leavy, P. (2017). Research design: quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based, and community-based participatory research approaches. New York: Guildford Publications.

Lee, C. (2006). Language for Learning Mathematics – Assessment for Learning in Practice. Berkshire: Open University Press. http://www.uio.no/studier/emner/uv/ils/PROF3025/v17/language-for-learning-mathematics-%28osborne-oracle-press%29.pdf.

Lemke, J. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. Teoksessa M. Anderson, A. Saenz-Ludlow, S. Zellweger & V. Cifarelli (toim.) Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing. Ottawa: Legas, 215–234.

Linnusmäki, J. (2015). Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla. Diplomityö. Tampere: Tampereen teknillinen yliopisto.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). Naturalistic inquiry. Beverly Hills: Sage Publications Inc.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). Learning and Instruction, 37, 14–20.

Metsämuuronen, J. (2013). Matemaattisen osaamisen muutos perusopetuksen luokilla 3–9. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Helsinki: Opetushallitus, 65–171.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: new approaches to teaching the rational-number system. Teoksessa M. S. Donovan & J. D. Bransford (toim.) How students learn. History, mathematics and science in the classroom. Washington DC: National Academic Press, 309–350.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias Teaching. Educational Psychologist, 40(1), 27–52.

Nieminen, L. (2010). Lasten ja nuorten tutkimus: oikeudellinen tarkastelu. Teoksessa H. Lagström, T. Pösö, N. Rutanen & K. Vehkalahti (toim.) Lasten ja nuorten tutkimuksen etiikka. Helsinki: Nuorisotutkimusseura ry, 25–42.

Nummenmaa, L. (2009). Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Nummenmaa L., Holopainen M. & Pulkkinen, P. (2017). Tilastollisten menetelmien perusteet. Helsinki: Sanoma Pro.

Näveri, L. (2009). Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana. Helsingin yliopiston tutkimuksia 309. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Opetushallitus (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf.

Pernaa, J. (2011). Kehittämistutkimus: Tieto- ja viestintätekniikkaa kemian opetukseen. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Pernaa, J. (2013). Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla. Jyväskylä: PS-kustannus, 9–26.

Rosenberg, M. (2017). Kirjallisia kielentämistehtäviä murtoluvuista 6. vuosiluokalle. Kandidaatintutkielma.

Ruohonen, K. (2008). Formaalit kielet. http://math.tut.fi/~ruohonen/FK.pdf. Luettu 18.2.2019.

Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. (2010). Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6. luokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Opetushallitus, 165–203.

Sarikka, H. (2014). Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena. Diplomityö. Tampere: Tampereen teknillinen yliopisto.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. Psychological Science 23 (7), 691–697.

Siegler, R. & Pyke, A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. Developmental Psychology 49 (10), 1994–2004.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction 14, 503–518.

Tuohilampi, L. & Hannula, M. S. (2013.) Matematiikkaan liittyvien asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3., 6. ja 9. luokalla. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Helsinki: Opetushallitus, 231–253.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018). Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Tuominen, A. (2016). Murtolukujen peruslaskutoimitusten sujuminen 7. luokan aikana. Teoksessa H-M. Pakula, E. Kouki, H. Silfverberg & E. Yli-Panula (toim.) Uudistuva ja uusiutuva ainedidaktiikka. Ainedidaktisia julkaisuja 11. Turku: Turun yliopisto, opettajankoulutuslaitos.

Tutkimuseettinen neuvottelukunta. (2012). Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa. https://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf. Luettu 10.3.2019.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. Learning and Instruction, 37, 50–55.

Vilkka, H. (2007). Tutki ja mittaa: määrällisen tutkimuksen perusteet. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Vygotski, L. S. (1982). Ajattelu ja kieli. Suom. K. Helkama & A. Koski-Jännes. Espoo: Weilin+Göös.

Väisälä, K. (1963). Algebran oppi- ja esimerkkikirja I. Porvoo: Werner Söderström osakeyhtiö. https://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/vaisala/vaisala.pdf. Luettu 6.3.2019.

Oppikirjat:

Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P. & Vallo, L. (2018). Milli 3B. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2015). Tuhattaituri 3b. Helsinki: Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2016). Tuhattaituri 4b. Helsinki: Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2016). Tuhattaituri 5a. Helsinki: Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2017). Tuhattaituri 6a. Helsinki: Otava.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2018). Open Kymppi 3 Kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Uus-Leponiemi, M., Uus-Leponiemi, T., Sintonen A-M. & Rinne, S. (2017). Kymppi 3 Kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Uus-Leponiemi, M., Uus-Leponiemi, T., Sintonen A-M. & Rinne, S. (2017). Kymppi 4 Kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Uus-Leponiemi, M., Uus-Leponiemi T., Sintonen A-M. & Rinne, S. (2017). Kymppi 5 Kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Uus-Leponiemi, M., Uus-Leponiemi T., Sintonen A-M. & Rinne, S. (2017). Kymppi 6 Kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Tutkimustehtävä 1 (5. ja 6. vuosiluokka)

