T A M P E R E E N Y L I O P I S T O

Todistaminen pitkän matematiikan sähköisissä ylioppilas-kirjoituksissa

Luonnontieteiden tiedekunta

Matematiikan pro gradu -tutkielma

ANSSI LEINO

Marraskuu 2017

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
ANSSI LEINO: Todistaminen pitkän matematiikan sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa
Matematiikan pro gradu -tutkielma, 83 sivua, 7 liitesivua
Marraskuu 2017

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää kuinka kielentäminen ja todistaminen näkyvät pitkän matematiikan opetussuunnitelmassa ja ylioppilaskirjoituksissa. Lisäksi selvitettiin, miten nämä voisivat näkyä digitaalisessa ylioppilaskokeessa. Tutkielmassa toteutettiin kehittämistutkimus, jonka tarkoituksena oli tuottaa kielentämistä hyödyntäviä todistustehtäviä sähköistä koetta ajatellen. Kehittämistutkimuksessa toteutettiin yksi kehittämissykli. Kehittämissyklin päätteeksi luotiin 8 erillistä tehtävää, kattaen jokaisen matematiikan sähköisen kokeen tehtävätyypin.

Ensin tutkimuksessa toteutettiin sisältöanalyysi vuoden 2015 pitkän matematiikan opetussuunnitelmasta sekä neljästä edellisestä pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta. Analyysissä haluttiin selvittää kielentämisen ja todistamisen sekä todistamisajattelun näkyminen näissä kahdessa kokonaisuudessa. Tämän jälkeen luotiin kolme sähköiseen kokeeseen soveltuvaa kielentämistä hyödyntävää todistamistehtävää, yksi tehtävä jokaiseen matematiikan sähköisen kokeen tehtävätyyppiin.

Tehtäviin pyydettiin palautetta edellisenä lukuvuotena matematiikkaa, fysiikkaa, kemiaa ja tietotekniikkaa Tampereen yliopiston normaalikoulussa auskultoineilta opetusharjoittelijoilta, joista osa jo toimii mainittujen aineiden opettajina. Palaute kerättiin Google Forms -pohjaisella kyselyllä, jossa oli jokaiseen tehtävään viisi Likert-asteikollista kysymystä sekä avoin palautekysymys. Palaute analysoitiin tehtäväkohtaisesti ja avointen kysymysten vastauksille tehtiin teemoittelu. Kyselyyn saatiin yhteensä 12 vastaajaa, joista avoimiin kysymyksiin vastasi 6–8 vastaajaa.

Palautteen perusteella konstruoitiin viisi lisätehtävää, joista yksi monivalintatehtävä sisältää kuusi erilaista monivalintatehtävää. Tehtävissä hyödynnetään kielentämistä sekä pääasiassa todistamista vähemmän formaalia todistamisajattelua. Kielentämisen näkökulmasta hyödynnetään useimpia olemassa olevia kielentämistehtävätyyppejä. Olemassa olevien tehtävätyyppien lisäksi tutkimuksessa löydettiin kaksi erityisesti todistamistehtäville soveltuvaa tehtävätyyppiä: meta- ja analogiatehtävä.

Sisältöanalyysissä havaittiin, että kielentäminen on vahvasti läsnä uuden opetussuunnitelman yleisissä tavoitteissa sekä arvioinnissa. Opiskelijalta vaaditaan monipuolista matemaattista ilmaisua sekä perustelutaitoa. Opetussuunnitelman tasolla todistaminen näkyy suppeasti, pääsääntöisesti MAA11-kurssin sisällöissä. Ylioppilaskirjoituksissa todistamiseen viittaavia sanoja ei ole esiintynyt 2000-luvulla usein, ei edes jokaisessa pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa. Sen sijaan todistamisajatteluun viittaavia sanoja ja tehtäviä on ollut kaksiosaisen ylioppilaskokeen aikana tasaisesti. Samoin kielentäminen on noussut vakituiseksi osaksi ylioppilaskoetta syksyn 2016 kokeesta alkaen. Todistamisen näkyvyys osana lukion matematiikkaa on yllättävän pientä.

Kielentämistä, todistamista ja todistamisajattelua saatiin liitettyä tehtävissä lukion opetussuunnitelman sisältöihin. Tehtävät tarjoavat vaihtelua laskupainotteisiin tehtäviin, sisältäen päättelyä ja perustelua luonnollista sekä kuviokieltä hyödyntäen. Tuotoksissa nähdään yksi vaihtoehto toteuttaa erilaisia tehtäviä matemaattisen osaamisen mittaamiseen Abitti-ympäristössä.

Tutkimuksessa ei testattu tehtäviä lukion opiskelijoilla, joka olisi hyvä jatkotutkimuksen kohde. Lisäksi tulevissa tutkimuksissa voitaisiin kerätä palautetta laajemmalta rintamalta, selvittäen myös todistamisajattelun hyödyntämistä ja soveltuvuutta yläkoulussa.

Avainsanat: kielentäminen, todistaminen, matematiikka, digitaalinen ylioppilaskoe, todistamisajattelu

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Matematiikan ylioppilaskirjoitukset ovat olleet muutoksessa viime vuodet. Vuoden 2012 keväällä sallittiin ylioppilaskokeessa kaikki CAS- eli symboliset laskimet, neljä vuotta myöhemmin siirryttiin kaksiosaiseen kokeeseen ja vuoden 2019 keväällä pitäisi olla vuorossa digitaalinen koe. Erityisesti ensimmäinen ja viimeinen muutos ovat saaneet mediassa paljon keskustelua aikaan. Jo tapahtuneet muutokset eivät osuneet omiin opiskeluaikoihini, mutta pitkän matematiikan ylioppilaskoe ja sen muuttuminen ovat kiinnostaneet minua yliopisto-opiskeluni alusta asti.

Lähestyessäni pro graduni ohjaajaa ensimmäistä kertaa työn suunta muuttui heti roimasti, historiallisesta tarkastelusta tulevaisuuteen tähtääväksi, joka voisi hyödyttää myös tulevalla työuralla. Hidasta aloitusta seuranneet pedagogiset opinnot ja auskultointi muokkasivat työn suuntaa entisestään. Opetusharjoittelussa tutustuminen Abitti-järjestelmään sekä kielentämisen hyödyntäminen harjoitustunneilla antoivat lopullisen suunnan työlle. Viimeisen vivahteen työhön jätti kokemus yliopistotasoisen matemaattisen todistamisen haastavuudesta. Lopuksi työn tarkoitukseksi tuli selvittää kielentämisen, todistamisen ja pitkän matematiikan opetussuunnitelman sekä sähköisten ylioppilaskirjoitusten kohtaamista. Tutkimuksen selkärangaksi muodostui kielentämistä hyödyntävät todistamistehtävät, joita voitaisiin nähdä tulevaisuudessa sähköisissä pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa.

Tässä tutkimuksessa haluttiin selvittää miten kielentäminen ja todistaminen kohtaavat pitkän matematiikan uuden opetussuunnitelman ja ylioppilaskirjoitukset. Ylioppilaskokeiden kohdalla oli tarkoitus tarkastella kaksiosaisia pitkän matematiikan ylioppilaskokeita sekä tulevia sähköisiä kokeita kielentämisen ja todistamisen näkökulmasta. Tämän lisäksi oli tarpeellista saada tietää, rajoittaako sähköinen ympäristö jotenkin kielentävien todistustehtävien laadintaa tai niihin vastaamista. Viimeiseksi luotiin kielentäviä todistustehtäviä, jotka täyttävät sähköisen kokeen tehtävien vaatimukset. Tehtävillä haluttiin selvittää millaista vaihtelua kielentäminen mahdollistaisi kokeessa pakollisten pitkän matematiikan kurssien osalta.

Tausta-ajatuksena kielentämisen hyödyntämisessä on osaamisen mittaaminen muunkin kuin laskutaidon avulla. Jos osaa laskea, tulisi myös osata kertoa mitä on tehnyt ja miksi. Mikä merkitys on mekaanisella kaavan noudattamisella, jos ei tiedä mitä tekee?

Todistamisen merkitystä matematiikalle tuskin kukaan yliopistossa matematiikkaa opiskellut kyseenalaistaa. Yliopistomatematiikka on todistamista ja tämä on suuri muutos lukiomatematiikkaan nähden. Todistamisen näkyvyys lukiomatematiikassa on voinut jäädä erittäin kevyeksi ja on ollut hyvin vahvasti opettajan osaamisesta riippuvaista, myös oppikirjoissa todistamisen määrä vaihtelee paljon. Todistamisella on kuitenkin merkittävä rooli matematiikassa ja se on myös osaltaan tie kohti laadukasta sekä loogista argumentointia. Voidaanko matematiikan opetus karsia todistamista sisältämättömäksi torsoksi? Jos ihmiset eivät nykyäänkään ymmärrä matematiikan merkitystä yhteiskunnan kehitykselle, miten voivat tulevat sukupolvetkaan, jos matematiikasta annetaan vajaa kuva. Ilman matematiikkaa ei olisi nykyistä teollista hyvinvointiyhteiskuntaa, jota ei tiedosteta matematiikan näkymättömyyden vuoksi (Lahtinen 2017).

Sähköinen ylioppilaskoe tuo mukanaan liudan sovelluksia, joista oppilaiden olisi hyvä osata käyttää ainakin yhtä aihealueeltaan. Vaikuttaako sähköistyminen jotenkin ylioppilaskokeessa vastaantuleviin kielentämis- ja todistustehtäviin? Mahdollistaako sähköinen koe jotain uutta, rajoittaako se koetta? Nämä kysymykset ovat ajankohtaisia varmasti jokaiselle ensimmäisen vuoden lukiomatematiikan opiskelijalle. Vaikka itse sähköiseen koejärjestelmään liittyy vielä monia kysymyksiä, joihin ei ole vastauksia edes alan ammattilaisilla, sähköiset ylioppilaskirjoitukset eivät ole ainoa vuodelle 2019 kaavailtu muutos. Pikauudistuksen voimin tällöin lisättäisiin opetussuunnitelmiin merkittävästi oppiainerajat ylittävää opetusta sekä muun muassa matematiikan, luonnontieteiden ja kielten painotusta, unohtamatta digiteknologian hyödyntämistä ja korkeakouluyhteistyötä (Liiten 2017).

Koska ainuttakaan matematiikan sähköistä ylioppilaskoetta ei ole vielä järjestetty, tutkimustietoa aiheesta ei ole saatavilla. Järjestelmä vaikuttaisi tosin olevan vähitellen sellaisessa muodossa, jossa se olisi ensimmäisen kokeen kohdalla – ympäristö sai keväällä viimein matematiikkaeditorinkin. Matemaattisen todistamisen opettamisesta ei myöskään löydy tutkimustietoa, mutta esimerkiksi Mariotti (2006) mainitsee, että sen todistuksen integroimisesta opetukseen näyttää nykyisin olevan konsensus, tilanteen ollessa toinen vielä 10 vuotta aiemmin. Tältä pohjalta onkin mielenkiintoista tarkastella suomalaisten opetussuunnitelmien sisältöjä, joissa tämä konsensus ei tunnu vieläkään näkyvän. Kielentämisestä sen sijaan löytyy tuoretta ja kotimaista tutkimustietoa, joiden perusteella on saatu positiivisia tuloksia. Esimerkiksi Joutsenlahden (2010) tutkimuksessa kirjallinen kielentäminen koettiin oppimista edistäväksi (Joutsenlahti 2010). Kielentämiseen liittyviä tutkimuksia käydään tarkemmin läpi luvussa 4.2.4.

Kun mietitään tarvetta lukio-opetuksen kehittämiselle, ei tutkimustuloksissa tarvitse katsoa kauas. Esimerkiksi Metsämuurosen (2017) pitkäaikaisseurannasta nähdään, miten lukiossa minimikurssimäärän suorittavan osaamistaso saadaan pidettyä vaivoin 9. luokan tasolla. Heikommat oppilaat kaipaavat positiivisia kokemuksia opiskeluunsa sekä kannustusta, jotta opiskeluun saataisiin lisäpontta.

2 PITKÄN MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMASTA JA YLIOPPILASKIRJOITUKSISTA

2.1 Opetussuunnitelman rooli

Opetushallitus antaa valtakunnalliset opetussuunnitelmien perusteet eri koulutusaloja sekä tutkintoja varten. Opetussuunnitelmien perusteet on koulutuksen järjestäjää velvoittava määräys, jonka sisältämät opetuksen tavoitteet sekä keskeiset sisällöt on pakko sisällyttää koulukohtaiseen opetussuunnitelmaan. (Opetushallitus 2017) Valtakunnallinen opetussuunnitelma on siis minimitaso, joka koulutuksen järjestäjä on velvollinen toteuttamaan.

Valtakunnallisilla opetussuunnitelmien perusteilla varmistetaan opiskelijoiden ja oppilaiden koulutuksellisten perusoikeuksien sekä tasa-arvon toteutuminen. Samalla varmistetaan opetuksellinen yhtenäisyys sekä laadun ja oikeusturvan toteutuminen. (Opetushallitus 2017) Määräyksen tarkoituksena on siis varmistaa, että riippumatta siitä missä päin Suomea ja minkä tasoisessa koulussa opiskelee, sisältää opetus aina tietyt kokonaisuudet. Tämän lisäksi kouluilla on oman harkintansa mukaisesti mahdollisuus laajentaa opetussuunnitelmiaan.

Lukion kohdalla opetussuunnitelma ottaa myös kantaa sellaisiin asioihin kuin oppimiskäsitys, opiskeluympäristöt- ja menetelmä sekä toimintakulttuuri, vaikuttaen näin tapahtuvaan opetukseen. Lisäksi opetukselle määritetään yleisiä tavoitteita sekä määritetään yleisiä aihekokonaisuuksia, jotka läpäisevät oppiainerajoja. Lopuksi tavoitteisiin ja arviointiin otetaan kantaa myös oppiaine- ja kurssitasolla sekä määritetään kurssien keskeiset sisällöt. (Opetushallitus 2015, 6–9; 25–26; 141–144) Opetussuunnitelma ottaa siis kanta moneen asiaan ja ohjaa opetusta oikeaksi katsottuun suuntaan. Esimerkiksi oppimiskäsityksessä nähdään hyvin oppimisen ja opettamisen ajan henki.

Opetussuunnitelman ohella lukiokoulutusta määrittää joukko lakeja ja asetuksia, muodostaen opetussuunnitelmajärjestelmän. Näitä lakeja ja asetuksia ovat esimerkiksi lukiolaki (629/1998), lukioasetus (810/1998) sekä valtioneuvoston asetus lukiolaissa tarkoitetun koulutuksen yleisistä valtakunnallisista tavoitteista ja tuntijaosta (942/2014). Opetussuunnitelmien perusteista voi poiketa vain opetus- ja kulttuuriministeriön myöntämän järjestämisluvan perusteella. (Opetushallitus 2015)

2.2 Pitkän matematiikan vuoden 2016 opetussuunnitelma

Lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteiden päivitys aloitettiin 13.11.2014 Opetushallituksen toimesta. Opetushallitus asetti 16.12.2014 ohjausryhmän, jonka tehtäväksi tuli linjata sekä ohjata lukiolaissa tarkoitetun koulutuksen opetussuunnitelman valmistelutyötä. Valmistelutyössä päivitettiin voimassa olevia opetussuunnitelman perusteita valtioneuvoston asetusten mukaisiksi. Ohjausryhmään nimitettiin edustajia lukiokoulutuksen kanssa tekemisissä olevista organisaatioista sekä ulkopuolisista tahoista. (Opetushallitus 2016a)

Suuntaviivat päivitystyölle määritti valtioneuvoston asetus lukiokoulutuksen yleisistä valtakunnallisista tavoitteista ja tuntijaosta. Opetushallituksen tehtäväksi muodostui päivittää opetussuunnitelman perusteet asetuksen mukaisiksi. Ohjausryhmän ensimmäinen kokous oli 14.1.2015, jolloin käsiteltiin opetushallituksessa valmistellut päivittämistyön suuntaviivat. Taustalla päivittämisen tarpeessa oli vastaaminen tulevaisuuden osaamishaasteisiin muuttuvassa toimintaympäristössä. Yhtenä tavoitteena päivitystyössä oli esimerkiksi pedagogiikan ja oppimisen osalta monipuolisten opiskeluympäristöjen ja opetusteknologian käytön tukeminen. (Opetushallitus 2016b)

Opetushallitus antoi määräyksen lukion opetussuunnitelman perusteista 27.10.2015. Tampereen seutukunnan kohdalla tehtiin tällöin seudullinen opetussuunnitelma, jota täydennettiin oppilaitoskohtaisesti. Seudullisesti opetussuunnitelmassa otettiin kantaa esimerkiksi itsenäisen opiskelun periaatteisiin, kun oppilaitoskohtaisesti päätettiin koulutuksen järjestäjän hyväksymä lukion tuntijako. (Tampereen yliopisto 2016, 6) Esimerkkinä oppilaitoskohtaisesta kurssista voidaan ottaa MAY2-kurssi, joka on yhteinen matematiikan varikkokurssi. (Tampereen yliopisto 2016, 129)

Valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa pitkän matematiikan oppimäärän muodostaa 10 pakollista kurssia, joista ensimmäinen kurssi on sekä pitkälle että lyhyelle matematiikalle yhteinen MAY1-kurssi. Tässä opetussuunnitelmassa kursseja on kaikkiaan tarjolla pitkän matematiikan osalta yhteensä 13 kappaletta, eli valtakunnallisia syventäviä matematiikan kursseja on 3 kappaletta. Ensimmäisen syventävän kurssin muodostaa lukuteoria ja todistaminen. (Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015, 142–150) Esimerkiksi Tampereen yliopiston normaalikoulun lukion opetussuunnitelmassa pitkässä matematiikassa on tarjolla yhteensä 18 kurssia (Tampereen yliopisto 2016, 126–143).

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 tulivat voimaan 1.8.2016 alkaen, jolloin opetussuunnitelma otettiin käyttöön tällöin lukion aloittavilla opiskelijoilla (Opetushallitus 2015). Vuoden 2016 opetussuunnitelma koskee tällä hetkellä lukiossa ensimmäistä ja toista vuotta opiskelevia, joiden kurssit ovat uuden opetussuunnitelman mukaisia. Suuri osa näistä ensimmäisen vuoden opiskelijoista myös kirjoittaa matematiikan keväällä 2019 sähköisesti.

2.3 Ylioppilaskirjoituksista

> *Lukiokoulutuksen päätteeksi pannaan toimeen ylioppilastutkinto. Tutkinnon avulla selvitetään, ovatko opiskelijat omaksuneet lukion opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot sekä saavuttaneet lukiokoulutuksen tavoitteiden mukaisen riittävän kypsyyden. Tutkintoon sisältyy äidinkielessä ja kirjallisuudessa, toisessa kotimaisessa kielessä, vieraissa kielissä, matematiikassa ja reaaliaineissa järjestettäviä kokeita.* (Ylioppilastutkintolautakunta 2017a)

Yllä oleva sitaatti Ylioppilastutkintolautakunnan verkkosivuilla tiivistää ylioppilaskirjoitusten ajatuksen. Ylioppilastutkinto on kiinteästi yhteydessä lukion opetussuunnitelmaan, jonka mukaisten tietojen ja taitojen omaksumista kokeessa mitataan kokelailta. Lisäksi kokelailta oletetaan kokeessa myös kypsyyttä. On kuitenkin muistettava, että tämä ei kerro koko totuutta ylioppilaskirjoitusten ja ylioppilastutkinnon historiasta. Sadan vuoden aikana ylioppilastutkinto muuttui harvojen ja valittujen etuoikeudesta edellä mainituksi kypsyyskokeeksi (Lahtinen 2017).

