TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Josefin Lindgrén

Lukujonot, summat ja sarjat lukion opetussuunnitelmamuutoksessa

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Toukokuu 2018

Tampereen yliopisto

Luonnontieteiden tiedekunta

LINDGRÉN, JOSEFIN: Lukujonot, summat ja sarjat lukion opetussuunnitelmamuutoksessa

Pro gradu -tutkielma, 73 s.

Matematiikka

Toukokuu 2018

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa selvitetään, millä tavalla käynnissä oleva opetussuunnitelmamuutos vaikuttaa lukujonojen, summien ja sarjojen opetukseen lukiossa. Muutosta lähestytään eri oppimateriaalien kautta. Aluksi luodaan matemaattinen pohja tutkielmassa käsiteltävään aiheeseen esittämällä lukujonoihin, summiin ja sarjoihin liittyviä matemaattisia tuloksia. Matemaattinen sisältö on suhteutettu tutkittavissa oppimateriaalissa oleviin sisältöihin. Tämän jälkeen tutustutaan vuoden 2003 ja 2015 opetussuunnitelmien yleisiin tavoitteisiin sekä opetussuunnitelmien matemaattisiin tavoitteisiin. Lisäksi pohditaan, miten opetussuunnitelman tavoitteet eroavat toisistaan ja selvitetään sisällölliset muutokset lukujonojen, summien ja sarjojen osalta sekä pitkän että lyhyen oppimäärän kursseilla. Molempien opetussuunnitelmien oppimateriaaleja analysoidaan ja niistä nostetaan esille oppimateriaaleista löytyneitä yhtäläisyyksiä ja eroja. Samaan ja eri opetussuunnitelmiin tarkoitettuja oppimateriaaleja vertaillaan sekä lyhyeen että pitkään matematiikkaan tarkoitettuihin kursseihin. Oppimateriaalin matemaattinen täsmällisyys, sopivuus opetussuunnitelmaan, loogisuus ja selkeys, pedagogiset ratkaisut, eriyttämismahdollisuudet sekä teknisten apuvälineiden hyödyntäminen huomioidaan. Suurin muutos eri opetussuunnitelmien välillä on lukujonojen, summien ja sarjojen kannalta yhteinen opintokokonaisuus. Digitalisaation ja teknisten apuvälineiden vaikutus uuden opetussuunnitelman mukaisten oppimateriaalien sisältöihin on myös merkittävää. Lyhyen matematiikan lukijoille lukujonojen ja summien merkitys on kasvanut, kun taas pitkän matematiikan sisällöstä asioita on jätetty pois. Tällä hetkellä ei pystytä luotettavasti ennustamaan, millaisia vaikutuksia opetussuunnitelmamuutoksella on. Tästä huolimatta pitkän matematiikan lukijoiden kannalta vaikuttaa siltä, että lukujonojen, summien ja sarjojen asema heikkenee.

Tammerfors universitet
Naturvetenskapliga fakulteten
LINDGRÉN, JOSEFIN: Talföljder, summor och serier i gymnasiets läroplansförändring
Pro gradu -avhandling, 73 s.
Matematik
Maj 2018

Sammanfattning

I denna avhandling klargörs på vilket sätt den pågående läroplansförändringen i Finland påverkar undervisningen av talföljder, summor och serier i gymnasiet. Den inverkan förändringen har tas reda på genom en analys av olika läromedel. Till att börja med skapas en matematisk grund för det ämne som behandlas i avhandlingen. Detta sker genom en presentation av matematiska resultat som hör ihop med talföljder, summor och serier. Det matematiska innehållet är ställt i relation till innehållet i de läromedel som analyseras. Härefter stiftas bekantskap med de allmänna målen i läroplanerna från år 2003 och 2015. Även de matematiska målen i läroplanerna blir bekanta. Ytterligare begrundas på vilket sätt läroplanernas mål skiljer sig från varandra. På samma gång undersöks också de innehållsmässiga skillnaderna mellan kurserna i vilka talföljder, summor och serier behandlas. Läromedel som hör ihop med de olika läroplanerna analyseras och under analysens gång framhävs de likheter och olikheter som hittats i läromedlen. Bland de läromedel som analyseras finns läromedel ämnade både för den långa och korta lärokursen i matematik. I analysen tas olika teman i beaktande. Den matematiska noggrannheten och hur väl läromedlet lämpar sig för läroplanen analyseras på samma gång som läromedlens uppbyggnad och tydlighet utvärderas. Olika pedagogiska lösningar och möjligheter till differentiering undersöks. Dessutom utreds på vilket sätt man drar fördel av tekniska hjälpmedel i läromedlen. Den största skillnaden mellan läroplanerna är för talföljdernas, summornas och seriernas del den nya gemensamma studiehelheten i matematik. Även digitaliseringen och de tekniska hjälpmedlen har en betydande inverkan på innehållet i läroplanen och läromedlen. I den korta lärokursen har talföljdernas och summornas betydelse ökat, medan fördjupande innehåll har tagits bort ur den långa lärokursens innehåll. För tillfället är det svårt att på ett tillförlitligt sätt förutspå hurdant inflytande läroplansförändringen har, men det oaktat verkar det som om talföljdernas, summornas och seriernas ställning i den långa lärokursen försvagas.

Sisältö

1 Johdanto

Siirtymä uuteen opetussuunnitelmaan on käynnissä Suomen yläkouluissa ja lukioissa. Tämä tutkielmaprosessi alkoi vaiheessa, jossa vuoden 2015 opetussuunnitelma oli ollut käytössä ensimmäisen lukuvuoden lukioissa. Tällöin kritisoitiin uutta ensimmäistä yhteistä opintokokonaisuutta MAY1 voimakkaasti etenkin matematiikan aineenopettajien piireissä. Kritiikki kohdistui opintokokonaisuuden liian laajaan sisältöön, erityisesti verrattuna aikaisemman opetussuunnitelman kurssien MAA1 ja MAB1 kurssisisältöihin. Lisäksi joissakin lukioissa pidettiin lukujonojen ja summien opettamista varhaisessa vaiheessa - jo ensimmäisen matematiikan kurssin aikana - niin turhauttavana asiana, että opettajat jättivät ne kokonaan opettamatta [5]. Tämän problematiikan ja monenlaisten esitettyjen mielipiteiden kautta syntyi halu ymmärtää paremmin, mitä uusi opetussuunnitelma todella tuo mukanaan matematiikan kannalta. Tästä muodostui tutkielman aihe.

Tämän tutkielman tarkoitus on selvittää, millä tavalla lukion uusi opetussuunnitelma vaikuttaa lukujonojen, summien ja sarjojen opetukseen lukiossa ja miten tämä muutos näkyy oppimateriaaleissa. Tutkimuksessa lähestytään aihetta kolmesta eri näkökulmasta, joista jokainen on esitetty omassa luvussaan. Luvussa 2 luodaan matemaattinen pohja tutkielmassa käsiteltävään aiheeseen, mikä aloitetaan esittämällä tarvittavat matemaattiset peruskäsitteet. Tämän jälkeen esitetään ja todistetaan lukujonoihin, summiin ja sarjoihin liittyviä matemaattisia tuloksia. Luvun matemaattinen sisältö on suhteutettu tutkittavissa oppimateriaalissa oleviin sisältöihin ja siksi tämän tutkielman matemaattinen osuus ei anna kattavaa kokonaiskuvaa aiheesta. Syvällisempää perehtymistä varten suositellaan esimerkiksi Pertti Koiviston laatimia opetusmonisteita Analyysi 1 [22] ja Analyysi C [23], joita käytetään myös tässä tutkielmassa. Luvussa 3 tutustutaan vuoden 2003 ja 2015 opetussuunnitelmien yleisiin ja matemaattisiin tavoitteisiin. Lisäksi pohditaan, miten opetussuunnitelmien tavoitteet eroavat toisistaan. Pääpainotus on kuitenkin selvittää sisällölliset muutokset lukujonojen, summien ja sarjojen osalta sekä pitkän että lyhyen oppimäärän kursseilla. Luvussa 4 analysoidaan molempien opetussuunnitelmien oppimateriaaleja. Oppimateriaalit ovat eri kustantajien valmistamia ja ne koskevat sekä pitkää että lyhyttä oppimäärää.

Tutkimuksessa vertaillaan sekä samaan että eri opetussuunnitelmiin tarkoitettuja oppimateriaaleja keskenään eri teemojen avulla. Analyysin aikana nostetaan esille oppimateriaaleista löytyneitä yhtäläisyyksiä ja eroja. Viimeisessä luvussa esitetään oppimateriaalianalyysin aikana tulleita havaintoja ja huomioita oppimateriaalien ominaispiirteistä, teknisten apuvälineiden osuuksista eri oppimateriaaleissa ja oppimateriaaleissa olevista pedagogisista ratkaisuista. Lopuksi pohditaan, millä tavalla opetussuunnitelmamuutos vaikuttaa lukujonojen, summien ja sarjojen käsittelemiseen lukiossa.

2 Lukujonot, summat ja sarjat

2.1 Peruskäsitteitä

Määritelmä 2.1. [22, s. 5] Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Joukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $a \leq M$ kaikilla $a \in A$. Tällöin M on (eräs) joukon A *yläraja*.

Määritelmä 2.2. [22, s. 5] Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Joukko A on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa $m \in \mathbb{R}$ siten, että $a \geq m$ kaikilla $a \in A$. Tällöin m on (eräs) joukon A *alaraja*.

Määritelmä 2.3. [22, s. 5] Joukko on *rajoitettu*, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Määritelmä 2.4. [22, s. 8] Reaaliluvun x *itseisarvo*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus 2.1. *Suoraan itseisarvon määritelmästä saadaan, että* $|x| = |-x|$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$. [22, s. 8]

Lause 2.1 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoon* $x, y \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$|x \pm y| \leq |x| + |y| \, .$$

Todistus. [22, s. 11] Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Koska $|-y| = |y|$, riittää todistaa tapaus $|x + y|$. Itseisarvon määritelmän nojalla tiedetään, että $-|x| \leq x \leq |x|$, joten

$$x \leq |x| \, , \; -x \leq |x| \, , \; y \leq |y| \quad \text{ja} \quad -y \leq |y| \, .$$

Itseisarvon määritelmän nojalla

$$\begin{array}{rcll} |x+y| & = & x+y, & \text{kun } x+y \geq 0, \\ |x+y| & = & -(x+y), & \text{kun } x+y < 0. \end{array}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} &|x+y| = x+y \leq |x| + |y| \, , && \text{kun } x+y \geq 0, \\ &|x+y| = -(x+y) = -x + (-y) \leq |x| + |y| \, , && \text{kun } x+y < 0. \end{aligned}$$

Siis

$$|x + y| \leq |x| + |y| \, .$$

□

Lause 2.2 (Käänteinen kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y|\,.$$

Todistus. [22, s. 12] Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Kuten edellisessa lauseessa riittää todistaa tapaus $|x + y|$, koska $|-y| = |y|$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}|x| &= |-y + x + y| = |(-y) + (x + y)| \leq |y| + |x + y|\,,\\ |y| &= |-x + x + y| = |(-x) + (x + y)| \leq |x| + |x + y|\,,\end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}|x| - |y| &\leq |x + y|\,,\\ -(|x| - |y|) &\leq |x + y|\,.\end{aligned}$$

Itseisarvon määritelmän nojalla

$$\begin{array}{lclcll}||x| - |y|| & = & |x| - |y| & \leq & |x + y|\,, & \text{kun } |x| - |y| \geq 0,\\ ||x| - |y|| & = & -(|x| - |y|) & \leq & |x + y|\,, & \text{kun } |x| - |y| < 0.\end{array}$$

Siis

$$||x| - |y|| \leq |x + y|\,.$$

□

Lause 2.3. [22, s. 9] Joukko $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, on rajoitettu täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että $|a| \leq M$ kaikilla $a \in A$.

Todistus. Tulos seuraa suoraan määritelmästä 2.3. □

Määritelmä 2.5. [22, s. 17] Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Jos joukon A ylärajojen joukossa on pienin, niin se on joukon A *pienin yläraja* eli *supremum*. Tämä merkitään $\sup A$.

Määritelmä 2.6. [22, s. 17] Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Jos joukon A alarajojen joukossa on suurin, niin se on joukon A *suurin alaraja* eli *infimum*. Tämä merkitään $\inf A$.

Huomautus 2.2. *Reaalilukujoukon olemassa olevat supremum ja infimum ovat yksikäsitteiset.*

Lause 2.4. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Tällöin* $\sup A = G$*, jos ja vain jos*

(i) $x \leq G$ *kaikilla* $x \in A$*,*

(ii) *kaikilla* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $x \in A$ *siten, että* $x > G - \varepsilon$*.*

Todistus. [22, s. 19–20] Oletetaan ensin, että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa. Osoitetaan, että G on joukon A pienin yläraja.

1. Kohdan (i) nojalla tiedetään, että G on eräs joukon A yläraja.

2. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että G ei ole joukon A pienin yläraja. Tällöin on olemassa joukon A yläraja $G - \varepsilon$, missä $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$). Tästä seuraa, että kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq G - \varepsilon$. Tämä on ristiriita, koska ehdon (ii) nojalla on olemassa $x \in A$ siten, että $x > G - \varepsilon$.

Kohdista 1 ja 2 seuraa supremumin määritelmän nojalla, että $\sup A = G$.

Oletetaan sitten, että $\sup A = G$. Osoitetaan, että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa.

1. Koska G on joukon A yläraja, niin kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq G$.

2. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq G - \varepsilon$. Tästä seuraa, että $G - \varepsilon$, mikä on pienempi kuin G, on joukon A yläraja. Tämä on ristiriita, sillä $\sup A = G$.

Kohdista 1 ja 2 seuraa, että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa. □

Lause 2.5. [22, s. 19–20] *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Tällöin* $\inf A = g$*, jos ja vain jos*

(i) *$x \geq g$ kaikilla $x \in A$,*

(ii) *kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $x \in A$ siten, että $x < g + \varepsilon$.*

Todistus. Vastaavasti kuin lauseessa 2.4. □

2.2 Lukujono

Määritelmä 2.7. [22, s. 23; 31, s. 35, 98] *Lukujono* (x_n) on lukujen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

muodostama jono, missä $x_n \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Jonon jäseniä kutsutaan *termeiksi* ja indeksi ilmaisee termin järjestysnumeron.

Lukujonoa

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots,$$

missä $n_1, n_2, \cdots \in \mathbb{Z}_+$ ja $n_1 < n_2 < \ldots$, kutsutaan lukujonon $x_1, x_2, \ldots$ *osajonoksi.*

Huomautus 2.3. [22, s. 23] *Lukujonon kannalta indeksoinnin alkaminen ykkösestä ei ole ratkaisevaa. Lukujonoksi voidaan myös kutsua lukujonoa*

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots.$$

Huomautus 2.4. [31, s. 35] *Jono on* päättymätön*, kun jonon indeksijoukko on ääretön. Joskus lukujonoksi kutsutaan myös jonoa, jonka indeksijoukko on äärellinen, jolloin jono on* päättyvä*.*

Määritelmä 2.8. [22, s. 24; 31, s. 55–57] Lukujonolla (x_n) on *raja-arvo* $x \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Tällöin lukujono (x_n) *suppenee* tai *konvergoi* (engl. converge) kohti reaalilukua x ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Jos lukujono (x_n) ei suppene kohti mitään reaalilukua x, jono (x_n) *hajaantuu*.

Huomautus 2.5. [22, s. 25] *Lukujonolla (x_n) on raja-arvo x täsmälleen silloin, kun jostakin indeksin n arvosta n_ε lähtien kaikki jonon termit x_n kuuluvat väliin $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.*

Lause 2.6. *Suppenevan lukujonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. [22, s. 28; 31, s. 57–58] Tehdään vastaoletus: lukujonolla (x_n) on raja-arvot x ja y ja $x \neq y$. Tällöin määritelmän 2.8 nojalla on olemassa positiiviset kokonaisluvut n_1 ja n_2 siten, että

$$|x_n - x| < \tfrac{1}{2}\,|x - y| \qquad \text{kaikilla } n > n_1$$

ja

$$|x_n - x| < \tfrac{1}{2}\,|x - y| \qquad \text{kaikilla } n > n_2.$$

Olkoon $n > \max\{n_2, n_2\}$. Tällöin kolmioepäyhtälön (lause 2.1) nojalla

$$\begin{aligned}
|x - y| &= |(x - x_n) + (x_n - y)| \\
&\leq |x - x_n| + |x_n - y| \\
&< \tfrac{1}{2}\,|x - y| + \tfrac{1}{2}\,|x - y| \\
&= |x - y|\,.
\end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on todistettu vääräksi. □

Määritelmä 2.9. [31, s. 45] Lukujono $(x_n), n = m, m+1, \ldots,$ on *kasvava*, jos

$$x_{n+1} \geq x_n \qquad \text{kaikilla} \quad n \geq m,$$

ja *vähenevä*, jos

$$x_{n+1} \leq x_n \qquad \text{kaikilla} \quad n \geq m.$$

Kasvava tai vähenevä lukujono on *monotoninen*.

Lukujono on *aidosti kasvava*, jos $a_{n+1} > a_n$ kaikilla $n \geq m$. Vastaavasti se on *aidosti vähenevä*, jos $a_{n+1} < a_n$ kaikilla $n \geq m$. Aidosti kasvava tai vähenevä lukujono on *aidosti monotoninen*.

Määritelmä 2.10. [22, s. 29] Lukujono (x_n) on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa luku $M \in \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $x_n \leq M$.

Määritelmä 2.11. [22, s. 29] Lukujono (x_n) on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa luku $m \in \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $x_n \geq m$.

Määritelmä 2.12. [22, s. 29; 31, s. 64] Lukujono (x_n) on *rajoitettu*, jos on olemassa luku $M \in \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $|x_n| \leq M$.

Lause 2.7. *Suppeneva lukujono on rajoitettu.*

Todistus. [22, s. 30; 31, s. 64] Valitaan $\varepsilon = 1$. Koska lukujono suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja määritelmän 2.8 nojalla on olemassa $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|x_n - x| < 1, \qquad \text{kun } n > n_1.$$

Kolmioepäyhtälön (lause 2.1) mukaan

$$\begin{aligned} |x_n| &= |(x_n - x) + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &< |x| + 1 \end{aligned}$$

kaikilla $n > n_1$. Merkitään $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_1}|, 1 + |x|\}$. Tällöin

$$|x_n| \leq M$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten lukujono (x_n) on rajoitettu. □

Lause 2.8 (Monotonisten jonojen peruslause)**.** *Jos lukujono (x_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin jono (x_n) suppenee.*

Todistus. [22, s. 41] Olkoon (x_n) jokin kasvava ylhäältä rajoitettu lukujono. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään

$$K = \sup\{x_n | n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Tällöin lauseen 2.4 nojalla $x_n \leq K$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $x_{n_\varepsilon} > K - \varepsilon$.

Koska lukujono (x_n) on kasvava, niin

$$x_n > K - \varepsilon$$

kaikilla $n > n_\varepsilon$. Lukujonon kaikki termit x_n kuuluvat siis väliin $]K - \varepsilon, K + \varepsilon[$ jostakin indeksin n arvosta n_ε lähtien, joten huomautuksen 2.5 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} x_n = K.$$

□

Lause 2.9. [22, s. 42] Jos lukujono (x_n) on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin jono (x_n) suppenee.

Todistus. Vastaavasti kuin lauseessa 2.8. □

Lause 2.10. *Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$*, niin on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$*, että*

$$|x_n| > \frac{|x|}{2}$$

kaikilla $n > n_0$*.*

Todistus. [22, s. 31] Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $x \neq 0$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$$

kaikilla $n > n_0$. Tällöin

$$|x| = |x_n - (x_n - x)| \leq |x_n| + |x_n - x| < |x_n| + \frac{|x|}{2}$$

kaikilla $n > n_0$, joten

$$|x_n| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

kaikilla $n > n_0$. □

Seuraavassa lauseessa esitetään raja-arvoja koskevia laskusääntöjä.

Lause 2.11. *Olkoon* α *reaaliluku. Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *ja* $\lim_{n\to\infty} y_n = m$*, niin*

(i) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = l + m$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha l$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = lm$.

Jos lisäksi $m \neq 0$ *ja* y_n *on aina nollasta eroava, niin*

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{m}$,

(v) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$.

Todistus. [31, s. 64–66; 22, s. 70; 33, s. 579, 585–586; 35, s. 15–16]

(i) Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = m$, niin jokaista positiivista lukua ε kohti on olemassa sellaiset luonnolliset luvut n_1 ja n_2, että

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{kun } n > n_1,$$

ja

$$|y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{kun } n > n_2.$$

Tällöin kun $n > \max\{n_1, n_2\}$, niin

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (l + m)| &= |(x_n - l) + (y_n - m)| \\ &\leq |x_n - l| + |y_n - m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Jos $\alpha = 0$, niin väite on tosi. Oletetaan siis, että $\alpha \neq 0$.

Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, niin jokaista positiivista lukua ε kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku n_1, että

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}, \qquad \text{kun } n > n_1.$$

Nyt kaikilla $n > n_1$ pätee, että

$$\begin{aligned} |\alpha x_n - \alpha l| &= |\alpha(x_n - l)| \\ &= |\alpha|\, |x_n - l| \\ &< |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) Olkoon $\varepsilon > 0$. Kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$\begin{aligned} |x_n y_n - lm| &= |(x_n y_n - x_n m) + (x_n m - lm)| \\ &= |x_n(y_n - m) + m(x_n - l)| \\ &\leq |x_n(y_n - m)| + |m(x_n - l)| \\ &= |x_n|\, |y_n - m| + |m|\, |x_n - l| \,. \end{aligned}$$

Koska lukujono (x_n) suppenee, se on rajoitettu ja tällöin on olemassa $M > 0$ siten, että $|x_n| \leq M$ kaikilla luvuilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Koska $|m| < |m| + 1$, saadaan

$$|x_n y_n - lm| \leq M\, |(y_n - m)| + (|m| + 1)\, |x_n - l| \tag{2.1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Koska $\lim_{n\to\infty} y_n = m$, on olemassa $k_1 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$\text{jos } n > k_1, \qquad \text{niin } |y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, on olemassa $k_2 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$\text{jos } n > k_2, \qquad \text{niin } |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}.$$

Molemmat ehdot pätevät, kun $n > \max\{k_1, k_2\}$, ja tällöin

$$M\, |y_n - m| + (|m| + 1)\, |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Yhtälön (2.1) perusteella voidaan päätellä, että

$$\text{jos } n > \max\{k_1, k_2\}, \qquad \text{niin } |x_n y_n - lm| < \varepsilon.$$

Täten on todistettu, että $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = lm$.