Kerro omin sanoin asioita, joita tiedät murtoluvuista. Voit käyttää apunasi myös matematiikan merkintöjä.
Käytä vastauksessasi ainakin seuraavia käsitteitä:

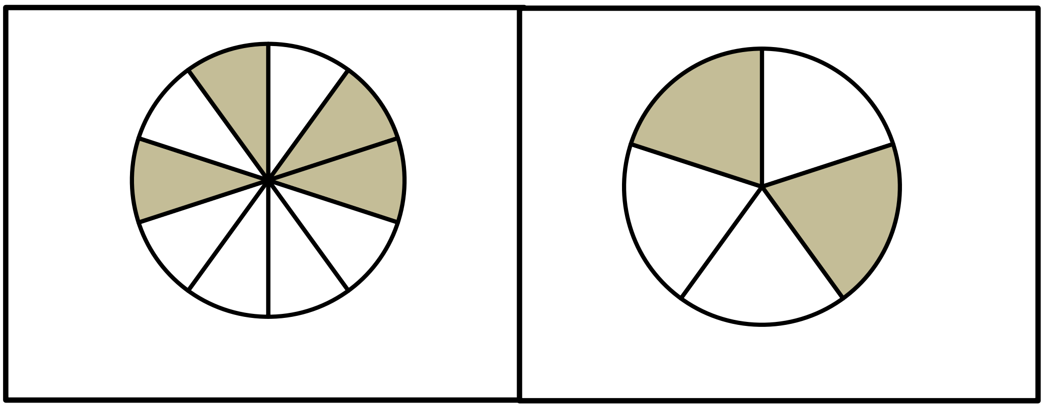
- murtoluku
- osoittaja
- nimittäjä
- sekaluku
- laventaminen
- supistaminen

Tutkimustehtävä 2 (5. ja 6. vuosiluokka)

Tutki alla olevia kuvasarjoja. Mitä kuvasarjoissa tapahtuu? Kirjoita selitys matematiikan kielellä (numeroiden ja muiden matemaattisten merkintöjen avulla). Voit tarvittaessa myös piirtää kuviin.

A)

ennen jälkeen



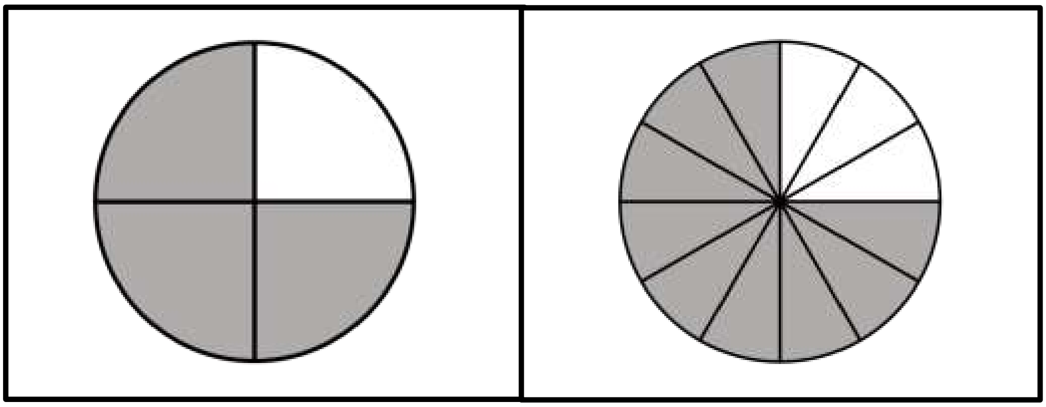
Selitys matematiikan kielellä: ____

Keksitkö muita selityksiä? (Voit tarkastella esimerkiksi toista väriä.) ________________________

Onko kuvasarjassa kyseessä *supistaminen* vai *laventaminen*? ____________________________

B)

ennen jälkeen



Selitys matematiikan kielellä: ____

Keksitkö muita selityksiä? (Voit tarkastella esimerkiksi toista väriä.) ________________________

Onko kuvasarjassa kyseessä *supistaminen* vai *laventaminen*? ____________________________

Tutkimustehtävä 3 (6. vuosiluokka)

Maijalla, Minnalla, Terolla ja Juhalla on neljän henkilön WhatsApp-ryhmä. Päivän aikana kaikista sinne kertyneistä viesteistä Maijan lähettämiä on $\frac{2}{10}$, Minnan lähettämiä viestejä on $\frac{1}{5}$ ja Teron lähettämiä on $\frac{1}{2}$. Kuinka suuri osa päivän aikana ryhmään tulleista viesteistä on Juhan lähettämiä?
Ohje: Ratkaise tehtävä ilman numeroita ja muita matemaattisia merkintöjä. Käytä apunasi kuvioita (esimerkiksi ympyrä, jana tai suorakulmio, joka edustaa kaikkia viestejä), ja selitä omin sanoin. Kirjoita lopuksi vastaus kokonaisena virkkeenä.