Ylioppilastutkinnolla ja ylioppilaskirjoituksilla on Suomessa takanaan pitkä historia, joka voidaan jäljittää Turun akatemiaan ja vuoteen 1852. Vuonna 1852 koe oli ensikertaa kirjallinen aiemman suullisen sijaan. 1919 suulliset kokeet lakkautettiin ja viisi kirjallista koetta määrättiin pakollisiksi, sisältäen matematiikan. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017b) Vuoteen 1940 asti matematiikassa oli myös kaksi erillistä oppiainetta, geometria ja algebra. Tähän aikaan ylioppilaskokeissa esiintyi myös runsaasti todistustehtäviä, eikä ylioppilastutkintolautakunta myöskään kavahtanut työläitä tehtäviä. (Lahtinen 2017) Sodan jälkeen 1947 matematiikan pakollisuus poistui ja kokelas valitsi reaalikokeen ja matematiikan väliltä. Samalla pakollisten kokeiden määrää vähennettiin yhdellä. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017b) Matematiikan kirjoittamisen pakollisuutta ei ole kuitenkaan unohdettu. Elinkeinoelämän keskusliitto on esittänyt huolensa matematiikan osaamisen puolesta ja esittääkin matematiikkaa taas pakolliseksi aineeksi ylioppilaskirjoituksiin (Ervasti & Heikinheimo 2017).

Matematiikan koe oli siis aluksi suullinen, apuna pystyi käyttämään liitutaulua. Kirjalliseksi matematiikan koe muuttui 1874, jolloin tehtäviä kokeessa oli kymmenen. Tällöin tehtävien ratkaisuissa sai hyödyntää logaritmitauluja. Matematiikan jaettiin kahdeksi kokeeksi 1901, jolloin tarjolle tuli lyhyen matematiikan koe. 15 tehtävään siirryttiin molempien matematiikan kokeiden osalta vuonna 2000. Tehtävistä sai ratkaista korkeintaan kymmenen, sisältäen mukaan otetut tähtitehtävät. Laajemmista tähtitehtävistä oli mahdollista saada 9 pistettä normaalin 6 sijaan. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017b)

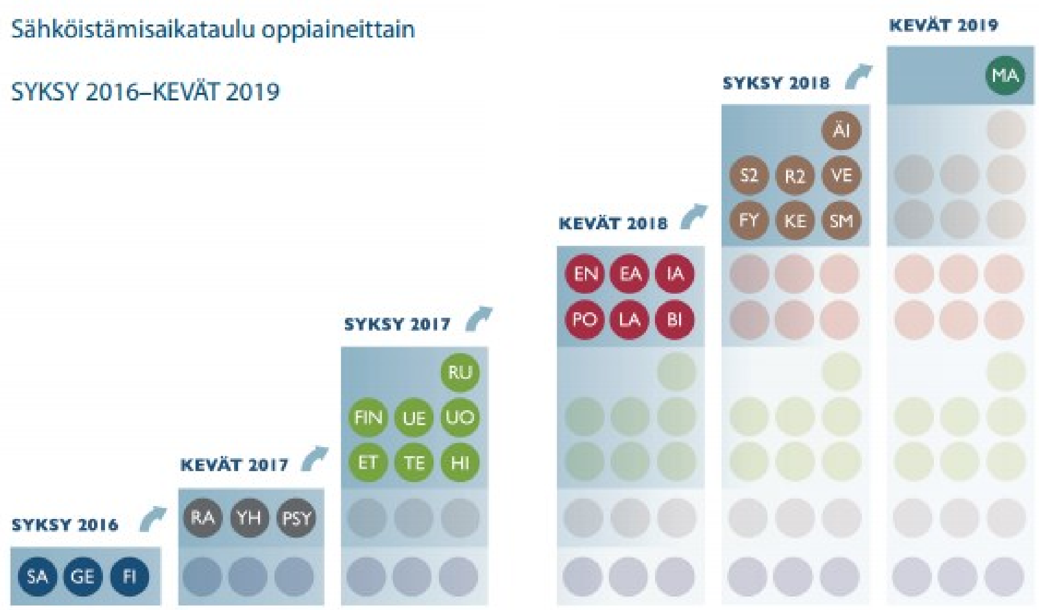
Keväällä 2012 matematiikan ylioppilaskokeessa sallittiin kaikki funktio-, graafiset ja symboliset laskimet (Ylioppilastutkintolautakunta 2017c, 3). Laskimesta saatu hyöty herätti runsaasti keskustelua mediassa ja sosiaalisessa mediassa. Vielä keväällä 2012 Vanhala kirjoitti suhteellisen maltillisesti aiheesta, kysyen onko matematiikasta tullut liian helppoa laskinmuutoksen myötä. Vuotta myöhemmin Kärki (2013) ennakoi jo muhivaa skandaalia, parhaan arvosanan saattoi saada hyvällä laskimen käyttötaidolla. Kevään 2013 kokeessa saattoi ratkaista yhdeksän tehtävää laskimen avulla (Ruoste 2013).

Vuoden 2016 syksyllä matematiikan koe muuttui kaksiosaiseksi. A-osassa kokelaat eivät saaneet käyttää laskinta, taulukkokirjan ollessa käytettävissä. Osion kaikki neljä tehtävää oli ratkaistava. B-osio oli puolestaan jaettu vielä kahteen osaan, B1-osasta oli ratkaistava kolme tehtävää viidestä tarjotusta. B2-osassa puolestaan tarjolla oli neljä tehtävää, joista taas tuli ratkaista kolme. Molemmissa B-osioissa saa käyttää laskinta. Seuraava matematiikan kokeen merkittävä muutos tapahtuu kokeen sähköistyessä keväällä 2019.

2.4 Pitkän matematiikan sähköisistä ylioppilaskirjoituksista

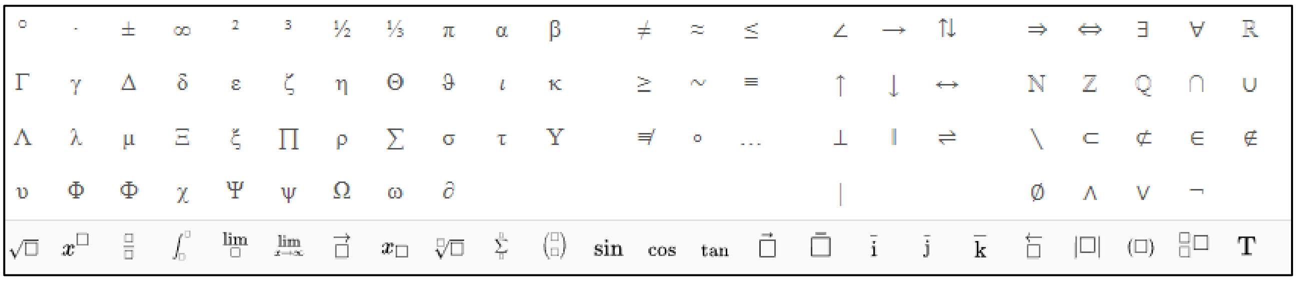
Ylioppilaskirjoitusten ensimmäiset sähköiset kokeet pidettiin syksyllä 2016, jolloin vuorossa olivat saksa, maantieto sekä filosofia. Keväällä 2019 vuorossa viimeisenä on matematiikka. Sähköistymisen tarkka aikataulu on esitetty kuvassa 1. (Digabi 2015) Ylioppilaskoe toteutetaan ylioppilastutkintolautakunnan rakentamalla Linux-pohjaisella live-käyttöjärjestelmä. Järjestelmä käynnistetään

USB-muistitikulta, eikä se vaadi erillistä asentamista. Koejärjestelmä vaatii minimissään kaksi työasemaa, joista yksi on palvelintyöasema, jolla koe on, ja toinen on opiskelijan käyttämä työasema. Ympäristö rajaa oppilaiden pääsyn vain tarkoitettuihin osioihin ja materiaaleihin, estäen myös internetiin pääsyn. Koe, aineistot sekä vastaukset tallennetaan erilliselle palvelintyöasemalle. DigabiOS-käyttöjärjestelmä on toteutettu avoimella lähdekoodilla ja kaikilla on mahdollisuus tutustua sen lähdekoodiin sekä dokumentaatioon. (Digabi 2016) Keväällä 2017 järjestelmällä suoritettiin 15 485 koesuoritusta (Vikberg 2017).



KUVA 1. Ylioppilaskokeen sähköistymisaikataulu (Digabi 2015).

Käyttöjärjestelmä sisältää useita sovelluksia, joista osa on maksullisia ja osa maksuttomia. Ympäristöstä löytyy useita sovelluksia yksittäisiin käyttötarkoituksiin, esimerkiksi symbolista laskentaa voidaan tehdä wxMaximalla, Casio Classpad Managerilla sekä Texas instrumentsin TI-Nspire CAS -sovelluksella. Opiskelija voi siis valita, millä sovelluksella tuottaa tarvittavat sisällöt koevastaukseen. Sovellusten lisäksi ympäristöstä löytyy myös matematiikassa tarvittu MAOL-digitaulukko Otava-kustantamon toimesta. (Digabi 2014) Toukokuussa 2017 koeympäristöön lisättiin vastauseditoriin lisäominaisuutena mahdollisuus kirjoittaa matemaattisia merkintöjä. Editoriominaisuutta voidaan käyttää niissä tehtävissä, joissa kuvankaappauksien käyttö osana vastausta on sallittu. Editorista puuttuu vielä joitain matemaattisia merkintöjä, kuten yhtälöryhmä, matriisi, paloittain määritelty funktio sekä integraalin sijoitusmerkintä. Matematiikkaeditoriin on mahdollisuus tutustua koeympäristön ulkopuolella verkko-osoitteessa https://math-demo.abitti.fi/. Kaavoja rakennetaan vastaukseen joko valikosta löytyviä merkintöjä napsauttamalla tai LaTeX-koodia kirjoittamalla. Lisäksi editorin vastauskenttään voi sisällyttää tekstiä ja kuvia. (Abitti 2017a) Kuvassa 2 näkyvät editorista tällä hetkellä löytyvät matemaattiset merkinnät. Ylioppilastutkintolautakunta on tuottanut itse editorin, kun sopivaa valmista editoria ei löytynyt (Vikberg 2017).



KUVA 2. Kaavaeditorista löytyvät matemaattiset merkinnät (Abitti 2017b).

Digabi-käyttöjärjestelmästä käytetään yleisemmin nimeä Abitti, jolla viitataan kurssikoejärjestelmään, jossa opettajat voivat laatia ja arvioida kokeita. Lisäksi sivuston kautta on mahdollista tehdä koekäyttöön omia USB-muistitikkuja. (Digabi 2015) Abitin sivustolla ei ole rajattu sitä, kuka käyttöjärjestelmää voi testata. Sivustojen kautta kuka tahansa voi luoda itselleen tunnukset ja näin testata Abittia. Koejärjestelmä päivittyy jatkuvasti, ajan myötä siihen lisätään muun muassa uusia tehtävätyyppejä. (Abitti 2017c)

Opettajat voivat toteuttaa kurssikokeita Abitin avulla, tekemällä kokeet Abitin verkkosivuilla. Tämän jälkeen koe siirretään USB-muistitikulle ja ladataan rakennetussa koeympäristössä palvelintyöasemalle. Toimenpiteiden jälkeen koe voidaan pitää ja vastaukset tallennetaan muistitikulle, josta ne viedään Abitin verkkosivuille arviointia varten. Pidetyt kokeet jäävät talteen Abitin verkkosivuille. Opettajien on siis mahdollista harjoituttaa opiskelijoilla ympäristön käyttöä ja näin sähköistä kokeen täyttämistä.

Sähköisen ylioppilastutkinnon mukana ylioppilaskokeeseen tulee paljon muutoksia, tiettyjen perusasioiden kuitenkin pysyessä samana. Koetilaisuuden kesto pysyy kuudessa tunnissa ja kokeiden sisällön perusteena on edelleen lukion opetussuunnitelman perusteet. Kokelaat voivat edelleen käyttää vastausten luonnosteluun suttupaperia. Vastaukset kirjoitetaan tekstinkäsittelyohjelmalla, hyödyntäen liitteinä kaavioita ja kuvia. (Ylioppilastutkintolautakunta 2016a, 1)

Koeympäristöön tulee sähköistymisen myötä lisäksi muitakin muutoksia, muun muassa vaikuttaen käytettäviin aineistoihin sekä koekysymyksiin. Tietyt tehtävätyypit voivat olla epämielekkäitä johtuen käytettävissä olevista sovelluksista. Samalla fyysisten laskinten sekä painettujen taulukkoaineistojen käyttö päättyy syksyn 2020 kokeeseen. Myös ylioppilaskokeen pistemäärä muuttuu matematiikassa 120 pisteeseen aiemmasta 60:stä, jolloin arvioinnista poistuvat myös osapisteet. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017d, 2–3)

Ylioppilaslautakunta ei arvostele työvälinettä, vaan kokelaan osoittaman osaamisen. Esimerkiksi pelkkä kuvankaappaus riittää koevastaukseksi, jos vastaus on tällöin luettavuuden, seurattavuuden ja ymmärrettävyyden osalta asetetut vaatimukset täyttävä. Tietty esitysmuoto ei ole tavoite ja itsetarkoitus, vastauksen tulee olla riittävän perusteltu. Samoin vastausnotaation tulee olla selkeä, jota voi tukea tarvittavin selityksin. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017, 6–8)

Ylioppilaskokeessa on käytettävissä seuraavat sovellukset (Ylioppilastutkintolautakunta 2016a, 2):

- MAOL-digitaulukot (Otava)
- LibreOffice (tekstinkäsittely, taulukkolaskenta, vektorigrafiikka)
- GIMP (kuvankäsittely)
- Pinta (kuvankäsittely)
- InkScape (vektorigrafiikka)
- Dia (vektorigrafiikka)
- wxMaxima (symbolinen laskenta)
- Texas Instruments N-spire (symbolinen laskenta)
- Casio ClassPad Manager (symbolinen laskenta)
- Geogebra (mm. kuvaajat)
- LoggerPro (kuvaajat).

Ylioppilastutkinnon koejärjestelmän sovelluslistaus ei ole lopullinen, saati muuttumaton. Sovellusten päivitystahti pyritään pitämään maltillisena, mutta kuitenkin ajantasaisena, jolloin ympäristön sovellusversio vastaa yleisesti saatavilla olevia versioita. Osa sovelluksista vanhenee nopeammin kuin toiset ja koejärjestelmän tulee heijastaa opetuksessa välineitä. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017d, 5)

Sovellusten lisäksi kokeessa voi olla laaja määrä taustamateriaalia, riippuen tehtävätyypeistä sekä oppiaineesta. Taustamateriaalit voivat olla tyypiltään esimerkiksi kirjoitettuja dokumentteja, visuaalisia aineistoja, audiovisuaalisia aineistoja ja numeerista dataa tai näiden yhdistelmiä. Kirjoitetut dokumentit voivat sisältää esimerkiksi artikkelitietokantoja ja tekstejä, visuaaliset aineistot puolestaan esimerkiksi kaavioita, karttoja ja kuvia. Audiovisuaaliset aineistot voivat olla esimerkiksi videoita, animaatioita, simulaatioita tai äänitiedostoja. Numeeriset aineistot ovat esimerkiksi taulukoita, tilastoja tai mittaustuloksia. (Ylioppilastutkintolautakunta 2016a, 2) Esimerkiksi videoissa voidaan esittää tehtävään liittyviä taustatietoja tai ilmiötä. Videon tehtävä voi olla myös selventää tai havainnollistaa. Tehtäväkohtaisesti kerrotaan, miten aineistoa kuuluu hyödyntää. Data-aineistojen kohdalla aineisto toimitetaan useissa tiedostoformaateissa, joista kokelas valitsee itse mitä formaattia käyttää. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017d, 3)

Viimeinen tärkeä muutos ylioppilaskokeessa ovat tehtävätyypit. Matematiikan sähköisessä ylioppilaskokeessa tullaan näkemään kolmea tyyppiä olevia tehtäviä (Ylioppilastutkintolautakunta 2016a, 3–4):

1. Valinta- ja yhdistelytehtävät
2. Yksinkertaiset tuottamistehtävät
3. Monipuolisempaa matemaattisen ongelman ratkaisua sekä tiedon yhdistämistä ja analysointia vaativat tehtävät.

Ensimmäisen tyypin tehtävissä on pyritty minimoimaan vastaamiseen tarvittava kirjoittaminen. Näissä tehtävissä pyritään testaamaan käsitteiden hallintaa sekä ymmärtämistä. Tehtävät voivat olla esimerkiksi monivalintakysymyksiä tai niissä vastataan esimerkiksi taulukolla. Toisen tyypin tehtävät puolestaan vastaavat kirjallisen kokeen perustehtäviä ja niissä tulee pystyä tuottamaan perusteluja sekä loogisia vastauksia kaavaeditoria hyödyntäen. Kahden ensimmäisen tyypin tehtäviä esiintyy kokeen ensimmäisessä osiossa, jossa ratkaisut tehdään ilman tiettyjä teknisiä apuvälineitä. Kolmannen tyypin tehtävät ovat haastavimpia ja niissä voidaan tarvita tietoja usealta kurssilta. Nämä tehtävät vastaavat kirjallisen kokeen vaativimpia tehtäviä, mutta voivat sisältää esimerkiksi erilaisia aineistoja sekä vaatia myös symbolista laskentaa. Tehtävissä kokelaan tulee osoittaa kyky jäsentää tilanne matemaattisesti tai esimerkiksi muodostaa tarvittava matemaattinen malli ja soveltaa sitä. Symbolisen laskennan takia mallit voivat olla nykyiseen verrattuna monimutkaisempia. (Ylioppilastutkintolautakunta 2016a, 3–4)

Sähköinen ylioppilaskoe pysyy kaksiosaisena kuten viimeisimmät matematiikan kirjalliset kokeet. Tyyppien 1 ja 2 tehtävistä osa tulee ratkaista ennen koeympäristön tiettyjen apuvälineiden aktivointia. Näihin tehtäviin ei voi vastata enää aktivoinnin jälkeen. Tässä A-osassa kokelaalla ei ole käytössä seuraavia sovelluksia (Ylioppilastutkintolautakunta 2016b):

- LibreOffice Calc
- wxMaxima
- Texas Instruments TI-Nspire CAS
- Casio ClassPad Manager
- Geogebra.

Listalla oleviin sovelluksiin voi tulla muutoksia, jos koejärjestelmään tehdään muutoksia esimerkiksi lisäämällä tai poistamalla sovelluksia. Laskimena kokeen A-osiossa toimii KCalc-niminen sovellus, joka vastaa sisällöltään Windows-työasemista löytyvää laskinsovellusta. (Ylioppilastutkintolautakunta 2016b) Matematiikan sähköisen kokeen tekniset ratkaisut alkavat olla valmiina (Vikberg 2017).

3 MATEMATIIKASTA JA TODISTAMISESTA

3.1 Matematiikan luonne

> *The abstract science of number, quantity, and space, either as abstract concepts (pure mathematics), or as applied to other disciplines such as physics and engineering (applied mathematics)* (Oxford Dictionaries 2017a).