(iv) Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $m, y_n \neq 0$. Nyt

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m - y_n}{y_n m} \right| = \frac{|y_n - m|}{|y_n|\,|m|}.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} y_n = m$, niin lauseen 2.10 nojalla on olemassa $k_1 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että jos $n > k_1$

$$|y_n| > \frac{|m|}{2}, \qquad \text{jolloin } \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|m|}.$$

Näin ollen, kun $n > k_1$, niin

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{2}{|m|^2} |y_n - m|\,.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} y_n = m$ ja $m \neq 0$, on olemassa $k_2 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$\text{jos } n > k_2, \qquad \text{niin } |y_n - m| < \frac{\varepsilon\,|m|^2}{2}.$$

Täten, kun $n > \max\{k_1, k_2\}$, niin

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{2}{|m|^2} |y_n - m| < \varepsilon.$$

Tällöin on todistettu, että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{m}$.

(v) Todistus seuraa suoraan (iii)- ja (iv)-kohdista:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = l \cdot \frac{1}{m} = \frac{l}{m}.$$

□

Määritelmä 2.13 (Rekursiivinen lukujono)**.** [29, s. 41–42] Lukujono (a_n), $n \in \mathbb{Z}_+$, määritellään *rekursiivisesti* seuraavalla tavalla:

(i) (Alkuarvot). Ilmoitetaan a_1, a_2, ... a_k.

(ii) (Rekursiokaava). Kun $n \geq k$, esitetään miten a_{n+1} riippuu lukujonon jäsenistä a_n, a_{n-1}, ..., a_{n-k+1}.

Esimerkki 2.1 (Fibonaccin lukujono)**.** [29, s. 42] Jokainen jäsen Fibonaccin lukujonossa on kahden edellisen jäsenen summa. Jono määritellään rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$$\begin{cases} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 3. \end{cases}$$

Fibonaccin lukujono on muotoa

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

ja on saanut nimensä italialaisen matemaatikon Leonardo Fibonacci da Pisan (n. 1175 – 1250) mukaan.

Määritelmä 2.14 (Aritmeettinen lukujono)**.** [29, s. 35] Lukujono on *aritmeettinen*, jos jonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio eli

$$a_{n+1} - a_n = d$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Vakiota $d \in \mathbb{R}$ kutsutaan *erotusluvuksi.*

Lause 2.12. *Aritmeettisen jonon yleinen termi*

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Todistus. [29, s. 35–36] Todistetaan väite induktiolla.
Perusaskel. Koska $a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1$, niin väite on tosi, kun $n = 1$.
Induktio-oletus. Väite on tosi, kun $n = k$, eli $a_k = a_1 + (k-1)d$.
Induktioväite. Väite on tosi, kun $n = k + 1$.
Induktioväitteen todistus. Induktio-oletuksen perusteella $a_k = a_1 + (k-1)d$, joten

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd = a_1 + ((k+1)-1)d.$$

Väite on näin ollen tosi arvolla $n = k+1$, joten induktioperiaatteen perusteella väite on tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. □

Määritelmä 2.15 (Geometrinen lukujono)**.** [29, s. 36] Lukujono on *geometrinen*, jos jonon kahden peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Vakiota $q \in \mathbb{R}$ kutsutaan *suhdeluvuksi.*

Lause 2.13. *Geometrisen lukujonon yleinen termi*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Todistus. [6, s. 8] Todistetaan väite induktiolla.
Perusaskel. Koska $a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1$, niin väite on tosi, kun $n = 1$.
Induktio-oletus. Väite on tosi, kun $n = k$, eli $a_k = a_1 q^{k-1}$.
Induktioväite. Väite on tosi, kun $n = k + 1$.
Induktioväitteen todistus. Koska

$$q = \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

niin induktio-oletuksen nojalla

$$a_{k+1} = qa_k = qa_k q^{k-1} = aq^k = aq^{(k+1)-1}.$$

Väite on näin ollen tosi arvolla $n = k+1$, joten induktioperiaatteen perusteella väite on tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. □

2.3 Summa

Määritelmä 2.16. [22, s. 6] Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *summaa* merkitään

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Huomautus 2.6. [22, s. 6] *On mahdollista muuttaa summan rajoja, kunhan kompensoidaan muutos vastaavasti summattavan lausekkeessa. Määritelmän* 2.16 *summa voidaan esimerkiksi kirjoittaa muotoon*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=5}^{n+4} a_{i-4}.$$

Huomautus 2.7. [22, s. 6] *Summausindeksin merkintäkirjain voidaan valita vapaasti. Määritelmän* 2.16 *summassa voidaan yhtä hyvin valita indeksit siten, että*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Huomautus 2.8. [23, s. 49] *Äärellisessä summassa $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ voidaan vaihtaa yhteenlaskettavien järjestystä ilman, että summan arvo muuttuu. Summan arvo ei myöskään muutu, jos lisätään tai poistetaan sulkuja. Äärellisen summan arvo on aina yksikäsitteinen.*

Lause 2.14 (Aritmeettinen summa)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Summaa*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

kutsutaan aritmeettiseksi summaksi.

Todistus. [29, s. 36] Todistetaan väite induktiolla.
Perusaskel. Koska
$$S_1 = a_1 = 1 \cdot \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1,$$
niin väite on tosi, kun $n = 1$.
Induktio-oletus. Väite on tosi, kun $n = k$, eli $S_k = k \cdot \dfrac{a_1 + a_k}{2}$.
Induktioväite. Väite on tosi, kun $n = k + 1$.
Induktioväitteen todistus. Induktio-oletuksen nojalla
$$S_k = k \cdot \frac{a_1 + a_k}{2}$$
ja lauseen 2.12 nojalla $a_n = a_1 + (n - 1)d$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin
$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1} \\
&= S_k + a_{k+1} \\
&= k \cdot \frac{a_1 + a_k}{2} + a_{k+1} \\
&= k \cdot \frac{a_1 + a_1 + (k-1)d}{2} + a_1 + kd \\
&= (k+1)a_1 + \frac{k(k+1)}{2} d \\
&= (k+1)\left(a_1 + \frac{k}{2} d\right) \\
&= (k+1)\left(\frac{2a_1 + kd}{2}\right) \\
&= (k+1)\left(\frac{a_1 + (a_1 + kd)}{2}\right) \\
&= (k+1)\left(\frac{a_1 + a_{k+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$
Väite on siis tosi arvolla $n = k + 1$, joten induktioperiaatteen perusteella väite on tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

□

Lause 2.15 (Geometrinen summa)**.** *Olkoon* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Summaa*
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ kun } q \neq 1,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 = na_1, \text{ kun } q = 1,$$
kutsutaan geometriseksi summaksi.

Todistus. [6, s. 8] Todistetaan tapaus $q \neq 1$ induktiolla.
Perusaskel. Koska

$$S_1 = a_1 = a_1 \cdot \frac{1-q}{1-q} = a_1,$$

niin väite on tosi, kun $n = 1$.
Induktio-oletus. Väite on tosi, kun $n = k$, eli $S_k = a_1 \cdot \dfrac{1-q^k}{1-q}$.
Induktioväite. Väite on tosi, kun $n = k + 1$.
Induktioväitteen todistus. Koska $q \neq 1$, niin induktio-oletuksen nojalla

$$S_k = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

ja lauseen 2.13 nojalla $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + a_{k+1} \\
&= S_k + a_{k+1} \\
&= a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q} + a_{k+1} \\
&= a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q} + a_1 q^k \\
&= a_1 \left(\frac{1-q^k}{1-q} + q^k \right) \\
&= a_1 \left(\frac{1-q^k}{1-q} + \frac{q^k - q^k q}{1-q} \right) \\
&= a_1 \left(\frac{1-q^k + q^k - q^k q}{1-q} \right) \\
&= a_1 \left(\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right).
\end{aligned}$$

Väite on siis tosi arvolla $n = k + 1$, joten induktioperiaatteen perusteella väite on tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Jos $q = 1$, niin geometrinen summa

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = na_1.$$

□

2.4 Sarja

Määritelmä 2.17. [23, s. 48; 31, s. 36] Olkoon (x_k), $k = 1, 2, \ldots$, reaalilukujono ja (S_n), $n = 1, 2, \ldots$, toinen lukujono, jonka termi on

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Sanotaan, että (S_n) on *sarja* (engl. series), joka muodostuu lukujonon (x_n) jäsenistä. Luku x_n on *sarjan n:s termi* ja luku S_n *sarjan osasumma*.

Määritelmä 2.18. [23, s. 48; 31, s. 60] Jos raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

on äärellisenä olemassa, niin sarja (S_n) *suppenee* ja raja-arvo S on *sarjan* (S_n) *summa*. Tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S.$$

Jos raja-arvo ei ole äärellisenä olemassa, sarja *hajaantuu*.

Huomautus 2.9. [23, s. 48] *Määritelmässä* 2.18 *käytetty merkintä*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

voi tarkoittaa sekä sarjaa että suppenevan sarjan summaa.

Huomautus 2.10. [23, s. 49] *Sarjan termien indeksointia ei välttämättä ole aloitettava ykkösestä. Jos sarjan indeksointi alkaa jostakin kokonaisluvusta p, voidaan vastaavasti määritellä*

$$\sum_{k=p}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{n} x_k.$$

Lause 2.16. Geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \dots$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $|q| < 1$. *Tällöin*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Todistus. [23, s. 52; 31, s. 36, 60–61] Lauseen 2.15 perusteella

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{kun } q \neq 1, \\ n, & \text{kun } q = 1. \end{cases}$$

Jos $|q| < 1$, niin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Jos $|q| \geq 1$, niin raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ei ole äärellisenä olemassa. Täten geometrinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun $|q| < 1$, ja tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

□

Huomautus 2.11. [23, s. 52] *Jos* $|q| < 1$, *niin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-(1-q)}{1-q} = \frac{q}{1-q}.$$

Lause 2.17. *Jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee, niin* $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

Todistus. [23, s. 57] Kun sarja suppenee, osasummien jonoilla (S_n) ja (S_{n-1}) on sama raja-arvo S, eli

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Täten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Huomautus 2.12. [23, s. 57] *Edellinen lause ei päde kääntäen. Esimerkiksi harmoninen sarja hajaantuu (määritelmä* 2.21, *lause* 2.24*), vaikka sen termin raja-arvo on nolla.*

Lause 2.18. *Jos* $\lim_{k\to\infty} x_k \neq 0$, *niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu.*

Todistus. [23, s. 57] Tulos seuraa suoraan lauseesta 2.17. □

Seuraavaksi esitetään sarjojen laskutoimituksiin liittyviä tuloksia.

Lause 2.19. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = T$ *ja* $c \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

i) $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot x_k = c \cdot S$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) = S + T$.

Todistus. [23, s. 58] Äärellisten summien perusominaisuuksien ja oletusten nojalla

i) $S_n = \sum_{k=1}^{n} c \cdot x_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \to c \cdot S$, kun $n \to \infty$,

ii) $S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \to S + T$, kun $n \to \infty$.

□

Huomautus 2.13. [23, s. 58] *Lauseessa* 2.19 *sarjan summan olemassaolo sisältää oletuksen, että sarja suppenee.*

Lause 2.20. *Jos $c \neq 0$ ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot x_k$ hajaantuu.*

Todistus. [23, s. 59] Tehdään vastaoletus, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot x_k$$

suppenee. Tällöin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot x_k$$

suppenee lauseen 2.19 perusteella, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

Määritelmä 2.19. [23, s. 51; 31, s. 13] Sarjaa kutsutaan *teleskooppiseksi*, jos sen termit x_k voidaan esittää muodossa

$$x_k = a_k - a_{k+1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Teleskooppinen sarja suppenee, jos lukujonolla (a_k) on raja-arvo.

Määritelmä 2.20. [23, s. 64] Sarja on *positiiviterminen*, jos sen termit ovat ei-negatiivisia. Sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

on siis positiiviterminen, kun $x_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$.

Lause 2.21. *Positiiviterminen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun sen osasummien jono (S_n) on ylhäältä rajoitettu.*

Todistus. [23, s. 64] Positiivitermisen sarjan osasummien jono (S_n) on kasvava, koska positiiviterminen sarja koostuu ei-negatiivisista termeistä. Jos jono (S_n) lisäksi on ylhäältä rajoitettu, niin raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

on monotonisten jonojen peruslauseen (lause 2.8) nojalla olemassa, joten sarja suppenee. Jos taas jono (S_n) ei ole ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty,$$

joten sarja hajaantuu. □

Lause 2.22 (Majoranttiperiaate). *Olkoon* $0 \leq x_k \leq y_k$ *kaikilla* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Jos sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenee, niin myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenee.

Todistus. [23, s. 68; 31, s. 113] Koska sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenee, niin on olemassa sellainen $T \in \mathbb{R}$, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = T.$$

Koska $y_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, niin

$$T_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq T$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Koska $x_k \leq y_k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, niin

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq T$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Siis sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ osasummien jono (S_n) on ylhäältä rajoitettu, joten lauseen 2.21 nojalla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenee. □

Lause 2.23 (Minoranttiperiaate). *Olkoon* $0 \leq y_k \leq x_k$ *kaikilla* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Jos sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

hajaantuu, niin myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

hajaantuu.

Todistus. [23, s. 69; 31, s. 113] Jos sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenisi, niin myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenisi majoranttiperiaatteen nojalla, mikä on ristiriita oletusten kanssa. $\square$

Määritelmä 2.21. [31, s. 114] Positiiviterminen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots ,$$

missä $\alpha \in \mathbb{R}$, on

harmoninen, jos $\alpha = 1$,

aliharmoninen, jos $\alpha < 1$,

yliharmoninen, jos $\alpha > 1$.

Lause 2.24. *Harmoninen sarja hajaantuu.*

Todistus. [31, s. 114–115] Arvioidaan harmonisen sarjan osasummia S_4, S_8, S_{16}, ... seuraavasti:

$$\begin{aligned}
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2 = 1 + \frac{2}{2}, \\
S_8 &= S_4 + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) > 2 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{2} = 1 + \frac{3}{2}, \\
S_{16} &= S_8 + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) > \frac{5}{2} + 8 \cdot \frac{1}{16} = 3 = 1 + \frac{4}{2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Koska $S_n > 1 + \dfrac{m}{2}$, kun $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, niin harmonisen sarjan osasummien osajono $S_4, S_8, S_{16}, \ldots$ ei ole ylhäältä rajoitettu, joten lauseen 2.21 nojalla harmoninen sarja ei voi supeta. Siis harmoninen sarja hajaantuu. $\square$

Lause 2.25. *Aliharmoninen sarja hajaantuu.*

Todistus. [31, s. 114–115] Olkoon k^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$. Kun $\alpha < 1$ ja $k \geq 2$, niin $k > k^{\alpha}$, ja edelleen $\dfrac{1}{k^{\alpha}} > \dfrac{1}{k}$. Koska harmoninen sarja hajaantuu (lause 2.24), niin minoranttiperiaatteen nojalla (lause 2.23) myös aliharmoninen sarja hajaantuu. $\square$

Lause 2.26. *Yliharmoninen sarja suppenee.*

Todistus. [31, s. 114–115] Merkitään $\alpha = 1 + \delta$, $\delta > 0$. Kun $\dfrac{k}{j} > 1$ ja $\alpha > 1$, niin

$$\left(\frac{k}{j}\right)^{\alpha} > 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{k^{\alpha}} < \frac{1}{j^{\alpha}}.$$

Yliharmonisen sarjan osasummia $S_3, S_7, \ldots$ voidaan arvioida seuraavasti:

$$\begin{aligned}
S_3 &= 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}\right) < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{-1}} \cdot \frac{1}{2^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{-1+\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\delta}},\\
S_7 &= S_3 + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{7^{\alpha}}\right) < 1 + \frac{1}{2^{\delta}} + 4 \cdot \frac{1}{4^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\delta}} + \frac{1}{4^{\delta}} = 1 + \frac{1}{2^{\delta}} + \left(\frac{1}{2^{\delta}}\right)^{2},\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Siis, kun $n = 2^m - 1$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, niin

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^{\delta}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\delta}}\right)^{m-1} < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\delta}}\right)^{k}.$$

Saatu summa on geometrinen summa, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{2^{\delta}} < 1$. Geometrisen sarjan suppenemisen (lause 2.16) perusteella

$$S_n < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\delta}}\right)^{k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\delta}}} = \frac{2^{\delta}}{2^{\delta} - 1}.$$

Sarjan osasummien jono on rajoitettu, joten lauseen 2.21 nojalla sarja suppenee. □

3 Opetussuunnitelmat

3.1 Opetussuunnitelma yleisesti

Yksiselitteistä opetussuunnitelman määritelmää ei ole olemassa. Lyhyesti voidaan kuitenkin sanoa, että opetussuunnitelmaan sisältyy lähes aina opetuksen tavoitteet, oppisisällöt, toteutus ja arviointi. Sen lisäksi opetussuunnitelma on aina laadittu kirjallisena ja toimii virallisena asiakirjana. [37, s. 50–51]

Opetussuunnitelma on siis koulun, opetuksen ja opettajan keskeisin toimintaohje. Opetussuunnitelmassa nostetut asiasisällöt, arviointimenetelmät ja arvot pitää kouluarjessa myös olla nähtävissä ja osana toimintakulttuuria. Opetussuunnitelma heijastaa yhteiskunnan arvoja, koska opetussuunnitelman kautta voidaan

> *”suunnata koulun toimintaa sekä määritellä ja saavuttaa sellaisia tavoitteita, joita pidetään arvokkaina ja tärkeinä”.* [13, s. 7–13]

Opetussuunnitelman laatiminen on aktiivinen ja jatkuva kehittämisprosessi ja opetussuunnitelmasta on olemassa monenlaisia tulkintoja. Siksi on ongelmallista löytää yhtä tyhjentävää määrittelyä opetussuunnitelmalle. Voidaan kuitenkin yleisesti jakaa opetussuunnitelmat kahteen tyyppiin: *Lehrplan-* ja *curriculum*. Lehrplan-tyyppisessä opetussuunnitelmassa tuntijako on keskeinen ja siinä keskitytään oppiaineisiin ja niiden sisältöihin. Curriculum-tyyppinen opetussuunnitelma sen sijaan keskittyy enemmän didaktiikkaan ja pedagogiikkaan. Suomessa on yritetty yhdistää näitä kahta tyyppiä opetussuunnitelmaa laadittaessa. Lukemisen, kirjoittamisen ja laskemisen taidot ovat aina olleet tärkeässä asemassa suomalaisissa opetussuunnitelmissa. [13, s. 9, 12, 14]

Opetussuunnitelmat voidaan myös kategorisoida eri diskriminanttien, eli määräävien tekijöiden, kautta. *Oppiainepainoitteisessa* opetussuunnitelmassa keskitytään opittavaan asiaan tieteen näkökulmaan pohjaten. *Oppilaspainoitteisessa* opetussuunnitelmassa lähtökohtana toimii yksilön kehittäminen ja tärkeänä pidetään elämänläheisyyttä ja ongelmanratkaisua. Opetussuunnitelma voi myös olla *yhteiskuntapainotteinen*, jolloin erityisesti yhteiskunnan tarpeita huomioidaan opetussuunnitelman tavoitteita asetettaessa. [37, s. 52–53]

Opetussuunnitelman edustama tiedorakenne on kuitenkin vain yksi tiedon tulkinta. Se sitoutuu väistämättä johonkin tiettyyn arvojärjestelmään ja on aina poliittisten päätösten kohde. Opetussuunnitelma heijastaa myös aina tekijöidensä omaa näkemystä yhteiskunnallisesta elämästä, ihmisestä ja oppimisesta, joten yhteiskunnassa vallitsevat arvot ja normit sekä yhteiskunnassa tapahtuvat muutokset vaativat jatkuvaa opetussuunnitelman muutosta. Koulumuodot sekä opetussuunnitelmat heijastelevat siis oman aikakautensa arvoja, uskomuksia ja sosiaalisia pyrkimyksiä. [13, s. 10, 14]

3.2 Lukion opetussuunnitelma 2003

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 julkaistiin 27.8.2003 ja ne saivat 15.8.2003 hyväksynnän opetushallituksen johtokunnalta. Opetussuunnitelma otettiin käyttöön opetuksessa asteittain 1.8.2005 alkaen. [27]

Tässä luvussa esitetään vuoden 2003 opetussuunnitelman yleiset tavoitteet, matematiikan yleiset tavoitteet ja arviointiperusteet, matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän tavoitteet sekä ne kurssien keskeiset sisällöt ja tavoitteet, jotka sisältävät lukujonoja, summia ja sarjoja.