Tutkimustehtävä 3 (5. vuosiluokka)

Maijalla, Minnalla, Terolla ja Juhalla on neljän henkilön WhatsApp-ryhmä. Päivän aikana sinne kertyneistä viesteistä Maijan lähettämiä on $\frac{2}{10}$, Minnan lähettämiä viestejä on $\frac{1}{5}$, Teron lähettämiä on $\frac{1}{2}$ ja Juhan lähettämiä $\frac{1}{10}$. Kuka lähetti päivän aikana eniten viestejä?
Ohje: Ratkaise tehtävä ilman numeroita ja muita matemaattisia merkintöjä. Käytä apunasi kuvioita (esimerkiksi ympyrä tai suorakulmio, joka edustaa aina yhden henkilön viestejä), ja selitä omin sanoin. Kirjoita lopuksi vastaus kokonaisena virkkeenä.

Tutkimustehtävä 4 (6. vuosiluokka)

Numeroi seuraavat laskuvaiheet oikeaan järjestykseen. Kirjoita sen jälkeen vaiheet merkitsemässäsi järjestyksessä alla olevaan taulukkoon. Ensimmäinen ja viimeinen vaihe on merkitty valmiiksi. Kerro omin sanoin perustelu, miksi vaiheet mielestäsi kuuluvat juuri kyseisiin kohtiin.

$\square$	$2 \cdot \left(\frac{6}{4} + \frac{3}{4}\right)$
$\boxed{1}$	$2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)$
$\square$	$\frac{18}{4}$
$\square$	$2 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)$
$\square$	$2 \cdot \frac{9}{4}$
$\boxed{7}$	$4\frac{1}{2}$
$\square$	$\frac{9}{2}$

Laskuvaihe	Perustelu
$2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)$	Aloitetaan vaiheesta, josta ei ole vielä laskettu mitään.
=	
=	
=	
=	
=	
$= 4\frac{1}{2}$	Muunnetaan murtoluku sekaluvuksi.

Tutkimustehtävä 4 (5. vuosiluokka)

Numeroi seuraavat laskuvaiheet oikeaan järjestykseen. Kirjoita sen jälkeen vaiheet merkitsemässäsi järjestyksessä alla olevaan taulukkoon. Ensimmäinen ja viimeinen vaihe on merkitty valmiiksi. Kerro omin sanoin perustelu, miksi vaiheet mielestäsi kuuluvat juuri kyseisiin kohtiin.

$\boxed{1}$ $2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$\boxed{}$ $\frac{3}{2}$

$\boxed{}$ $2 \cdot \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$\boxed{}$ $2 \cdot \frac{3}{4}$

$\boxed{6}$ $1\frac{1}{2}$

$\boxed{}$ $\frac{6}{4}$

Laskuvaihe	Perustelu
$2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$	Aloitetaan vaiheesta, josta ei ole vielä laskettu mitään.
=	
=	
=	
=	
$= 1\frac{1}{2}$	Muunnetaan murtoluku sekaluvuksi.

Tutkimustehtävä 5 (6. vuosiluokka)

Laadi alla olevaan ratkaisuun sopiva sanallinen tehtävänanto. Huomaa annetussa ratkaisussa oleva yksikkö *kg,* ja sisällytä se keksimääsi tehtävänantoon.

Tehtävänanto:

Ratkaisu:

$$\frac{2}{5}\,kg : 2 + \frac{1}{10}\,kg$$

$$= \frac{2}{5 \cdot 2}\,kg + \frac{1}{10}\,kg$$

$$= \frac{2}{10}\,kg + \frac{1}{10}\,kg$$

$$= \frac{3}{10}\,kg$$

<u>Vastaus:</u> $\frac{3}{10}\,kg$

Tutkimustehtävä 5 (5. vuosiluokka)

Laadi alla olevaan ratkaisuun sopiva sanallinen tehtävänanto. Huomaa annetussa ratkaisussa olevat yksiköt *kg* ja *g,* ja sisällytä ne keksimääsi tehtävänantoon.

Tehtävänanto:

Ratkaisu:

$$\frac{3}{4}kg + 250\ g$$

$$= \frac{3}{4}\ kg + \frac{1}{4}\ kg$$

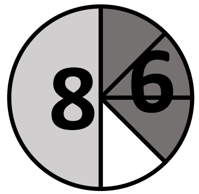
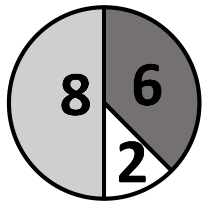
$$= \frac{4}{4}\ kg = 1\ kg$$

<u>Vastaus:</u> $1\ kg$

Tutkimustehtävä 6 (6. vuosiluokka) **Liite 9(19)**

Luokalla on yhteensä 16 oppilasta. Luokan oppilaista $\frac{1}{2}$ harrastaa jotakin palloilulajia. Tämän jälkeen jäljelle jääneistä oppilaista tubettamista harrastaa $\frac{3}{4}$. Loput oppilaista eivät harrasta mitään. Jokainen luokan oppilas kuuluu vain yhteen näistä ryhmistä. Kuinka moni luokan oppilaista harrastaa jotakin palloilulajia, entä tubettamista? Kuinka monella ei ole mitään harrastusta?