Oxfordin sanakirja antaa yllä hyvän määritelmän matematiikalle, josta heti huomataan, että matematiikka on paljon muutakin kuin laskemista. Laskemistahan määritelmässä ei mainita ollenkaan, joka on tietysti mielenkiintoista, koska matematiikan perusta on käytännön laskemisessa. Lainaus muistuttaakin hyvin, että matematiikka on moderni ja abstrakti tieteenala. Matematiikalle löytyy myös varmasti yhtä monta määritelmää kuin sille löytyy tekijääkin. Matematiikan historia on myös mittava, jos sitä verrataan muihin tieteenaloihin.

Matematiikka juontaa juurensa 5000 vuoden taakse Egyptiin ja Babyloniaan. Matematiikka nousi tarpeesta ratkaista hallinnollisia ongelmia: laskea tuotantoa tai suunnitella rakennuksia. Tällöin oli jo kehitetty useita erilaisia lukujärjestelmiä ja tunnettiin peruslaskutoimituksia. Pythagoraan lauseen sisältö tunnettiin Babyloniassa, jo tuhat vuotta ennen Pythagorasta. Babyloniasta löytyneestä Plimptonin taulusta numero 322 löytyy laskettuja arvoja Pythagoraan kolmikolle. Babyloniassa tunnettiin myös lineaariyhtälöiden ratkaisuja. (Katz 2008, 2–4; 19–20; 22)

Ensimmäiset matemaattiset todistukset löytyvät ajassa melko paljon myöhemmin. Yleisesti ollaan sitä mieltä, että todistukset ovat peräisin Kreikasta ja erityisesti Thalesilta, joka eli noin 600 vuotta ennen ajanlaskun alkua. Erityistä Thalesissa on se, että hän ei löytänyt todistuksia, vaan hän todisti ne. Tästä johtuen useissa todistuksissa ja väittämissä viitataan häneen. Hänen todistamansa väittämät, olivat peräisin egyptiläisiltä ja mesopotamialaisilta. Kreikkalaiset loivat loogisen yhteyden aksioomien ja tulosten välille. Tulokset johdettiin pienestä määrästä alkuoletuksia. Usean kirjoittajan mukaan tämän kehityssuunnan syynä oli ateenalaisten argumentaation arvostaminen, toisaalta taas yläluokalla oli aktiviteetille aikaa. Kreikan lisäksi on löydetty todisteita todistamisen soveltamisesta myös Kiinasta sekä Intiasta. (Reid & Knipping 2010, 3–4; 24)

Keskeinen osa modernia matematiikan tekemistä ovat todistukset. Matematiikan perustana on logiikka, jolla määritellään aluksi paikkansa pitävät säännöt, joista voidaan todistaa paikkansa pitäviä väittämiä tai suhteita. Matematiikka on täsmällinen tieteenala, joka etenee edellä mainitulla diskurssilla. Nykyisen muotonsa todistaminen on saanut suhteellisen myöhään, vain noin 200 vuotta sitten, jolloin sovittiin hyväksytyt tavat tehdä matemaattisia todistuksia. Tällöin todistamiseen liittyvä kieli ja metodologia täsmällistettiin ja sovittiin yleisesti. Nykyisin todistukset ovat siis samaa muotoa, riippumatta siitä missä päin maailmassa niitä luodaan. Täsmällisiä todistuksia tehtiin kyllä 1600-luvullakin, mutta tällöin ei oltu vielä sovittu mikä on täsmällinen todistus, saati sitä missä muodossa todistus tehdään. (Krantz 2006, 423–424) Todistuksella tarkoitetaan matemaattisen väittämän vahvistusta, joka osoittaa tämän yksiselitteisen ja ehdottoman oikeellisuuden (Hammack 2013, 87).

3.2 Todistamisen rooli matematiikassa

Miksi meidän pitäisi oppia tai opettaa todistuksia? Jos differentiaalilaskennasta leikataan pois kaikki todistukset, jää jäljelle vain keittokirja. Tällöin keittokirjamme kertoo tarkasti sisällöt ja toimintaohjeet, mutta ei tarjoa todisteita tai perusteluita sen resepteille. Syöminen todistaa ruoan tietyksi. Loogista päättelyä tai muistamista ei vaadita, vaan kaikki tarvittava ja riittävä löytyy kirjallisessa muodossa. (Polya 1973, 215–221) Matematiikka ei kuitenkaan ole pelkkä kaavakokoelma.

Todistukset tarjoavat tilaisuuden oppia tarkkaa päättelyä, johon voi verrata vastaantulevia väitettyjä todisteita. Täydellisten todistusten lisäksi myös epätäydellisillä todistuksilla on paikkansa ja niillä voidaan jo tavoittaa todistuksen ydin, mutta niiden käytössä tulee olla varovainen. Oikein esitettynä epätäydellinen todistus voi olla jopa opettavaisempi kuin täydellinen todistus, jos sillä löydetään juuri todistuksen ydin. (Polya 1973, 215–221) Todistamisen tarkoitus ei siis ole vain opetella ulkoa todistuksia, vaan tarjota opiskelijoille ajattelun työkaluja.

Täydelliset ja formaalit todistukset[1] noudattavat paljolti samaa kaavaa. Tämän lisäksi vielä esimerkiksi induktiotodistuksella on oma kaavansa, joka tekee siitä varsin mekaanisen. Formaali todistus koostuu väitteestä, aloituksesta, oletuksista, varsinaisesta todistuksesta, mahdollisesta loppuyhteenvedosta ja todistuksen päättämisestä. Todistuksen alussa todetaan väite, jota aletaan todistamaan. Tämän jälkeen todetaan usein ”todistetaan väite”, jonka jälkeen esitetään tarvittavat oletukset, joita todistuksessa hyödynnetään. Oletuksista edetään todistuksen runkoon, jossa kerätään kaikki väitteen

[1] Tässä formaalilla todistuksella tarkoitetaan sen tasoista todistusta, joka on esitetty luvussa 3.5.

todistamisen vaatimat komponentit. Usein todistuksen lopussa komponenteista tehdään yhteenveto, jossa väittämän todistava päättelyketju esitetään. Todistus päätetään lyhenteellä M.O.T (latinaksi Q.E.D), joka tarkoittaa"mikä oli todistettava", vaihtoehtoisesti voidaan käyttää merkkiä ■ (Oxford Dictionaries 2017b). Lyhennettä kuvaavalle merkille löytyy useita variaatioita, varsinkin taulutyöskentelyssä käytetään usein onttoa neliötä. Merkillä kerrotaan lukijalle, että on saatu näytettyä todeksi se, mitä lähdettiin todistamaan.

3.3 Eri todistustyypit

Tässä luvussa esitellään todistustyypit, jotka esiintyvät vuoden 2016 lukion opetussuunnitelman perusteissa. Kaikki todistustyypit esiintyvät MAA11-kurssin sisällöissä. Näiden lisäksi on muitakin todistustyyppejä, kuten tietokoneavusteinen todistus, jolla on todistettu neliväriteoreema. Läpikäytävät todistustyypit ovat: suora todistus, käänteinen todistus, ristiriitatodistus, geometrinen todistus sekä matemaattinen induktio.

Suoraa todistusta käytetään tapauksissa, joissa kyseessä on ehdollinen väittämä. Todistuksen muoto on helpoin hahmottaa propositiolla: Jos P, niin Q eli lauselogiikalla merkittynä $P \Rightarrow Q$. Todistuksessa oletetaan, että P on tosi ja osoitetaan, että tämä pakottaa Q:n totuuden. (Hammack 2013, 92) Tässä ei perehdytä syvällisemmin propositiologiikkaan, jonka tuntemusta tarvitaan todistusten taustan syvällisempään ymmärrykseen. Tätä taustaa käydään esimerkiksi Hammackin teoksessa Book of Proof (2013).

ESIMERKKI 1. Suora todistus parittomuudesta (Hammack 2013, 94).
Väite: Jos z on pariton, niin z^2 on pariton.
Todistus. Oletetaan, että z on pariton.
Tällöin parittoman luvun määritelmän perusteella $z = 2r + 1$, kun $r \in \mathbb{Z}$.
Nyt $z^2 = (2\mathrm{r} + 1)^2 = 4\mathrm{r}^2 + 4\mathrm{r} + 1 = 2(2\mathrm{r}^2 + 2\mathrm{r}) + 1$, joten $z^2 = 2\mathrm{x} + 1$,
missä $x = 2\mathrm{r}^2 + 2\mathrm{r} \in \mathbb{Z}$.
Täten $z^2 = 2x + 1$ on parittoman luvun määritelmän perusteella pariton. ■

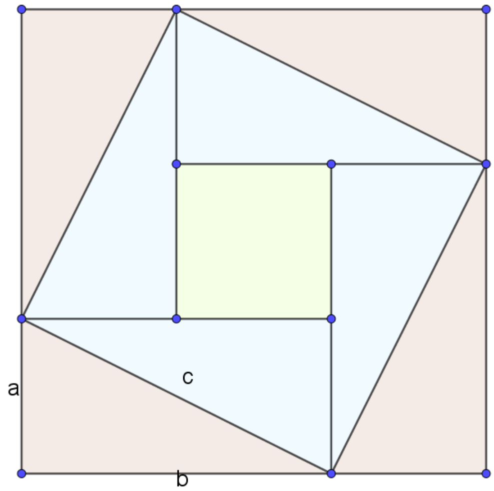
Käänteinen todistus hyödyntää kontrapositiota, kun todistetaan ehdollista väittämää: Jos P, niin Q. Käänteistä todistusta voidaan joutua käyttämään, jos suora todistus ei ole mielekäs tai helpoin vaihtoehto. Kontrapositio tarkoittaa, että sen sijaan, että todistettaisiin Jos P, niin Q, todistetaankin sen loogisesti ekvivalentti tapaus. Tämä tapaus on: Jos ei Q, niin ei P, lauselogiikalla merkittynä $\neg Q \Rightarrow \neg P$. (Hammack 2013, 102)

ESIMERKKI 2. Käänteinen todistus parittomuudesta (Hammack 2013, 103).
Väite: Jos $7y + 5$ on parillinen, niin $y \in \mathbb{Z}$ on pariton.
Todistus. Oletetaan, että y ei ole pariton.
Tällöin y on parillinen, eli $y = 2l$, kun $l \in \mathbb{Z}$.
Nyt $7y + 5 = 7(2l) + 5 = 14l + 5 = 14l + 4 + 1 = 2(7l + 2) + 1$.
Siis $7y + 5 = 2k + 1$, missä $k = (7l + 2) \in \mathbb{Z}$.
Selvästi $7y + 5$ on pariton eli se ei ole parillinen. ■

Ristiriitatodistus tarkoittaa todistamista vastaoletuksen avulla, jolloin päädyttäessä järjettömään lopputulokseen tiedetään alkuperäisen väitteen olevan tosi. Todistuksessa oletetaan alkuperäisen väittämän vastakkainen tapaus aluksi todeksi, josta johdetaan haettu ristiriita. Ristiriitatodistuksen käyttö ei rajoitu pelkkiin ehdollisiin väittämiin, mutta soveltuu niihinkin. (Hammack 2013, 111)

ESIMERKKI 3. Ristiriitatodistus $\sqrt{2}$:n irrationaalisuudesta (Hammack 2013 103).
Väite: $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.
Todistus. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että $\sqrt{2}$ on rationaaliluku.
Rationaalilukujen määritelmän perusteella tiedetään, että tällöin $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, missä $n, m \in \mathbb{Z}$ ja lisäksi, oletetaan, että näillä ei ole yhteisiä tekijöitä.
Korotetaan yhtälö $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ toiseen potenssiin, jolloin saadaan $2 = \frac{n^2}{m^2}$, eli $n^2 = 2m^2$.
Selvästi nyt n^2on parillinen eli n on parillinen, jolloin $n = 2k$, missä k$\in \mathbb{Z}$, eli $n^2 = 4k$.
Tällöin $n^2 = 4k = 2m^2$, siis $m^2 = 2k$, eli m^2 on parillinen ja m on parillinen.
Siis nyt sekä n ja m ovat parillisia, joka on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa.
Vastaoletus on siis väärin ja alkuperäinen väite pitää paikkansa. ■

Geometrinen todistus tarkoittaa matemaattista todistusta, jossa hyödynnetään kuvaa osana todistusta. Todistus voi olla yksinkertaisimmillaan sanaton. Hyviä geometrisia todistuksia löytyy Lehtisen esityksestä Nimekästä geometriaa (2017), johon on koottu kymmeniä klassisia lauseita ja niiden todistuksia.



KUVA 3. Pythagoraan lauseen todistus geometrisesti, perustuu lähteeseen (Katz 2008, 205).

Matemaattisella induktiolla tarkoitetaan eri asiaa kuin induktiolla: induktiota käytetään kaikissa tieteissä, matemaattista induktiota pelkästään matematiikassa. Matemaattista induktiota käytetään tietyntyyppisten lauseiden todistukseen. (Polya 1973, 114–121) Todistuksella itsellään on hyvin tarkka kaava, jossa tehdään perusaskel, induktioaskel ja johtopäätös. Induktioaskel koostuu induktio-oletuksesta, induktioväitteestä sekä todistuksesta. (Merikoski, Virtanen & Koivisto 2004, 32–33)

ESIMERKKI 4. Todistus matemaattista induktiota käyttäen (Merikoski, Virtanen & Koivisto 2004, 32–33).

Osoita, että $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2\mathrm{n} - 1) = n^2$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

Perusaskel. Kun n = 1, niin yhtälö on muotoa $(2 * 1) - 1 = 1 = 1^1 = 1$, eli yhtälö on voimassa.

Induktioaskel. Tehdään induktio-oletus (IO), että yhtälö on voimassa, kun $\mathrm{n} = \mathrm{m}$, eli että

(IO) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2\mathrm{m} - 1) = m^2$.

Induktioväite on, että yhtälö on voimassa, kun $\mathrm{n} = \mathrm{m} + 1$, eli että

(IV) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2(\mathrm{m} + 1) - 1) = (m + 1)^2$.

Todistetaan induktioväite. Induktioaskeleen ja induktioväitteen perusteella saadaan, että

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2\mathrm{m} - 1) + (2\mathrm{m} + 1) \overset{(IO)}{=} m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2.$$

Johtopäätös. Yhtälö seuraa induktioperiaatteesta. ■

3.4 Todistamisajattelu

Todistamisen läsnäolo lukion oppikirjoissa ja ylioppilaskirjoituksissa on vähentynyt 1970-luvun vuosista merkittävästi. Siinä missä 70-luvulla suurin osa lauseista oli oppikirjoissa todistettu, oltiin 80-luvulla jo nollatasossa. 90-luvulle päästäessä ylioppilaskirjoituksissa todistustehtäviä oli vain muutamia ja näissäkin päättely oli usein laskemista. Muutos on näkynyt yliopistoissa matematiikan opintoja aloittavien keskuudessa, jossa todistamisajattelu on loistanut poissaolollaan. Kyseessä ei ole kuitenkaan ollut kansainvälinen trendi matematiikan opettamisessa. Todistamisen perusajatus oletuksesta, väitöksestä ja todistuksesta ovat edelleen kaikkialla matemaattista yleissivistystä. (Malinen 1996) Mariotti (2006) sanoo kansainvälisesti vallitsevan konsensus siitä, että todistamisen ymmärryksen kehittäminen on tärkeä osa matematiikan opetuksen tavoitetta ja tämä suunta näkyy myös opetussuunnitelmissa. Tämä kiinnittyy myös tiukasti muihin matematiikan kompetenssien oppimiseen tavoitteisiin.

Koulumatematiikka on saanut 90-luvulla uudentyyppisiä tehtäviä, joissa päätellään esimerkiksi piirtämällä, laskemalla tai mittaamalla ongelmiin ratkaisuja. Kyse ei ole perinteisestä formaalista todistamisesta (proof), vaan ongelmanratkaisun sopivuuden koettelusta (prove). Oppilaat konstruoivat ongelmanratkaisutilanteissa uusia tietorakenteita, päättelyn perustuessa tässä vaiheessa vielä väljempiin ajatusmalleihin. Vaihtoehtoisesti matemaattisessa todistamisessa on kyse deduktiivisesta menettelystä tai induktiosta. Jos oppilas on prosessissa testannut päättelynsä oikeellisuutta ja todennut sen oikeaksi, voidaan puhua prove-mallista, jolloin formaali matemaattinen todistaminen on tämän erikoistapaus. (Malinen 1996)

Malisen (1996) mukaan todistamisajattelu ja todistaminen voidaan jaotella seuraavasti:

1. Perinteinen formaali todistaminen
2. Ongelmaratkaisun malli.

Jälkimmäisessä kohdassa päättely on väljempää ja verrattuna formaalimpaan päättelyyn, on siinä voitu oikoa päättelyn perusteiden pohdinnassa. Opiskelun tässä vaiheessa formalismille etsitään vasta muotoja ja tärkeintä on saada mahdollisuus virittää monipuolista ajattelua. Formaalin ajattelun kehittymisessä onkin parasta nousta puun juuresta latvaa kohti, jolloin voidaan huomata matemaattisen todistamisen kauneus ja arvo. Oppilaat ymmärtävät esimerkiksi tautologioihin liittyvän deduktiivisen päättelyn idean, mutta taas lauselogiikan käyttäminen on harvoin ollut sopivaa. Vain kontraposition ajatus lukiossa kaipaa lauselogiikkaa. Olennaista todistamisajattelussa on sen jatkuva käyttö ja opettelu, tällöin päättelyn tarkkuus lisääntyy ja heuristinen ajattelutapa kehittyy. Kun tutkittavaa tilannetta hahmotetaan, liitetään siihen yleisiä ongelmia ja pohdiskelua, jolloin formaali ajattelu vähitellen kasvaa. Formaalin ajattelun kehittyessä luonnollisesti kasvaa myös tarve todistaa. (Malinen 1996)

Oppilaita rohkaistaan olemaan osa matemaattista kulttuuria eikä vain välitetä heille tietoa. Todistamisen täytyy osaltaan vaikuttaa matemaattisen tiedon konstruointiin, jos sen halutaan olevan oppilaalle merkityksellistä. Todistamisen täytyy olla matemaattisesta näkökulmasta hyväksyttävää, mutta olla myös oppilaille järkevää. (Mariotti 2006) Hanna (1995) luokittelee todistukset kahteen tyyppiin: todistuksiin, jotka todistavat ja todistuksiin, jotka selittävät. Selittävä todistus nousee todistettavasta ilmiöstä ja tärkeintä siinä on luoda oppilaalle ymmärrystä, ottaen huomioon oppilaiden osaamistaso. Selittävän todistuksen päällimmäinen tavoite on mukautuva ajattelu, missä perinteinen todistus on oikeellisuuden tarkistavaa. Lisäksi selittävä todistaminen ja tutkiva ote tulee integroida luokkahuoneen kulttuuriin. (Mariotti 2006) Malisen (1996) ongelmanratkaisun henki näkyy myös Mariotin (2006) tekstissä. Formaalisuudelle täytyy rakentaa ensin merkityksellinen pohja. Lisäksi opettaja tulee todistaessa varmistaa, että oppilas ymmärtää todistuksen, eikä sitä käydä läpi vain osoittaakseen väittämän oikeellisuus.