3.2.1 Yleiset tavoitteet

Lukiokoulutuksen tarkoituksena on vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteiden mukaan antaa laaja-alainen yleissivistys sekä valmiudet vastata yhteiskunnan ja ympäristön haasteisiin. Opiskelijasta pitäisi kasvaa vastuuntuntoinen ja velvollisuuksistaan huolehtiva kansalainen, joka voi vastata tulevaisuuden työelämän haasteisiin. [27, s. 12]

Opiskelijassa tulisi lukiokoulutuksen aikana syntyä taito tarkastella asioita eri näkökulmista. Elinikäinen oppiminen, itsensä jatkuva kehittäminen sekä itsetuntemuksen kehitys nähdään tärkeinä taitoina. Lukiolaisen tulisi lukiokoulutuksensa aikana saada valmiuksia toimia sivistyneellä tavalla siten, että hän ottaa vastuun omista valinnoistaan ja teoistaan. Tärkeää on osata tehdä yhteistyötä, toimia kannustavassa vuorovaikutuksessa ja olla rehellinen. [27, s. 12]

Lukiokoulutuksessa pitäisi kunnoittaa elämää ja ihmisoikeuksia. Inhimillisyys, totuus ja oikeudenmukaisuus pitäisi opiskelijalle tulla tutuksi. Lisäksi opiskelija saa lukiokoulutuksen aikana työkaluja tasa-arvon toteuttamiseen, avoimeen demokratiaan sekä hyvinvoinnista huolehtimiseen. Lukiolaiselle tulisi myös käydä ilmi, että julkilausuttujen arvojen ja todellisuuden välillä on usein ristiriitoja. Yhteiskunnallisesta näkökulmasta pidetään tärkeänä, että opiskelija saa käsityksen Suomen, Pohjoismaiden ja Euroopan perusoikeuksista. Opiskelijan pitäisi saada valmiuksia kohdata muuttuvan maailman haasteita, muun muuassa kestävän kehityksen periaatteiden sekä oikeuksien ja velvollisuuksien kautta. [27, s. 12]

Opetussuunnitelma perustuu oppimiskäsitykseen, jonka mukaan

> *"oppiminen on seurausta opiskelijan aktiivisesta ja tavoitteellisesta toiminnasta, jossa hän vuorovaikutuksessa muiden opiskelijoiden, opettajan ja ympäristön kanssa ja aiempien tietorakenteidensa pohjalta käsittelee ja tulkitsee vastaanottamaansa informaatiota".* [27, s. 14]

Opetuksen tulisi järjestää siten, että opiskelijat ovat aktiivisia toimijoita ja vuorovaikutuksessa toisten opiskelijoiden, koulun henkilökunnan ja muiden yhteistyötahojen kanssa. Opetus tulee olla tiiviissä vuorovaikutuksessa opiskelijoiden kanssa, jolloin he voivat asettaa omia tavoitteitaan ja oppia työskentelemään itsenäisesti sekä yhteistoiminnallisesti. Opiskelijoille tulisi antaa ohjausta niin, että he voivat tiedostaa, arvioida ja mahdollisesti korjata omia työskentelytapojaan. Opetuksessa pitää huomioida erilaisia oppijoita käyttämällä vaihtelevia opetusmenetelmiä ja monipuolisia opiskelumuotoja sekä erilaisia oppimisympäristöjä. Opiskelijoille pitäisi antaa välineitä tiedon hankkimiseen ja tuottamiseen sekä tiedon luotettavuuden arviointiin. On tärkeää, että opiskelijat oppivat hyödyntämään tieto- ja viestintätekniikan sekä kirjastojen tarjoamia palveluja. [27, s. 14]

3.2.2 Yleiset tavoitteet matematiikassa

Vuoden 2003 lukion valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa nähdään matematiikan opetuksessa tärkeänä, että

> *"opetus tutustuttaa opiskelijaa matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhutta ja kirjoitettua matemaattista kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja".* [27, s. 118]

Opiskelijoita tulisi perehdyttää kysymysten esittämiseen sekä havaintojen, oletusten ja päätelmien tekemiseen. Samalla opiskelijoiden pitäisi myös saada valmiuksia osata perustella niitä. Opiskelijoita kannustetaan luoviin matemaattisiin ratkaisuihin. Matemaattisten käsitteiden merkitys pitää viestittää opiskelijoille, mutta matematiikan opetuksessa on myös olennaista yhdistää matematiikkaa ja arkielämää sekä kehittää opiskelijoiden tiedonhankintaprosesseja. [27, s. 118]

Lukion matematiikan opetuksen arvioinnin tulisi

> *"kehittää opiskelijan kykyä esittää ratkaisuja, tukea opiskelijaa matemaattisten käsitteiden muodostamisprosessissa ja arvioida kirjallista esitystä sekä opettaa opiskelijalle oman työnsä arvioimista. Osaamisen arvioinnissa kiinnitetään huomio laskutaitoon, menetelmien valintaan, päätelmien täsmälliseen ja johdonmukaiseen perustelemiseen".* [27, s. 118]

Yllä mainitut tavoitteet ovat kaikille opiskelijoille samat riippumatta siitä, minkä oppimäärän lukija opiskelija on. Seuraavissa luvuissa (3.2.3 ja 3.2.4) tutustutaan erikseen pitkän ja lyhyen oppimäärän yleisiin tavoitteisiin ja luvussa 3.2.5 esitetään ne kurssikohtaiset tavoitteet ja keskeiset sisällöt, jotka kuuluvat yhteen lukujonoihin, summiin ja sarjoihin.

3.2.3 Yleiset tavoitteet matematiikan pitkässä oppimäärässä

Matematiikan pitkän oppimäärän tehtävä on rakentaa matemaattista pohjaa tuleviin ammatillisiin opintoihin ja korkeakouluopintoihin. Opetuksessa tulisi myös nostaa esille matematiikan yhteiskunnallinen tärkeys ja sen soveltamismahdollisuuksia arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa. Opiskelijoiden pitäisi opinnoissaan saada ymmärrystä matemaattisen tiedon luonteesta ja matematiikalle ominaisista käsitteistä ja menetelmistä. [27, s. 118]

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteet ovat, että opiskelija

- *tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa*
- *rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin*
- *ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä*
- *oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena*
- *kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan*
- *harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä*
- *harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita*
- *osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.* [27, s. 118–119]

Matematiikan pitkän oppimäärän tarkoitus on siis saada aikaan sellaisia matematiikan osaajia, jotka osaavat sekä tulkita että tuottaa matemaattista tietoa monipuolisella tavalla. Opintojensa kautta pitkän oppimäärän lukijat oppivat toimimaan matematiikalle ominaisella tavalla ja matematiikka tieteenä tulee tutuksi.

3.2.4 Yleiset tavoitteet matematiikan lyhyessä oppimäärässä

Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tehtävänä sen sijaan on

> *"tarjota valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa."* [27, s. 125]

Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteet ovat, että opiskelija

- *osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä*

- *saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa, rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen*
- *hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille*
- *sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä*
- *saa käsityksen matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta*
- *harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota ja arvioimaan sen luotettavuutta*
- *tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä*
- *oppii käyttämään kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna.* [27, s. 125]

Matematiikan lyhyessäkin oppimäärässä on tärkeätä osata tulkita ja tuottaa matemaattista tietoa, mutta matematiikkaa sovelletaan ja käytetään enemmän arjen tarpeista käsin. Matematiikkaa ja sen osaaminen nähdään välineenä ja apuna käytännön ongelmissa.

3.2.5 Kurssikohtaiset tavoitteet ja sisällöt

Tässä luvussa esitetään lyhyesti, millä kursseilla lukujonoja, summia ja sarjoja opiskellaan sekä miten keskeiset sisällöt ja tavoitteet niihin liittyen kuvataan opetussuunnitelmassa.

Matematiikan pitkässä oppimäärässä lukujonot ja summat tulevat ensimmäisen kerran vastaan kurssilla *MAA9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. Trigonometrisen funktioiden -osuuden lisäksi on tärkeiksi käsitteiksi nostettu

- lukujono,
- rekursiivinen lukujono,
- aritmeettinen jono ja summa,
- geometrinen jono ja summa.

Lukujonojen ja summien kannalta kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää lukujonon käsitteen,
- oppii määrittelemään lukujonoja palautuskaavojen avulla,

– osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla. [27, s. 122–123]

Matematiikan pitkässä oppimäärässä osaamista syvennetään kurssilla *MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*. Lisäksi lukujonon ja summan käsitteitä laajennetaan tutkimalla lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia. Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu *funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä*. [27, s. 124]

Matematiikan lyhyessä oppimäärässä käsitellään lukujonoja ja summia kahdella kurssilla: *MAB6 Matemaattisia malleja II* ja *MAB7 Talousmatematiikka*. MAB6-kurssin keskeiset sisällöt ovat

– lukujono,

– aritmeettinen ja geometrinen jono ja summa.

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

– ymmärtää lukujonon käsitteen,

– ratkaisee käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja summan avulla. [27, s. 127–128]

Lyhyen oppimäärän kurssilla MAB7 käytetään MAB6-kurssilla opittua tietoa talousmatematiikan sovelluksiin. Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu *”taloudellisiin tilanteisiin soveltuvia matemaattisia malleja lukujonojen ja summien avulla”*. [27, s. 127–128]

3.3 Lukion opetussuunnitelma 2015

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 julkaistiin 27.10.2015 ja ne otetaan opetuksessa käyttöön vuosiluokka kerrallaan 1.8.2016 alkaen. [28]

Tässä luvussa esitetään vuoden 2015 opetussuunnitelman yleiset tavoitteet, matematiikan yleiset tavoitteet ja arviointiperusteet, matematiikan yhteisen opintokokonaisuuden tavoitteet, matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän tavoitteet sekä ne kurssien keskeiset sisällöt ja tavoitteet, joissa käsitellään lukujonoja, summia ja sarjoja.

3.3.1 Yleiset tavoitteet

Lukiokoulutuksen keskeisenä tavoitteena on vuoden 2015 opetussuunnitelman perusteissa laaja-alaisen yleissivistyksen vahvistaminen. Lukiolaisen tulisi saada olennaista ihmistä, kulttuureja, luontoa ja yhteiskuntaa koskevaa tietoa ja osaamista. Opiskelijassa tulisi myös syntyä ymmärrystä elämässä ja maailmassa vallitsevista monitahoisista keskinäisriippuvuuksista. Lukiokoulutuksen aikana tutkitaan laaja-alaisia ilmiöitä sekä syvennetään kiinnostusta tieteiden ja taiteen maailmaa kohtaan. Opiskelija saa valmiuksia pärjätä työelämässä sekä yleiset jatko-opintovalmiudet yliopistoihin ja ammattikorkeakouluihin. Tämä ilmenee esimerkiksi tulevaisuuden suunnitelmien laadinnassa sekä elinikäisen oppimisen työkalujen saamisessa. Tärkeänä pidetään myös vastuullista, myötätuntoista, yhteisöllistä ja merkityksellistä toimimista. Lukiokoulutuksen aikana opiskelija rakentaa identiteettiään, ihmiskäsitystään, maailmankuvaansa ja -katsomustaan sekä löytää paikkaansa yhteiskunnassa. [28, s. 12]

Lukiokoulutuksen arvoperustana toimii suomalainen sivistysperinne, jonka mukaan opiskelu ja oppiminen uudistavat yhteiskuntaa ja kulttuuria. Lukion sivistysihanne on pyrkimys totuuteen, inhimillisyyteen ja oikeudenmukaisuuteen. Lukiokoulutuksessa toimitaan elämää ja ihmisoikeutta kunnioittavalla tavalla sekä perus- ja ihmisoikeuksien taustalla olevien arvojen mukaisesti. Lisäksi edistetään myös tasa-arvoa, yhdenvertaisuutta, hyvinvointia ja demokratiaa. Lukiokoulutuksen aikana keskeiset perus- ja ihmisoikeusnormit sekä ihmisoikeussopimukset tulevat tutuksi. Opetuksen tulisi olla uskonnollisesti, katsomuksellisesti ja puoluepoliittisesti sitoutumamatonta.

Opetuksessa tutustutaan suomalaisen yhteiskunnan ja kansainvälisen kehityksen mahdollisuuksiin, vaihtoehtoihin ja epäkohtiin. Tärkeitä käsitteitä ovat osallisuus, toimijuus ja yhteisöllisyys. Opitaan kestäviä elämäntapoja ja ympäristön ja kansalaisten hyvinvointia edistävää taloutta. Opiskelija ymmärtää oman toimintansa ja globaalin vastuun merkityksen sekä tutustuu kansainväliseen yhteistyöhön osana maailmankansalaisuuden rakentamista. Tällöin löydetään yhteisiä hyvän elämän arvoja ja periaatteita sekä opitaan yhteistyön, inhimillisyyden sekä kulttuurin moninaisuutta. Tärkeänä pidetään myös keskinäistä välittämistä, huolenpitoa, luovuutta, aloitteellisuutta, rehellisyyttä ja sisukkuutta. [28, s. 12–13]

Opetussuunnitelma perustuu oppimiskäsitykseen, jonka mukaan

"oppiminen on seurausta opiskelijan aktiivisesta, tavoitteellisesta ja itseohjautuvasta toiminnasta".

Onnistumiset ja myönteiset oppimiskokemukset toimivat oppimisen edistäjinä. Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että opiskelija tulkitsee, analysoi ja arvioi eri muodossa esitettyä informaatiota ja rakentaa täten uutta tietoa. Osaaminen syventyy opiskelijan aikaisempien kokemusten ja tietojen pohjalta. Opiskelijan ajattelun kehittämisessä ja tarkoituksenmukaisessa työskentelyssä ohjaus ja rakentava palaute ovat merkittävässä osassa. Vuorovaikutus ja monimuotoinen oppiminen ovat keskeisessä roolissa opetuksessa. Opetuksessa tulisi huomioida käsitteiden, tiedonalojen ja osaamisen välisiä yhteyksiä. Opiskelija saa opintojensa aikana tietoisuuden omasta oppimisprosesseistaan sekä oppii arvioimaan ja kehittämään omia opiskelu- ja ajattelutaitojaan osana elinikäisen oppimisen prosessia. [28, s. 14]

Monipuolisia opetus-, ohjaus- ja opiskelumenetelmiä tulisi olla opetuksessa käytössä sillä tavalla, että opiskelija työskentelee aktiivisesti, kehittää yhteistyötaitojaan ja oppii suunnittelemaan opiskelunsa johdonmukaisesti ja vastuuntuntoisesti. Opiskeluympäristöjen ja -menetelmien valinta ja kehittäminen perustuu opiskelijoiden edellytyksiin, kiinnostuksen kohteisiin, näkemyksiin ja yksilöllisiin tarpeisiin. Oppimaan oppimista tapahtuu esimerkiksi tutkimisen, kokeilemisen ja ongelmanratkaisun kautta. Opetuksessa opiskelija oppii kriittistä ja luovaa ajattelua sekä hallitsee kokonaisuuksia ja saa oppiainerajat ylittävää osaamista. Tieto- ja viestintäteknologiaa tulisi käyttää monipuolisesti. Omien toiminta- ja työskentelytaitojen arvioiminen on tärkeää, kun opitaan ottamaan vastuuta omasta oppimisestaan. Opetuksessa tulisi tunnustaa ja muuttaa sukupuolittuneita asenteita ja käytänteitä.

Työskentely kytkee opiskeltavat tiedot ja taidot sekä kokemuksiin että ympäristössä ja yhteiskunnassa esiintyviin ilmiöihin. Opiskelijaa kannustetaan ongelmien havaitsemiseen, kysymysten esittämiseen ja vastausten etsimiseen. Opetuksessa käytetään monipuolisia ja opiskelumotivaatiota edistäviä opiskeluympäristöjä sekä hyödynnetään muiden oppilaitosten sekä erilaisten keskusten, laitosten, työelämän ja yritysten sekä muiden tahojen tarjoamia opiskeluympäristöjä monin tavoin. Myös digitaalisia opiskeluympäristöjä, oppimateriaaleja ja työvälineitä käytetään. Opetuksessa huomioidaan yksilöllistä etenemistä, henkilökohtaisia oppimispolkuja sekä verkko-opiskelutaitojen kehittämistä. [28, s. 14–15]

Lukioiden toimintakulttuurin kehittämistä ohjaavat teemat ovat oppiva yhteisö, osallisuus ja yhteisöllisyys, hyvinvointi ja kestävä tulevaisuus sekä kulttuurinen moninaisuus ja kielitietoisuus. [28, s. 15–17]

3.3.2 Yleiset tavoitteet matematiikassa

Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmassa perustellaan matematiikan tärkeyttä yhteiskunnallisesta näkökulmasta sekä huomautetaan matematiikan merkittävästä roolista tieteissä, teknologiassa, taloudessa, yrittäjyydessä, terveydenhuollossa ja turvallisuudessa. Matematiikan opetuksen tehtävänä on

> *”. . . tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.”* [28, s. 129]

Lukion matematiikan opetuksen tulisi lähteä liikkeelle opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista sillä tavalla, että opetustilanteet herättävät opiskelijoita tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Opetuksessa ohjataan opiskelijan kiinnostusta sekä tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä. [28, s. 129]

Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja ja opiskellaan sekä yksin että yhdessä. Lukiokoulutuksen aikana matemaattisten käsitteiden merkitykset selviävät ja ne liitetään osaksi laajempia kokonaisuuksia. Opetuksessa käytetään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä osataan siirtyä matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen. Kannustetaan tekemään luovia ratkaisuja sekä kokeilemaan erilaisia ratkaisuprosesseja matemaattisiin ongelmiin. Autetaan myös tiedonhankintaprosessien kehittymisessä. [28, s. 129]

Tietokoneohjelmistoja käytetään matematiikan oppimisen, tutkimisen ja ongelmanratkaisun apuvälineinä. Tietokoneohjelmistoihin kuuluu dynaamisen matematiikan sekä symbolisen laskennan työkaluja, tilasto-ohjelmistoja, taulukkolaskentaa, tekstinkäsittelyä ja mahdollisuuksien mukaan digitaalisia tiedonlähteitä. Samalla arvioidaan myös apuvälineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuuksia. [28, s. 129]

Arvioinnin tulisi matematiikassa olla monipuolista ja kannustavaa sillä tavalla, että se tukee opiskelijan matemaattisen ajattelun ja itseluottamuksen kehittymistä. Samalla ylläpidetään ja vahvistetaan opiskelumotivaatiota. Sen lisäksi

> *"arviointi ohjaa opiskelijaa kehittämään matematiikan osaamistaan ja ymmärtämistään sekä pitkäjänteisen työskentelyn taitoja. Sillä autetaan opiskelijaa kehittämään matemaattisten ratkaisujen esittämistä, tuetaan häntä käsitteiden muodostamisprosesissa ja ohjataan oman työn arvioimiseen. Onnistunut palaute auttaa opiskelijaa huomaamaan vahvuutensa sekä sen, mitä ja miten tietoja ja taitoja tulisi edelleen kehittää."* [28, s. 129]

Opetussuunnitelman matematiikan yleisissä tavoitteissa painottuu siis edelleen matemaattinen ymmärrys ja ajattelu sekä ratkaisujen ja mallinnuksien tekeminen. Tärkeämmäksi on nyt noussut erilaisten työtapojen ja tietokoneohjelmistojen hyödyntäminen.

3.3.3 Tavoitteet matematiikan yhteisessä opintokokonaisudessa

Aikaisemmissa opetussuunnitelmissa opiskelija on suoraan lukioon tullessa valinnut joko pitkän tai lyhyen matematiikan oppimäärän opiskeltavaksi. Vuoden 2015 opetussuunnitelmassa löytyy kaikille opiskelijoille yhteinen ja pakollinen opintokokonaisuus *MAY1 Luvut ja lukujonot*.

Opintokokonaisuuden tehtävä on herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan. Samalla tarjotaan opiskelijalle myös mahdollisuus vahvistaa omaa matemaattista osaamistaan. Matematiikan tieteellinen, yhteiskunnallinen, taloudellinen ja luonnollinen merkitys korostuu. [28, s. 130]

Tämän yhteisen opintokokonaisuuden jälkeen opiskelijat jakautuvat pitkän ja lyhyen matematiikan lukijoiksi.

3.3.4 Yleiset tavoitteet matematiikan pitkässä oppimäärässä

Matematiikan pitkän oppimäärän tarkoituksena on antaa matemaattinen yleissivistys sekä valmiuksia jatko-opintoihin. Opintojensa aikana opiskelija omaksuu matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä ymmärtää matemaattisen tiedon luonnetta. Opintojen tulisi antaa selkeä käsitys matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä matematiikan soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa. [28, s. 131]

Matematiikan opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- *saa myönteisiä oppimiskokemuksia ja tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn sekä oppii niiden kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa*
- *rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin*
- *ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä*
- *oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena*
- *kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan*
- *harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä*
- *harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita*
- *osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.* [28, s. 131]

Pitkän matematiikan oppimäärässä keskitytään selvästi matemaattisten taitojen kehittämiseen, matemaattisen tiedon ymmärtämiseen ja matematiikan luonteeseen. Tärkeänä pidetään myönteisten oppimiskokemusten saamista sekä teknisten apuvälineiden käyttämistä.

3.3.5 Yleiset tavoitteet matematiikan lyhyessä oppimäärässä

Lyhyen matematiikan opiskelija saa opintojensa aikana valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa sillä tavalla, että hän voi käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissaan. Opiskelija saa selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä soveltavismahdollisuuksista arkielämässä ja monissa eri tieteissä. [28, s. 136]

Lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- *osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä*
- *saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään, oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa ja rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen*

– *hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille*

– *sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä*

– *kehittää käsitystään matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta*

– *harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota ja arvioimaan sen luotettavuutta*

– *tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä*

– *osaa käyttää kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna*

– *osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.* [28, s. 136]

Lyhyen matematiikan oppimäärässä painopiste on matematiikka välineenä käytännöllisiin sovelluksiin ja matematiikan yhteys arkielämään. Lyhyessä matematiikassa harjoitellaan kuitenkin edelleen matemaattisia ratkaisutapoja, mallintamista sekä kuvioiden ja kaavioiden käyttämistä. Lyhyessäkin oppimäärässä pidetään tärkeänä myönteisten oppimiskokemusten saamista ja teknisten apuvälineiden käyttämistä.