Ohje: Tehtävän ratkaisusta puuttuu vaiheita matemaattisten merkintöjen, omin sanoin selittämisen tai piirrosten osalta. Täydennä taulukon tyhjät ruudut. Katso tarkasti ruudukon yläriviltä, millä tavalla tyhjät ruudut tulee täydentää. Anna lopuksi vastaus kokonaisena virkkeenä.

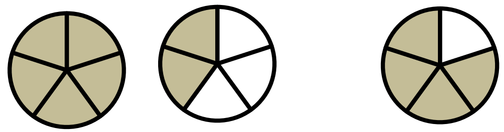
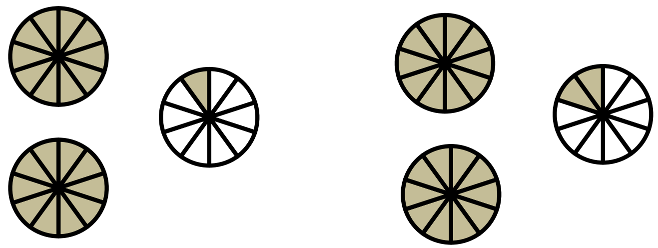
Matemaattiset merkinnät	Omin sanoin selittäminen	Piirrokset
$16 : 2 = 8$ $16 - 8 = 8$	Lasketaan, montako oppilasta yksi kahdesosa (eli puolet) on koko luokan oppilaiden lukumäärästä. Näin saadaan palloilua harrastavien oppilaiden lukumäärä selville. Kun palloilun harrastajien määrä on selvillä, lasketaan montako oppilasta jää jäljelle.	
	Lasketaan, paljonko kolme neljäsosaa on jäljelle jääneistä kahdeksasta oppilaasta. Näin saadaan tubettamista harrastavien lukumäärä selville.	
$8 - 6 = 2$		

<u>Vastaus:</u>

Tutkimustehtävä 6 (5. vuosiluokka)

Masa ja Anni keskustelevat siitä, kummalla kuluu enemmän aikaa tietokoneella pelaamiseen yhden päivän aikana. Masa pelaa tietokoneella koulun jälkeen $1\frac{2}{5}h$ ja illalla vielä $\frac{4}{5}h$. Anni pelaa tietokoneella koulun jälkeen $2\frac{1}{10}h$. Kummalla aikaa pelaamiseen kuluu enemmän?

Ohje: Tehtävän ratkaisusta puuttuu vaiheita matemaattisten merkintöjen, omin sanoin selittämisen tai piirrosten osalta. Täydennä taulukon tyhjät ruudut. Katso tarkasti ruudukon yläriviltä, millä tavalla tyhjät ruudut tulee täydentää. Anna lopuksi vastaus kokonaisena virkkeenä.

Matemaattiset merkinnät	Omin sanoin selittäminen	Piirrokset
	Lasketaan, paljonko Masalla kuluu aikaa pelaamiseen.	
$2\frac{1}{5}h = 2\frac{2}{10}h$	Muutetaan Masan käyttämä aika kymmenesosiksi laventamalla kahdella, jotta vertailu Annin käyttämään aikaan onnistuu.	
$2\frac{1}{10}h < 2\frac{2}{10}\ h$		

<u>Vastaus:</u>

Tutkimustehtävä 7 (6. vuosiluokka)

Talviolympialaisissa hiihdossa mitaleita voittivat Norja, Suomi ja Ruotsi. Norja voitti $\frac{1}{2}$ kaikista jaetuista hiihdon mitaleista. Tämän jälkeen jäljelle jääneistä mitaleista Suomi voitti puolet. Loput 5 mitalia voitti Ruotsi. Kuinka monta mitalia oli yhteensä?

Ohje: Ratkaise tehtävä piirtämällä sarjakuva. Käytä tarvitsemasi määrä ruutuja, osa voi jäädä yli. Anna lopuksi vastaus kokonaisena virkkeenä.

Vastaus:

Tutkimustehtävä 7 (5. vuosiluokka)

Talviolympialaisissa hiihdossa mitaleita voittivat Norja, Suomi ja Ruotsi. Hiihdon mitaleita jaettiin yhteensä 20. Norja voitti $\frac{1}{2}$ näistä mitaleista. Tämän jälkeen jäljelle jääneistä mitaleista Suomi voitti puolet. Loput mitalit voitti Ruotsi. Kuinka monta mitalia Norja voitti? Montako mitalia Suomi sai? Entä Ruotsi?

Ohje: Ratkaise tehtävä piirtämällä sarjakuva. Käytä tarvitsemasi määrä ruutuja, osa voi jäädä yli. Anna lopuksi vastaus kokonaisena virkkeenä.