Todistamisajattelu kohtaa hyvin myös Pólyan (1973) ajatukset todistamisen tarpeellisuudesta, jota esitettiin luvussa 3.2. Formaali todistaminen on tärkeä osa matematiikkaa ja sille on paikkansa, mutta ilman ajattelun työkalujen kehittymistä ei formaaliudenkaan tavoittelu ole varmasti mielekästä. Voidaan miettiä, mikä todistamisessa on tärkeintä sitä opetellessa – formaalius vai todistuksen ytimen tavoittaminen.

3.5 Matematiikka yliopistossa

Yliopistossa matematiikkaa opiskellut on voinut kuulla opiskeluja aloittaessaan, että matematiikan suhteen voi unohtaa kaiken aiemmin lukiossa oppineensa. Vastaavasti mitään matematiikasta tietämääsi et voi käyttää, ellet todista tämän väittämän oikeellisuutta ensin. Jopa lukualueisiin liittyvät laskutoimitukset määritellään ja esimerkiksi todistetaan, että laskutoimitukset ovat vaihdannaisia. Siinä missä lukiossa kaavat saadaan valmiina ja niiden oikeellisuus uskotaan, yliopistossa vaaditaan tarkkaa määrittelyä ja oikeellisuuden osoittamista.

Nopeasti matematiikan opintojen alusta alkaen totutaan rakenteeseen: määritelmä, lause ja todistus. Määritelmä on tarkka, yksikäsitteinen selitys matemaattiselle sanalle tai fraasille (Hammack 2013, 87). Kuvassa 4 on esimerkkinä derivaatan määritelmä. Määritelmässä kerrotaan, miten derivaattaa merkitään ja mitä tämä merkintä tarkoittaa. Huomautettakoon, että määritelmässä on käytetty poikkeuksellista kirjoitustapaa, jossa välit ja pisteet on määritetty vasta viimeisessä lauseessa.

Määritelmä 2.5 (Derivaatta)**.** Olkoon reaaliarvoinen funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ määritelty välillä I ja $x_0 \in I$. Funktion f *derivaatta* $f'(x_0)$ pisteessä x_0 määritellään seuraavasti:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

olettaen, että raja-arvo on olemassa tai se on ääretön. Jos $f'(x_0)$ on äärellinen, sanomme, että funktio f on derivoituva pisteessä x_0. Jos funktio f on derivoituva jokaisessa välin $E \subset I$ pisteessä, sanomme, että funktio f on derivoituva välillä E. Kun $E = I$, sanomme, että funktio f on derivoituva funktio. Tässä $I \subseteq \mathbb{R}$ ja $x, x_0 \in I$. [1, s. 398, määritelmä 7.1]

KUVA 4. Derivaatan määritelmä (Leino 2012, 5).

Määritelmien jälkeen päästään lauseisiin eli teoreemiin. Lauseella tarkoitetaan matemaattista väittämää, joka on todistettu oikeaksi tai joka voidaan todistaa oikeaksi (Hammack 2013, 87). Yliopistomatematiikassakaan ei todisteta kaikkia lauseita, triviaalit tai patologiset eli pitkät tai sisältöön nähden liian vaikeat todistukset voidaan sivuuttaa. Kuvassa 5 on esitetty derivaatan jatkuvuuden lause.

Lause 2.2 (Derivaatan jatkuvuus)**.** *Olkoon reaaliarvoinen funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ määritelty pisteen x_0 ympäristössä I. Jos funktio f on derivoituva pisteessä x_0, niin se on* jatkuva *pisteessä x_0. Tässä $I \subseteq \mathbb{R}$ ja $x_0 \in I$.*

KUVA 5. Derivaatan jatkuvuuden lause (Leino 2012, 5).

Viimeinen osa totuttua kolminaisuutta on todistus. Kuvan 6 todistuksessa todistetaan kuvan 5 lauseen oikeellisuus. Todistuksen alussa mainitaan mitä on näytettävä todeksi. Tämän jälkeen kootaan yhteen todistamisessa tarvittavat osiot ja esitetään yhtenäinen päättelyketju todistuksen toiseksi viimeisellä rivillä. Lauseen todistamisen jälkeen esimerkiksi derivaatan tapauksessa on mielekästä lähteä soveltamaan matemaattista tietoa.

Todistus. Riittää osoittaa, että $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$. Kun $x \neq x_0$, niin

$$f(x)-f(x_0)=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)(x-x_0).$$

Silloin

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

ja $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$. Nyt saamme raja-arvon tulosäännön perusteella

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\left(\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)(x-x_0)\right)=(f'(x_0))(0)=0.$$

Tässä $I \subseteq \mathbb{R}$ ja $x, x_0 \in I$. [1, s. 403, lause 7.6] □

KUVA 6. Derivaatan jatkuvuuden todistus (Leino 2012, 5).

Näiden kolmen keskeisen sisällön lisäksi luentomateriaaleissa, artikkeleissa ja julkaisuissa käsitellään usein lemmoja eli apulauseita, korollaareja sekä aksioomia tai postulaatteja. Lemmoja tai apulauseita hyödynnetään usein varsinaisten lauseiden todistamisessa. Korollaarit puolestaan kuvaavat ensimmäisestä lauseesta seuraavaa toista lausetta. Aksioomat tai postulaatit ovat puolestaan lauseita, joita pidetään itsestään selvästi tosina. Esimerkiksi Euklidinen geometria rakentuu juuri viiden aksiooman päälle, joista kaikki seuraavat lauseet on johdettu. Tieto rakentuu siis kauniisti tämän aksioomajuuren varaan.

Yliopistomatematiikan ero on siis selvä lukiossa totuttuun matematiikkaan. Siinä missä lukiomatematiikan voisi sanoa olevan paljolti laskuoppia, ylipistossa lähdetään kaikessa todistamisesta ja laskeminen on selvästi sivuosassa. Laskiminen mahdollistuu todistuksen seurauksena. Tätä laskemisen ja todistamisen pesäeroa voi myös havainnollistaa sillä, että laskeminen keskittyy usein yksittäistapauksiin ja todistamalla haetaan taas yleistyksiä sekä laajempien sääntöjen paikkansapitävyyttä.

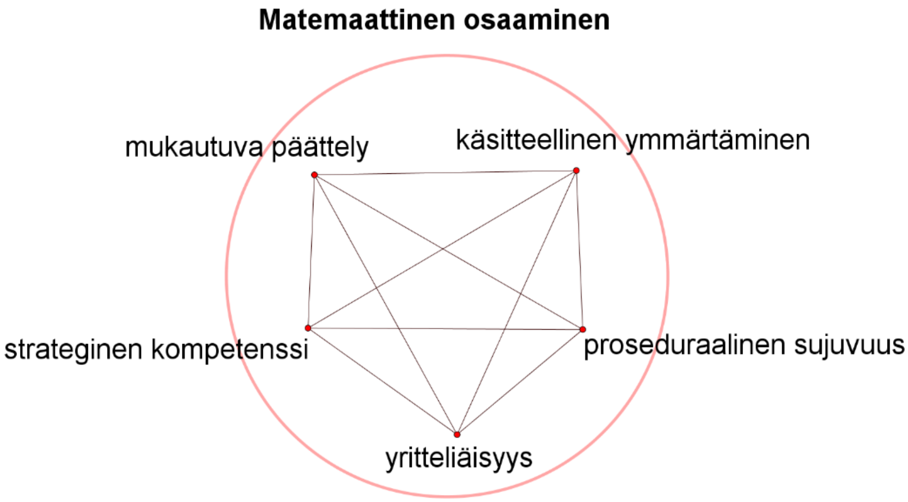
4 AKATEEMINEN LUKUTAITO

4.1 Matemaattinen osaaminen

Jotta voidaan mitata oppilaiden ja opiskelijoiden osaamista, täytyy olla jokin määritelmä aihepiirin osaamisille. Matemaattiselle osaamiselle löytyy luonnollisesti useita malleja, mutta tässä työssä näkökulmaksi otettiin Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) rakentama viisikomponenttinen malli. Malli sisältää kielentämisen sekä todistamisen näkökulmasta mielenkiintoisen jaottelun.

Matemaattisen osaamisen malli pohjautuu kognitiivisen psykologian sekä matematiikan opetuksen tutkimukseen sekä käsitykseen matemaattisesta tiedoista, ymmärryksestä sekä taidoista, joita matematiikan oppiminen vaatii. Mallin tarkoitus on antaa kattava ja yhdistävä kuva onnistuvasta matematiikan oppimisesta. Viisi osa-aluetta muodostaa pohjan mallille: käsitteellinen ymmärtäminen, mukautuva päättely, strateginen kompetenssi, proseduraalinen sujuvuus sekä yritteliäisyys. Nämä viisi osa-aluetta ovat säikeitä, jotka kietoutuvat yhteen ja ovat keskinäisesti riippuvia. Matemaattinen osaaminen syntyy kaikkien osa-alueiden osaamisen kehittyessä. Osaaminen ei myöskään muodostu pelkästä tietojen muistamisesta, vaan tiedon linkittymisestä sekä strukturoinnista. Syvällinen osaaminen vaatii eri osa-alueiden tietämyksen yhdistämistä. (Kilpatrick *et al*. 2001 115–118)

Kuvassa 7 on annettu vaihtoehtoinen esitys matemaattisen osaamisen mallille. Kaikki osa-alueet ovat kiinteästi toisiinsa yhteydessä siten, että muoto rakentuu yritteliäisyyden varaan. Peruskoulussa selvä painotus on proseduraalisessa sujuvuudessa ja yliopistoa kohti edetessä mallissa painotus siirtyy kohti yläreunaa.



KUVA 7. Matemaattisen osaamisen malli, perustuu lähteeseen (Kilpatrick *et al*. 2001, 117)

Käsitteellinen ymmärtäminen tarkoittaa ymmärrystä matemaattisista konsepteista, operaatioista sekä suhteista. Opiskelija, jolla on käsitteellistä ymmärrystä, tietää muutakin kuin erillisiä faktoja ja metodeja. Matemaattisen idean tärkeyttä ymmärretään ja sen käyttökohteista on tietoa. Tietämys on yhtenäinen kokonaisuus, jonka päälle uutta osaamista on hyvä rakentaa. Huomattava merkki osa-alueen osaamisesta on kyky esittää matemaattinen tapaus toisella tavalla. Toisaalta huomiona siitä, miten erilainen esitys sopii paremmin eri käyttökohteeseen. Ymmärryksen taso on suhteessa muodostettujen yhteyksien laatuun ja laajuuteen. Tietämys mahdollistaa uusien ja vieraiden ongelmien selvittämisen sekä itseluottamuksen lisäämisen ja täten uuden oppimisen. Käsitteellisestä ymmärtämisestä seuraa mahdollisuus nähdä yhteyksiä matemaattisten osa-alueiden taustalla, jolloin asiat eivät jää irtonaisiksi. (Kilpatrick *et al*. 2001 116–119) Osa-alueen hallitseminen vähentää muistinvaraisen tiedon tarvetta ja täten mahdollistaa vaativien tehtävien ratkaisun (Joutsenlahti 2005).

Proseduraalinen sujuvuus tarkoittaa kykyä suorittaa toimenpiteitä järkevästi, tehokkaasti, tarkasti sekä joustavasti. Osa-alueella vahva opiskelija pystyy arvioimaan käytetyn menetelmän lopputuloksen järkevyyttä. Lisäksi osaaminen mahdollistaa eri laskutapojen erilaisuuksien ja samankaltaisuuksien hahmottamista ja löytämistä. Proseduraalinen sujuvuus linkittyy vahvasti myös käsitteelliseen ymmärtämiseen esimerkiksi opittujen algoritmien kautta. Molemmat osa-alueet ruokkivat toisiaan, eivätkä ole perinteisessä mielessä keskenään kilpailevia. Toisaalta, jos joltain osa-alueelta on vajavainen proseduraalinen sujuvuus, on ymmärryksen muodostaminen tällöin myös haastavampaa. Pahimmillaan ilman ymmärrystä opitut asiat voivat lokeroitua, jolloin vähänkään erilaisten menetelmien yhteyksiä ei nähdä. Parhaimmillaan ymmärryksen myötä opittuja menetelmiä voidaan muokata ja sopeuttaa, tavoitellen vielä helpompaa käyttöä. (Kilpatrick *et al*. 2001, 116 & 121–123) Proseduraalista sujuvuutta edellytetään kaiken tasoisten tehtävien ratkaisuun. Useat lukio-opiskelijat eivät hallitse ilman taulukkokirjaa tai graafista laskinta edes yksinkertaisia proseduureja. (Joutsenlahti 2005)

Strateginen kompetenssi tarkoittaa kykyä muodostaa matemaattisia ongelmia sekä esittää ja ratkaista niitä. Osa-alue vastaa paljolti ongelmanratkaisua sekä ongelman muodostamista. Siinä missä kouluympäristössä ongelmat ovat selkeästi esitettyjä, ulkomaailmassa eivät niinkään. Ongelma pitää pystyä alkuun muodostamaan, jotta sitä pystyy ratkaisemaan, ja tässä onnistuminen vaatii kokemusta ongelmanratkaisusta. Osa ongelmanratkaisua on erilaisten ratkaisustrategioiden hallitseminen ja soveltaminen. Muodostetun ongelman ratkaiseminen sisältää sen esittämisen esimerkiksi numeroiden tai grafiikan avulla. Tämä vaatii jo mielikuvan omaamista ongelman keskeisistä sisällöistä, jossa on olemassa ongelman muuttujia ja relaatioita. Kuvaamisen onnistuminen vaatii tapauksen hyvää ymmärrystä ja taitavampi ongelmanratkaisija näkee ongelman taustalla olevissa rakenteissa riippuvuuksia. Lisäksi ongelmanratkaisun joustavuus kasvaa sitä mukaa, kun ratkaistaan ongelmia, jotka eivät ole pelkkää rutiinia. Epärutiininomaisiin ongelmiin opiskelijalla ei ole suoraan oikeaa ratkaisumetodia tiedossa. Hyvän strategisen kompetenssin omaava opiskelija voi löytää tällaiseen ongelmaan joustavasti useita lähestymistapoja ja valita sopivan metodijoukon yhdistelmän ratkaisua varten. Strateginen kompetenssi linkittyy luonnollisesti käsitteelliseen ymmärtämiseen ja proseduraaliseen sujuvuuteen. (Kilpatrick *et al*. 2001, 116 & 124–128) Vaikka strateginen kompetenssi on opetussuunnitelmatasolla keskeisenä tavoitteena, jää sen osuus sekä opetuksessa~~,~~ että ylioppilaskokeessa vähäiseksi. Ylioppilaskokeissa ei usein ole tehtäviä, joissa pääsisi valitsemaan ratkaisustrategiaa vasta sen jälkeen, kun ongelman olisi muovannut ratkaistavaan muotoon. (Joutsenlahti 2005)

Mukautuva päättely tarkoittaa kykyä perusteluun, selittämiseen, reflektointiin ja loogiseen ajatteluun. Päättely on korrektia ja pätevää, ollen peräisin vaihtoehtoihin harkinnasta ja ottaa huomioon lopputuloksen perustelun. Mukautuva päättely on keskeisin matematiikan oppimisen osa, jolla luovitaan kaiken matemaattisen sisällön läpi pyrkien saamaan sisällöstä selkoa. Deduktiivisella päättelyllä selvitetään mahdolliset eriävyydet ja ristiriidat, vain päättelyn oikeellisuudella on merkitystä. Mukautuva päättely sisältää muutakin kuin pelkän todistamisen ja deduktiivisen päättelyn, sisältäen ei-formaalin selittämisen ja perustelun sekä intuitiivisen ja induktiivisen päättelyn, jotka pohjautuvat toistuvaan kaavaan, analogiaan tai metaforaan. Päättelyn onnistuminen vaatii opiskelijalta riittävän tietopohjan, tehtävän ymmärtämisen sekä motivaation. Tärkeä osa päättelyn kokonaisuutta on perustelu, jonka osa todistaminen on. Todistaminen ja perustelu ovat formaalin matematiikan tunnusmerkkejä. Perustelun opettelu voidaan aloittaa jo aikaisin opetuksessa, jolloin perustelu- ja selitystaito kehittyy käsitteellisen ymmärtämisen kanssa. Päättelytaito kehittyy pitkän ajan kuluessa samalla, kun sitä hyödynnetään uuden aihepiirin sisältöjen opettelussa. Mukautuva päättely linkittyy myös muihin matemaattisen osaamisen osa-alueisiin, erityisesti ongelmanratkaisussa, jolloin strateginen kompetenssi ohjaa prosessia, riippuen yritteliäisyydestä ja ruokkien sitä. (Kilpatrick *et al.* 2001, 116 & 129–131) Lukiossa osa-alueen harjaantuminen jää usein heikoksi kurssisisältöjen painotuksen vuoksi, lisäksi uusiin käsitteisiin ei ehditä perehtyä kuin pintapuolisesti. (Joutsenlahti 2005)

Yritteliäisyys tarkoittaa taipumusta nähdä matematiikka tähdellisenä, järkevänä ja merkittävänä sekä uskoa määrätietoisuuteen ja tehokkuuteen. Yritteliäisyys on matematiikan oppimisen pohjana. Jotta matemaattista osaamista voisi kertyä, tulee uskoa, että matematiikka on ymmärrettävää, osaamista saa ahkerasti työskentelemällä ja, että kuka tahansa voi ymmärtää matematiikkaa. Yritteliäisyyden kehittyminen vaatii onnistumisen tunteita. Yritteliäisyys mahdollistaa muiden osaamisen osa-alueiden kehittymisen ja se kehittyy myös näiden osa-alueiden osaamisen kehittyessä. Positiiviset kokemukset ruokkivat positiivisuutta matematiikkaa kohtaan. Kun koetaan, että opitaan matematiikkaa, voidaan kehittyä edelleen pidemmälle. Opiskelijoiden suhtautuminen matematiikkaan vaikuttaa paljon heidän kehittymismahdollisuuksiinsa, positiivisen kuvan omaava haastaa itseään oppimaan. Tällöin opiskelijat myös luottavat enemmän omiin tietoihin ja taitoihinsa. Matemaattinen osaaminen siis ylittää pelkät osaamisen ja tietämisen rajat. (Kilpatrick *et al.* 2001, 116 & 131–133)

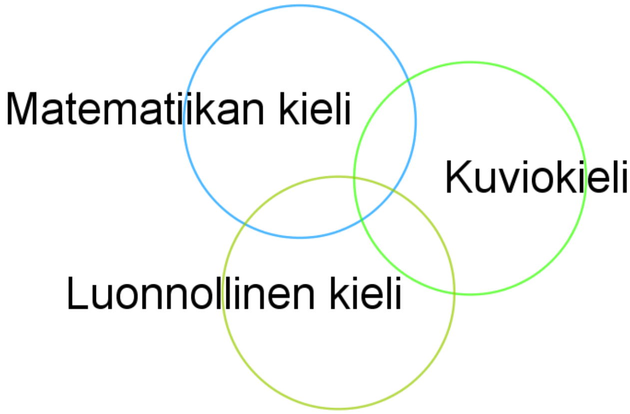
Matemaattisen osaamisen säikeet ovat siis tiiviisti yhteydessä ja osaaminen rakentuu kaikkia osa-alueita käyttämällä, jokainen osa-alue vaatii samanaikaista panostusta. Matemaattisen idean ymmärrys tapahtuu myös aina monella tasolla ja monella tavalla. (Kilpatrick *et al.* 2001, 133–135). Tuskin opetustakaan olisi mielekästä kytkeä tiukasti vain yhteen osa-alueeseen, vaan se tulee linkittää muuhun kontekstiin ja näin opiskelijoiden konstruoimiin rakenteisiin. Osa-alueista on toisaalta nähtävissä niiden eritasoinen kytkeytyminen koulutasoihin. Kuvan 7 sisällöissä edetään koulussa alhaalta ylöspäin, yliopistossa painotus on selvästi käsitteellisessä ymmärryksessä, unohtamatta strategista kompetenssia ja mukautuva päättelyä. Usein alemmilla asteilla painotus on proseduraalisessa sujuvuudessa eli laskutaidossa.