3.3.6 Kurssikohtaiset tavoitteet ja sisällöt

Tässä osioissa esitetään lyhyesti, millä kursseilla lukujonoja, summia ja sarjoja käsitellään sekä miten sisällöt ja tavoitteet on opetussuunnitelmassa kuvattu.

Lukujonot ja summat tulevat ensimmäisen kerran vastaan heti yhteisessä opintokokonaisuudessa *MAY1 Luvut ja lukujonot*. Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluuvat

– lukujono,

– rekursiivinen lukujono,

– aritmeettinen jono ja summa,

– geometrinen jono ja summa. [28, s. 130]

Osa kurssin tavoitteista on, että opiskelija

– ymmärtää lukujonon käsitteen,

– osaa määrittää lukujonoja, kun annetaan alkuehdot ja tapa, jolla seuraavat termit muodostetaan,

– saa havainnollisen käsityksen lukujonon summan määrittämisestä,

– osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla,

– osaa käyttää teknisiä apuvälineitä lukujonojen tutkimisessa sekä lukujonoihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa. [28, s. 130]

Matematiikan pitkässä oppimäärässä käsitellään lukujonoja ja summia lisää kurssilla *MAA11 Lukuteoria ja todistaminen*, kun kurssin tavoitteiden mukaan *syvennetään ymmärrystä lukujonoista ja niiden summista*. [28, s. 135]

Osaamista syvennetään ja sarjoihin perehdytään pitkän oppimäärän kurssilla *MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*, jonka tavoitteiden mukaan opiskelija osaa

– tutkia lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia,

– käyttää teknisiä apuvälineitä lukujonon raja-arvon ja sarjan summan laskemisessa sovellustehtävissä,

ja jonka keskeisiin sisältöihin kuuluvat

– funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä,

– lukujonon raja-arvo, sarjat ja niiden summa. [28, s. 136]

Lyhyessä oppimäärässä mainitaan kurssin *MAB4 Matemaattisia malleja* osalta *"lukujonot matemaattisina malleina"* keskeisenä sisältönä ja *MAB6 Talousmatematiikka*-kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu *"taloudellisiin tilanteisiin soveltuvia matemaattisia malleja lukujonojen ja summien avulla"*. [28, s. 137–138]

Lyhyessä oppimäärässä ei kovin paljon käsitellä lukujonoja tai summia yhteisen opintokokonaisuuden jälkeen. Lukujonot ja summat tulevat kyllä kahdella kursilla vastaan, mutta periaatteessa ei uutta tietoa esitetä, vaan ensisijaisesti sovelletaan MAY1-kurssin aikana opittua asiaa. Pitkän oppimäärän kursseilla taas syvennetään osaamista ja tutustutaan myös sarjoihin, mutta kurssit MAA11 ja MAA13 ovat syventävät kurssit, jotka kuuluvat valtakunnallisiin syventäviin kursseihin ja opiskelija voi jättää kurssit kokonaan opiskelematta. Pelkästään opetussuunnitelman pohjalta vaikuttaa siltä, että asiasisällön kannalta lukujonojen, summien ja sarjojen painopiste sijaitsee yhteisessä opintokokonaisuudessa MAY1.

3.4 Opetussuunnitelmien yhtäläisyyksiä ja eroja

Vuoden 2003 ja 2015 opetussuunnitelmia lukiessa ja analysoitaessa huomataan aika nopeasti, että niissä väistämättä on monia yhtäläisyyksiä. Yleisissä tavoitteissa muun muassa laaja-alainen yleissivistys, elinikäinen oppiminen ja opiskelijan identiteetin rakentaminen ovat molemmissa opetussuunnitelmissa vahvasti läsnä. Matematiikan tavoitteissa yhtäläisyydet koskevat matematiikan luonnetta: molemmissa opetussuunnitelmissa painotetaan matemaattisen tiedon ymmärtämistä, prosessoimista ja esittämistä sekä hyödyntämistä ongelmanratkaisussa.

Toisaalta löytyy myös eroja. Yleiset tavoitteet ja käsitys oppimisesta on muuttunut vuoden 2015 opetussuunnitelmassa yksilöllisempään suuntaan. Oppimisympäristöjen laajeneminen, opiskelijan oma vastuu oppimisestaan sekä digitaalisaatio kuuluvat myös muutoksiin.

Matematiikan tavoitteissa löytyy myös muutoksia, jotka ovat samansuuntaisia vuoden 2015 opetussuunnitelman perusteiden yleisten tavoitteiden kanssa. Esimerkiksi mainitaan, että opetuksen lähtökohtien pitää olla opiskelijoita kiinnostavia aiheita, ilmiöitä ja niihin liittyviä ongelmia. Myös vaihtelevat työtavat, opiskeleminen sekä yksin että yhdessä ja käsitteiden liittyminen laajempiin kokonaisuuksiin sopivat hyvin yhteen opetussuunnitelman yleisten tavoitteiden kanssa. Lisäksi niitä ei ole mainittu vuoden 2003 opetussuunnitelmassa. Matematiikan tavoitteissa näkyy selvästi digitalisaation vaikutus:

> *”Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Matematiikan opiskelussa hyödynnetään muun muassa dynaamisen matematiikan ohjelmistoja, symbolisen laskennan ohjelmistoja, tilasto-ohjelmistoja, taulukkolaskentaa, tekstinkäsittelyä sekä mahdollisuuksien mukaan digitaalisia tiedonlähteitä.”* [28, s. 129]

Kannustava palaute, opiskelumotivaation ylläpitäminen ja vahvistaminen sekä myönteiset oppimiskokemukset nostetaan keskeisiksi sekä yleisissä että matematiikan ainekohtaisissa tavoitteissa.

Suurin muutos matematiikan kannalta on kuitenkin yhteinen opintokokonaisuus. Kuten luvussa 3.3.3 on jo todettu, valitsi opiskelija ennen joko lyhyen tai pitkän matematiikan lukio-opinnot aloittaessaan, mutta nyt valinta tehdään vasta ensimmäisen, yhteisen kurssin jälkeen. Yhteisen opintokokonaisuuden tavoitteisiin kuuluu opiskelijan kiinnostuksen herääminen matematiikkaa kohtaan sekä oman matemaattisen osaamisen vahvistaminen. Tämä opintokokonaisuus on kuitenkin herättänyt kovaa kritiikkiä. Dimensiossa 4/2017 on julkaistu kaksi artikkelia tätä koskien: *Lukion opiskelijoiden ja opettajien ensikokemuksia matematiikan yhteisestä MAY-kurssista* ja *Onnistunko vai ei? – Lukiolaisten kokemuksia MAY1-kurssista* [5, 26].

Eronen, Portaankorva-Koivisto, Kupiainen ja Hannula toteavat, että

> *”Matematiikan opettajien keskuudessa (MAOL) on kritisoitu kurssiuudistusta erityisesti siitä, että sen katsottiin sisällöllisesti muodostuvan liian haastavaksi ollakseen lukion ensimmäinen matematiikan kurssi. Saman aikaan syksyllä 2017 lukio-opintonsa aloittaneet opiskelijat ovat ensimmäinen abiturienttiryhmä, joka suorittaa matematiikan ylioppilaskirjoitukset sähköisessä järjestelmässä.”*

Tästä syystä he päättivät selvittää sekä opettajien että opiskelijoiden kokemuksia yhteisestä opintokokonaisuudesta. Tultiin sellaisiin tuloksiin, että enemmän pitkän matematiikan lukjioita ei tämän kurssin ansioista syntynyt, päin vastoin. Todettiin myös, että monien opettajien mielestä asiasisältöä oli liikaa ja siksi he karsivat logaritmit ja lukujono-osuudet kursilla läpikäydyistä sisällöistä. Näiden karsintojen takia MAY1-kurssi oli loppujen lopuksi näiden opettajien kouluissa enemmän kertauskurssi kuin matematiikkaan tutustuttaminen. Kirjoittajat toteavat, että *"tämä ei varmaankaan ollut opetusuunnitelman tarkoitus"*. Suurin osa opettajista yritti kuitenkin huomioida koko kurssisisällön. Kurssin aikana oli ollut teknisiä apuvälineitä suhteellisen hyvin käytössä ja moni opettaja aikoo jatkossa lisätä teknologiaa opetuksessaan tämän kurssin aikana. [5]

Leinonen ja Turkki tekivät pedagogisiin opintoihinsa kuuluvan ainedidaktisen tutkimuksensa pohjoissuomalaisten lukiolaisten kokemuksista syksyllä 2016 pidetyistä MAY1-kurssista. Moni opiskelija koki kurssin vaativana ja lannistavana. Vaikka lukioon tullessa opiskelijoilla oli käsitys siitä, että lukio-opinnot tulevat olemaan haastavammat kuin yläkoulussa, kurssin loppupuolella matematiikan opiskelu tuntui osalla kamalalta. Osasta opiskelijoista koko kurssi ärsytti. Osa tiesi tarvitsevansa matematiikkaa jatko-opinnoissaan ja he kokivat kurssin haasteet ja matematiikan opiskelun mukavaksi. Kurssi koetaan siis eri tavoin, mutta artikkelin kirjoittajat tulivat siihen tulokseen, että MAY1-kurssi ei kuitenkaan muuttanut opiskelijoiden käsityksiä matematiikan opiskelusta lukiossa eikä voida sanoa, että opiskelijoiden kiinnostus matematiikkaa kohtaan olisi kasvanut. [26]

Opetussuunnitelmauudistuksen seurauksista on tässä vaiheessa vaikeaa tehdä johtopäätöksiä, mutta uusien toimintatapojen ja uusien ajatusmallien löytäminen vaatii aikaa, totuttelemista ja kokeilemista sekä opiskelijoilta että opettajilta. Varmaa on kuitenkin, että matematiikan opetuksessa lukiossa tapahtuu tällä hetkellä suuria muutoksia, joihin opettajien ja opetuksen järjestäjien tulisi osata reagoida kadottamatta matematiikan tärkeyttä ja perusolemusta.

4 Oppimateriaalit

Tässä luvussa käsitellään oppimateriaalia sekä yleisellä että käytännön tasolla. Ensin esitetään erilaisia oppimateriaalin ja oppikirjan määritelmiä. Sen jälkeen tutustutaan eri oppimateriaalityyppeihin, oppimateriaalin tehtävään, hyvän oppimateriaalin kriteereihin ja digitaalisten oppimateriaalien piirteisiin. Lopuksi analysoidaan vuosien 2003 ja 2015 opetussuunnitelmien mukaisia lukion oppikirjoja erilaisten asetettujen kriteerien näkökulmista.

4.1 Oppimateriaalin määritelmiä

Oppimateriaali voidaan määrittää monella eri tavalla. Uusikylä ja Atjonen [37, s. 164] esittävät teoksessaan *Didaktiikan perusteet* kahta eri määritelmää. Ensimmäinen määritelmä keskittyy oppimateriaaliin tiedon lähteenä ja se kuuluu:

> *"Oppimateriaali on joko oppiainesta sisältävä tietolähde, kuten kirja, tai toiminnan kohteena oleva aine, kuten lauta, lanka, muovailuvaha, dia, kangas tms."*

Toinen määritelmä on laajempi ja se käsittää oppimateriaalin enemmän oppimisen ja oppimiskokemusten herättäjänä:

> *"Oppimateriaalilla tarkoitetaan johonkin aineeseen, materiaaliin kytkettyä oppiainesta, jonka tulee välittyä oppilaille ja saada heissä aikaan sellaisia elämyksiä ja oppimiskokemuksia, joista syntyy tavoitteiden mukaisia, pysyviä tietojen ja taitojen muutoksia ja affektiivisia vaikutuksia."*

Väitöskirjassaan Ekonoja [13, s. 56] tuo esiin Hirsijärven vuonna 1978 esitettyä oppimateriaalin määritelmää, joka nostaa esille oppimateriaalin aseman oppilaiden asenteiden muovaamisessa sekä taitojen kehittämisessä:

> *"Oppimateriaaleja ovat kaikki ne materiaalit, jotka välittävät oppilaille niitä tietoja, taitoja ja asenteita, jotka normatiivisessa suunnittelussa on asetettu koulutuksen tavoitteiksi."*

Oppimateriaalin määritelmiä löytyy useita ja ne painottavat erilaisia asioita. Ne voivat myös selkeästi erottua toisistaan, johtuen määritelmän tekijän oppimis- ja opettamiskäsityksestä. Selvää kuitenkin on, että oppimateriaali on tehty opetustarkoituksiin ja tarkoituksena on saada oppimista aikaiseksi. [13, s. 56–57; 37, s. 164]

4.2 Oppimateriaalin tehtävä

Oppimateriaalin käyttö on käytännössä yleisin tapa toteuttaa opetussuunnitelmaa. Opetussuunnitelmassa on esitetty monia eri tavoitteita ja asiasisältöjä. Tämän takia tarvitaan myös erityyppisiä oppimateriaaleja ja työtapoja tavoitteiden toteuttamiseen tai asiasisältöjen ymmärtämiseen [37, s. 166]. Uusikylä ja Atjonen [37, s. 163–164] jakavat oppimateriaalit seuraaviin tyyppeihin: kirjallinen oppimateriaali, visuaalinen oppimateriaali, auditiivinen oppimateriaali, audiovisuaalinen oppimateriaali, digitaalinen oppimateriaali ja muu oppimateriaali.

Oppimateriaalin tehtävä riippuu opetukselle asetetuista tavoitteista, opiskeltavasta aineesta tai asiasta sekä oppilaiden kehitystasosta. Yleisesti voidaan kuitenkin sanoa, että oppimateriaalin tehtävä on virittää ja tukea oppimista, asettaa kysymyksiä, houkutella etsimään vastauksia ongelmiin, mahdollistaa toimintaa sekä antaa vastauksia sisältökysymyksiin. Sen lisäksi oppimateriaalin tulisi antaa oppijalle palautetta, pitää yllä hänen mielenkiintoaan ja mahdollistaa eriyttämistä. Eriyttäminen voi tapahtua esimerkiksi tarjoamalla haastavampia ja muuntuvia lisätehtäviä taitaville tai vastaavalla tavalla antamalla helpotettuja tehtäviä oppimisvaikeuksista kärsiville. Hyvä oppimateriaali *”edistää syvällistä, jatkuvaa ja pitkäaikaista muutosta”*. [37, s. 165]

Jarkko Leino asetti vuonna 1978 kolme huomioitavaa pääkriteeriä oppimateriaalin hyvyyden analysoimiseen. Kriteerit ovat *opetussuunnitelma*, *koulu- ja opettajakohtainen suunnittelu* sekä *opetustapahtuma*. Oppimateriaali on hyvä, kun jokainen kriteeri on otettu huomioon ja näkyy oppimateriaalissa. Opetussuunnitelman tulisi näkyä oppimateriaalissa siten, että oppimateriaali on opetussuunnitelman mukainen. Koulu- ja opettajakohtaisessa suunnittelussa oppimateriaalissa on esimerkiksi otettu huomioon oppilaiden eriyttämisen tarpeet, eri luokka-asteiden tarpeet, koulujen olot, erilaisten koulussa käytössä olevien opetusvälineiden asettamat vaatimukset sekä soveltuvuus erilaisiin ja eripituisiin suunnitteluperiodeihin. Kriteereistä merkittävin on kuitenkin itse opetustapahtuma. Uusikylän ja Atjosen mukaan seuraavia vaatimuksia pitää asettaa oppimateriaalille, jotta se soveltuu opetustapahtumaan:

> *”Oppimateriaalin tulee olla loogisesti ja psykologisesti oikein rakennettua eli asiasisällön pitää edetä järkevästi. Sen pitää jaksottaa ja painottaa opittavaa ainesta tarkoituksenmukaisesti, vastata oppijan kehityspsykologista tasoa ja mahdollistaa mielekäs, syvällinen oppiminen. Sen pitää lisäksi olla aktivoivaa ja motivoivaa. Sen tulee soveltua erilaisiin tuntijärjestelyihin ja tilanteisiin etenkin niin, että yksilöllinen ja pienryhmäoppiminen mahdollistuu.”* [37, s. 166–186]

Heinonen tutki väitöskirjassaan mm. opettajien ajatuksia ja käsityksiä hyvästä oppimateriaalista. Tutkimukseen osallistuvien opettajien mielestä hyvän oppimateriaalin piirteisiin kuuluu esimerkiksi, että oppimateriaali on motivoiva, kiinnostava, innostava, riittävän havainnollistava ja selkeä. Sen lisäksi hyvä oppimateriaali tarjoaa eriyttämisen mahdollisuuksia sekä käsityskyvyn ja ajatusmallien kehittämisen mahdollisuuksia. Hyvä oppimateriaali kannustaa kokeellisuuteen, tutkimusten tekemiseen ja itsenäiseen opiskeluun. Se tukee myös erilaisten opetusmenetelmien käyttöä ja soveltuu monenlaiseen ajankäyttöön. Opettajien mielestä hyvään oppimateriaaliin kuuluu myös selkeät opettajan materiaalit, jotka auttavat opetuksen suunnittelussa sekä antavat opettajalle innostusta ja virikkeitä opetustyöhön. [13, s. 122–133]

4.3 Oppimateriaalianalyysi

Tässä luvussa analysoidaan oppimateriaaleja, jotka soveltuvat lukujonojen, summien ja sarjojen opettamiseen lukiossa sekä vuoden 2003 että 2015 opetussuunnitelman mukaan. Kyseiset kurssit, niiden sisällöt ja tavoitteet on esitetty luvuissa 3.2.5 ja 3.3.6.

Oppimateriaalianalyysissä voisi ottaa huomioon monienlaisia näkökulmia, mutta tässä työssä analysoidaan oppimateriaalien

1. matemaattinen täsmällisyys,
2. sopivuus opetussuunnitelmaan,
3. loogisuus ja selkeys,
4. pedagogiset ratkaisut,
5. eriyttämismahdollisuudet,
6. teknisten apuvälineiden hyödyntäminen.

Vuoden 2003 opetussuunnitelman kurssien oppimateriaaleja on aikaisemmin tutkittu muutamasta eri näkökulmasta:

- Lauri Judin on diplomityössään *Lukujonot ja trigonometriset funktiot lukion matematiikassa* analysoinut viittä vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaista MAA9-kurssin oppikirjaa [19].
- Jussi Syrjäkosken pro gradu -tutkielmassa *Lukujonot lukiossa ja yliopistossa* on vertailtu lukujonojen käsittelyä sekä lukiossa että yliopistossa. Osana sitä on analysoitu vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisia MAA9- ja MAA13-kurssien oppikirjoja [34].
- Anna-Kaisa Torvinen on pro gradu -tutkielmassaan *Reaalilukujonoista ja niiden merkityksestä kouluopetuksessa* käsitellyt lukujonoja ja tutkinut, millä tavalla niitä opetetaan lukiossa [35].

Vuoden 2015 opetussuunnitelman kurssien oppimateriaaleja ei ole vielä kovin paljoa tutkittu. Tällä hetkellä löytyvät tutkimukset käsittelevät tavalla tai toisella yhteistä opintokokonaisuutta MAY1:

- Anna Peltonen on pro gradu -tutkielmassaan *Painetut oppikirjat vai sähköinen oppimateriaali - Oppimateriaalin vaikutus opiskelijoiden oppimiskokemukseen MAY-kurssilla* vertaillut MAY1-kurssin painettujen oppikirjojen ja sähköisten oppimateriaalien yhtäläisyyksiä ja eroja. Tutkimus keskittyy opiskelijoiden kokemuksiin yhteisestä kurssista ja tutkimuksen tarkoitus on selvittää oppimateriaalien mahdolliset vaikutukset opiskelijoiden valintaan pitkän ja lyhyen matematiikan oppimäärän välillä. [30]

- Pauliina Hämäläisen pro gradu -tutkielma *Aritmeettinen ja formaalisti esitetty lukujono lukion matematiikassa* on osa Turun yliopiston projektia, jonka puitteissa laadittiin uutta, sähköistä oppimateriaalia MAY1-kurssia varten. Tutkielmassa on esitetty ne oppimateriaalin osiot, joiden tuottamisesta Hämäläinen oli vastuussa. Materiaali koostuu aritmeettisesta lukujonosta ja summasta, rekursiivisesta lukujonosta sekä opettajan oppaan sisällöstä. [18]

- Katariina Riiho on pro gradu -tutkielmassaan *Siirtymä MAY1-kurssilta lyhyen tai pitkän matematiikan 2. kurssille lukiossa* tutkinut, millä tavalla eri kustantajien oppimateriaalit muuttuvat MAY1-kurssin jälkeen, kun siirrytään joko lyhyen oppimäärän kurssille MAB2 tai pitkän oppimäärän kurssille MAA2. Lisäksi on pohdittu, millä tavalla tuetaan sekä lyhyen että pitkän matematiikan lukijoita MAY1-kurssin oppimateriaaleissa. [32]

- Matti Lehtinen on Solmu-lehteen tehnyt kirja-arvion yhteisen kurssin oppikirjoista *Yhteinen tekijä* (Sanoma Pro) [3] ja *MAY1 Luvut ja lukujonot* (Otava). [25]

Tässä tutkielmassa näkökulma on opetussuunnitelmamuutos ja sen mahdolliset tuomat vaikutukset oppimateriaaleihin. Tutkielmassa vertaillaan eri opetussuunnitelmien kirjojen sisältöjä keskenään, mutta myös samaan opetussuunnitelmaan kuuluvia oppimateriaaleja analysoidaan ja verrataan. Suurin ero opetussuunnitelmien välillä on kaikille yhteinen opintokokonaisuus MAY1 (kts. luku 3.3.3). Tämän takia tutkielmassa analysoidaan oppikirjoja ja niiden sisältöjä suhteutettuina yhteisen opintokokonaisuuden tavoitteisiin ja sen aiheuttamiin muutoksiin.