<u>Vastaus:</u>

Hei,

olen luokanopettajaopiskelija Tampereen yliopistosta. Teen tällä hetkellä pro gradu -tutkielmaa. Tutkin työssäni matematiikan kirjallista kielentämistä, jolla tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista symbolikielen avulla, omin sanoin selittäen tai kuviokieltä käyttäen. Kielentämisen avulla pyritään tukemaan ja tehostamaan oppimista.

Olen keväällä 2018 tulossa keräämään aineistoa lapsenne luokasta. Tarkoituksena on, että oppilaat testaavat suunnittelemiani matematiikan tehtäviä oman opettajan johdolla ja arvioivat niitä vastaamalla tekemiini kyselyihin.

Tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista. Tutkimuksen onnistumisen kannalta olisi kuitenkin toivottavaa, että mahdollisimman moni oppilas arvioisi tehtäviäni. Annettuja vastauksia hyödynnetään vain tässä tutkimuksessa, ja ne käsitellään luottamuksellisesti. Tuloksista yksittäistä vastaajaa ei ole mahdollista tunnistaa.

Ohjaajana tutkimuksessani toimii dosentti Jorma Joutsenlahti ([redacted]@[redacted]).

Pyydän palauttamaan oheisen tutkimusluvan täytettynä.

Kiitän yhteistyöstä, ja annan mielelläni lisätietoja.

Ystävällisin terveisin,

Meri Rosenberg

[redacted]@[redacted]

✂ --

____

Oppilaan nimi

saa osallistua tutkimukseen. ☐

ei saa osallistua tutkimukseen. ☐

____

Huoltajan allekirjoitus

Tämä kyselylomake liittyy murtoluku-jakson aikana tekemiisi tutkimustehtäviin. Lisäksi lomakkeessa on kysymyksiä siitä, mitä mieltä olet omin sanoin selittämisestä sekä kuvioiden piirtämisestä matematiikan tehtävissä. Tehtäviä arvioidessasi saat apua monisteesta, josta näet tutkimustehtävien numerot. Vastaathan huolellisesti, sillä se auttaa tutkimuksen tekemisessä. Kiitos!

Nimikirjaimet: ________________________

1. **Arvioi seuraavia väittämiä asteikolla 1–4. Ympyröi sopivin vaihtoehto.**

	täysin eri mieltä	jokseenkin eri mieltä	jokseenkin samaa mieltä	täysin samaa mieltä
Pidän piirtämisestä matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	1	2	3	4
Pidän kirjoittamisesta matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	1	2	3	4
Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.	1	2	3	4
Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	1	2	3	4
Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.	1	2	3	4
Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.	1	2	3	4
Minä olen hyvä matematiikassa.	1	2	3	4
Minä olen hyvä äidinkielessä.	1	2	3	4
Olen valmis käyttämään aikaa matematiikan tehtävien ratkaisuun.	1	2	3	4
Matematiikan tehtävän ratkaisua, jossa on käytetty apuna kuvioita tai sanoja, on helppo muidenkin, kuin tehtävän tekijän, ymmärtää.	1	2	3	4
Tutkimustehtävien kaltaiset tehtävät voisivat auttaa oppilasta, joka on aiemmin kokenut matematiikan hankalana.	1	2	3	4
Tutkimustehtävät olivat minulle uudenlaisia tehtäviä.	1	2	3	4
Tutkimustehtävät olivat minulle haastavampia kuin oppikirjasta tekemäni tehtävät.	1	2	3	4
Voisin käyttää omin sanoin selittämistä apuna matematiikan tehtävien ratkaisemisessa myös jatkossa.	1	2	3	4
Voisin käyttää piirroksia apuna matematiikan tehtävien ratkaisemisessa myös jatkossa.	1	2	3	4

2. Valitse seuraaviin kohtiin A–F sopivin tehtävävaihtoehto. Perustele valintasi.

A) Pidin eniten tutkimustehtävästä numero _____.

Perustele valintasi.

B) Pidin toiseksi eniten tutkimustehtävästä numero _____.

Perustele valintasi.

C) Pidin vähiten tutkimustehtävästä numero _____.

Perustele valintasi.

D) Opin eniten tutkimustehtävästä numero _____.

Perustele valintasi.

E) Minulle helpoin oli tutkimustehtävä numero _____.

Perustele valintasi.

F) Minulle vaikein oli tutkimustehtävä numero _____.

Perustele valintasi.

Muuta kommentoitavaa tehtävistä?