4.2 *Kielentäminen*

4.2.1 Teoriatausta

Kielentämisellä on suhteellisen lyhyt historia, käsite on ollut käytössä ainakin 90-luvulta lähtien esimerkiksi matematiikan didaktiikan tutkimuksessa. Tarkasteltaessa matematiikan oppimista kielen kannalta, voidaan kielet jakaa luonnollisiin ja keinotekoisiin. Esimerkiksi suomen kieli on luonnollinen kieli ja matematiikan symbolikieli on keinotekoinen, käyttöalueeltaan suppea kieli. Suomessa kielentäminen löysi tiensä matematiikan didaktiikan tutkimukseen Joutsenlahden (2003) toimesta. Käsite kiinnitettiin matemaattisten käsitteiden oppimiseen ja ymmärtämiseen. Käsite on suhteessa sosiaaliseen vuorovaikutukseen, jota tapahtuu kielentäessä. Kielentäminen tekee oppijoiden omaa ajattelua näkyväksi ja paljastaa opettajalle, miten esimerkiksi käsitteen merkitys on sisäistetty. Kielentämistä voidaan toteuttaa suullisesti tai kirjallisesti ja se on oppilaille osa käsitteiden konstruointiprosessia. (Joutsenlahti & Kulju 2015; Joutsenlahti 2003) Matematiikan käsitteistöä ja symbolikieltä opitaan äidinkielen kautta (Joutsenlahti 2003).

Matematiikan luokkahuonediskurssia voidaan tarkastella multisemioottisena järjestelmänä, johon kuuluu luonnollinen kieli, matemaattinen symbolikieli sekä visuaaliset esitykset. Tämän pohjalta on esitetty kolmen kielen malli, joka sisältää matematiikan symbolikielen, kuviokielen ja luonnollisen kielen. Tärkein syy järjestelmän käyttöön on kehittää oppilaan merkityksenmuodostusprosessia. Malli on esitetty kuvassa 8. Järjestelmän avulla voidaan rakentaa monimuotoisia merkityksiä matemaattisille operaatioille sekä käsitteille. Matemaattisen ajattelun kielentäminen tarkoittaa matemaattisen ajattelun ilmaisua yhtä tai useampaa kieltä käyttämällä. Kielten välillä liikkuminen nähdään koodinvaihtona. Kielten välillä liikkuminen auttaa ratkaisemaan ongelmaa ja tallentamaan ratkaisua ymmärrettävään muotoon myös muita varten. (Joutsenlahti & Kulju 2015; Joutsenlahti & Kulju 2010; Joutsenlahti & Kulju 2017)



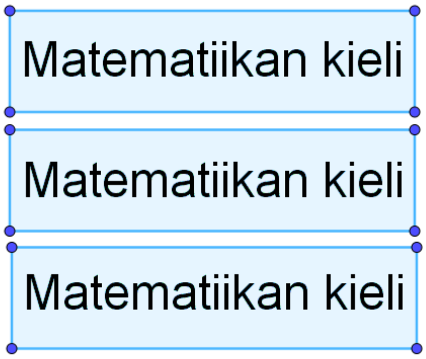
KUVA 8. Matematiikan kirjallinen ilmaisu, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti & Kulju 2010).

Varsinkin yliopistotasolla tehtävien ratkaisuissa käytetään pääosin matemaattista symbolista kieltä. Vastausta voi olla vaikea seurata ilman luonnollista tai kuviokieltä, joten on tärkeää, että ratkaisuissa voi käyttää eri kieliä. Kielten monipuolinen käyttö mahdollistaa opettajalle paremman oppilaan matemaattisen ajattelun arvioinnin sekä opetustilanteiden suunnittelun ja lisäksi muut oppilaat voivat seurata ratkaisua paremmin. (Silius, Pohjalainen, Kangas, Miilumäki & Joutsenlahti 2010; Joutsenlahti 2010). Kirjoittamisen on huomattu auttavan ratkaisujen ymmärtämisessä ja toisaalta helpottaen ratkaisun aikaansaamista ja selkeyttäen sitä (Joutsenlahti & Kulju 2017; Joutsenlahti 2010).

4.2.2 Kirjallisen kielentämisen ratkaisumalleja

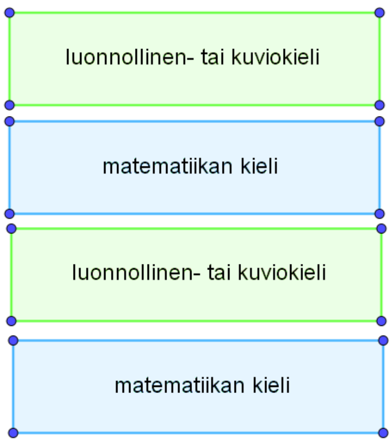
Tässä esitellään Joutsenlahden (2009; 2010) konstruoimia malleja matematiikan tehtävien ratkaisujen esittämiseen. Malleja ovat standardi-, kertomus-, tiekartta-, päiväkirja- ja kommenttimalli, joita vastaaja voidaan ohjata käyttämään. Hyödyntämällä matemaattisen kielen kanssa luonnollista tai kuviokieltä vastaaja tulee tarkastelleeksi sekä alkuperäistä kysymystä että vastauksen mielekkyyttä. (Joutsenlahti 2010)

Standardimalli on varmasti tutuin tehtävien ratkaisumalli matematiikan oppikirjoista. Mallia käytetään erityisesti aritmetiikassa ja siinä käytetään vain yhdenlaista esitystä eli matematiikan kieltä. Ratkaisu etenee lausekkeesta laskujen kautta ratkaisuun, siten että vastaus sisältää yksiköt. Tehtävän ratkaisija pyrkii täten toistamaan kirjassa esitettyä mallia ilman tämän omaa ymmärtämisen prosessia. Samoin muille ymmärrettävä esittämisen tärkeys ei saa tukea. (Joutsenlahti 2010) Malli on varsin minimalistinen, jossa luotetaan vahvasti siihen, että lukija pystyy tulkitsemaan matemaattisen kielen ongelmitta. Opettajan näkökulmasta ei nähdä, mitä oppilas on rivien välissä ajatellut. Kuvassa 9 nähdään, miten ratkaisu etenee ylhäältä alaspäin hyödyntäen pelkkää matematiikan symbolikieltä.



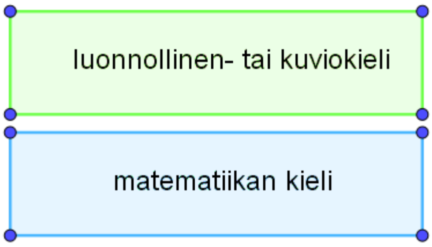
KUVA 9. Standardimalli, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti 2009).

Kertomusmallissa edetään vaiheittain, kuvaten ratkaisun perusteet ja eteneminen luonnollisella kielellä ja/tai kuviokielellä. Väliotsikoilla voidaan ratkaisussa kuvata mitä ja miksi tehdään tai voidaan esitellä kielen tai kuviokielen ohessa käytettyjä merkintöjä. Luonnollista ja kuviokieltä käytetään tukemassa ja jäsentämässä ratkaisuprosessia, jolloin ratkaisu~~n~~ tehdään lukijalle ymmärrettäväksi ja sen seuraaminen vaivattomaksi. Tällöin lukija vakuutetaan siitä, että ratkaisija on ymmärtänyt ratkaisunsa vaiheet ja puutteet ja virheet on helppo huomata. Malli on erityisesti tuttu lukion matematiikan oppikirjojen sanallisista tehtävistä. (Joutsenlahti 2010) Kertomusmalli on paljon miellyttävämpi seurattava, eikä siinä tarvitse arvailla, mitä ratkaisija on merkinnöillään tarkoittanut. Ratkaisusta näkee paremmin tekijän ymmärryksen tasoa kuin edellisestä mallista. Kuvassa 10 nähdään, miten ratkaisussa edetään ylhäältä alaspäin vaihdellen kirjallisen ilmaisun kieliä joka kohdassa.



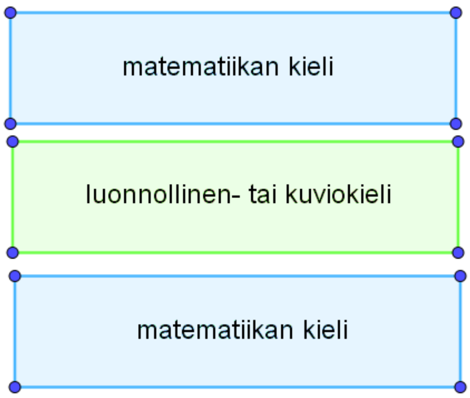
KUVA 10. Kertomusmalli, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti 2009).

Tiekarttamallissa ratkaisun alussa esitellään ratkaisun perusteet sekä eteneminen vaiheesta toiseen luonnollisella kielellä ja/tai kuviokielellä. Lukija näkee heti alkuun ratkaisun idean ja siinä tarvittavat perustelut. Luonnollisen tai kuviokielen jälkeen ratkaisu etenee matematiikan symbolikieleen ja eteneminen vastaa tällöin standardimallia. Tiekarttamalli siis täydentää standardimallia alussa tapahtuvalla ratkaisun ajatustyön avaamisella, eikä ole näin vain lausekkeiden ja laskutoimitusten varassa. (Joutsenlahti 2010) Kuvassa 11 on esitetty tiekarttamallin kulku. Mallissa luotetaan siihen, että alun kuvauksessa saadaan ilmaistua ratkaistu riittävän selvästi, jotta lukija pystyy seuraamaan sitä. Pitkässä ratkaisussa lukijalla voi edelleen olla vaikeuksia pysyä ratkaisun perässä, ainakaan kertalukemalla, kun rivien välissä ei ole tarkentavia selityksiä.



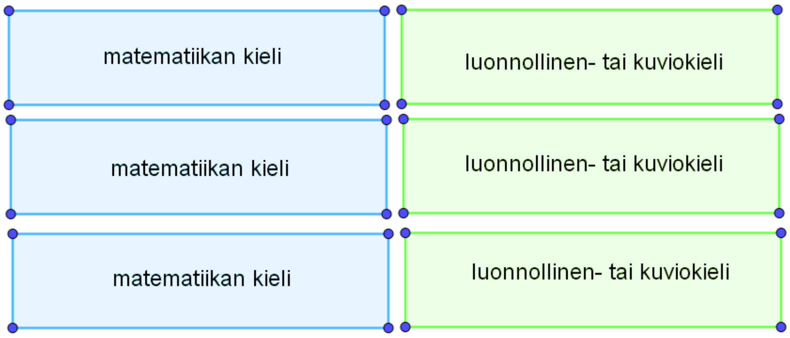
KUVA 11. Tiekarttamalli, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti 2009).

Päiväkirjamallissa ratkaisua täydennetään luonnollisella ja/tai kuviokielellä ongelmakohdissa, jäsentäen ja selkeyttäen ratkaisijan omaa ajattelua, eikä niinkään lukijaa varten. Päiväkirjamallin ratkaisu etenee tätä täydennystä lukuun ottamatta standardimallin mukaisesti. Kirjoitusprosessin tarkoitus on pääsääntöisesti selkeyttää omia ajatuksia, ollen oman tekstin kanssa vuorovaikutuksessa. (Joutsenlahti 2010) Malli ei luonnollisesti ole optimaalisin lukijalle, mutta tässä nähdään potentiaalisesti ratkaisijalle vaikea kohta, jossa oppimista on voinut tapahtua. Tekstistä voi myös nähdä, mikä vaikeuden tai virheen on voinut aiheuttaa. Päiväkirjamalli on esitetty kuvassa 12.



KUVA 12. Päiväkirjamalli, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti 2009).

Kommenttimallissa ratkaisu toteutetaan yhteen sarakkeeseen standardimallin mukaisesti, mutta kommentoiden ratkaisu toiseen sarakkeeseen luonnollisella kielellä. Ratkaisussa kommentoidaan jokaista vaihetta. Kyseessä on perinteinen pedagoginen malli, jota opettajat ovat käyttäneet esimerkiksi opetettaessa laskualgoritmeja. (Joutsenlahti 2010) Malli muistuttaa hyvin paljon kertomusmallia, kommentoinnin ollessa nyt matemaattisen kielen vieressä eikä alla. Kuvassa 13 on esitetty kommenttimalli.



KUVA 13. Kommenttimalli, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti 2010).

4.2.3 Tehtävätyypit

Perinteisesti erityisesti yliopistomatematiikassa tehtävien ratkaisut esitetään vain matematiikan symbolikielen avulla, hyödyntäen siten standardimallin esitystä (Joutsenlahti, Sarikka, Kangas & Harjulehto 2013). Kielentämistehtävät tarjoavat vaihtelua tehtäviin, jolloin vastauksia pyydetään luonnollisella kielellä tai kuviokielellä, tai kaikkien näiden yhdistelmillä. Tällöin voidaan vaatia myös tehtävien ratkaisuilta enemmän, kun esimerkiksi ratkaisulle vaaditaan perustelu.

Kielentämistä hyödyntäviä tehtävätyyppejä on esitetty kirjallisuudessa yhdeksää tyyppiä, joihin ehdotetaan tässä luvussa vielä kahta lisäystä, jotka sopivat erityisesti kielentäviin todistustehtäviin. Kielentämisen tehtävätyyppejä ovat koodinvaihtotehtävä, täydennystehtävä, virheenetsintätehtävä, ratkaisusta tehtävä, ratkaisun argumentointi, tiedonseulontatehtävä, omin sanoin selitys, matematiikan konkretisointi ja ratkaisun järjestäminen (Joutsenlahti *et al.* 2013; Sarikka 2014, 25–28; Linnusmäki 2015, 32–33).

Koodinvaihtotehtävässä liikutaan eri matemaattisen ilmaisun kirjallisten kielten välillä. Matematiikan symbolikielellä esitetty ratkaisu voidaan esittää luonnollisella kielellä, myös kuviokielen käyttö on mahdollista. (Joutsenlahti *et al*. 2013) Esimerkiksi matemaattisella symbolikielellä esitetty todistus voidaan pyytää esittämään luonnollisella kielellä.

Täydennystehtävässä jollain matematiikan kirjallisen ilmaisun kielellä esitettyyn puutteelliseen ratkaisuun tulee esittää täydennykset (Joutsenlahti *et al*. 2013). Esimerkiksi matemaattisella symbolikielellä esitetystä todistuksesta voi puuttua alun oletukset tai keskivaiheen päättelyitä, jotka todistukseen pitää täydentää.

Virheenetsintätehtävässä on etsittävä virheelliset tai puutteelliset kohdat ratkaisuprosessista ja korjattava tai täydennettävä nämä (Joutsenlahti *et al*. 2013). Esimerkiksi keskellä todistustehtävää voi olla virheellinen päättely, josta johtuen loppu todistus on väärin. Tällöin virhe tulee löytää ja korjata loput todistuksesta.

Ratkaisusta tehtävä -tehtävässä on annettu tehtävän ratkaisu jollain matematiikan kirjallisen ilmaisun kielellä, ja sille pitää löytää tehtävä (Joutsenlahti *et al*. 2013). Tehtävätyypissä on siis tiedossa vastaus, mutta kysymys on hukassa. Annettua ratkaisua pitää osata tulkita ja kyetä ymmärtämään, jotta sille voi löytää oikean tai sopivan alkuperäisen tehtävän. Ratkaisu voi olla myös esimerkiksi kuviokielellä tehty, mutta kysymys halutaan luonnollisella kielellä. Tehtävätyypissä voidaan tällöin hyödyntää koodinvaihtoa eri matemaattisen kirjallisen ilmaisun kielten välillä.

Ratkaisun argumentointi -tehtävässä on perusteltava joko itse tehtyä tai valmiiksi annettua ratkaisua hyödyntäen eri matemaattisen kirjallisen ilmaisun kieliä (Sarikka 2014, 25–28). Tehtävässä voidaan pyytää esimerkiksi perustelemaan annettu todistus niin, että jokainen välivaihe avataan luonnollisella kielellä.

Tiedonseulontatehtävässä on annettu lähtötietoja enemmän kuin ratkaisussa tarvitaan, joista ratkaisijan tulee löytää oleelliset tiedot ja käyttää näitä tehtävän ratkaisussa (Sarikka 2014, 25–28). Tehtävän ongelma voidaan esittää esimerkiksi artikkelin muodossa, josta tulee etsiä tarvittavat tiedot ja ratkaista näiden pohjalta tehtävä.

Omin sanoin selitys -tehtävässä on annettu jokin asia matemaattisella symbolikielellä, joka tulee selittää luonnollisella kielellä (Sarikka 2014, 25–28). Esimerkiksi annetaan lyhyitä matemaattisia väittämiä, jotka pitää selittää luonnollisella kielellä.

Matematiikan konkretisointi -tehtävässä liikutaan matemaattisen abstraktin sekä konkreettisen tason välillä, jossa etsitään arkielämästä vastinetta tai käyttötarkoitusta matemaattiselle sisällölle. Tehtävätyypin tarkoituksena on osoittaa matematiikan merkityksiä opiskelukontekstin ulkopuolelta opiskelijoille. (Linnusmäki 2015, 32–33) Tehtävä voi olla yksinkertainen, jossa haetaan esimerkiksi arkielämän vastinetta aidosti monotoniselle derivaatalle.

Ratkaisun järjestäminen -tehtävässä on annettu valmiiksi tehtävän ratkaisu, mutta vaiheet eivät ole järkevässä järjestyksessä. Vastauksessa ratkaisun vaiheet on järjesteltävä mielekkääseen järjestykseen. (Linnusmäki 2015, 32–33) Tehtävässä voidaan esimerkiksi antaa formaali todistus, jota pitää osata tulkita ja järjestää siten sen sisällöt oikeaan järjestykseen.

Tutkimuksen aikana kehitettiin kaksi uutta tehtävätyyppiä, jotka soveltuvat erityisesti todistustehtäviin. Todistuksissa alku ja loppu ovat tärkeitä, ja tämän pohjalta syntyi metatehtävätyyppi. Analogiatehtävätyyppi liittyy kiinteästi koodinvaihtotehtävään, mutta on vielä sen erityistapaus.

Metatehtävässä on annettu valmiiksi todistus tai väittämä, ilman alun oletusta tai lopun johtopäätöstä. Tehtävässä voidaan kysyä esimerkiksi kattavinta oletusta, joka pitää todistuksen tai väittämän totena, tai laajinta johtopäätöstä nykyisellä oletuksella. Tehtävää pitää siis pysty tulkitsemaan alusta loppuun ja nähdä miten alku ja loppu vaikuttavat oikeellisuuden laajuuteen.