Suomeksi löytyy sekä lyhyen että pitkän matematiikan osalta eri kustantajien vuoden 2003 opetusuunnitelman mukaisia oppimateriaaleja. Pitkän oppimäärän kirjoja ovat mm.

- *Pitkä Sigma* (Sanoma Pro),
- *Pitkä matematiikka* (Sanoma Pro),
- *Pyramidi* (Sanoma Pro),
- *Matematiikan Taito* (WSOY),
- *Lukion Calculus* (Otava),

- *Laudatur* (Otava).

Lyhyen oppimäärän oppikirjoja ovat mm.

- *Sigma* (Sanoma Pro),
- *Lyhyt matikka* (Sanoma Pro),
- *Variaabeli* (Otava),
- *Kertoma* (Otava).

Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisia oppimateriaaleja ei ainakaan tällä hetkellä löydy yhtä laajasti. Yhteisen opintokokonaisuuden oppikirjoja ja digitaalisia oppimateriaaleja ovat

- *Yhteinen tekijä* (Sanoma Pro),
- *MAY1 Luvut ja lukujonot* (Otava),
- *Lukion yhteinen matematiikka* (Edita),
- *MAY1 Luvut ja lukujonot* (Tabletkoulu),
- *eMath MAY1 Luvut ja lukujonot* (FourFerries).

Pitkän oppimäärän oppikirjasarjoja ovat

- *Tekijä pitkä matematiikka* (Sanoma Pro),
- *Juuri* (Otava),
- *eMath* (FourFerries).

Lyhyen oppimäärän kirjasarjoja ja digitaalisia oppimateriaaleja ovat

- *Tekijä lyhyt matematiikka* (Sanoma Pro),
- *Huippu* (Otava),
- *Summa* (Edita),
- *Tabletkoulun* digitaaliset oppimateriaalit.

Tässä tutkielmassa analysoitavat kirjat ovat *Matematiikan Taito 9* ja *13*, *Pitkä matematiikka 9* ja *13*, *Lyhyt matikka 6* ja *7*, *Variaabeli 6* ja *7*, *Tekijä pitkä matematiikka 11*, *Juuri 11 digikirja*, *Tekijä lyhyt matematiikka 4* ja *6* sekä *Yhteinen tekijä*. Analyysissä on myös mukana Tabletkoulun digitaaliset oppimateriaalit kursseihin MAY1, MAA4 ja MAB6.

4.3.1 Lukujono

Tässä luvussa esitetään lukujonoihin liittyvää sisältöä eri oppimateriaaleista ja verrataan samalla eri oppimäärien ja opetussuunnitelmien oppimateriaaleja keskenään. Lähtökohtana toimii MAY1-kurssin oppikirja *Yhteinen tekijä* [3], koska yhteinen opintokokonaisuus uudessa opetussuunnitelmassa tuo lukujonojen ja summien kannalta suurimmat muutokset sisältöihin eri kurssiella.

Lukujonon määritelmä

Yhteinen tekijä -kirjan jokainen luku alkaa lyhyellä tutkimustehtävällä. Lukujonoja käsittelevän luvun tutkimustehtävässä päätellään vetyatomien määrät eri alkaaneissa [3, s. 130]. Tämän jälkeen esitellään lyhyen ja sanallisen selityksen kautta mitä lukujono on:

> *"Lukujen muodostamaa jonoa kutsutaan lukujonoksi."* [3, s. 131]

Seuraavaksi kirjassa edetään kuvailemaan lukujonon ominaisuuksia, kuten esimerkiksi, että lukujono voi olla päättyvä tai päättymätön, lukujonon lukuja kutsutaan termeiksi tai jäseniksi ja lukujonon jäsenillä on tietty paikka lukujonossa. Samalla selitetään myös alaindeksin ja termin järjestysnumeron yhteys sekä se, miten lasketaan jonon yleinen jäsen annetun säännön avulla. [3, s. 131]

Missään vuoden 2003 mukaisissa oppikirjoissa ei ole aloitettu määrittelemällä lukujonoa, vaan näistä kirjoista löytyy aluksi esimerkkejä ja graafisia esityksiä lukujonoista sekä tietoa siitä, että lukujono voi olla päättyvä tai päättymätön [11, s. 70–71; 1, s. 62–64; 20, s. 83–85; 7, s. 78–80]. Lukujonon määritelmää ja lukujonon ominaisuuksia esitetään vasta näiden esimerkkien ja kuvausten jälkeen. Tämä esitystapa voi olla aika epäselvä lukijalle. Toisaalta valintaa voidaan perustella pedagogisesta näkökulmasta sillä, että halutaan ensin tutustuttaa opiskelijat asiaan motivoivien ja oppianerajat ylittävien esimerkkien ja tutkimustehtävien kautta. Tällä tavoin voidaan saada opiskelijoiden mielenkiintoa herätettyä opiskeltavaa asiaa kohtaan. Lyhyt matikka 6 -kirjassa on toki aluksi ennen johdantoesimerkkiä lyhyesti selitetty, että

> *"Lukujonon lukuja kutsutaan jonon jäseniksi. Lukujono kuvaillaan antamalla sääntö, joka määrää yksikäsitteisesti jonon jokaisen jäsenen."* [1, s. 63]

Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisessa kirjassa Tekijä lyhyt matematiikka 4 on kuten Yhteinen tekijä -kirjassa heti pohdintatehtävän jälkeen esitetty lukujonon määritelmä [9, s. 109–110]. Tabletkoulun MAY1-kurssin oppimateriaalissa esitetään puolestaan lukujono ensin yleisellä tasolla sanallisesti sekä perustellaan lukujonojen tärkeyttä kulttuurin, taiteen ja yhteiskunnan näkökulmasta. Vasta sitä seuraavassa alaluvussa käsitellään rekursiivista lukujonoa, jolloin otetaan käyttöön matemaattisia merkintätapoja. Yleistä matemaattista teoriaa lukujonoista tai matemaattista määritelmää ei löydy Tabletkoulun MAY1-kurssin materiaaleista. [24]

Yhteinen tekijä -kirjassa lukujonojen esitys jatkuu kytkemällä lukujono funktiokäsitteeseen [3, s. 132]:

> *"Lukujono on siis funktio, jonka muuttujia ovat positiiviset kokonaisluvut ja arvoina ovat lukujonon jäsenet, jotka ovat reaalilukuja:*
> $a_n = f(n)$.
> $a_1 = f(1)$
> $a_2 = f(2)$
> $a_3 = f(3)$
> $\vdots$ "

Tämä esitys vastaa hyvin, millä tavoin lukujonoa on määritelty kirjoissa Pitkä matematiikka 9 ja Matematiikan taito 9. Tämässä tutkielmassa lukujono on määritelty eri tavalla määritelmässä 2.7. Kirjassa Pitkä matematiikka 9 on ensin kerrottu, miten merkitään lukujonoja:

> *"Lukujonossa jokaiseen positiiviseen kokonaislukuun* $1, 2, 3, \ldots$ *liittyy vastaava lukujonon jäsen* $a_1, a_2, a_3, \ldots$. *Lukujono voidaan siis tulkita funktioksi* f*, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja.*
> $a_1 = f(1), a_2 = f(2), a_3 = f(3), \ldots$
> *eli yleisesti*
> $a_n = f(n)$."

Tämän jälkeen lukujonon määritelmä on esitetty:

> *"Lukujono on funktio, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja.*
>
> *Jos funktiolla* f *on lauseke, niin jonon* (a_n)*, missä* $a_n = f(n)$*, jäsenet voidaan laskea lausekkeeseen sijoittamalla. Lauseketta sanotaan jonon lausekkeeksi."* [20, s. 84–85]

Myös Matematiikan taito 9 -kirjassa määritellään lukujono funktiona, vastaavalla tavalla kuin Pitkä matematiikka 9 -kirjassa, mutta määritelmä on selkeämpi ja matemaattisesti katsottuna toimiva:

> *"Positiivisten kokonaislukujen joukossa* $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *määriteltyä reaaliarvoista funktiota* f *sanomme päättymättömäksi lukujonoksi. Lukujono on päättyvä, jos määrittelyjoukko on* $\mathbb{Z}_+$*:n äärellinen osajoukko. Lukujonon* n*:s termi* $a_n = f(n)$*. Lukujonon kuvaajan muodostavat koordinaatiston pisteet* $(n, f(n)) = (n, a_n)$*."* [7, s. 80]

Kirjoissa Yhteinen tekijä ja Matematiikan taito 9 lukujonot on myös havainnollistettu graafisesti sijoittamalla pisteparit (n, a_n) koordinaatistoon [3, s. 132, 136–137, 156, 159, 169, 182–183, 185; 7, s. 80]. Visuaalisia oppijoita on tällöin otettu huomioon ja lukujonon käyttäytyminen käy selvemmin ilmi kuin pelkästään yleisen termin matemaattisesta kaavasta.

Lyhyen oppimäärän oppimateriaaleissa ei pääsääntöisesti esitetä lukujonon ja funktion välistä yhteyttä. Tabletkoulun MAB4-kurssin oppimateriaalissa mainitaan kuitenkin se yhden virkkeen verran luvussa 4:

> *"Johdantotehtävän a-kohdassa lukujonon sääntö on ilmoitettu kerroksen järjestysluvun mukaan yleisenä terminä a_n, jolloin lukujonon jäsenet saadaan laskettua sijoittamalla lukujonon jäsenen järjestysnumero sääntöön $a_n = f(n)$. Tällöin voidaan sanoa, että lukujonon sääntö on ilmoitettu analyyttisesti."* [15]

Toisaalta oppimateriaalissa ei ole sen jälkeen käytetty tai esitetty lukujonon ja funktion välistä yhteyttä.

Yhteinen tekijä -kirjassa esitys lukujonoista jatkuu erilaisilla ja monipuolisilla esimerkeillä, jotka yhdessä antavat aika laajan kuvan erilaisista lukujonohin liittyvistä tehtävistä. Ensimmäinen esimerkki on perustehtävä, jossa lasketaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä:

> *"Määritä lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä, kun lukujonon yleinen jäsen on*
>
> *a)* $a_n = \dfrac{n}{n+1}, n = 1, 2, 3, \ldots,$
>
> *b)* $a_n = 4 \cdot (-1)^n, n = 1, 2, 3, \ldots.$" [3, s. 133]

Seuraavakin esimerkki on perustehtävä, mutta opitaan selvittämään, mikäli annettu luku on lukujonon jäsen:

> *"Tarkastellaan lukujonoa, jonka yleinen jäsen on* $a_n = 2n - 5$*,* $n = 1, 2, 3, \ldots$*.*
>
> *a) Määritä lukujonon* 60*. jäsen.*
>
> *b) Tutki, onko luku 46 lukujonon jäsen."* [3, s. 134]

Kolmas esimerkki on hieman soveltavampi:

> *"Olkoon lukujonon yleinen jäsen* $a_n = 18n + 23$*,* $n = 1, 2, 3, \ldots$*.*
>
> *a) Kuinka moni lukujonon jäsenistä on pienempi kuin 50 000?*
>
> *b) Määritä viimeinen jäsen, joka on pienempi kuin 50 000."* [3, s. 135]

Kolme ensimmäistä esimerkkiä ovat laskennalliset ja niiden avulla opiskelijan pitäisi pystyä laskemaan kirjan perustehtävät. Jokaisessa esimerkissä kysymys tai tehtävänanto on muotoiltu eri tavalla, mikä tutustuttaa opiskelijoita erilaisiin esittämistapoihin ja laajentaa heidän matemaattista sanastoaan.

Kirjan neljännessä esimerkissä ratkaistaan tehtävä laskinohjelmiston avulla:

"Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) *Piirrä lukujonon kuvaaja.*

b) *Määritä kuvaajasta* a_n.

c) *Päättele kuvaajan avulla, kuinka monennesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet ovat suurempia kuin 10 000."* [3, s. 136–137]

Tämän esimerkin yhteydessä on annettu vinkkejä siitä, mitä kannattaa opetella laskimen ja laskinohjelmiston käyttöön liittyen. Tehtävä on myös laadittu niin, että harjoitellaan lukujonon kuvaajan piirtämistä, tiedon löytämistä koordinaatistosta sekä akselien asteikkojen muuttamista.

Yhteinen tekijä -kirjan viimeinen esimerkki on on sanallinen tehtävä ja on tarkoitettu opiskelijoille, jotka laskevat syventäviä tehtäviä:

"Tulitikkurasioista rakennetaan pyramidin muotoinen rakennelma. Lukujono $a_n = 432 - 13n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *kuvaa rasioiden määrä eri kerroksissa. Kerrokset numeroidaan alimmasta kerroksesta alkaen.*

a) *Kuinka monta tulitikkurasiaa on viidennessä kerroksessa?*

b) *Kuinka monta kerrosta rakennelmassa on?*

c) *Kuinka monta rasiaa on viimeisessä kerroksessa?"* [3, s. 138]

Tässä esimerkissä ei varsinaisesti opita mitään uutta. Tehtävä on ainoastaan muuttunut puhtaasta laskennallisesta matematiikan tehtävästä todelliseksi ongelmaksi. Siksi tämä valinta otsikoida esimerkki syventäväksi tehtäväksi on ikävä. Suurella todennäköisyydellä joku matematiikkaa pelkäävä opiskelija automaattisesti jättää syventävät tehtävät pois siinä luulossa, että hän ei kuitenkaan pysty niitä laskemaan, vaikka hän hyvinkin osaisi.

Rekursiivinen lukujono

Yhteinen tekijä -kirjassa on rekursiivisille lukujonoille annettu oma alalukunsa, mikä sopii hyvin yhteen opetussuunnitelmassa mainittujen kurssin keskeisten sisältöjen kanssa [28, s. 130]. Rekursiivinen lukujono on kirjassa ensin esitetty sanallisesti esimerkin kautta, jonka jälkeen rekursiokaava on esitetty [3, s. 144]. Aika huonosti on kuitenkin selitetty, mikä tekee rekursiivisesta lukujonosta rekursiivisen, siis että lukujonon jokainen jäsen on riippuvainen sitä edellisestä jäsenestä. Koska esimerkissä on näytetty, että seuraava lukujonon jäsen saadaan aina lisäämällä luku kolme, opiskelija voisi erehtyä luulemaan, että rekursiivinen ja aritmeettinen lukujono tarkoittavat samaa asiaa. Toisaalta löytyy kirjasta heti selityksen perään kaksi laskuesimerkkiä selityksineen, joista hyvin käy ilmi rekursiivisen lukujonon luonne. Sen lisäksi on sitä seuraavissa kahdessa esimerkissä laskettu rekursiivisen lukujonon jäsenet taulukkolaskentaohjelman avulla. Toinen näistä esimerkeistä koskee Fibonaccin lukujonoa (kts. tämän tutkielman esimerkki 2.1). [3, s. 144–153]

Fibonaccin lukujono on lähes kaikissa kirjoissa esitetty esimerkin muodossa rekursiivisen lukujonon yhteydessä [1, s. 109; 3, s. 148; 11, s. 73–74; 20, s. 111–112]. Toisaalta Fibonaccin lukujonoa ei ole ollenkaan mainittu Matematiikan taito 9 -kirjassa [7], mikä tavallaan on outoa. Fibonaccin lukujonohan on erittäin tunnettu ja tietämys siitä kuuluu matemaattiseen yleissivistykseen.

Kirjassa Variaabeli 6 esitetään heti alussa [11, s. 70] lukujonojen historiallista merkitystä ja se toimii myös johdantona luvun aiheeseen. Lukujonoa käsittelevän luvun lopusta löytyy syventävää tietoa Fibonaccin lukujonosta ja sen merkityksestä esimerkiksi luonnossa. Molemmat esimerkit soveltuvat sekä mielenkiinnon herättäjiksi että matemaattisen yleissivistyksen kasvattajiksi. Sen lisäksi esimerkit syventävät opiskelijoiden tietoa matematiikan historiallisesta merkityksestä. Vuoden 2003 opetussuunnitelman matematiikan yleisissä tavoitteissa lukee, että

> *"opetuksen tavoitteena on, että opiskelija tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä".* [27, s. 125]

Valinta on siis hyvin perusteltu opetussuunnitelmankin kannalta ja näiden esimerkkien avulla opiskelijalle syntyy ymmärrys siitä, että lukujonoja on mietitty ja käytetty jo monien tuhansien vuosien ajan.

Rekursiivisia lukujonoja koskevia sanallisia tai soveltavia tehtäviä löytyy Yhteinen tekijä -kirjassa pelkästään syventävien tehtävien osiosta. Tärkeimmäksi on siis selkeästi nähty kaikkien MAY1-kurssilla olevien opiskelijoiden osata laskea rekursiivisen lukujonon jäseniä, mutta ei välttämättä osata soveltaa rekursiivista lukujonoa arkipäiväisissä tilanteissa. [3, s. 144–148] Myös kirjassa Variaabeli 6 on rekursiivista lukujonoa sovellettu pelkästään kahdessa tehtävässä, jotka nekin kuuluvat vaikeampien tehtävien joukkoon. Molemmat tehtävät koskevat Fibonaccin lukujonoa. Ensimmäinen näistä tehtävistä kuuluu

> *"Laske lausekkeen* $a_n{}^2 - a_{n-1}a_{n+1}$ *arvo n:n arvoilla* $2, 3, 4$ *ja* 5 *kun lukujonona* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *on Fibonaccin lukujono."*

ja toinen

> *"Tilataideteostaiteilija pystyttää tolppia Fibonaccin lukujonon mukaisesti alkaen pohjoisnavalta. Kuinka monta tolppaa hänen on pystytettävä, jotta taideteos ulottuisi maapallon ympäri yhden kierroksen (maapallon ympärysmitta on 40 000 km), kun ensimmäisten tolppien väli on 10 km ja tolppien välimatkat lasketaan kuten Fibonaccin lukujonossa?".* [11, s. 85]

Tehtävät ovat aika monimutkaisia, kun otetaan huomioon, että kirja on tarkoitettu lyhyen matematiikan lukijoille. Tehtävissä pitää osata yhdistää ja soveltaa erilaista tietoa.

Pitkä matematiikka 9 -kirjan rekursiivisia lukujonoja käsitelevässä luvussa on enemmän sanallisia ja soveltavia tehtäviä kuin Yhteinen tekijä ja Variaabeli 6 -kirjoissa [20, s. 116–117]. Soveltavat tehtävät koskevat joko pankkitilille säästettyä rahaa tai eläinpopulaation suuruutta. Tehtävät ovat esimerkiksi muotoa

> *"Eläinpopulaation suuruus ensimmäisen seurantavuoden alussa oli 5 000. Populaatio kasvaa joka vuosi 30 %, mutta kannasta muuttaa pois joka vuoden lopussa 1 000 jäsentä.*
>
> *a) Kuvaile rekursiivisesti lukujono (a_n), jonka jäsen a_n ilmaisee populaation suuruuden n. vuoden alussa.*
>
> *b) Kuinka monennen vuoden alussa populaation suuruus ensimmäisen kerran on suurempi kuin 20 000?"* [20, s. 116]

ja

> *"Pankkitilille, jonka vuotuinen korko on 3,50 %, talletetaan peräkkäisten vuosien alussa joka vuosi 4 000 euroa. Olkoon a_n talletuksen arvo n. vuoden lopussa, kun tiliin on juuri lisätty päättyvän vuoden korko.*
>
> *a) Kuvaile jono (a_n) rekursiivisesti.*
>
> *b) Mikä talletuksen arvo on kahdeksannen vuoden lopussa?*
>
> *c) Kuinka monennen vuoden lopussa talletuksen arvo ensimmäisen kerran ylittää 80 000 euroa?."* [20, s. 117]

Näin haastavia tehtäviä ei löydy MAY1-kurssin kurssikirjassa Yhteinen tekijä [3] tai Tabletkoulun digitaalisesta materiaalista [24].

MAY1-kurssin oppikirjassa Yhteinen tekijä on luontevasti integroitu teknisiä apuvälineitä ja niiden hyödyntämistä tehtävissä ja esimerkeissä (kts. luku 5.2), mutta jo vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisissa kirjoissa sitä on huomioitu. Parissa esimerkissä Variaabeli 6 -kirjan lukujonoa käsittelevän luvun lopussa näytetään, miten lasketaan rekursiivisia lukujonoja tavallisella funktiolaskimella [11, s. 80–81]. Teknisten apuvälineiden käyttö on siis otettu huomioon, vaikka ei ole opetussuunnitelman matematiikan yleisissä tai lyhyen matematiikan tavoitteissa mainittu. Vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisissa pitkän oppimäärän kirjoissa on teknisten apuvälineiden käyttöä tuettu hyvin huonosti ja joissakin kirjoissa ei ollenkaan, vaikka kuuluukin pitkän matematiikan yleisiin tavoitteisiin: *"tavoitteena on, että opiskelija osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä"* [27, s. 119].

Rekursiivinen lukujono on esitetty aika tasavertaisesti vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisissa oppimateriaaleissa, mutta oppimateriaalin yleinen vaikeustaso määrää toki pitkälti, millä vaikeustasolla tehtävät ovat [3, s. 143–153; 24, luku 5.1]. Rekursiivista lukujonoa esitetään kurssilla MAY1 ja sovelletaan kurssilla MAA11.

Rekursiivinen lukujono induktiotodistuksissa

Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisella kurssilla MAA11 perehdytään hieman tarkemmin rekursiivisiin lukujonoihin todistustehtävien kautta. Tekijä pitkä matematiikka 11 -kirjasta löytyy kuitenkin vain yksi esimerkki aiheeseen liittyen:

> *"Lukujono on määritelty rekursiivisesti:*
>
> $$\begin{cases} a_1 &= 2 \\ a_n &= 5a_{n-1}, \quad \textit{kun } n = 1, 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$
>
> *a) Osoita, että $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.*
>
> *b) Laske lukujonon 20. jäsen."* [14, s. 68]

Rekursiivista lukujonoa koskevia harjoitustehtäviä on kirjassa neljä kappaletta [14, s. 76–77], mutta muuta sisältöä rekursiivisiin lukujonoihin ei löydy. Rekursiivisten lukujonojen osalta kirjasarjan käyttäjät eivät siis pysty syventämään osaamistaan. Toisaalta on kurssin tavoitteissa vain todettu, että *"tavoitteena on, että opiskelija syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista"* [28, s. 135], mikä toki antaa aika paljon vapautta sekä opettajille että oppikirjojen tekijöille.