TAULUKKO A. Tehtävien ohessa olleet väittämät

Tehtävä	Tutkimustehtävään liittyvä väittämä
Tehtävä1	**T1V1** Pidin tässä tehtävässä omin sanoin selittämisestä.
	T1V2 Omin sanoin selittäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.
	T1V3 Omin sanoin selittäminen auttoi minua ymmärtämään murtolukuihin liittyviä käsitteitä.
Tehtävä2	**T2V1** Kuvasarjan tapahtumien tulkinta oli minulle helppoa.
	T2V2 Osaan selittää kuviokielellä esitetyt murtoluvut matematiikan kielellä.
	T2V3 Osaan esittää matematiikan kielellä esitetyt murtoluvut kuvioina.
	T2V4 Kuvat auttavat minua murtolukujen ymmärtämisessä.
Tehtävä3	**T3V1** Pidin tässä tehtävässä piirtämisestä.
	T3V2 Kuvioiden piirtäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.
	T3V3 Oli haastavaa ratkaista tehtävä ilman matemaattisia merkintöjä.
	T3V4 Piirtäminen auttoi minua tehtävän ratkaisun ymmärtämisessä.
Tehtävä4	**T4V1** Pidin siitä, että sain selittää matemaattisia merkintöjä omin sanoin.
	T4V2 Omin sanoin selittäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.
	T4V3 Laskuvaiheiden järjestäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.
	T4V4 Omin sanoin selittäminen auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä.
	T4V5 Opin tehtävää tehdessäni lisää laskujärjestyksestä.
	T4V6 Opin tehtävää tehdessäni lisää murtoluvuilla laskemisesta.
Tehtävä5	**T5V1** Pidin tässä tehtävässä omin sanoin selittämisestä.
	T5V2 Tehtävänannon keksiminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.
	T5V3 Keksin helposti tehtävässä annetuille luvuille merkityksiä.
Tehtävä6	**T6V1** Matemaattiset merkinnät auttoivat minua tämän tehtävän ymmärtämisessä.
	T6V2 Sanalliset selitykset auttoivat minua tämän tehtävän ymmärtämisessä.
	T6V3 Piirrokset auttoivat minua tämän tehtävän ymmärtämisessä.
	T6V4 Tehtävän ratkaisua oli helppo ymmärtää, kun se oli esitetty monella eri tavalla.
Tehtävä7	**T7V1** Pidin tässä tehtävässä piirtämisestä.
	T7V2 Tehtävän ratkaiseminen piirtäen oli minulle helppoa.
	T7V3 Piirtäminen auttoi minua tehtävän ratkaisun ymmärtämisessä.
Tehtävä8	**T8V1** Pidin tässä tehtävässä omin sanoin selittämisestä.
(Tehtävä 1	**T8V2** Omin sanoin selittäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.
uudelleen)	**T8V3** Omin sanoin selittäminen auttoi minua ymmärtämään murtolukuihin liittyviä käsitteitä.
	T8V4 Murtoluvuista kertominen oli minulle nyt helpompaa, kuin ensimmäisellä kerralla tehdessäni tämän tehtävän.

Opettajille esitetyt kysymykset murtolukuihin liittyvistä kielentämistehtävistä

1. Taustatiedot

1.1 Olen opettaja.
luokanopettajaopiskelija.

1.2. Opetan / olin opetusharjoittelussa 5. luokalla.
6. luokalla.

2. Opetusjaksoon liittyvät väittämät

Arvioi seuraavia väittämiä asteikolla 1-5. 1 = täysin eri mieltä, 2 = jokseenkin eri mieltä, 3 = ei samaa eikä eri mieltä, 4 = jokseenkin samaa mieltä, 5 = täysin samaa mieltä

2.1 Tutkimustehtävien käyttöönotto oli minulle helppoa.
2.2 Tutkimustehtävät tukivat opetustani murtoluku-jaksolla.
2.3 Tutkimustehtävät tukivat käytössä olevaa muuta oppimateriaalia.
2.4 Tutkimustehtävien käyttö aiheutti haasteita opetukselleni murtoluku-jakson aikana.
2.5 Tutkimustehtävistä oli helppo seurata oppilaan ratkaisun kulkua.
2.6 Voisin antaa oppilaalle kokeessa mahdollisuuden perustella vastaustaan myös kuvin tai omin sanoin selittäen.
2.7 Tutkimustehtävien kaltaisista tehtävistä ei ole hyötyä oppilaan arvioinnissa.
2.8 Tutkimustehtävien kaltaisten tehtävien käyttö matematiikan opetuksessa on tarpeetonta.
2.9 Voisin jatkossakin käyttää vastaavanlaisia tehtäviä opetukseni osana.

3. Tutkimustehtävien arviointi

3.1 Mikä tehtävistä tuki parhaiten oppilaan oppimista? Perustele.
3.2 Missä tehtävässä oppilaat tarvitsivat vähiten apua? Perustele.
3.3 Missä tehtävässä oppilaat tarvitsivat eniten apua? Perustele.
3.4 Missä tehtävässä olisi kehitettävää? Perustele.

4. Kokemuksesi tutkimustehtävistä

4.1 Kuvaile tehtävien käyttöä oman opetuksesi osana. Miten ne soveltuivat opetustapaasi?
4.2 Kuvaile tehtävien käyttöön opetuksesi näkökulmasta mahdollisesti liittyneitä haasteita.
4.3 Kuvaile tehtävien käyttöön opetuksesi näkökulmasta mahdollisesti liittyneitä hyötyjä.
4.4 Koetko tehtävien vaikuttaneen jollakin tavalla oppilaiden oppimisprosessiin murtoluku-jakson aikana? Perustele.
4.5 Millaisia asenteita havaitsit oppilailla olevan tutkimustehtäviä kohtaan? Oliko erilaisten oppijoiden välillä eroja näissä asenteissa?
4.6 Kuvaile tehtäviin oppilaiden osalta mahdollisesti liittyneitä haasteita.
4.7 Kuvaile tehtäviin oppilaiden osalta mahdollisesti liittyneitä hyötyjä.
4.8 Muuta kommentoitavaa?