Analogiatehtävässä on annettu todistus jollain kolmesta kirjallisesta matematiikan kirjallisesta kielestä ja tehtävänä on tuottaa vaihtoehtoinen todistus tehtävään jollain pyydetyllä kielellä. Tehtävä ei siis ole pelkästään suoraan koodinvaihtoa, vaan tarkoituksena on tuottaa toinen, mutta analoginen todistus ongelmaan. Todistus voidaan pyytää samalla kielellä tai tehtävä voi pitää sisällään myös kielenvaihdon. Kyseessä on haastava tehtävätyyppi, jossa annetusta todistuksesta tulee pystyä löytämään keskeiset asiat ja hyödyntämään näitä toisenlaisessa todistuksessa.

ESIMERKKI 5. Metatehtävä.

Mikä on laajin x:n määrittelyjoukko, jolle $\frac{x}{7}+\frac{1}{7x}\geq\frac{2}{7}$ pätee?

a) $x \geq 0$, b) $x \leq 0$, c) $x > 0$, d) $x > 0$.

ESIMERKKI 6. Analogiatehtävä (Vince 2009, 139–140).

Sinilause voidaan johtaa pinta-alaa hyödyntäen, jolloin pinta-ala $L = \frac{1}{2}b(c\ sin\ A) = \frac{1}{2}c(a\ sin\ B) = \frac{1}{2}a(b\ sin\ C)$. Jakamalla yhtälöt $2/abc$:llä saadaan $\frac{2L}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{C}$.
Todista sinilause vektorien avulla.

4.2.4 Tutkimustietoa

Kielentämistä on Suomessa tutkittu pääosin Tampere–Hämeenlinna-akselilla, Tampereen yliopisto -lähtöisesti Tampereen teknillisen yliopiston ollessa usean tutkimuksen kohteena. Aihepiiristä on tehty myös paljon sekä pro gradu -tutkielmia että diplomitöitä mainituissa oppilaitoksissa. Tutkimusta on myös tehty kautta opetuksen, aina peruskoulusta korkeakoulutasolle asti. Opetusmenetelmänä kielentäminen on osoittautunut toimivaksi kaikilla kouluasteilla asetettujen tavoitteiden näkökulmasta (Joutsenlahti & Kulju 2015). Eräs mielenkiintoinen tutkimus (Silius *et al.* 2010) selvitti Tampereen teknillisellä yliopistolla kielentämistä hyödyntäen, mitä lukio- ja yliopistomatematiikan väliselle osaamiserolle voidaan tehdä.

Matemaattisen osaamisen tason lasku sekä Suomessa että länsimaissa yleisesti on ajanut myös Tampereen teknillisen yliopiston miettimään opetusta tukevia menetelmiä, joiden vaikutusta Siliuksen et al. (2010) artikkelissa esitellään. Yliopistomatematiikan oletuksena on, että lukiomatematiikka hallitaan riittävällä tasolla. Oppilaitoksiin hakevilla on kuitenkin puutteita osaamisessa, josta seuraa aukko osaamisessa koulutasojen välillä. Lisäksi yliopistomatematiikassa tarvituista matemaattisen osaamisen osa-alueista käsitteellinen ymmärtäminen ja strateginen kompetenssi eivät ole kehittyneet tarpeeksi. Osaamispuutteet näkyvät hitaana etenemisenä opinnoissa, sekä matematiikassa että yleisesti. (Silius *et al.* 2010)

Osana Tampereen teknillisen yliopiston interventiota on kielentämisen hyödyntäminen osana matematiikan opetusta. Interventiossa tutkittiin, kuinka kielentäminen voi auttaa yliopistomatematiikan opiskelussa ja kuinka opiskelijat kokevat kielentämisen. Kokeilu toteutettiin insinöörimatematiikan ja matematiikan ensimmäisillä kursseilla. Osana kokeilua opiskelijat tekivät osana kursseja kielentämistehtäviä, joissa tarkoituksena oli antaa selitys ratkaisulle luonnollisella kielellä. Eri kurssien opiskelijat tekivät tehtäviä eri tahtiin kurssien aikana. Opiskelijoilta kerättiin palautetta kokeilun päätteeksi kyselylomakkeella, jossa oli sekä Likert-asteikollisia että avoimia kysymyksiä. (Silius *et al.* 2010)

Alustavien tulosten mukaan matematiikan opiskelijat suhtautuivat positiivisemmin kielentämistehtäviin kuin insinöörimatematiikan opiskelijat. Lisäksi tulokset viittaavat, että lahjakkaammat opiskelijat suhtautuivat positiivisemmin kielentämistä kohtaan. Syynä tähän voi olla, että opiskelijat, jotka pitivät itseään osaavampina ymmärtävät matematiikan olevan muutakin kuin pelkkää laskemista. Voi myös olla, että tehtävät olivat helpompia matematiikan opiskelijoille kuin insinöörimatematiikan opiskelijoille. Opiskelijat, jotka eivät luottaneet osaamiseensa, pitivät tehtäviä työläinä ja vaikeina, mutta suhtautuivat positiivisesti luonnollisen kielen käyttöön ratkaisuissa. Lisäksi luonnollisen kielen käytön koettiin auttavan ymmärtämään matemaattista ongelmaa sekä ratkaisemaan sen. Samoin luonnollisen kielen koettiin auttavan muita ymmärtämään ratkaisua. Saadun palautteen perusteella Tampereen teknillisellä yliopistolla kehitetään kielentämistehtäviä ja jatketaan sekä kokeilua että tutkimusta aihepiirin parissa. (Silius *et al.* 2010)

On erittäin mielenkiintoista, että kielentämisestä koetaan saatavan hyötyä ja sen nähdään auttavan sekä itseä että muita ymmärtämään ratkaisuja. Mutta samalla silti luonnollisella kielellä kirjoittamiseen suhtaudutaan negatiivisesti. Tämä on tietysti ymmärrettävää, kun matemaattisilla symboleilla esitettävät ratkaisut ovat varsin kompakteja ja luonnollisella kielellä kirjoitetun yksinkertaisenkin asian ilmaisu voi vaatia pitkän selityksen. Matemaattinen symbolikieli on kehittynyt tehokkaaseen ja lyhyeen ilmaisuun. Toisaalta voidaan taas miettiä, mikä osa tästä negatiivisesta suhtautumisesta johtuu motivaatiosta. Tärkeintä on kuitenkin, että kielentämistä hyödyntämällä opiskelijat kokivat saaneensa hyötyä ja ymmärtäneen sisältöjä paremmin.

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

5.1 Tutkimuskysymykset

Pro gradu -tutkielmassa haluttiin selvittää kielentämisen, todistamisen sekä pitkän matematiikan uuden opetussuunnitelman ja ylioppilaskirjoitusten kohtaamista. Lisäksi haluttiin luoda kielentämistä hyödyntäviä tehtäviä sähköiseen pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen. Tutkimuksessa selvitettiin ensin, miten kielentäminen ja todistaminen voidaan nähdä osana lukion pitkän matematiikan uutta opetussuunnitelmaa. Toisena selvitettiin, miten kielentämis- ja todistustehtäviä on ollut pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa. Kolmantena arvioitiin tehtävien soveltuvuutta tulevaan sähköisen ympäristön ylioppilaskokeeseen. Neljäntenä ja tärkeimpänä oli luoda kielentämistä hyödyntäviä todistustehtäviä, jotka pystytään toteuttamaan sähköisessä ympäristössä. Huomioitavaa oli lisäksi, että niihin pystytään vastaamaan asianmukaisesti.

Tutkimuksen tutkimuskysymykset muotoutuivat seuraavanlaisiksi:

1. Miten kielentäminen ja todistaminen näkyvät pitkän matematiikan uudessa opetussuunnitelmassa?
2. Miten kielentäminen ja todistaminen näkyvät pitkän matematiikan viimeisimmissä ylioppilaskokeissa?
3. Miten kielentämistä hyödyntävät todistustehtävät soveltuvat pitkän matematiikan sähköisiin ylioppilaskirjoituksiin?
4. Minkälaisia kielentämistä hyödyntäviä todistustehtäviä pitkän matematiikan sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa voitaisiin nähdä?

5.2 Kehittämistutkimus

Kehittämistutkimuksella on suhteelliset lyhyt historia. Ensimmäiset tutkimusartikkelit aiheesta julkaistiin 90-luvun alussa, jolloin menetelmä tunnettiin englanniksi nimellä design experiment. Nykyään menetelmä tunnetaan itsenäisesti englanniksi design-based research -nimellä. Suomeksi kehittämistutkimusta kutsutaan myös usein design-tutkimukseksi. Menetelmän lähtökohtana pidetään

Ann Brownin 1992 julkaisemaa artikkelia tutkijoiden haasteista yritettäessä käyttää iteratiivisia interventioita tutkittaessa ja kehitettäessä oppimista ja opettamista autenttisissa luokkatilanteissa. Kehittämistutkimus on vakiinnuttanut asemansa opetuksen kentällä viimeisen kahden vuosikymmenen aikana. (Pernaa 2013)

Opetuksen kehittäminen tutkimuspohjaisesti sekä tarve tuottaa opetuskentälle opettajien työtä tukevaa tietoa ovat olleet muovaamassa kehittämistutkimusta. Tästä käytännönläheisyydestä johtuen menetelmä on saanut osakseen kritiikkiä luotettavuudestaan ja pätevyydestään. Kehittämistutkimus on myös monitahoinen tutkimusmenetelmä, jonka takia sille ei myöskään voida esittää määritelmää, joka olisi yksiselitteinen. Kehittämistutkimus voidaan esimerkiksi määrittää metodologiaksi, jossa tavoitteena on kehittää systemaattisesti, joustavasti ja iteratiivisesti opetusta todellisissa tilanteissa. Tällöin tutkimukselle on ominaista jatkuva arviointi sekä sidosryhmien asiantuntijuuden hyödyntäminen kehittämisen yhteydessä. Kehittäminen siis pohjautuu olemassa olevaan teoriaan, mutta myös tuottaa uutta teoriaa. Ominaispiirteinä kehittämistutkimuksella on muutoksen tarpeesta syntyvä iteratiivinen kehittäminen, tuotoksen ja opetusta edistävän tiedon syntyminen kehittämisen seurauksena. Tieto voi olla oppiainekohtaista teoriaa, jolloin mahdollistetaan esimerkiksi tietyn käsitteen opettamiseen tarkoitettujen toimintamallien kehittäminen ja testaaminen. (Pernaa 2013)

Kehittämistutkimuksessa haetaan vastauksia kolmeen keskeiseen kysymykseen~~,~~ kehittämisen etenemisestä, kehittämisen tarpeista sekä mahdollisuuksista ja kehittämistyön lopputuotoksesta. Jokaiseen kysymykseen vastaaminen tuottaa erilaista tietoa. Kysymyksiin vastaaminen voi tuottaa kehittämispäämääräksi esimerkiksi kehittämistuotoksen, joka on ratkaisu ongelma-analyysissä löytyneisiin haasteisiin ja kehittämisprossin mahdollisuuksiin. Tuotos kehittyy iteratiivisesti tutkimusprosessin mukana ja tietämyksen syventyessä. Tällöin muodostunut teoria on esimerkkikysymyksen tapauksessa kontekstisidonnaisia toimintaa ja ajattelua ohjaavia malleja, joita voivat olla opetusmateriaalit tai tietylle ryhmälle suunniteltu kurssi. (Pernaa 2013)

Toteutuksessaan kehittämistutkimus pyrkii hyödyntämään tutkimukseen osallistujia kehittämisprosessissa, eikä pidä näitä vain koehenkilöinä. Tämän tyypin tutkimus alkaa aina ongelma-analyysillä. Ongelma-analyysissä selvitetään kehittämisen tarpeet, mahdollisuudet ja haasteet. Kehittämistarpeen tulee nousta ongelmasta ja tarveanalyysi voi olla empiirinen, teoreettinen tai näitä yhdistelevä. Ongelma-analyysi selkeyttää kehittämistavoitteita ja siitä seuraa kehittämissuunnitelma, joka ohjaa tutkimusta, mutta joka myös elää tutkimuksen edetessä. Toteutus koostuu käytännössä tarvittavan mittakaavan kehittämissykleistä, jotka sisältävät kehittämis-, arviointi- ja raportointivaiheista. Tutkimus etenee iteratiivisesti kokeellisten ja teoreettisten vaiheiden kautta. Lisäksi ongelma-analyysiä syvennetään tutkimuksen edetessä. (Pernaa 2013) Jos tutkimus toteutetaan esimerkiksi pro gradu -tutkielmassa yhdellä kehittämissyklillä, on ensimmäisenä vuorossa teoreettinen ongelma-analyysi, jota seuraa empiirinen ongelma-analyysi ja tämän jälkeen kehittämisvaihe sekä raportointi. Jos tutkimusta ei ole toteutettu syklisesti, ei ole hyödynnetty menetelmän vahvuutta. Tällöin toteutus ei ole tieteellisesti pätevä tai luotettava. (Aksela & Pernaa 2013)

Kehittämistutkimuksen luotettavuutta kritisoidaan usein tutkimuskirjallisuudessa, koska menetelmälle ei esimerkiksi ole määritelty yhteneviä tutkimuskäytäntöjä. Lisäksi laajojen kehittämistutkimusten koordinointiin, teoriapohjan vahvistamiseen sekä tutkimusmenetelmien standardointiin liittyy haasteita. Perinteiset luotettavuuden analysoinnin työkalut, validiteetti ja reliabiliteetti, tai laadullisen tutkimuksen luotettavuustarkastelun uskottavuus, siirrettävyys, luotettavuus ja varmuus sekä vahvistettavuus eivät myöskään sovellu kehittämistutkimuksen luotettavuuden analysointiin. Kehittämistutkimus on tästä syystä luotettavuusanalyysin näkökulmasta haasteellinen tutkimusmenetelmä. Design-Based Research Collectiven laadukkaan kehittämistutkimuksen kriteeristönä ovat kehittämisen kokonaisvaltaisuus, syklittäinen ja jatkuva kehittäminen sekä arviointi, kehittämisen pyrkimys teorioihin, testaus autenttisissa olosuhteissa ja tarkka dokumentointi. Näiden lisäksi avoimuus ja tutkimuksen mielekäs rajaaminen ovat keskeisessä osassa, unohtamatta kokonaisvaltaista ongelma-analyysiä. (Pernaa 2013)

Raportoitaessa kehittämistutkimuksesta, ei voida noudattaa perinteisen tieteellisen julkaisun sisältöä sellaisenaan. Vaihtoehtona on tällöin kehittämiskuvaus, joka kuvaa koko kehittämisprosessin kokonaisvaltaisesti. Kehittämiskuvauksessa voidaan esimerkiksi kuvata kehittämisolosuhteita, kehittämispäätöksiä, kehittämistavoitteita tai arvioinnin tuloksia. Raportoinnissa voidaan kuvata myös tutkimusasetelmaa, syklittäisiä kehittämiskuvauksia ja kehittämistuloksia, ja pohtia kehittämisen mahdollisuuksia sekä haasteita. Olennaista on myös pohtia, kuinka kehitetty innovaatio saadaan käyttöön. (Pernaa 2013)

5.3 Tutkimusasetelma

Tutkimus oli asetelmaltaan kehittämistutkimus eli design-based study, joka koostui neljästä vaiheesta. Tarpeena tutkimuksella oli esittää uudenlaisia kielentämistä hyödyntäviä todistustehtäviä pitkän matematiikan sähköisiin ylioppilaskirjoituksiin. Sähköistyminen tarjoaa osaltaan mahdollisuuden uudistaa koetta ja nyt haluttiin selvittää kielentämisen ja todistamisen mahdollisuuksia. Todistaminen on ollut sen perinteisessä merkityksessä vähäisessä asemassa ylioppilaskirjoituksissa. Ajankohta toimii mahdollistajana, koska sähköiseen matematiikan ylioppilaskokeeseen on vajaa kaksi vuotta aikaa, joten vaikuttamiseen on tästä näkökulmasta mahdollisuuksia. Sähköisen ylioppilaskokeen tulo mahdollistaa uudenlaisten tehtävien luonnostelun tätä tulevaa koetyyppiä varten. Haastavaksi tuotoksien käyttöönoton tekee luonnollisesti se, että kohteena eivät ole niinkään opettajat, vaan ylioppilaskirjoitukset ja sitä hallinnoiva organisaatio Ylioppilastutkintolautakunta. Vaikka tehtävät toteutetaankin ylioppilaskirjoituksia ajatellen, ei tämä luonnollisestikaan estä niiden hyödyntämistä opetuksessa ja esimerkiksi Abitilla toteutetuissa sähköisissä kokeissa.

Tutkimuksen ensimmäisessä vaiheessa tutustuttiin kielentämiseen, todistamiseen sekä opetussuunnitelmaan ja ylioppilaskirjoituksiin. Toisessa vaiheessa kehitettiin ensimmäiset versiot kielentämistä hyödyntävistä todistustehtävistä. Kolmantena tehtävistä kerättiin palautetta edellisenä lukuvuotena matematiikkaa, fysiikkaa, kemiaa ja tietotekniikkaa Tampereen yliopiston normaalikoulussa auskultoineilta opetusharjoittelijoilta, joista osa jo toimii mainittujen aineiden opettajina. Viimeisessä vaiheessa kehitettyjä tehtäviä paranneltiin saadun palautteen perusteella. Tutkimuksessa toteutettiin yksi nelivaiheinen kehittämissykli.

Ajatukset tehtävien muodosta muuttuivat kahteen kertaa tutkimuksen edetessä. Ensin aiottiin tehdä jokaisesta kielentämistehtävätyypistä esimerkkitehtäviä. Toisessa muodossa päädyttiin tekemään jokaiselle kurssille kolme kielentämistehtävää, joista jokainen olisi ollut yhtä sähköisen ylioppilaskokeen tehtävätyyppiä varten. Kolmannessa ja viimeisessä muodossa päädyttiin lopulliseen muotoon. Näkökulmaksi valittiin kielentämistehtävätyyppien mielekäs yhdistely niin, että saadaan aikaiseksi monenlaisia tehtäviä jokaiseen sähköisen ylioppilaskokeen tehtävätyyppiin.

Ensimmäisessä vaiheessa käytiin tehtävien osalta läpi aiempia pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksia ja selvitettiin miten kielentäminen ja todistaminen on näkynyt niissä. Lisäksi pyrittiin kehittämään uusia kielentämistehtävätyyppejä, jotka sopisivat todistustehtäville. Kielentämistehtävätyyppejä löydettiin tässä vaiheessa kaksi uudenlaista. Tehtävätyyppejä on esitetty luvussa 4.2.3.

Toisessa vaiheessa näkyvyyden selvittämisen lisäksi käytiin läpi vanhaa Calculuksen kirjasarjaa todistamistehtävien osalta ja haettiin näin ajatuksia sekä linjaa tehtäville. Lisäksi todistustehtäväajatuksia haettiin muun muassa matematiikka-aiheisista YouTube-videoista ja verkkosivuilta. Tässä vaiheessa tehtäväajatuksia oli muodostunut 110 kappaletta. Tämän jälkeen tehtäväajatuksista jalostettiin kolme erilaista tehtävää, jotka sopivat sähköisen ylioppilaskokeen eri tehtävätyyppeihin ja sovitettiin nämä mielekkäisiin kielentämistehtävätyyppeihin. Sovituksen jälkeen edettiin kolmanteen vaiheeseen, jolloin pyydettiin palautetta aiemmin mainitulta ryhmältä. Ryhmältä pyydettiin palaute Google Formsin kyselyllä, jonka linkki toimitettiin vastaajille WhatsApp-mobiilisovelluksen keskusteluryhmän kautta. Kysely toimitettiin yhteensä 31 henkilölle, jotka olivat keskusteluryhmässä jäseninä ja palautteita kyselyyn pyydettiin kahden viikon kuluessa. Kysely löytyy tehtävineen liitteestä 1. Palautetta saatiin yhteensä 12 vastaajalta.