Juuri 11 -digikirjassa keskitytään puolestaan rekursiiviseen lukujonoon ja induktioperiaatteeseen yhdessä kokonaisessa alaluvussa [17, luku 4.3]. Ensin kerrataan rekursiivisten lukujonojen laskemista ja kertaukseen on otettu mukaan erilaisia appletteja ja videoita. Tämän jälkeen siirrytään rekursiivisia lukujonoja koskeviin todistustehtäviin. Pyydetään esimerkiksi todistamaan, että lukujonon

$$\begin{cases} a_1 &= -9 \\ a_{n+1} &= {a_n}^2 + 6, \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

kaikki jäsenet ovat jaollisia 3:lla [17]. Toisen esimerkin tehtävänanto kuuluu:

> *"Tarkastellaan lukujonoa*
>
> $$\begin{cases} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= 2a_n, \quad \textit{kun } n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$
>
> *Osoita, että lukujonon jokainen jäsen saadaan korottamalla luku 2 jäsenen järjestysluvun mukaiseen potenssiin."* [17]

Tämän jälkeen Juuri 11-digikirja jatkuu harjoitustehtävillä ja niitä on yhteensä noin 20 kappaletta. Juuri -kirjasarjaa käyttävillä opiskelijoilla on paljon suurempi mahdollisuus syventää omaa matemaattista osaamistaan rekursiivisista lukujonoista Tekijä pitkä matematiikka -kirjasarjan käyttäjiin verrattuna.

Aritmeettinen ja geometrinen lukujono

Eri oppimateriaalisarjat lähestyvät aritmeettista ja geometrista lukujonoa eri näkökulmista. Tavallisin tapa on aloittaa jollakin pohdinta- tai ongelmatehtävällä [3, s. s.154, 178; 1, s. s. 70, 86; 20, s. 95, 101; 9, s. 109; 24; 15]. Lyhyen matematiikan kirjoissa Variaabeli 6 ja Tekijä lyhyt matematiikka 6 on puolestaan suoraan esitetty artimeettisen ja geometrisen lukujonojen määritelmät ilman muuta esittelyä [11, s. 88, 95; 10, s. 205]. Matematiikan taito 9 -kirjassa on tehty molemmilla tavoilla: aritmeettisen lukujonon kohdalla esitetään määritelmä heti [7, s. 91], kun taas geometrisen lukujonon johdantona toimii "alkupala"-niminen lyhyt pohdintatehtävä [7, s. 103]. Yleisesti valinta on kuitenkin yhtenevää eri kirjasarjojen yleisen linjan kanssa – joissakin kirjoissa on enemmän panostettu tutkimus- ja pohdintatehtäviin.

Yhteinen tekijä -kirjassa määritellään sekä aritmeettinen että geometrinen lukujono selkeällä tavalla ja lukujonoja havainnollistetaan yksinkertaisiin esimerkkeihin nojaten [3, s. 155, 179]. Kirjasarjassa johdetaan sekä aritmeettisen että geometrisen lukujonon yleisen termin kaava ensin esimerkin kautta ja sitten yleisellä tasolla. Lopuksi esitetään kaavat yleisissä muodossa [3, s. 156, 180]. Vastaavalla tavalla on myös vuoden 2003 opetussunnitelman lyhyen matematiikan Variaabeli 6 -kirjassa tehty [11, s. 89–90, 96–97]. Kaavat ovat samanlaiset kuin tämän työn lauseissa 2.12 ja 2.13. Matematiikan taito 9 -kirjassa jonon yleisen termin kaavat on esitetty jo määritelmän yhteydessä [7, s. 91, 103]. Artimeettisen ja geometrisen lukujonon käyttäytymistä on myös havainnollistettu graafisesti koordinaatistossa muutamassa kirjassa [11, s. 90, 95; 3, s. 154, 182; 9, s. 111].

Tabletkoulun MAY1-kurssin digitaalisessa materiaalissa on sen sijaan animaation avulla kuvattu, että aritmeettisessa lukujonossa lisäys on samansuuruinen siirryttäessä lukujonon jäsenestä toiseen. Saman animaation avulla on myös havainnollistettu, miten voidaan johtaa aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen lauseke. Samassa oppimateriaalissa on geometrisen lukujonon esittelyn kohdalla tehty animaatio oksan haarautumisesta ja oksien määrien laskemisesta. [24] Oksan haarautumista käsittelevä esimerkkitehtävä näyttää olevan käytössä eri oppimateriaalien geometrisen jonon pohdintatehtävissä [1, s. 86; 20, s.101; 24, luku 5.5].

Yhteinen tekijä -kirjan aritmeettiseen jonoon liittyvät perusesimerkit ovat kaikki erilaisia ja kattavat tällöin tärkeimmät aiheeseen liittyvät asiat. Sanallisia tehtäviä koskien aritmeettista ja geometrista lukujonoa löytyy aika suppeasti sekä esimerkeistä että perustehtävistä. Kirjan syventävät tehtävät koostuvat toisaalta enimmäkseen sanallisista tehtävistä. Syventävien tehtävien joukosta löytyy myös kaksi todistustehtävää ja muutama vaikeampi laskutehtävä. Sanalliset tehtävät ovat osittain opiskelijoiden arkeen sopivia. Ne koskevat esimerkiksi lenkkeilyä, lainoja, lääkeannoksia, halkojen pinoamista, matkustajamääriä, solujen jakaantumista, painon pudottamista ja ketjukirjeen lähettämistä. Kaikki tehtävät eivät oletettavasti kiinnosta jokaista opiskelijaa, mutta tehtävät ovat monipuoliset ja jokaiselle löytyy varmasti jotakin mielenkiintoista ja omaan arkeen sopivaa. [3, s. 157–164, 181–190] Opetussuunnitelman yleiset tavoitteet on otettu huomioon suunnitellessa monipuolisisa tehtävänantoja. Opetussuunnitelmassa sanotaan, että

> *"opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista".* [28, s. 129]

Opettaja voi sen lisäksi omassa opetuksessa painottaa opiskelijoiden kiinnostuksen kohteita.

Myös Variaabeli 6 -kirjasta löytyy hyvä esimerkki, joka on muotoa:

> *"Määritä x siten, että lukujono $x, x + 8, 2x - 14$ on*
> *a) artimeettinen b) geometrinen."* [11, s. 103]

Esimerkki on pedagogisesta näkökulmasta toimiva, koska aritmeettisen ja geometrisen lukujonon erot käyvät esimerkissä ilmi selkeällä tavalla ja tehtävä on vaikea ratkaista, jos lukujonojen välisiä eroja ei ole ymmärretty.

Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisella lyhyen matematiikan kurssilla MAB4 on tarkoitus käsitellä lukujonoja matemaattisina malleina. Tekijä lyhyt matematiikka 4 -kirjan yhdessä luvussa tehdään juuri se (ainakin otsikon mukaan), mutta mallinnusten ja sanallisten tehtävien määrä on loppujen lopuksi aika pieni – noin kolmasosa alaluvun tehtävistä [9, s. 108–125]. Aritmeettinen ja geometrinen jono voi pahimmassa tapauksessa jäädä pelkästään matemaattisiksi käsitteiksi, joiden käyttökelpoisuutta ei ymmärretä. Oppimateriaalien perusteella vaikuttaa siltä, ettei ole MAY1-kurssilla eikä myöskään välttämättä MAB4-kurssilla näytetty kaikille opiskelijoille lukujonojen käyttöä todellisissa arkipäivän tilanteissa. Tämä on valitettava, koska vuoden 2015 opetussuunnitelman lyhyen matematiikan tavoitteiden mukaan

> *"opetuksen tavoitteena on, että opiskelija osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä"* [28, s. 136].

Kirjantekijöiden näkökulmasta katsottuna on luultavasti ajateltu niin, että ensin tutustutaan aritmeettiseen ja geometriseen jonoon ja harjoitellaan laskennallisilla tehtävillä, ennen kuin siirrytään soveltaviin tehtäviin. Siinä tapauksessa löytyy selkeä pedagoginen ratkaisu löytyy tähän ratkaisuun. Laskennallisten tehtävien pääpainotus ei millään tavalla ole tyypillistä pelkästään vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisille oppimateriaaleille. Samanlainen jaotus laskennallisten ja soveltavien tehtävien osuuksien välillä on tehty myös vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisen MAB6-kurssin oppikirjoissa [1, s. 74–75, 91–93; 11, s. 104–108].

Syvällisempää tietoa lukujonojen ominaisuuksista

Toisin kuin lyhyen matematiikan ja MAY1-kurssin oppimateriaaleissa, esitetään kirjoissa Matematiikan taito 9 ja Pitkä matematiikka 9 syvällisempää tietoa lukujonoista. Molemmissa kirjoissa esitetään ehtoja lukujonon monotonisuudelle, mutta Pitkä matematiikka 9 -kirjassa on keskitytty enemmän sanallisiin selityksiin, kun taas Matematiikan taito 9 -kirjassa on matemaattisempi esitystapa käytössä [20, s. 89; 7, s. 87–88]. Pitkä matematiikka 9 -kirjassa aidosti kasvava ja vähenevä lukujono on esitetty tällä tavalla:

> *”Lukujono (a_n) on aidosti kasvava, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä suurempi.*
> $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$
>
> *Lukujono (a_n) on aidosti vähenevä, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä pienempi.*
> $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$
>
> *Jos jono on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, se on aidosti monotoninen.”* [20, s. 89]

Sanallista esitystä tuetaan graafisesti kuvilla. Matematiikan taito 9 -kirjassa monotonisen jonon määritelmä on seuraavalla tavalla esitetty:

> *”Lukujono (a_n) on*
>
> – *aidosti kasvava, jos kaikilla n:n arvoilla on $a_n < a_{n+1}$,*
> – *aidosti vähenevä, jos kaikilla n:n arvoilla on $a_n > a_{n+1}$,*
> – *kasvava, jos kaikilla n:n arvoilla on $a_n \leq a_{n+1}$,*
> – *vähenevä, jos kaikilla n:n arvoilla on $a_n \geq a_{n+1}$.*
>
> *Lukujono on monotoninen, jos se on joko kasvava tai vähenevä, ja aidosti monotoninen, jos se on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.”* [7, s. 87]

Täsmällinen matemaattinen määritelmä lukujonon monotonisuudelle on tässä työssä esitetty määritelmässä 2.9. Matematiikan taito 9 -kirjan määritelmä on sitä määritelmää paljon lähempänä. Sisällöllisesti ei ole eri oppikirjoissa esitettyjen määritelmien välillä suurta eroa, mutta Matematiikan taito -kirjan lukijalta vaaditaan paljon parempaa matemaattista lukutaitoa.

Syvällisempää tietoa lukujonoista saadaan Matematiikan taito 9 -kirjassa. Määritellään lukujonon monotonisuuden lisäksi rajoitettu jono [7, s. 86], lukujonon raja-arvo ja raja-arvon laskusäännöt [7, s. 115–119] sekä monotonisen jonon suppeneminen [7, s. 120].

Nämä mainitut syventävät tiedot lukujonoista eivät vuoden 2015 opetussuunnitelman esiinny MAY1-kurssin oppimateriaaleissa [3; 24] eikä myöskään

MAA11-kurssin oppimateriaaleissa. Jos näitä asioita ei käsitellä MAA13-kurssilla, jää pitkän matematiikan opiskelijoiden osalta olennaista tietoa lukujonoista käsittelemättä. Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisia MAA13-kurssin oppimateriaaleja ei ole tällä hetkellä käytettävissä ja siksi ei ole mahdollista tutkia sen kurssin sisältöä.

4.3.2 Summa

Tässäkin luvussa esitetään summiin liittyvää sisältöä MAY1-kurssin oppikirjan *Yhteinen tekijä* [3] perusteella. Myös eri oppimateriaalien vertailu jatkuu.

Summamerkintä

Summamerkintää esitellään Yhteinen tekijä -kirjassa ensimmäistä kertaa aritmeettisen summan yhteydessä. Summamerkinnän eri osat, miten kirjoitetaan summa summamerkinnän avulla sekä miten lasketaan summia summakaavaa käyttäen on hyvin perusteellisesti ja selkeällä tavalla selitetty. [3, s. 170] Sen lisäksi on esimerkin muodossa harjoiteltu summamerkinnän tulkitsemista [3, s. 171]. Esimerkin lopussa on selitetty, että

> *"monista laskimista löytyy Σ-toiminto eli summatoiminto, jonka avulla summa voidaan laskea".* [3, s. 171]

Joissakin tämän jälkeisissä aritmeettisen ja geometrisen summan yhteyksissä on kirjassa muistutettu siitä, että summa voidaan myös laskea laskimella ja on näytetty, miten tulisi laskimeen kirjoittaa summamerkinnän avulla [3, s. 173, 195]. Uuden merkintätavan käyttökelpoisuus tulee näin perusteltua eri näkökulmista. Matemaattisesti on lyhyempi ja selvempi tapa esitellä summia summamerkinnän avulla. Sen lisäksi on symbolisen laskimen käyttö sujuvampaa summamerkinnän ansiosta. Summamerkintä on esitetty aritmeettisen summan yhteydessä myös kirjoissa Pitkä matematiikka 9 [20, s. 120] ja Matematiikan taito 9 [7, s. 93] sekä Tabletkoulun oppimateriaalissa [24]. Tämä on yleisin tapa tehdä. Kirjassa Lyhyt matikka 6 otetaan toisaalta summamerkintä esille jo lukujonoja käsiteltävän luvun lopussa, mikä on aika harvinaista [1, s. 67].

Summamerkinnän hyödyllisyys ja summamerkinnän painotus eri materiaaleissa on kuitenkin vaihtelevaa. Summamerkintä kulkee luontevasti mukana erilaisissa esimerkeissä ja tehtävissä kirjoissa Lyhyt matikka 6 [1], Matematiikan taito 9 [7] ja Yhteinen tekijä [3], mutta Pitkä matematiikka 9 -kirjassa harjoitellaan summamerkinnän tulkitsemista vain muutamassa tehtävässä, jonka jälkeen sitä ei käsitellä enää [20, s. 125–126, 136–137].

Lyhyen matematiikan oppikirjassa Variaabeli 6 ei ollenkaan esitellä summamerkintää, mikä on ihan ymmärrettävää. Symboliset laskimet eivät olleet opetuskäytössä vuonna 2005 kun kirja julkaistiin. Jos summamerkintää ei tarvita laskimen käyttöön, voi summamerkintä olla aika valkeasekoinen ja tarpeeton osata lyhyessä matematiikassa.

Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisesti opiskeleva opiskelija tutustuu siis heti ensimmäisen kurssin aikana summamerkintään ja sen jälkeen se on käytössä, ainakin kurssin loppuun asti. Vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisesti opiskeleva pitkän matematiikan opiskelija pääsi taas vasta yhdeksännen matematiikan kurssin aikana tutustumaan summamerkintään ja silloinkin se oli (riippuen oppimateriaalista) mahdollisesti aika vähäisessäkin käytössä. Vuonna 2012 alkaen ylioppilaskirjoituksissa sallitut symboliset laskimet ja laskinohjelmistot ovat varmasti suurin syy tähän oppimateriaaleissa näkyvään muutokseen summamerkinnän käyttöön liittyen.

Aritmeettinen ja geometrinen summa

Aritmeettinen ja geometrinen summa esiintyvät eri vaiheissa eri kirjoissa. Pitkä matematiikka 9 -kirjassa [20] käsitellään ensin lukujonoja ja vasta sitten summia, kun taas useimmissa muussa oppimateriaalissa esitetään aritmeettinen summa heti aritmeettisen jonon perään ja vastaavalla tavalla geometrinen lukujono ja summa peräkkäin [3; 7; 24]. Variaabeli 6 -kirjassa puolestaan on lukujonot selvästi erotettu erilliseen lukuun ja summat toiseen lukuun [11].

Variaabeli 6 -kirjassa on summia käsittelevässä luvussa aloitettu tarinalla Gaussista ja kuinka hän opettajan hämmästykseksi laski hyvin nopeasti lukujen 1–100 summan [11, s. 109]. Tarina ei ole kovin pitkä eikä vie paljon tilaa, mutta tarinallisuuden kautta voidaan hienolla tavalla herättää opiskelijoiden mielenkiintoa. Samalla sidotaan nykypäivää yhteen historiallisten tapahtumien kanssa. Samalla tarinalla Gaussista on aloitettu myös Yhteinen tekijä -kirjassa, johon myös on lisätty Gaussiin ja aritmeettiseen summaan kuuluvia tutkimustehtäviä [3, s. 165].

Luvun aiheeseen on ensin tutustutettu johdantotehtävän avulla myös Tabletkoulun MAY1-kurssin digitaalisessa oppimateriaalissa:

> *”Laitumella on 20 aidanpylvästä metrin välein. Pylväiden pituudet kasvavat tasaisesti 45 senttimetristä 155 senttimetriin. Kuinka paljon aidanpylväiden yhteispituus on?”* [24, luku 5.3]

Tämä tehtävä on hyvin käytännönläheinen ja voi jopa olla todellinen ongelman asettelu joidenkin opiskelijoiden kohdalla, jolloin esimerkki on sidottu opiskelijan arkeen. Joka tapauksessa tehtävä voi toimia mielenkiinnon herättäjänä matematiikkaa kohtaan ja osoittaa matematiikan käyttökelpollisuutta arjessa.

Sekä aritmeettisen että geometrisen summan kaavat on monissa kirjoissa ensin johdettu jonkun havainnollistavan esimerkin kautta [11, s. 109–110, 115–116; 3, s. 166, 192; 7, s. 95,106–107; 20, s. 118–119, 127–128]. Näin ei kuitenkaan kaikissa kirjoissa ole, esimerkiksi Lyhyt matikka 6 -kirjassa kaava on ensin esitetty ja vasta sen jälkeen se on perusteltu [1, s. 76–77]. Itse kaavan esityksissä ei kuitenkaan ole merkittäviä eroja. Kaikissa oppimateriaaleissa esitys on suurin piirtein samanlainen:

"Aritmeettisen summan $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ arvo voidaan laskea kaavalla

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Kaavassa n on yhteenlaskettavien määrä, a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava ja a_n on viimeinen yhteenlaskettava." [3, s. 167]

ja

"Geometrisen summan $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ arvo voidaan tapauksessa $q \neq 1$ laskea kaavalla

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Kaavassa a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava, q on suhdeluku ja n on yhteenlaskettavien määrä." [3, s. 193]

Ainoa eroavaisuus on Matematiikan taito 9 -kirjassa, jossa esitetään geometrisen summan kaava tällä tavalla [7, s. 107]:

"Geometrisen summan kaava

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ kun } q \neq 1.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a = a + a + a + \cdots + a = na, \text{ kun } q = 1.$$

a = ensimmäinen termi, q = suhdeluku, n = termien lukumäärä."

Muissakin oppimateriaaleissa erikoistapaus $q = 1$ on mainittu, mutta joko huomiona marginaalissa tai lyhyenä ja aika näkymättömänä kommenttina kaavan jälkeen [3, s. 193; 1, s. 95; 20, s. 128]. Erikoistapausta $q = 1$ ei ole ollenkaan mainittu kirjoissa Variaabeli 6, Tekijä lyhyt matematiikka 4, Tekijä lyhyt matematiikka 6 ja Variaabeli 7 [11, s. 115–116; 9, s. 137–141; 10, s. 206; 12, s. 62] tai Tabletkoulun digitaalisissa materiaaleissa [24; 15]. Nämä oppimateriaalit kuuluvat lyhyen matematiikan kursseihin ja yhteiseen opinokokonaisuuteen. Suurin eroavaisuus edellä nostetussa esimerkissä on kuitenkin summamerkinnän käyttö, joka ilmestyy pelkästään Matematiikan taito 9 -kirjassa. Sen kirjan lause on muodoltaan hyvin samanlainen kuin tämän työn lause 2.15.

Artimeettisen ja geometrisen summan kaavat on tässä työssä todistettu induktiolla (lauseet 2.14 ja 2.15), mutta oppimateriaaleissakin todistus on kelpo, vaikka se on eri tavalla toteutettu. Aritmeettinen summa kirjoitetaan sekä alkuperäisessä muodossa että käännetyssä järjestyksessä ja sitten lasketaan summat yhteen, jotta saadaan aritmeettisen summan laskukaava johdettua [20, s. 118–119; 7, s. 96; 11, s. 110; 1, s. 76–77; 24, luku 5.3]. Geometrisen summan kohdalla todistetaan kaava vastaavalla tavalla. Ensin kerrotaan lukujono S_n

suhdeluvulla q ja sitten vähennetään summa qS_n summasta S_n. Sen avulla saadaan kaava johdettua lopulliseen muotoon [20, s. 127–128; 7, s. 107; 11, s. 116; 1, s. 95; 24, luku 5.6].

Yhteinen tekijä -kirjassa on aritmeettisen ja geometrisen summan kohdalla tehty sellainen valinta, että sanalliset tehtävät ovat pelkästään osana syventäviä tehtäviä [3, s. 174–177, 197–199]. Lyhyt matikka 6 -kirjassa puolestaan on aritmeettisen ja geometrisen summan kohdalla painotettu sanallisia ja soveltavia tehtäviä [1, s. 76–85, 94–100].

Summat ja talouteen liittyvät esimerkit

Vuoden 2003 opetussuunnitelman mukainen kurssi MAB7 on nimeltään *Talousmatematiikka*. Vastaavanlainen kurssi vuoden 2015 opetussuunnitelmassa on MAB6.