Summamuuttujat

V1 Pidän piirtämisestä matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.
V2 Pidän kirjoittamisesta matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.
V3 Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.
V4 Kuvien piirtäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.
V5 Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävänantojen ymmärtämisessä.
V6 Omin sanoin selittäminen auttaa minua matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.

Kuviokielen koettu mielekkyys matematiikan kirjallisessa kielentämisessä**:**
SUMMA1=(V1+V3+V4) /3

Luonnollisen kielen koettu mielekkyys matematiikan kirjallisessa kielentämisessä**:**
SUMMA2=(V2+V5+V6) /3

TAULUKKO B. SUMMA1 reliabiliteetti

Cronbachin alfa	N
,861	3

TAULUKKO C. SUMMA2 reliabiliteetti

Cronbachin alfa	N
,845	3

Tilastollinen merkitsevyys

TAULUKKO D. Jakauman normaaliuden testaus

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		SUMMA1	SUMMA2
N		118	120
Normal Parameters[a,b]	Mean	2,78	2,44
	Std. Deviation	,807	,749
Most Extreme Differences	Absolute	,168	,130
	Positive	,094	,116
	Negative	-,168	-,130
Test Statistic		,168	,130
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000[c]	,000[c]

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

c. Lilliefors Significance Correction.

TAULUKOT E. Tilastollinen merkitsevyys (sukupuoli)

Ranks (Mann-Whitney Test)

	sukupuoli	N	Mean Rank	Sum of Ranks
SUMMA1	Tyttö	73	64,20	4686,50
	Poika	45	51,88	2334,50
	Total	118		
SUMMA2	Tyttö	76	68,49	5205,00
	Poika	44	46,70	2055,00
	Total	120		

Test Statistics[a]

	SUMMA1	SUMMA2
Mann-Whitney U	1299,500	1065,000
Wilcoxon W	2334,500	2055,000
Z	-1,927	-3,345
Asymp. Sig. (2-tailed)	,054	,001

a. Grouping Variable: sukupuoli

TAULUKOT F. Tilastollinen merkitsevyys (opintomenestys matematiikassa)

Ranks (Kruskal-Wallis Test)

	arvosanaryhmä MA	N	Mean Rank
SUMMA1	9-10	48	57,82
	7-8	59	60,13
	5-6	11	63,45
	Total	118	
SUMMA2	9-10	50	66,98
	7-8	60	54,72
	5-6	10	62,80
	Total	120	

Test Statistics[a,b]

	SUMMA1	SUMMA2
Kruskal-Wallis H	,290	3,519
df	2	2
Asymp. Sig.	,865	,172

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: arvosanaryhmä MA

TAULUKOT G. Tilastollinen merkitsevyys (opintomenestys äidinkielessä)

Ranks (Kruskal-Wallis Test)

	arvosanaryhmä AI	N	Mean Rank
SUMMA1	9-10	64	58,80
	7-8	49	62,24
	5-6	5	41,60
	Total	118	
SUMMA2	9-10	65	61,29
	7-8	51	61,98
	5-6	4	28,75
	Total	120	

Test Statistics[a,b]

	SUMMA1	SUMMA2
Kruskal-Wallis H	1,760	3,541
df	2	2
Asymp. Sig.	,415	,170

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: arvosanaryhmä AI

TAULUKOT H. Tilastollinen merkitsevyys (kokemus itsestä matematiikan osaajana)

Ranks (Mann-Whitney Test)

	Olen hyvä matematiikassa	N	Mean Rank	Sum of Ranks
SUMMA1	eri mieltä	27	50,44	1362,00
	samaa mieltä	87	59,69	5193,00
	Total	114		
SUMMA2	eri mieltä	27	44,89	1212,00
	samaa mieltä	90	63,23	5691,00
	Total	117		

Test Statistics[a]

	SUMMA1	SUMMA2
Mann-Whitney U	984,000	834,000
Wilcoxon W	1362,000	1212,000
Z	-1,286	-2,494
Asymp. Sig. (2-tailed)	,198	,013

a. Grouping Variable: Olen hyvä matematiikassa

TAULUKOT I. Tilastollinen merkitsevyys (kokemus itsestä äidinkielen osaajana)

Ranks (Mann-Whitney Test)

	Olen hyvä äidinkielessä	N	Mean Rank	Sum of Ranks
SUMMA1	eri mieltä	25	39,70	992,50
	samaa mieltä	90	63,08	5677,50
	Total	115		
SUMMA2	eri mieltä	26	48,90	1271,50
	samaa mieltä	91	61,88	5631,50
	Total	117		

Test Statistics[a]

	SUMMA1	SUMMA2
Mann-Whitney U	667,500	920,500
Wilcoxon W	992,500	1271,500
Z	-3,145	-1,741
Asymp. Sig. (2-tailed)	,002	,082

a. Grouping Variable: Olen hyvä äidinkielessä

TAULUKKO J. Murtolukutehtävien yhteydessä olleiden väittämien kanssa samaa mieltä tai jokseenkin samaa mieltä olleiden oppilaiden suhteelliset osuudet jaoteltuina sukupuolittain.