Viimeisessä vaiheessa kyselyn vastaukset otettiin talteen Google Formsin kyselystä. Kyselyjen yhteenvedot sekä avoimien kysymysten palautteet käytiin läpi ja näiden perusteella muokattiin tehtäviä, joihin oli pyydetty lomakkeella palautetta. Palautteesta tehtiin yhteenveto. Kyselyn avointen kysymysten vastauksista etsittiin lisäksi teemoja. Tämän jälkeen palautetta silmällä pitäen luotiin loput työssä esiteltävät tehtävät. Tehtävien kieliasu tarkistettiin vielä kertaalleen niiden luomisen jälkeen. Valmiit tehtävät esitellään luvussa 7.

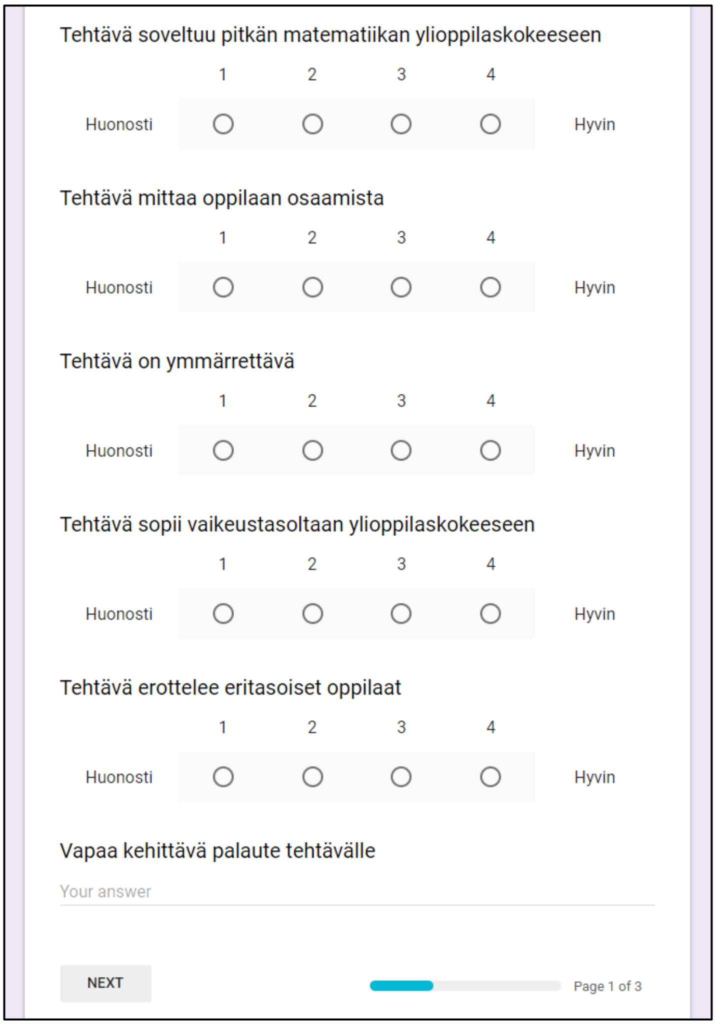
5.4 Analyysimenetelmät

Pääasiallisena analyysimenetelmänä tutkimuksessa oli sisältöanalyysi, jota hyödynnettiin kolmeen ensimmäiseen tutkimuskysymykseen. Menetelmällä haettiin eroja sekä yhtäläisyyksiä vertaamalla kielentämistä ja todistamista pitkän matematiikan opetussuunnitelmaan sekä pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksiin. Tutkittavat sisällöt olivat siis julkisia ja sähköisessä muodossa olevia tekstejä. Sisältöanalyysi tehdään teorialähtöisesti. Lisäksi perehdyttiin sähköisen koeympäristöön ja sähköiseen kokeeseen liittyviin määräykseen. Tietojen perusteella pyrittiin muodostamaan kuva siitä, miten kielentäminen ja todistaminen sopivat tulevaan sähköiseen kokeeseen.

Analyysissä keskityttiin uusimpaan lukion opetussuunnitelmaan, joka otettiin käyttöön 1.8.2016 sekä pitkän matematiikan kaksiosaisiin ylioppilaskirjoituksiin, joihin siirryttiin keväällä 2016. Pääasiallinen aineisto muodostui siis yhdestä opetussuunnitelmasta sekä neljästä viimeisimmästä pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta, keväästä 2016 alkaen. Opetussuunnitelmassa ja ylioppilaskokeessa keskitytään 10 pakolliseen pitkän matematiikan kurssiin, jotka koskettavat kaikkia pitkän matematiikan opiskelijoita. Kolmannen tutkimuskysymyksen kohdalla analysoitiin Abitti-ympäristön määrityksiä, sisältöjä ja sähköisestä matematiikan kokeesta annettuja tietoja. Sähköisen ympäristöön liittyvät tiedot löytyivät pääasiallisesti Abitti- ja Digabi-sivustoilta. Kokeen sisällössä kiinnitettiin erityisesti huomiota kokeen tehtävätyyppeihin.

5.5 Kehittämistutkimuksen lähtötaso

Kehittämistutkimuksessa hyödynnettiin mittarina kyselylomaketta. Kyselylomake rakennettiin niin, että alussa kysyttiin muutama taustatietokysymys. Tämän jälkeen jokaisesta kolmesta tehtävästä esitettiin samat sisältökysymykset. Kyselylomake löytyy kokonaisuudessaan liitteestä 1. Taustatietoina kysyttiin vastaajan pääaine sekä sukupuoli. Jokaisesta tehtävästä kysyttiin viisi Likertin asteikollista kysymystä, joiden vastausvaihtoehdot ovat neliportaisia. Kuudentena kysymyksenä tehtävistä pyydettiin avoimen kysymyksen muodossa kehittävää palautetta tehtävälle. Kuvassa 14 näkyvät tehtäväkohtaiset kysymykset. Likert-asteikollisten kysymysten vastausvaihtoehtojen ääripäät muodostivat termit huonosti ja hyvin. Neliportaisuuteen päädyttiin kysymyksissä, koska haluttiin vastaajan ottavan kantaa tehtävään joko puolesta tai vastaan.



KUVA 14. Kyselylomakkeen kysymykset.

Kysymyksillä haluttiin selvittää, miten tehtävien nähtiin soveltuvan ylioppilaskokeeseen, mittaavan kokelaan osaamista, erottelevan eritasoiset kokelaat sekä kuinka ymmärrettäviä tehtävät olivat ja sopivatko ne vaikeustasoltaan ylioppilaskokeeseen. Koska esitetyissä tehtävissä tähdättiin siihen, että ne voivat olla ylioppilaskokeessa, oli niiden koettu soveltuvuus siihen erittäin tärkeä selvitettävä kysymys. Lisäksi tehtävän tulee olla vaikeustasoltaan soveltuva kokeeseen, joten tehtävien koetusta vaikeustasosta kysyttiin myös mielipidettä. Koska ylioppilaskokeen taustalla on lukion opetussuunnitelmien perusteet, tulee tehtävien luonnollisesti mitata kokelaiden osaamista tästä näkökulmasta, joten tätäkin selvitettiin kysymyksissä. Tehtävien erottelevuutta kysyttäessä erottelevuus on sekä hyvä, että huono asia. Toisaalta erottelevuudella saadaan esiin eritasoiset oppilaat, mutta pitää myös varmistaa, että heikotkin oppilaat voivat saada kokeesta pisteitä. Kaikki tehtävät eivät voi olla erittäin vaikeita tai haastavia. Viimeinen ja ei yhtään vähemmän tärkeä kysymys oli tehtävän ymmärrettävyydestä, joka on syytä ottaa huomioon, kun tehtävät edustavat tyyppiä, johon kokelaat eivät ole pakosta usein törmänneet.

Erityisen tärkeänä lomakkeella pidettiin viimeistä kysymystä, jolla pyydettiin vapaata, mutta kehittävää palautetta tehtäväkohtaisesti. Palautteessa toivottiin nousevan parhaat kehitysideat tehtäville. Ongelmaksi avoimen kysymyksen kohdalla pelättiin sitä, että sen voi helposti sivuuttaa esimerkiksi kommentoimalla tyypilliseen tapaan ”ihan kiva”.

Kuvassa 15 esitetty kyselomakkeen ensimmäinen tehtävä, joka on sähköisen ylioppilaskokeen kysymystyyppiä 1. Tehtävätyypit on esitelty luvussa 2.4. Monivalintatehtävässä kokelaan on tarkoitus yhdistää väittämä sitä vastaavaan todistukseen. Kaikki monivalinnan vaihtoehdot ovat samasta aihepiiristä, jotta oikeita vaihtoehtoja ei voi löytää pelkästään aihepiirin perusteella. Toinen mahdollinen vaihtoehto monivalinnoille olisi jakaa tehtävää niin, että tehtävä olisi jaettu kahden aihepiirin kesken. Tällöin aihepiirit tunnistaessa olisi oikeita vaihtoehtoja väitettä kohtaan kolme kappaletta. Jos kuuteen vaihtoehtoon yhdistettäisiin yli kahden aihepiirin väittämiä, ei se olisi enää mielekäs.

1. Alla on kuusi lyhyttä todistusta(A)-(F) ja väittämää 1-6. Valitse alasvetovalikosta jokaiselle väittämälle sen oikeellisuuden todistava todistus. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.	2.	3.	4.	5.	6.

(A) $a, b, c \in \mathbb{N}$. Nyt $a + b + c = a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3(a + 1)$.

(B) $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ ja $b > 0$. Olkoon $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, jolloin $\frac{b}{ab} > \frac{a}{ab}$. Nyt $\frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab} > 0$, eli b>a.

(C) $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Olkoon $a < b$ ja $a \neq b \neq 0$ jolloin $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ja jos $c = \frac{a+b}{2}$, niin $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$.

(D) $a, b \in \mathbb{N}$. Nyt $(2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$.

(E) $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tällöin $b = 2c$ ja $a = 2c + 2$, jolloin $ab = 2c(2c + 2) = 4cc + 4c = 2(2c^2 + 2c)$.

(F) $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Olkoon $a = 2c + 1$ ja $b = 2d + 1$. Nyt $ab = (2c + 1)(2d + 1) = 4cd + 2c + 2d + 1 = 2(2cd + c + d) + 1$.

1. Kahden rationaaliluvun välistä löytyy aina ainakin yksi rationaaliluku.
2. Kahden mielivaltaisen parittoman luonnollisen luvun summa on aina parillinen.
3. Kahden peräkkäisen parillisen kokonaisluvun tulo on parillinen.
4. Kahden parittoman luonnollisen luvun tulo on pariton.
5. Positiivisille murtoluvuille pätee, että $a < b$, jos $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
6. Kolmen peräkkäisen luonnollisen luvun summa on aina jaollinen kolmella.

KUVA 15. Kyselylomakkeen ensimmäinen tehtävä (Hammack 2013, 118).

Kuvassa 16 on toisen kysymystyypin tehtävä. Tehtävä on jaettu neljään osaan, jotka ovat kahden tasoisia. A- ja c-osat tuottavat vähemmän pisteitä, kuin b- ja d-osioiden perustelut. Kysymyksessä testataan peruslaskutoimitusten hallintaa. Kysymys jaettiin neljään osioon, jotta helpompiin kohtiin uskalletaan vastata ja pyydetään syvemmät perustelut vasta erillisissä kohdissa. Tehtävä olisi voitu siis toteuttaa myös kaksikohtaisena.

7. **a.** Keijo on nähnyt todistuksen, jossa osoitetaan, että 0 = 1. Etsi alla esitetystä todistuksesta virhe. Perustelua ei tarvita.

Olkoon $a = b = 1$, jolloin

$ab = a^2$

$ab - b^2 = a^2 - b^2$

$b(a-b) = (a+b)(a-b)$

$b = (a+b)$

$0 = a = 1$

b. Esitä perustelu a-kohdassa tehdylle virheelle. Mitä virheestä seuraa?

c. Myös Petteri on nähnyt erikoisen todistuksen, jossa väitetään, että 1 = -1. Etsi alla esitetystä todistuksesta virhe. Perustelua ei tarvita.

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$

d. Esitä peruste c-kohdassa tehdylle virheelle.

KUVA 16. Kyselylomakkeen toinen tehtävä (Rouse Ball 2008, 21–23).

Kuvassa 17 on kolmas tehtävä kyselylomakkeelta. Kolmikon haastavin tehtävä, jossa formaali todistus tulee esittää geometrisesti, perustella todistuksen sisältö sekä antaa vaihtoehtoinen todistus. Pythagoraan lause on keskeistä geometrian sisältöä. Tehtävän c-kohdassa on myös käytetty todistasanaa, jolloin odotetaan kokelaalta tarkempaa ja formaalimpaa vastausta. Peruste todistamiseen liittyvien sanojen käyttöön nousee opetussuunnitelmasta, jossa Pythagoraan lauseesta puhuttiin lauseena, joka itsessään implikoi todistamisen sisältymisestä sisältöön. Tehtävissä ei tietoisesti ohjata vastaajaa johonkin tiettyyn ratkaisumalliin, vaan sen saa luonnollisesti päättää itse. Tärkeintä on, että vastauksesta käy tavalla tai toisella tarvittavat asiat ilmi. Tietysti selkeydestä ei ole vastauksessa haittaa.

8. Eukleides todisti Pythagoraan lauseen yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Todistus on esitetty alla:

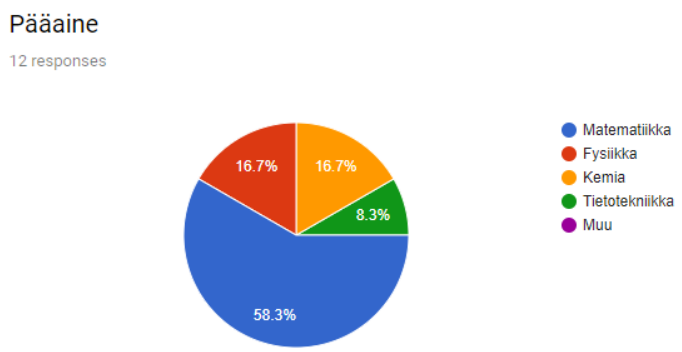
$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$ ja $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$. Nyt $AC^2 = BC \times CD$ ja $AB^2 = BC \times \mathrm{BD}$, jolloin $AB^2 + AC^2 = BC \times CD + BC \times \mathrm{BD} = BC \times (\mathrm{CD} + \mathrm{BD}) = BC^2 \leftrightarrow A^2 + B^2 = C^2$.■

- **a.** Esitä annettu todistus geometrisesti.
- **b.** Esitä perustelu a-kohdan todistukselle käyttämällä luonnollista kieltä.
- **c.** Esitä Pythagoraan lauseelle vaihtoehtoinen geometrinen todistus tai todista lause vektorien avulla.

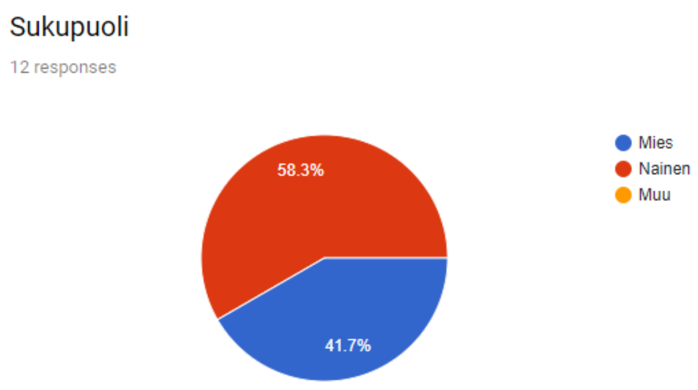
KUVA 17. Kyselylomakkeen kolmas tehtävä (Fei 2017).

5.6 Kyselylomakkeen vastaukset

Kyselylomakkeella saatiin palautetta tehtäviin 12 vastaajalta. Kaikkiin Likert-asteikollisiin kysymyksiin saatiin kaikilta kyselyyn vastanneilta vastaukset, jolloin näiden otos on mainittu 12 vastaajaa. Avoimiin kysymyksiin saatiin 6–8 vastausta. Kuviossa 1 on esitetty vastaajien pääaineet ja kuviossa 2 vastaajien sukupuolijakauma. Kysely lähetettiin 31 vastaajalle, joten vastausprosentiksi muodostui 38.7% Matematiikan pääaineopiskelijoita vastaajista oli 58,3%. Vastaavasti naisia oli myös 58,3% vastaajista. Tehtävät joihin pyydettiin tässä palautetta löytyvät luvusta 5.5.



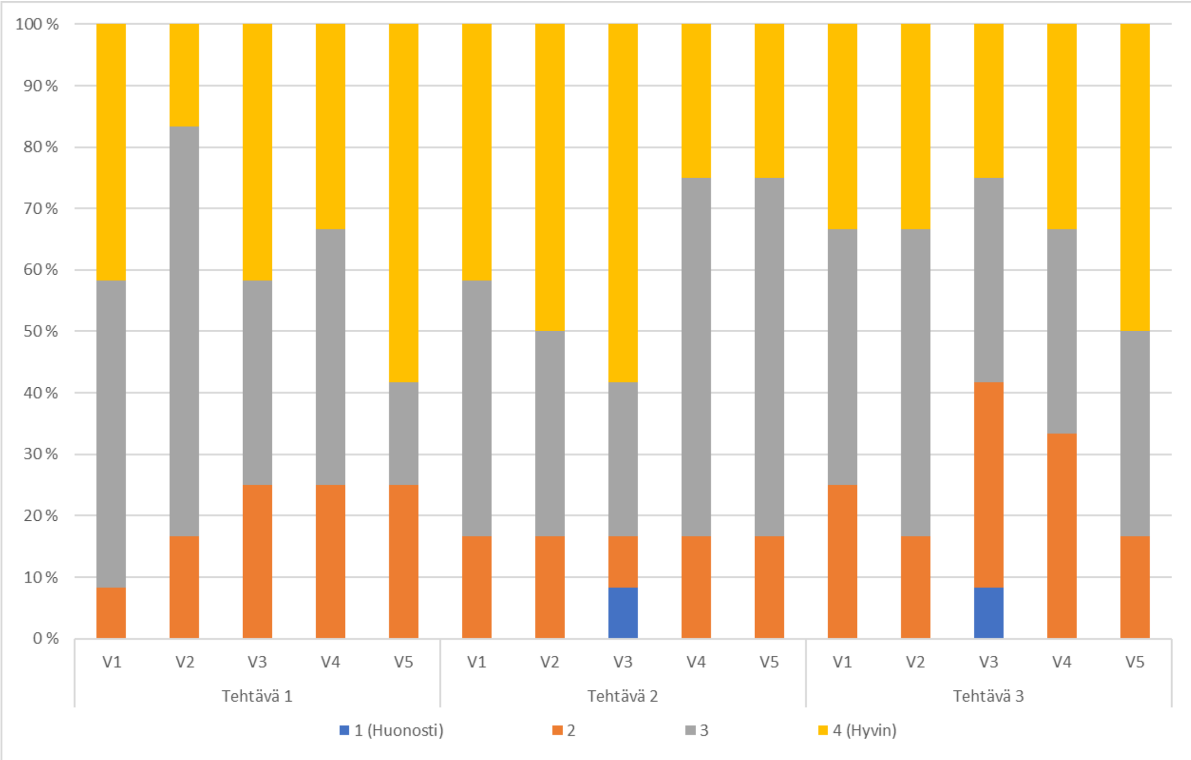
KUVIO 1. Vastaajien pääaine (N = 12).