Variaabeli 6 -kirjassa on panostettu soveltaviin tehtäviin erillisessä luvussa, joka on nimeltään *”Säästäminen summan sovelluksena”* [11, s. 129–140]. Näissä tehtävissä käytetään hyväksi aritmeettista ja geometrista summaa ja näytetään, miten niitä voidaan käyttää taloudellisissa tehtävissä. Tämä valinta yllättää, koska saman kirjan *”Geometrisen summan sovelluksia”* -nimisessä luvussa lasketaan enimmäkseen talouteen liittyviä tehtäviä ja sen lisäksi koko MAB7-kurssi käsittelee talousmatematiikkaa. Opetussuunnitelmassa esitetään MAB6-kurssin yhtenä tavoitteena, että opiskelija

> *”ratkaisee käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja summan avulla”* [27, s. 127]

ja tämän kirjan tekijät ovat ihan selvästi valinneet keskittyä taloudellisiin sovelluksiin. Toisaalta löytyy myös kirjoista Matematiikan taito 9 ja Pitkä matematiikka 9 monta talouteen liittyvää esimerkkitehtävää. Pitkän matematiikan kirjoissa esitetyt talouteen liittyvät esimerkit ovat käytännölliset ja opiskelijoiden arkea koskevat. Niissä lasketaan esimerkiksi korkoja ja säästöjä. Esimerkit ovat sekä selkeästi että perusteellisesti selitettyjä sillä tavalla, että niissä ilmenee *”matematiikan merkitys ilmiön mallintamisessa ja johtopäätösten tekemisessä”* [27, s. 125].

Vaikka vuoden 2003 opetussuunnitelmassa MAB7-kurssin keskeisissä tavoitteissa mainitaan

> *”taloudellisiin tilanteisiin soveltuvia matemaattisia malleja lukujonojen ja summien avulla”* [27, s. 126],

löytyy sellaisia sovelluksia pelkästään kahdesta Lyhyt matikka 7 -kirjan esimerkeistä. Summan avulla tehty ratkaisu on molemmissa esimerkeissä mainittu vaihtoehtoisena tapana laskea kyseistä tehtävää [2, s. 96, 104]. Variaabeli 7-kirjassa ovat aritmeettisen ja geometrisen summan sovellukset puolestaan koko ajan läsnä ”Säästäminen”-luvussa [12, s. 67–82]. Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisen talousmatematiikka-kurssin MAB6 oppikirjassa Tekijä lyhyt matematiikka 6, on valittu vastaavanlainen linja kuin Lyhyt matikka 7

-kirjassa, mutta esitetään kuitenkin useimmissa kohdissa esimerkin mahdollinen ratkaisutapa artimeettisen tai geometrisen summan avulla [10, s. 166, 184]. Joissakin kohdissa viitataan myös kirjan lopussa olevaan lukuun, jossa esitetään aritmeettista ja geometrista jonoa ja summaa [10, s. 129, 133, 205–206]. Yhdessä esimerkissä ratkaistaan tehtävä suoraan geometrisen summan avulla [10, s. 147].

Variaabeli 7 -kirjan lopussa oleva luku koostuu pelkästään talousmatematiikan esimerkeistä ja niiden laskemisesta taulukkolaskentaohjelmalla [12, s. 151–176]. Opiskelijoita perehdytetään täten konkreettisella tavalla jatko-opintoihin ja työelämään, mikä sopii erittäin hyvin yhteen tämän syventävän kurssin luonteeseen ja sisältöön. Myös Tekijä lyhyt matematiikka 7 -kirjasta löytyy ohjeita taulukkolaskentaohjelman käyttöön, mutta ne on esitetty muun sisällön kanssa ja niiden osuus ei ole yhtä suuri kuin Variaabeli 7 -kirjassa [10, s. 129,133].

Onkin luontevaa, että eri kurssien oppimateriaaleista löytyy erilaisia ja käytännönläheisiä talouteen liittyviä tehtäviä ja esimerkkejä. Taloudelliset tehtävät koskevat kuitenkin kaikkia ja voivat esimerkiksi auttaa kasvattamaan opiskelijoita huolehtimaan taloudestaan.

Summa induktiotodistuksissa

Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisen MAA11-kurssin yhtenä tavoitteena on, että *”opiskelija syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista”* [28, s. 135]. Tämä näkyy kuitenkin aika huonosti oppimateriaaleissa. Lukujonoja ja summia käsitellään pelkästään induktiotodistuksen yhteydessä ja niiden osuus on hyvin pieni. Tekijä pitkä matematiikka 11 -kirjasta löytyy pelkästään yksi esimerkki summiin liittyen:

a) *”Osoita, että luonnollisilla luvuilla n on* $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

b) *Laske* $\sum_{k=0}^{9} 2^k$*.”* [14, s. 70–71]

Vastaavanlaisia harjoitustehtävä on vain yksi [14, s. 77]. Juuri 11 -digikirjassa on vastaavalla tavalla hyvin vähän summiin liittyvää sisältöä. Johdantona induktiotodistuksiin toimii seuraava esimerkki:

> *”Tarkastellaan n:n ensimmäinen kolmella jaollisen luonnollisen luvun summaa $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$, jossa $n = 1, 2, 3, \ldots$. Käytetään summalle merkintää S_n.*
>
> a) *Määritä S_1, S_2, S_9 ja S_{10}.*
>
> b) *Määritä S_k ja S_{k+1}. Miten summa S_{k+1} saadaan summasta S_k?”* [17, luku 4.4]

Toisin kuin Tekijä pitkä matematiikka 11 -kirjassa löytyy kuitenkin kaksi esimerkkiä arimeettiseen ja geometriseen summaan liittyen. Aritmeettista summaa käsittelevä esimerkki on

”Osoita induktiolla, että $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \frac{3}{2}n(n+1)$ *kaikilla* $n = 1, 2, 3, \ldots$*.”*

ja geometrista summaa käsitellään esimerkissä

”Osoita induktiolla, että $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ *kaikilla* $n = 1, 2, 3, \ldots$*.”* [17, luku 4.4]

Summia ei sen kummemmin kuitenkaan käsitellä kummassakaan MAA11-kurssin oppimateriaalissa, joten kovin paljon ei syvennetä opiskelijoiden ymmärrystä summista, vaikka opetussuunnitelman tavoitteissa määritellään toisin.

4.3.3 Sarja

Sarja ei kuulu lyhyen oppimäärän sisältöön kummassakaan opetussuunnitelmassa. Pitkässä oppimäärässä opiskellaan sarjoja molempien opetussuunnitelmien mukaisella kurssilla *MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Vielä ole olemassa valmista oppimateriaalia vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaiselle kurssille MAA13. Siksi analysoidaan tässä osiossa pelkästään vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisia kirjoja Pitkä matematiikka 13 [21] ja Matematiikan taito 13 [8].

Kirjassa Pitkä matematiikka 13 on sarjan määritelmä ja sarjan summa esitetty yhden sivun verran [21, s. 151]. Matematiikan taito 13 -kirjassa sama sisältö on tiivistetty yhteen määritelmään [8, s. 93], joka sisällöllisesti vastaa tämän työn määritelmiä 2.17 ja 2.18. Oppikirjojen esimerkkien sisällölliset tasot ovat tähän aiheeseen liittyen aika erilaiset. Sarjan ja sarjan summan määritelmän jälkeen on Pitkä matematiikka 13 -kirjassa tutkittu numeroista koostuvia sarjoja ja niiden suppenemista tai hajaantumista:

”Suppeneeko vai hajaantuuko sarja? Jos sarja suppenee, niin mikä sen summa on?

a) $1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$

b) $1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2\ kpl} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{3\ kpl} + \ldots$*”* [21, s. 152–153]

Matematiikan taito 13 kirjassa puolestaan tutkitaan sarjojen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$$

suppenemista [8, s. 93–94].

Tämänkin jälkeen kirjojen väliset erot jatkuvat. Kirjassa Matematiikan taito 13 jatketaan esittämällä teleskooppisarjan suppenemista [8, s. 94], harmonisen ja aliharmonisen sarjojen hajaantumista sekä yliharmonisen sarjojen suppenemista [8, s. 97]. Esitys on jokseenkin samanlainen kuin tämän työn määritelmissä 2.19 ja 2.21 sekä lauseissa 2.24, 2.25 ja 2.26. Harmonisen, aliharmonisen ja yliharmonisen sarjan todistukset löytyvät Matematiikan taito 13 -kirjasta vasta myöhemmin positiivitermisten sarjojen vertailuperiaatteen sekä integraalitestin yhteydessä [8, s. 112, 145]. Esitys jatkuu geometrisen jonon ja sarjan suppenemisella [8, s. 101–103] ja vasta tämän jälkeen aletaan tekemään suppenemistarkasteluja [8, s. 110–117]. Suppenemistarkastelujen jälkeen sarjojen esitys jatkuu potenssisarjojen esittämisellä ja funktioiden sarjakehitelmiin tutustumisella [8, s. 118–122].

Pitkä matematiikka 13 -kirjassa sen sijaan esitetään ehtoja sarjojen suppenemiselle ja hajaantumiselle (kts. lauseet 2.17 ja 2.18) välittömästi sarjan ja sarjan summan määritelmien jälkeen [21, s. 154]. Pitkä matematiikka 13 -kirjassa edetään tutkimalla geometrista jonoa ja sarjaa, geometrisen sarjan suppenemisehtoa sekä geometrisen summan kaavaa [21, s. 161–163]. Pitkä matematiikka 13 -kirjan sarjoja koskeva sisältö loppuu siihen.

Jo vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisen MAA9-kurssin kohdalla huomattiin aika isot tasoerot kirjasarjojen Pitkä matematiikka ja Matematiikan taito välillä. Sama ilmiö näkyy myös MAA13-kurssin oppikirjoja vertailtaessa. Pitkä matematiikka 13 -kirjan sisällöt täyttävät opetussuunnitelman tavoitteet ja keskeiset sisällöt. Kirjan lähestymistapa ja esitystyyli sopii hyvin pitkän matematiikan keskiverto-opiskelijalle. Sen sijaan Matematiikan taito 13 -kirja sisältää paljon enemmän kuin mitä opetussuunnitelmassa on vaadittu ja ote on selvästi matemaattisempi.

Erilaisia ja eri tasoisia oppimateriaaleja löytyi laajasti vielä vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisille kursseille ja se antoi myös opettajille suuremmat mahdollisuudet valita oppimateriaalia oman maun mukaan. Tämän vuoksi opiskelijat olivat toisaalta aika eriarvoisessa asemassa. Pitkä matematiika -kirjasarjaa käyttänyt opiskelija saa esimerkiksi suppeamman näkemyksen ja ymmärryksen matematiikan luonteesta kuin Matematiikan taito -kirjasarjaa käyttänyt opiskelija, vaikka molemmat opiskelijat on suorittanut sama määrä pitkän oppimäärän kursseja.

Sisällöllisesti eri opetussuunnitelmien MAA13-kurssien sisällöt eivät ole lukujonojen, summien ja sarjojen osalta kovin erilaisia: molemmissa *”tutkitaan lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia”*. Molempien kurssien keskeisiin sisältöihin kuuluvat *”funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä”*. Vuoden 2015 opetussuunnitelman tavoitteisiin on toki lisätty tavoitteeksi, että opiskelija osaa

> *”käyttää teknisiä apuvälineitä funktion ominaisuuksien tutkimisessa ja derivaatan laskemisessa annetun muuttujan suhteen sekä epäoleellisten integraalien, lukujonon raja-arvon ja sarjan summan laskemisessa sovellustehtävissä”.* [27, s. 124; 28, s. 136]

Digitalisaatio ja tekisten apuvälineiden hyödyntäminen näkyvät siis myös kurssikohtaisissa tavoitteissa, eikä pelkästään matematiikan yleisissä tavoitteissa.

Vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisella MAA13-kurssilla on kuitenkin käsiteltävä aika paljon enemmän asiaa kuin vuoden 2003 opetussunnitelman mukaisella ja vastaavanlaisella kurssilla. Aidosti monotonisten funktioiden käänteisfunktioiden tutkiminen, käänteisfunktio sekä kahden muuttujan funktio ja osittaisderivaatta on lisätty uuden opetussuunnitelman kurssisisältöön. Tässä vaiheessa on vaikea sanoa, miten tämä muutos näkyy käytännössä, koska oppimateriaalit ilmestyvät vasta tämän vuoden kesällä ja syksyllä. On kuitenkin realistista olettaa, että lukujonojen, summien ja sarjojen osuus vähenee MAA13-kurssilla, koska kurssiin on lisätty muutakin sisältöä.

5 Pohdintaa

5.1 Eri oppimateriaalit ja niiden ominaispiirteet

Suurin ero opetussuunnitelmamuutoksessa on yhteisen opintokokonaisuuden ohella digitalisaation integrointi opetukseen ja oppimateriaaleihin. Vuoden 2003 mukaisille kursseille ii esimerkiksi löydy digikirjoja. Sen sijaan on mahdollista ostaa vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisille kursseille tarkoitetut kirjat joko painettuina kirjoina tai digikirjoina. Markkinoilta löytyy myös täysin digitaalisiin oppimateriaaleihin keskittyneitä kustantajia, kuten esimerkiksi Tabletkoulu. Näiden kustantajien materiaalit ovat siis olemassa pelkästään sähköisessä muodossa ja niihin voi sisältyä paljon enemmän interaktiivista materiaalia kuin pelkästään perinteisen kirjan teoriaa, esimerkkejä ja harjoitustehtäviä.

Koska Tabletkoulun oppimateriaalit ovat digitaaliset, ne ovat luonnollisesti myös erilaiset kuin perinteinen oppikirja. Tabletkoulu toimii täysin nettiselaimen kautta. Taustalla oleva idea on, että sivun asetukset on optimoitu sillä tavalla, että sisältö toimii ja näkyy hyvin tietokoneella, tabletilla ja mobiililaitteella. Tabletkoulun materiaalien sisällöt on jaettu kursseihin, lukuihin, esimerkkeihin ja tehtäviin, mutta rakenne eroaa kuintenkin painetun kirjan rakenteesta. Lukijalla on itse mahdollisuus valita, mitkä esimerkit tai syventävän osion materiaalit ovat klikkauksella avautuvien ruutujen avulla hänelle näkyvillä. Materiaalien ulkoasua on kuitenkin selkeä ja helposti hahmotettavissa. Kaikkien oppimateriaalien yleinen taustaväri on valkoinen ja muilla väreillä eritellään esimerkkejä (sininen), matemaattisia kaavoja (ruskea), syventävää tietoa (vihreä) ja harjoituksia (harmaa). Käyttäjälle tämä on kaikin tavoin selkeää. Toinen etu digitaalisissa materiaaleissa on, että on mahdollista liittää videoita, animaatioita, ääntä ja muuta multimediaa materiaaleihin. Tabletkoulun materiaaleista löytyy esimerkiksi linkkejä WolframAlpha-sovellukseen, jossa tarkemmin on selitetty matemaattinen ratkaisu tai ilmiö tehtävään liittyen. Kaikki tämä on mahdollista digitaalisen formaatin myötä. [24; 15; 16]

Sisällön vaikeustaso on toisaalta Tabletkoulun materiaaleissa aika alhainen. MAY1-kurssin materiaaleissa esitetään rekursiivinen, aritmeettinen ja geometrinen lukujono ja ne ovat kaikki vuoden 2015 opetussuunnitelman keskeisissä sisällöissä. Teoriaosuus jää kuitenkin aika suppeaksi ja myös syvälliset tehtävät ovat turhan yksinkertaisia. Osa opiskelijoista jatkaa luulutavasti pitkän oppimäärän kursseilla ja heidänhän pitäisi saada vahva pohja ja syvällinen ymmärrys lukujonoista ja summista jo yhteisen opintokokonaisuuden aikana. Muutamassa esimerkissä tarjotaan mielenkiintoista syventävää lisätietoa aiheesta kiinnostuville, kuten esimerkiksi tietoa matemaattisten vakioiden π ja $\sqrt{2}$ sarjakehitelmistä. Nämä esimerkit eivät kuitenkaan korjaa sitä puutetta, että muissa teoriaosioissa ja tehtävissä ei anneta tarpeeksi syvällistä tietoa lukujonoista ja summista. [24]

Yhteiselle opintokokonaisuudelle tarkoitetuissa oppimateriaaleissa on valittu hyvin erilaiset suunnat koskien oppimateriaalin soveltuvuutta lyhyen tai pitkän matematiikan lukijoille. Yhteinen tekijä -kirjassa on selväsi otettu hieman vaikeampia asioita käsittelyyn kuin mitä esimerkiksi vuoden 2003 opetussuunnitelman MAB6-kurssin oppikirjoissa on ollut. Toisaalta ei ole lukujonojen kannalta kovin suurta eroa Pitkä matematiikka 9 -kirjan sisällöissä verrattuna Yhteinen tekijä -kirjaan, mutta summien kohdalla on jo aika paljon vaikeampia esimerkkejä käsittelyssä MAA9-kurssin oppikirjoissa. Tabletkoulun lukujonoja koskevat oppimateriaalit MAY1-kurssille ovat kuten jo todettu aika pinnalliset ja eivät vaikeustasoltaan oikein sovellu tuleville pitkän matematiikan opiskelijoille.

Lyhyen ja pitkän oppimäärän oppimateriaalien välillä ei kuitenkaan tarvitse olla suuria eroja. Saman kustantajan lyhyen ja pitkän oppimäärän kirjoissa Lyhyt matikka 6 [1] ja Pitkä matematiikka 9 [20] on suurimmaksi osaksi esitetty samoja ongelmia ja esimerkkejä lukujonoja ja summia käsiteltävissä luvuissa. Osa kirjojen tehtävistä ovat myös samoja. Eri oppimäärät on kuitenkin huomioitu sillä tavalla, että Lyhyt matikka 6 -kirjassa esimerkit ja tehtävät ovat yksinkertaistettuja ja Pitkä matematiikka 9 -kirjasta löytyy todistustehtäviä.

Eritasoisia oppimateriaaleja löytyi toisaalta jo vuoden 2003 opetussuunnitelman aikana. Pitkän oppimäärän MAA9-kurssin analysoitujen oppikirjojen välillä on aika isot tasoerot. Matematiikan taito 9 -kirjassa ote on matemaattisempi ja sen lisäksi on enemmän ja syvällisempiä asioita käyty läpi. Määritelmät, lauseet ja esimerkit on selvästi merkitty ja eroteltu toisistaan. Lauseiden todistukset esitetään johdonmukaisesti jokaisen lauseen jälkeen. Huomionarvoista on, että esimerkiksi lukujonon raja-arvo on mainittu vasta MAA13-kurssin tavoitteissa [27, s. 124], mutta asia on kuitenkin esitetty ja otettu käyttöön jo Matematiikan taito 9 -kirjassa. Samasta kirjasta löytyy myös ensimmäisen kertaluvun rekursioyhtälöt lisämateriaalina, vaikka niitä ei mainita opetussuunnielmassa [7, s. 124–126]. Opetussuunnitelmassa todetaan kuitenkin, että *”kurssikuvausten väljyyttä voidaan käyttää resurssien salliessa keskeisten sisältöjen syventämiseen ja eheyttävien kokonaisuuksien muodostamiseen”* [27, s. 118]. Pitkä matematiikka 9 -kirjassa matemaattiset selitykset ovat pääosin sanalliset tai aika yksinkertaisin matemaattisin merkinnöin kuvatut. Tärkeät tulokset on korostettu värillisellä taustalla, mutta kirjassa ei erotella lauseita ja määritelmiä. Matematiikan taito 9 -kirjaan verrattuna sisältö on aika pinnallinen, mutta kirjan sisältö täyttää opetussuunnitelman vaatimukset. Eri kirjasarjat eroineen voivat toimia eri tavalla eri opiskelijoille.

Yleisesti voidaan kuitenkin todeta, että eri kirjoissa ja kirjasarjoissa suhtaudutaan eri tavalla sanallisiin tehtäviin. Vuoden 2015 opetussuunnitelmassa vaikuttaa olevan niin, että lukujonoja ja sarjoja koskevat sanalliset tehtävät on pääosin pitkän matematiikan lukijoille tarkoitettu. Sekä Tekijä lyhyt matematiikka -kirjoissa [9; 10] että Tabletkoulun digitaalisissa materiaaleissa [24; 15] pääpainotus on laskennallisten tehtävien ratkaiseminen. Sen lisäksi Yhteinen tekijä -kirjassa ei ole yhtäkään sanallista perustehtävää. Sen sijaan lähes kaikki syventävät tehtävät Yhteinen tekijä -kirjassa ovat sanallisia tai soveltavia tehtäviä.

Erilaisia valintoja on myös tehty sanallisten tehtävien teemoihin liittyen. Vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisissa kirjoissa suurin osa sanallisista tehtävistä on talouteen liittyviä. Uuden opetussuunnitelman mukaisissa oppimateriaaleissa ovat sanallisten tehtävien teemat sen sijaan laajemmat ja vaihtelevammat. Lasketaan esimerkiksi rakennuksen päätyseinän laatoitusta, uutuustuotteen myyntimenestystä, lääkeannoksen suuruutta, auditorion istuinten lukumääriä, malmin louhintaa, sademääriä, kivien määrää pyramidissa, kuntosalissa käytettyjä pyramidiharjoituksia, rannalla olevien kerrostalojen korkeuksia ja opittujen vieraan kielen sanojen määriä [3, s. 175–177, 198–199; 24, luvut 5.3 ja 5.6].