Tehtävä	Murtolukutehtävään liittyvä väittämä	Tytöt	Pojat
Tehtävä 1	**T1V1** Pidin tässä tehtävässä omin sanoin selittämisestä.	72% (n=58)	55% (n=48)
	T1V2 Omin sanoin selittäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.	78% (n=57)	42% (n=48)
	T1V3 Omin sanoin selittäminen auttoi minua ymmärtämään murtolukuihin liittyviä käsitteitä.	66% (n=56)	33% (n=48)
Tehtävä 2	**T2V1** Kuvasarjan tapahtumien tulkinta oli minulle helppoa.	73% (n=81)	54% (n=46)
	T2V2 Osaan selittää kuviokielellä esitetyt murtoluvut matematiikan kielellä.	71% (n=79)	53% (n=47)
	T2V3 Osaan esittää matematiikan kielellä esitetyt murtoluvut kuvioina.	85% (n=81)	58% (n=47)
	T2V4 Kuvat auttavat minua murtolukujen ymmärtämisessä.	85% (n=80)	65% (n=46)
Tehtävä 3	**T3V1** Pidin tässä tehtävässä piirtämisestä.	73% (n=77)	44% (n=45)
	T3V2 Kuvioiden piirtäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.	73% (n=77)	55% (n=44)
	T3V3 Oli haastavaa ratkaista tehtävä ilman matemaattisia merkintöjä.	44% (n=77)	41% (n=44)
	T3V4 Piirtäminen auttoi minua tehtävän ratkaisun ymmärtämisessä.	61% (n=76)	39% (n=45)
Tehtävä 4	**T4V1** Pidin siitä, että sain selittää matemaattisia merkintöjä omin sanoin.	62% (n=79)	35% (n=48)
	T4V2 Omin sanoin selittäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.	65% (n=79)	45% (n=47)
	T4V3 Laskuvaiheiden järjestäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.	81% (n=77)	48% (n=48)
	T4V4 Omin sanoin selittäminen auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä.	59% (n=78)	40% (n=48)
	T4V5 Opin tehtävää tehdessäni lisää laskujärjestyksestä.	42% (n=77)	30% (n=47)
	T4V6 Opin tehtävää tehdessäni lisää murtoluvuilla laskemisesta.	42% (n=77)	34% (n=47)
Tehtävä 5	**T5V1** Pidin tässä tehtävässä omin sanoin selittämisestä.	61% (n=79)	44% (n=46)
	T5V2 Tehtävänannon keksiminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.	58% (n=79)	44% (n=46)
	T5V3 Keksin helposti tehtävässä annetuille luvuille merkityksiä.	67% (n=78)	39% (n=46)
Tehtävä 6	**T6V1** Matemaattiset merkinnät auttoivat minua tämän tehtävän ymmärtämisessä.	62% (n=79)	35% (n=49)
	T6V2 Sanalliset selitykset auttoivat minua tämän tehtävän ymmärtämisessä.	58% (n=78)	35% (n=49)
	T6V3 Piirrokset auttoivat minua tämän tehtävän ymmärtämisessä.	62% (n=74)	43% (n=49)

	T6V4 Tehtävän ratkaisua oli helppo ymmärtää, kun se oli esitetty monella eri tavalla.	61% (n=76)	40% (n=48)
Tehtävä 7	**T7V1** Pidin tässä tehtävässä piirtämisestä.	61% (n=76)	40% (n=48)
	T7V2 Tehtävän ratkaiseminen piirtäen oli minulle helppoa.	59% (n=81)	50% (n=48)
	T7V3 Piirtäminen auttoi minua tehtävän ratkaisun ymmärtämisessä.	39% (n=80)	44% (n=48)
Tehtävä 8 (tehtävä 1 uudestaan)	**T8V1** Pidin tässä tehtävässä omin sanoin selittämisestä.	72% (n=43)	53% (n=32)
	T8V2 Omin sanoin selittäminen oli minulle tässä tehtävässä helppoa.	79% (n=43)	63% (n=32)
	T8V3 Omin sanoin selittäminen auttoi minua ymmärtämään murtolukuihin liittyviä käsitteitä.	58% (n=43)	48% (n=31)
	T8V4 Murtoluvuista kertominen oli minulle nyt helpompaa, kuin ensimmäisellä kerralla tehdessäni tämän tehtävän.	86% (n=43)	74% (n=31)