5.2 Tekniset apuvälineet

Teknisten apuvälineiden osuus eri oppimateriaaleissa vaihtelee aika runsaasti. Suurin jako tapahtuu juuri vanhaan ja uuteen opetusuunnitelmaan soveltuvien oppimateriaalien välillä. Tätä on kuitenkin odotettu, koska vuoden 2003 opetussuunnitelmassa mainitaan tekniset apuvälineet yhden virkkeen verran:

> *”Opetuksen tavoitteena on, että opiskelija osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.”* [27, s. 119]

Vuoden 2015 opetussuunnitelmassa on tietokoneohjelmien ja muiden teknisten apuvälineiden asema kuitenkin muuttunut merkittävästi, koska matematiikan tavoitteissa todetaan:

> *”Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Matematiikan opiskelussa hyödynnetään muun muassa dynaamisen matematiikan ohjelmistoja, symbolisen laskennan ohjelmistoja, tilasto-ohjelmistoja, taulukkolaskentaa, tekstinkäsittelyä sekä mahdollisuuksien mukaan digitaalisia tiedonlähteitä. Tärkeää on myös arvioida apuvälineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta. Edellä mainituista apuvälineistä käytetään jatkossa nimitystä tekniset apuvälineet.”* [28, s. 129]

Oppimateriaaleissa tämä muutos todellakin näkyy. Esimerkiksi Yhteinen tekijä -kirjassa [3] on selvästi huomioitu tekniset apuvälineet ja niiden käyttö. Kirjasta löytyy väliotsikoita, kuten esimerkiksi *”Lukujono laskimella”*, *”Rekursiivinen lukujono laskimella”* ja *”Geometrinen lukujono laskimella”*. Otsikot viittaavat siihen, että esimerkeissä keskitytään laskimen tai tietokoneohjelman hyödyntämiseen tehtävän ratkaisemisessa [3, s. 136, 147, 181]. Ohjeet ovat yksityiskohtaisia ja hyödyllisiä. Esimerkkejä Yhteinen tekijä -kirjassa löytyvistä ohjeista ovat esimerkiksi

> *”Syötä ensimmäiseen sarakkeeseen ensimmäiselle riville ensimmäinen jäsen. Kirjoita toiselle riville kaava, jolla saat laskettua toisen*

jäsenen arvon. Kirjoita kaava soluviittausten avulla. Kopioi kaava niin monta kertaa, että saat rivillä 25 olevan jäsenen näkyviin.” [3, s. 147]

ja

”Muuta akselien asteikkoja niin, että etsitty kuvaajan piste tulee näkyviin. Pystyakselin tulee siis näkyä ainakin arvoon 10 000 saakka.” [3, s. 137]

Tekniset apuvälineet on sen lisäksi jollakin tavalla otettu huomioon monissa esimerkeissä. Tavallisinta on jonkinlainen maininta marginaalissa, esimerkiksi *”Ratkaistaan epäyhtälö laskimella”* [3, s. 135] tai *”Sievennetään lauseke laskimella”* [3, s. 169]. Joissakin esimerkeissä kehotetaan jopa ratkaisemaan tehtävää laskimen avulla, kuten

”Tutki laskimen avulla, kuinka monta aritmeettisen jonon $3, 5, 7, \ldots$ *ensimmäistä jäsentä on vähintään laskettava yhteen, jotta summa on suurempi kuin 2000.”* [3, s. 169]

Kirjan ohjeet eivät kuitenkaan ole askel askeleelta -muodossa olevia ohjemateriaaleja. Jos ohjelmisto ei ole kirjan lukijalle tuttua, hänen on ensin perehdyttävä käyttöjärjestelmään itse. Ohjeet ovat yleisluonteisessa muodossa juuri sillä tarkoituksella, että ne toimisivat kaikilla laskinohjelmistoilla.

Kaikissa Tekijä lyhyt matematiikka -kirjasarjan kirjoissa vaikuttaa olevan samanlainen periaate kuin Yhteinen tekijä -kirjassa: jatkuvasti ja luontevasti ohjeistetaan teknisten apuvälineiden käyttöön [9; 10]. Talousmatematiikan kurssin kirjassa Tekijä lyhyt matematiikka 6 on kunnolla panostettu taulukkolaskentaohjelman ja symbolisen laskennan käyttöön [10, s. 129, 133–134, 147]. Mainitsemisen arvoista on kuitenkin, että Tekijä lyhyt matematiikka 6 -kirjassa ei lasketa kaikkia esimerkkejä ja tehtäviä laskimella tai tietokoneohjelmalla, vaan osa tehtävistä on tarkoitettu ratkaistavaksi ilman teknisiä apuvälineitä [10].

Suuremmaksi osaksi ei ole vuoden 2003 opetussuunnitelmaan soveltuvissa oppimateriaaleissa huomioitu laskinohjelmistoja ja teknisiä apuvälineitä, mutta löytyy kuitenkin poikkeavia esimerkkejä. Lyhyt matikka 6 -kirjasta löytyy ohjeita symbolisen laskimen käyttöön ja tekijät toteavat alkusanoissa, että *”oppikirja tukee symbolisen laskimen hyödyntämistä opiskelussa”* [1, s. 2]. Tämä johtuu varmasti siitä, että kirja on painettu vuonna 2014 ja symboliset laskimet sallittiin ylioppilaskirjoituksissa ensimmäisen kerran jo keväällä 2012 matematiikan kokeissa. Kirjan ohjeet ovat kuitenkin enemmän mainintoja siitä, että joku asia on tietyn toiminnon tai komennon avulla mahdollista laskea symbolisella laskimella. Opiskelijan on itse selvittävä, miten hän käytännössä toimii omalla laskimellaan. Myös talousmatematiikkaa käsiteltävän kurssin oppikirjassa Variaabeli 7 on kokonainen luku omistettu pelkästään taulukkolaskentaohjelmaan ja miten sitä voidaan hyödyntää talouteen liittyvissä tehtävissä [12, s. 151–176].

5.3 Pedagogiset ratkaisut ja eriyttäminen

Kuten luvussa 4.2 todettiin, on hyvin ratkaisevaa, että oppimateriaalissa käsiteltävää asiaa on selkeästi esitetty ja että rakenne on looginen. Kaikissa tämän työn analyysissa mukana olleiden oppimateriaalien kohdalla tämä täyttyi. Kaikissa kirjoissa on myös jaettu tehtäviä eri sarjoihin vaikeustason mukaan, mitä voidaan pitää yksinkertaisena eriyttämisenä. Eri oppimateriaaleista löytyy kuitenkin eroja koskien esimerkiksi pedagogisia ratkaisuja.

Variaabeli-kirjasarjan kirjoissa [11, 12] on jokaisen luvun alkuun koottu luvun tärkeimmät käsitteet *"avainsanat"*-nimikkeen alla. Tämä antaa selkeyttä opiskelijoille ja auttaa sisällön hahmottamisessa ja oppimisessa. Sen lisäksi on tärkeimmät tulokset ja selitykset johdonmukaisesti koottu värilliseen ruutuun, mutta niitä ei ole toisaalta nimetty määritelmiksi tai lauseiksi. Molemmista Variaabeli-kirjasarjan kirjojen keskeltä ja lopusta löytyy *"Testaa hyvät taitosi"* -nimiset itsearviointitestit [11, s. 68–69, 141]. Eriyttämisenä voidaan myös pitää niitä vieraalla kielellä olevat tehtävät, jotka löytyvät tehtäväsarjan 2 lopusta. Kirjoista löytyy ainakin englanninkielisiä, ruotsinkielisiä, saksankielisiä, vironkielisiä ja espanjankielisiä tehtäviä. Nämä tehtävät voivat toimia motivaattorina joidenkin opiskelijoiden kohdalla. Ainakin käy hyvin ilmi matematiikan sopivuus kansainväliseen yhteistyöhön: vaikka puhuttaisiin eri kieliä, on suhteellisen helppoa ymmärtää tehtäviä ja kirjoitettua matemaattista tekstiä, koska taustalla oleva matematiikka on kuitenkin kaikilla kielillä sama.

Tekijä-sarjojen kirjojen jokaisen alaluvun alusta löytyy lyhyt pohdintatehtävä, tutkimustehtävä tai ongelmatehtävä, joka toimii johdantona luvun aiheeseen. [3; 9; 10; 14]. Saman kustantajan lyhyen matematiikan kirjoissa Tekijä lyhyt matematiikka 4 ja Tekijä lyhyt matematiikka 6 on sen lisäksi jokaisen pääluvun alkuun, paitsi lisämateriaali- ja kertausluvuissa, koottu luvun yleiset tavoitteet. Niissä kirjoissa on myös kerrottu, mitkä asiat on tavoitteena osata tehdä ilman laskinta ja mitkä asiat on osattava tehdä laskinohjelmiston avulla [9, s. 7, 59, 108, 159; 10, s. 7, 37, 93, 140, 177].

Tabletkoulun kehittäjät ovat selvästi pohtineet toimivia pedagogisia ratkaisuja. Kun opettaja luo uuden kurssin, se tapahtuu valmiilla kurssipohjalla, johon sisältyy teoriaa ja harjoituksia. Opettaja voi halutessaan lisätä sekä omaa sisältöä että omia harjoituksia sinne. Opettajan päätettävissä on myös, mitkä tehtävät jaetaan kurssin opiskelijoille ja opettaja voi määrittää tehtävien vastausaikaa tai muuttaa tehtävien pisteytystä. Jokaisen tehtävän kohdalla näkyy opettajalle valmis malliratkaisu. Tehtäviä voidaan myös kohdistaa yhdelle tai muutamalle opiskelijalle, mikä mahdollistaa eriyttämistä. Opettaja pääsee seuraamaan opiskelijoiden työskentelyä. Opettaja näkee myös, kuinka pitkä aika on käytetty eri tehtäviin sekä kuinka kauan opiskelija on ollut kirjautuneena kurssialueella. Jokaisen luvun alusta löytyy opettajan opas sekä oppimistavoitteet. Itsearviointi- ja vertaisarviointityökaluja on integroitu oppimateriaaleihin, jos opettaja haluaa niitä ottaa käyttöön. Opiskelijalla on puolestaan mahdollisuus tehdä omia muistiinpanoja ja hän näkee myös joidenkin tehtävien kohdalla vihjeen tehtävän ratkaisemiseen. Kun kurssi loppuu, on mahdollista ladata oma kurssimateriaali pdf-tiedostona. Täten oma henkilökohtainen oppimateriaali pysyy tallessa ja on käytettävissä kaikkialla.

5.4 Opetussuunnitelmamuutos

Opetussuunnitelmamuutoksessa suurimmat erot opetussuunnitelmien välillä on yleisesti matematiikan kannalta digitalisaatio ja teknisten apuvälineiden hyödyntäminen sekä uusi yhteinen opintokokonaisuus. Myös vuoden 2015 opetussuunnitelman käsitys oppimisesta sekä opiskeluympäristöistä ja -menetelmistä näkyy matematiikan yleisissä tavoitteissa. Tässä tutkielmassa ei ole tarkasteltu muita sisällöllisiä muutoksia kuin se, missä vaiheessa ja millä kursseilla käsitellään lukujonoja, summia ja sarjoja eri opetussuunnitelmissa.

Lukujonoihin ja summiin tutustutaan nykyään yhteisen opintokokonaisuuden johdosta paljon aikaisemmassa vaiheessa kuin mitä ennen tehtiin sekä pitkässä että lyhyessä oppimäärässä. Nykyään käsitellään lukujonoja ja summia ensimmäisen matematiikan kurssin aikana, aikaisemmin se tapahtui vasta toisen vuoden keväällä tai kolmannen vuoden syksyllä. Lukujonojen painotus lyhyessä ja pitkässä oppimäärässä on myös muuttunut. Lyhyessä oppimäärässä lukujonojen ja summien painotusta on lisätty, koska periaatteessa opiskellaan lukujonoja ja summia kolmella kurssilla, toisin kuin kahdella kurssilla vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaan.

Pitkässä oppimäärässä lukujonojen, summien ja sarjojen osuus on sitä vastoin vähentynyt. Sisällöllisesti lukujonojen ja summien pääpainotus on MAY1-kurssilla. Monien opettajien mielestä kurssiin sisältyy liikaa asiaa ja siksi jotkut opettajat jättävät lukujonoja ja summia kokonaan käsittelemättä kurssin aikana (kts. 3.4 ja [5]). Tämä tarkoittaa sitä, että pitkän matematiikan lukijan ymmärrys lukujonoista ja summista voi olla hyvin suppea, koska sen kurssin jälkeen ei tarjota uutta mahdollisuutta tutustua asiaan. Kurssilla MAA11 on tarkoitus *”syventää opiskelijoiden ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista”* [28, s. 135], mutta ainakin Tekijä pitkä matematiikka 11 -kirjassa [14] aiheen käsitteleminen tapahtuu todistamisen kautta ja osuus on muutenkin hyvin suppea. MAA13-kurssilla lähestytään lukujonoa, sarjoja ja niiden summia raja-arvojen kautta ja syvennetään täten osaamista. Toisaalta lukujonojen, summien ja sarjojen osuus kurssilla on vähentynyt aikaisempaan MAA13-kurssiin verrattuna.

Ensimmäinen vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaan opiskellut ikäluokka suorittaa ylioppilastutkinnon ja valmistuu lukiosta keväällä 2019. Tässä vaiheessa on siksi vaikea ennustaa, millä tasolla näiden pitkän matematiikan lukijoiden ymmärrys lukujonoista, summista ja sarjoista tulee olemaan. Aika monta tekijää viittaa kuitenkin siihen suuntaan, että vuoden 2015 opetussuunnitelmassa ja sen mukaisissa oppimateriaaleissa lukujonojen, summien ja sarjojen osuudet ovat vähentyneet merkittävästi pitkässä oppimäärässä. Jos näin todellakin tulee käymään, on käynnissä oleva opetussuunnitelmamuutos valitettava lukujonojen, summien ja sarjojen kannalta.

Lähteet

[1] A. Aalto, J. Kangasaho, O. Kylliäinen, A. Metiäinen, J. Mäkinen, *Lyhyt matikka 6 – Matemaattisia malleja II.* Oppikirja, 6. uudistettu painos, Sanoma Pro, Helsinki, 2014.

[2] A. Aalto, J. Kangasaho, O. Kylliäinen, A. Metiäinen, J. Mäkinen, J. Tahvainen, *Lyhyt matikka 7 – Talousmatematiikka.* Oppikirja, 1.–6. painos, Sanoma Pro, Helsinki, 2014.

[3] M. Ekonen, S. Hassinen, P. Heiskanen, K. Hemmo, P. Kaakinen, J. Tahvainen, T. Taskinen, *Yhteinen tekijä – Lukion matematiikka 1.* Oppikirja, 1. painos, Sanoma Pro Oy, Helsinki, 2016.

[4] A. Ekonoja, *Oppimateriaalien kehittäminen, hyödyntäminen ja rooli tieto- ja viestintätekniikan opetuksessa.* Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto, 2014. [Viitattu: 12.4.2018] URL: http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-5793-3.

[5] L. Eronen, P. Portaankorva-Koivisto, S. Kupiainen, M. Hannula, *Lukion opiskelijoiden ja opettajien ensikokemuksia matematiikan yhteisestä MAY-kurssista.* Dimensio 4/2017, s. 31–37.

[6] J. Ilmonen, J. Niemelä, *Johdatus diskreettiin matematiikkaan – harjoitustehtävien ratkaisuja.* Tampere, 2004. [Viitattu: 26.4.2018] URL: http://www.sis.uta.fi/matematiikka/diskreetti/ratkaisut.pdf.

[7] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Piippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, T. Laurinolli, T. Sankilampi, M-L. Viilo, K. Väänänen, *Matematiikan taito 9 – Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Oppikirja, 1. painos, WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2007.

[8] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Piippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, *Matematiikan taito 13 – Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Oppikirja, 1. painos, WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2008.

[9] S. Hassinen, K. Hemmo, T. Taskinen, *Tekijä lyhyt matematiikka 4 – Matemaattisia malleja.* Oppikirja, 1.–2. painos, Sanoma Pro, Helsinki, 2017.

[10] S. Hassinen, T. Taskinen, *Tekijä lyhyt matematiikka 6 – Talousmatematiikka.* Oppikirja, 1. painos, Sanoma Pro, Helsinki, 2018.

[11] T. Hautajärvi, J. Ottelin , L. Wallin-Jaakkola, *Variaabeli 6 – Matemaattisia malleja II.* Oppikirja, 1. painos, Otava, 2005.

[12] T. Hautajärvi, J. Ottelin , L. Wallin-Jaakkola, *Variaabeli 7 – Talousmatematiikka.* Oppikirja, 1. painos, Otava, 2004.

[13] J-P. Heinonen, *Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit: Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa.* Väitöskirja, Helsingin yliopisto, 2005. [Viitattu: 7.6.2017] URL: http://urn.fi/URN:ISBN:952-10-1995-6.

[14] P. Heiskanen, P. Kaakinen, J. Lehtonen, M. Leikas, J. Tahvainen, *Tekijä pitkä matematiikka 11 – Lukuteoria ja todistaminen.* Oppikirja, 1. painos, Sanoma Pro, Helsinki, 2017.

[15] H. Hellsten, L. Hellsten, R. Luisto, K. Nurmi, *MAB4 Matemaattisia malleja (LOPS 2016).* Digitaalinen oppimateriaali, Tabletkoulu. [Viitattu: 6.5.2018] URL: https://www.tabletkoulu.fi.

[16] H. Hellsten, L. Hellsten, J. Salminen-Saari, *MAB6 Talousmatematiikka (LOPS 2016).* Digitaalinen oppimateriaali, Tabletkoulu. [Viitattu: 6.5.2018] URL: https://www.tabletkoulu.fi.

[17] M. Hähkiöniemi, S. Juhala, P. Juutinen, A. Laitinen, T. Raittila, T. Tikka, *Juuri 11 – Lukuteoria ja todstaminen (digikirja).* Digitaalinen oppimateriaali, versio 1.0, Otava, 2017.

[18] P. Hämäläinen, *Aritmeettinen ja formaalisti esitetty lukujono lukion matematiikassa.* Pro gradu -tutkielma, Turun yliopisto, 2016. [Viitattu: 7.6.2017] URL: http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe201602237230.

[19] L. Judin, *Lukujonot ja trigonometriset funktiot lukion matematiikassa.* Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 3.9.2008. [Viitattu: 7.6.2017] URL: http://math.tut.fi/fi/wp-content/uploads/2010/01/diplomityo_lj.pdf.

[20] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 9 – Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Oppikirja, 1. painos, WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2007.

[21] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka 13 – Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Oppikirja, 1. painos, WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2007.

[22] P. Koivisto, *Analyysi 1.* Opetusmoniste, Tampereen yliopisto, Tampere, 2016. [Viitattu: 7.6.2017] URL: http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-03-0222-1.

[23] P. Koivisto, *Analyysi C – Epäoleellinen integraali ja sarjat.* Kurssimoniste, Tampereen yliopisto, Tampere, syksy 2017. [Viitattu: 19.2.2018] URL: http://www.sis.uta.fi/matematiikka/analyysi-c/moniste2017/Analyysi-C.pdf

[24] S. Kähkönen, K. Nurmi, A. Saarinen, J. Talja, *MAY1 Luvut ja lukujonot (LOPS2016).* Digitaalinen oppimateriaali, Tabletkoulu. [Viitattu: 6.5.2018] URL: https://www.tabletkoulu.fi.

[25] M. Lehtinen, *Lukion yhteisen matematiikan kurssin oppikirjoja.* Kirja-arvio, Matematiikkalehti Solmu, 3/2017. [Viitattu: 8.12.2017] URL: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/3/oppikirjat.pdf.

[26] A. Leinonen, A. Turkki, S. Harmoinen, *Onnistunko vai ei? – Lukiolaisten kokemuksia MAY1-kurssista.* Artikkeli, Dimensio 4/2017, s. 38–41.

[27] *Lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet 2003.* Verkkodokumentti, Opetushallitus, Helsinki, 27.8.2003. [Viitattu: 6.6.2017] URL: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus.

[28] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.* Verkkodokumentti, Opetushallitus, Helsinki, 27.10.2015. [Viitattu: 6.6.2017] URL: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus.

[29] J. Merikoski, A. Virtanen, P. Koivisto, *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.* Tampere, maaliskuu 2004. [Viitattu: 21.4.2018] URL: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/jdm-2017-12-19.pdf.

[30] A. Peltonen, *Painetut oppikirjat vai sähköinen oppimateriaali - Oppimateriaalin vaikutus opiskelijoiden oppimiskokemukseen MAY-kurssilla.* Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, 2017. [Viitattu: 20.4.2018] URL: http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2017112251700.

[31] J. Pitkäranta, *Calculus Fennicus: TKK:n 1. lukuvuoden laaja matematiikka (2000 – 2013).* Oppimateriaali, Avoimet oppimateriaalit ry, Helsinki, 2015. [Viitattu 7.6.2017] URL: https://mycourses.aalto.fi/pluginfile.php/123037/mod_resource/content/2/calculusfennicus.pdf.

[32] K. Riiho, *Siirtymä MAY1-kurssilta lyhyen tai pitkän matematiikan 2. kurssille lukiossa.* Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, 2018. [Viitattu: 20.4.2018] URL: http://urn.fi/URN:NBN:fi:hulib-201804131665.

[33] S. L. Salas, E. Hille, *Calculus – one and several variables.* John Wiley & Sons, Inc., New York. 1990. ISBN: 0-471-61195-6.

[34] J. Syrjäkoski, *Lukujonot lukiossa ja yliopistossa.* Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto, 2015. [Viitattu: 7.6.2017] URL: http://urn.fi/URN:NBN:fi:uta-201507022016.

[35] A.-K. Torvinen, *Reaalilukujonoista ja niiden merkityksestä kouluopetuksessa.* Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto, 2010. [Viitattu: 7.6.2017] URL: http://urn.fi/urn:nbn:fi:uta-1-20862.

[36] L. Tuohilampi, *Matikkanälkä.* PS-kustannus, Jyväskylä, 2017.

[37] K. Uusikylä, P. Atjonen, *Didaktiikan perusteet.* Oppikirja, 3. uudistettu painos, WSOY, 2005.