KUVIO 2. Vastaajien sukupuoli (N = 12).

Kuviossa 3 on esitetty tehtäväkohtaisesti vastausten jakautuminen väittämittäin. Jokaisessa väittämässä oli neljä vastausvaihtoehtoa, jossa 1 oli ”Huonosti” ja 4 ”Hyvin”. Kuviossa 3 jokaista tehtävää koskevat väittämät ja jakaumat on esitetty ryhmiteltynä tehtävittäin. Esitetyt väittämät tehtäville olivat:

- Tehtävä soveltuu pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen (V1)
- Tehtävä mittaa oppilaan osaamista (V2)
- Tehtävä on ymmärrettävä (V3)
- Tehtävä sopii vaikeustasoltaan ylioppilaskokeeseen (V4)
- Tehtävä erottelee eritasoiset oppilaat (V5).



KUVIO 3. Likert-asteikollisten kysymysten yhteenveto (N = 12).

Kuvion 3 vastauksista (N = 12) nähdään, että toiseen tehtävään suhtauduttiin positiivisimmin ja tehtävään kolme vähiten positiivisesti. Yleisesti ottaen kaikki tehtävät saivat suhteellisen positiivisen vastaanoton. 11 vastaajaa suhtautui positiivisesti ensimmäisen tehtävän soveltuvuuteen pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksiin. Toisen tehtävä kohdalla lukumäärä oli 10 ja kolmannen kohdalla 9. Vastaavasti vastausten perusteella väittämässä 2 suhtauduttiin kaikissa tehtävissä positiivisesti siihen, että tehtävä mittaa osaamista. Kaikkien tehtävien kohdalla 10 vastaajaa oli sitä mieltä, että tehtävät mittaavat osaamista vähintäänkin kohtalaisen hyvin.

Kolmannen väittämän (N = 12) vastauksissa nähdään eniten hajontaa. Ensimmäisen tehtävän kohdalla positiivisia vastauksia saatiin 9, toisessa tehtävässä 10 ja kolmannessa vain 7 kappaletta. Huomattavaa kolmannen väittämän kohdalla on, että ainoastaan niissä saatiin vastauksia vastausvaihtoehtoon 1 eli ”Huonosti”. Yksittäisten vastaajien mielestä toinen ja kolmas tehtävä olivat siis huonosti ymmärrettäviä. Vastaajista 5 piti kolmatta tehtävää vähintäänkin jossain määrin huonosti ymmärrettävänä. Samalla toisen tehtävän kohdalla kuitenkin 10 vastaaja piti tehtävää hyvin ymmärrettävänä.

Neljännen väittämän (N = 12) kohdalla nähdään myös kolmannessa tehtävässä, että vain 8 vastaajaa piti kyseistä tehtävää vaikeustasolta sopivana ylioppilaskokeeseen. Viidennestä väittämästä (N = 12) nähdään kaikkien tehtävien kohdalla, että niiden nähtiin erottelevan eritasoisia oppilaita. Ensimmäisen tehtävän kohdalla positiivisia vastauksia oli 9, toisen ja kolmannen tehtävän kohdalla 10 kappaletta. Erityisesti 7 vastaajaa piti ensimmäistä tehtävää hyvin erottelevana.

Avoimista tehtävistä nousi esiin mielenkiintoisia palautteita tehtävistä, niiden soveltuvuudesta sekä kehittämiskohdista. Teemoina avoimissa palautteissa kaikista tehtävistä nousivat esiin tehtävien vaihtelevuus ja kekseliäisyys, todistamisen esiintyminen, erottelevuus mutta samalla huoli heikommista opiskelijoista ja näiden säikäyttäminen, tarve selventää tehtäviä, ja ajattelu sekä ymmärtäminen.

Tehtävän 1 (N = 6) avoimissa palautteissa tehtävälle ehdotettiin uudelleenjärjestelyä niin, että väittämät olisivat ennen matemaattisen symbolikielen todistuksia, jolloin tehtävä ei säikäyttäisi heikompia oppilaita niin pahasti. Tehtävän nähtiin yhdistelevän helppoa monivalintaa sekä yleensä vaikeana pidettyä todistamista. Lisäksi tehtävää pidettiin suhteellisen vaikeana ja erottelevana, eikä sitä nähty aivan perustehtävänä, vaan keskivaikeana. Esiin nousi myös erityisesti huoli heikommista oppilaista. Lisäksi monivalintatehtävien kykyä mitata osaamista kyseenalaistettiin.

Tehtävän 2 (N = 6) avoimissa palautteissa nousi esiin toisaalta virheen löytämisen nopeus, mutta myös nippelitiedon tarve. Tehtävässä voisi olla useampi todistus. Ratkaisun koettiin myös vaativan hienosti ymmärtämistä, vaikka tehtävä oli osin kielellisesti epäselvä. Ihmetystä herätti myös imaginääriluvun esiintyminen. Esiin nostettiin lisäksi tarkkuus laskutoimitusten kanssa, miten on aina varoiteltu esimerkiksi neliöjuuren ottamisesta.

Tehtävän 3 (N = 8) avoimissa palautteissa tehtävä koettiin erittäin haastavana, joka kuuluisi kokeen viimeisten tehtävien joukkoon, mahdollisesti ainoana näin vaikeana. Pitkä tehtävä, joka vaatii kokelaalta keskittymistä ja jonka toisaalta laudatur-arvosanan kirjoittava opiskelija todennäköisesti jättää välistä. Tehtävä myös yhdistelee matematiikan kurssien osa-alueita, jotka ovat usein opiskelijoille vaikeita. Palautteessa ehdotettiin myös tehtävän selventämistä, erityisesti annetun todistuksen osalta. Vaikeudesta huolimatta tehtävää pidettiin hyvänä ja tervetulleena, todistustehtäviä kaivattiin matematiikkaan ja opetukseen lisää. Jos symbolista kieltä osaa lukea, alkuosasta voi selvitä helpollakin. Huolena esitettiin myös teknologian parissa kuluva aika, kun vastausta tehdään.

6 ANALYYSI JA LÖYDÖKSET

6.1 Pitkän matematiikan uudesta opetussuunnitelmasta

Yksinkertaisuuden vuoksi tässä luvussa käytetään lukion opetussuunnitelman perusteet 2015:sta lyhennettä LOPS2015. Tässä luvussa selvitetään, kuinka todistaminen ja kielentäminen näkyvät tuoreimmassa pitkän matematiikan opetussuunnitelmassa. Kielentämisen kohdalla katsottiin miten matematiikan kirjallisen ja suullisen ilmaisun eri kielet esiintyivät opetussuunnitelmassa.

Kielentäminen

Opetussuunnitelmassa matematiikan yleisistä tavoitteista löytyi muutamia viittauksia kielentämiseen. Viittauksista näemme, että opinnoissa on tarkoitus oppia hyödyntämään ensinnäkin kirjallista ja suullista kieltä. Toisekseen nostetaan esiin perustelemisen tarve, jota luonnollisesti tehdään matemaattisen ilmaisun eri kielten avulla. Perustelujen lisäksi mainitaan kuvakielen käyttö ajattelun tukena sekä tärkeimpänä kohtana siirtyminen matemaattisen tiedon esitysmuotojen välillä. Ei siis riitä, että asiat pystytään ilmaisemaan pelkällä matemaattisella symbolikielellä.

> *…opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä...* (Opetushallitus 2015, 142)
>
> *…herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä* (Opetushallitus 2015, 142).
>
> *Opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen* (Opetushallitus 2015, 142).

Matematiikan yleisestä arviointiosiosta löytyi myös yksittäinen viittaus kielentämiseen, jossa mainitaan täsmällisyys ja johdonmukaisuus osana perustelemista. Perustelu liittyy tietysti eri matemaattisen ilmaisun kieliin, joita opettaja pystyy arvioimaan luokkahuonekeskusteluissa, tuotoksissa ja kokeissa.

> *Arvioinnissa kiinnitetään huomiota… …täsmälliseen ja johdonmukaiseen perustelemiseen* (Opetushallitus 2015, 142).

Pitkän matematiikkaa koskevista tavoitteista nähtiin matemaattisen symbolikielen käyttötarve sekä ymmärtämisen keskeisyys. Symbolikielen hallinta edellyttää siirtymistä luonnolliseen kieleen ja sisällön tulkintaa. Lisäksi osiossa nostettiin taas esiin perustelujen tekemisen tarve. Kielellisyys ja eri matemaattisten kielien hyödyntäminen näkyvät hyvin sitaateissa.

> *Ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta…* (Opetushallitus 2015, 144).

> *…laatimaan perusteluja…* (Opetushallitus 2015, 144).

Siinä missä kielentäminen nousi usein yleisissä tavoitteissa ja arvioinnissa esiin, oli näkyvyys vähäistä yksittäisten kurssien sisällöissä. Näistä osioista tietysti vaikutus heijastuu kuitenkin kaikkiin kursseihin. Seuraavat sitaatit liittyvät kursseihin MAA3 ja MAA11. Molemmissa sitaateissa näkyy vaatimus luonnollisen kielen käytölle. Ei riitä, että jotain osaa, vaan asiaa pitää pystyä avaamaan sekä perustelemaan muille.

> *harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita* (Opetushallitus 2015, 145).

> *osaa tutkia ja selittää, kuinka algoritmit toimivat* (Opetushallitus 2015, 149).

Kielentäminen näkyi LOPS2015:sta selvästi, koko pitkää matematiikkaa läpileikkaavana osana. Pelkkä laskutaito ei riitä, eri ilmaisumuotoja pitää osata hyödyntää sulavasti, pystyen myös argumentoimaan tehtyjä valintojaan.

Todistaminen

Todistamisen kohdalla käytiin samalla tavalla läpi kuin kielentämisen osuus. Todistaminen näkyi mielenkiintoisesti käytännössä kolmena kokonaisuutena, rivien välissä yleisissä kuvauksissa, geometrian kurssin sisällöissä sekä lukuteorian ja todistamisen -kurssin sisällöissä. Lisäksi todistamiseen liittyviä sanoja ei esiintynyt kuvauksissa vasta kuin MAA11-kurssin sisällöissä.

Yleisissä sisällöissä jouduttiin kaivamaan todistamista esiin rivien välistä, koska sitä ei suoraan missään kohtaa mainittu. Jos puhutaan matematiikan perusideoista, ei todistamista luonnollisesti voida sivuuttaa, kuten tuotiin esiin luvussa 3. Jos halutaan puhua matematiikasta noteeraamatta todistamista, rajataan matematiikka pelkäksi laskennoksi. Sitaattien sisältöjen perusteella siis todistamisen pitäisi olla osa opetusta ja sen merkitys matematiikalle tulisi tuoda ilmi. Todistamisen merkityksellisyys korostuu myös viimeisessä sitaatissa, joka yhdistyy kappaleen 4.2.4. sisältöön, jossa huomattiin yliopistomatematiikan ja lukiomatematiikan aukko. Aukkoa ei kurota umpeen ainakaan sillä, että todistamisesta ei puhuta ja sitä ei integroida opetukseen.

> *Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija… matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin…* (Opetushallitus 2015, 142).
>
> *…tutustuttamalla hänet matematiikan… …ainutlaatuiseen ja kiehtovaan olemukseen tieteenalana* (Opetushallitus 2015, 143).
>
> *antaa opiskelijalle ammatillisten ja korkeakouluopintojen edellyttämät matemaattiset valmiudet* (Opetushallitus 2015, 144).

Seuraavana todistamista nähtiin vasta geometrian kurssin kohdalla. Geometrian sisältöön, kun on aiemmin kuulunut vahvasti klassiset geometriset todistukset. Mielenkiintoista sitaateissa on erityisesti se, että todistaminen sanaa ei mainita sanallakaan, mutta puhutaan lauseista. Kappaleessa 3.5. esitellessä lauseen määritelmää, todettiin, että lauseeseen liittyy kiinteästi aina todistaminen. Kun opetussuunnitelmassa puhuttiin lauseista, ei voida myöskään jättää käymättä läpi todistuksiakaan. Voidaan myös miettiä, olisiko kahden viimeisen sitaatin klassisten lauseiden todistaminen osattava, ainakin todistamisajattelun näkökulmasta. Todistamien osana opetusta kytkisi sisällöt myös syvemmin matematiikan rakenteeseen, nämä annetut tosiasiat nimeltä lauseet eivät ole tuulesta temmattuja.

> *harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita* (Opetushallitus 2015, 145).
>
> *osaa ratkaista geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi… …Pythagoraan lausetta* (Opetushallitus 2015 145).
>
> *sini- ja kosinilause* (Opetushallitus 2015, 145).

Todistaminen mainittiin sanana ensimmäistä kertaa kurssin MAA11-kohdalla opetussuunnitelmassa. Kurssiin on sisällytetty kaikki todistamisen käsittely lukio-opetuksessa. Seuraavaan sitaattiin on listattu kaikki kurssia koskettava todistusmaininnat, joita oli yhteensä kuusi kappaletta. Osiossa on neljä mainintaa todistamisesta, yksi lauseviittaus sekä viittaus todistamisessa ja lauselogiikassa käytettäviin konnektiiveihin ja totuusarvoihin. Kokonaisuudesta nähdään selvästi, että opiskelijalle on tarkoitus antaa työkalut todistamisen alkeisiin ja siitä annetaan hyvä peruskuva. Opetussuunnitelman sisällöistä löytyi maininta keskeisimmistä ja yleisimmin käytetyistä todistustyypeistä. Kurssi avaa porttia kohti formaalia todistamista:

perehtyy logiikan alkeisiin ja tutustuu todistusperiaatteisiin sekä harjoittelee todistamista

konnektiivit ja totuusarvot

geometrinen todistaminen

suora, käänteinen ja ristiriitatodistus

induktiotodistus

aritmetiikan peruslause (Opetushallitus 2015, 149).

Todistaminen näkyy LOPS2015:sta yllättävän pienessä asemassa, oli mielenkiintoista nähdä, että todistamiseen liittyviä sanoja esiintyi käytännössä vain yhden kurssin sisällöissä. Tämä muodostaa mielenkiintoisen ristiriidan luvussa 3.4. löydettyyn kansainväliseen konsensukseen todistamisen paikasta opetussuunnitelmissa. LOPS2015:sta tietysti oli nähtävissä todistaminen rivien välissä esimerkiksi yleisissä matematiikan kuvauksissa, mutta suoraan sitä ei mainita.

6.2 Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtävistä

Tässä luvussa selvitetään kielentämisen ja todistamisen näkyvyyttä kaksiosaisissa pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa. Tarkastelussa oli siis neljä edellistä ylioppilaskoetta. Kaksiosainen koe toimii porttina sähköiseen ylioppilaskokeeseen.

Kielentäminen on suhteellisen tuore tuttavuus ylioppilaskirjoituksissa. Kielentämistehtäviä löydettiin viisi kappaletta ja ne sijoittuivat kolmeen eri pitkän matematiikan kokeeseen. Taulukossa 1 on esitetty löydetyt tehtävät. Ensimmäisen kerran kielentämistehtävä nähtiin syksyn 2016 pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa. Taulukosta huomataan, että kokeen alkuosaan sijoittuvat tehtävät hyödynsivät yhtä kielentämistehtävätyyppiä, kun loppupään tehtävät taas hyödynsivät useampaa. Kymmenennet tehtävät ovat luonnollisesti myös haastavampia. Tehtävissä yksi ja kaksi on luotettu monivalintatehtäviin, joissa vastaajan tuottaminen on minimoitu. Vastaus ilmoitetaan yhdistämällä esimerkiksi väitettä vastaava kirjain sitä vastaavan kaavan numeroon. Erityistä alkupään kielentämistehtävissä oli myös se, että täsmälleen samaa tehtävää on käytetty myös lyhyen matematiikan kokeissa. Tehtävän ajatuksena näyttää siis olleen tarjota helppo tehtävä, joilla heikommatkin oppilaat pääsevät kokeessa alkuun. Tehtävään vastaavien oppilaiden osaamistason skaala on valtava ja tehtävän pitää sopia tällöin kaikille.

TAULUKKO 1. Kielentämistehtävä kaksiosaisessa ylioppilaskokeessa.

Koe	Tehtävänumero	Kielentämistehtävätyyppi
Syksy 2016	Tehtävä 1	koodinvaihtotehtävä
Kevät 2017	Tehtävä 2	koodinvaihtotehtävä
Kevät 2017	Tehtävä 10	virheenetsintätehtävä, ratkaisun argumentointi
Syksy 2017	Tehtävä 2	ratkaisun järjestäminen
Syksy 2017	Tehtävä 10	virheenetsintä, ratkaisusta tehtävä, ratkaisun argumentointi

Kaksiosaista pitkän matematiikan koetta tarkastellessa nähdään, että kielentäminen on tullut jäädäkseen. Syksyllä 2016 kielentäminen teki ensi esiintymisensä kokeessa ja tämän jälkeen seuraavissa kokeissa se on ollut edustettuna kahdessa tehtävässä per koe. Tehtävät tuntuvat lisäksi positiiviselta vaihtelulta ja näyttävät ehkä, mitä sähköiseltä kokeelta on odotettavissa.

Todistaminen omaa pitkän historian matematiikan ylioppilaskirjoituksissa. Vaikka tässä työssä keskitytään tarkastelemaan kaksiosaisen kokeen aikakautta, haluttiin tarkastaa myös todistamisen näkymistä 2000-luvun ylioppilaskokeissa. Taulukossa 2 on esitetty, kuinka monesti todista-, todistaminen-, todistus-sanoja on esiintynyt pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa sekä kuinka monta tehtävää nämä sanat ovat kattaneet. Huomattavaa tarkastelussa oli, että syksyn 2000 kokeen jälkeen vuonna 2008 käytettiin vasta seuraavan kerran mainittuja sanoja. Vastaavasti neljään kaksiosaiseen kokeeseen on mahtunut vain kerran mainittuja sanoja. Syksyn 2017 kokeessa mukana oli yksi todistustehtävä.

TAULUKKO 2. Todistamiseen liittyvien sanojen esiintyminen 2000-luvun ylioppilaskokeissa.

Koe	S2000	S2008	S2011	K2012	S2013	S2014	K2015	S2017
Tehtäviä	1	1	2	1	1	1	1	1
Sanoja	2	1	2	1	1	1	1	3

Koska todistamiseen liittyviä sanoja käytettiin katseluvälillä erittäin vähän, lähdettiin seuraavaksi selvittämään, miten todistamisajatteluun viittaavia sanoja osoita, näytä, esitä ja perustele näkyi kaksiosaisissa kokeissa. Löydökset on esitelty taulukossa 3. Heti mielenkiintoinen huomio on, että sanoja esiintyi joka kokeessa neljässä tehtävässä, samoissa tehtävissä siis toistui useampaa mainittua sanaa. Lisäksi esitä-sanaa ei esiintynyt yhdessäkään mainitussa kokeessa, sanaa on esiintynyt aiemmin 2000-luvun kokeissa, tosin harvoin.

TAULUKKO 3. Todistamisajatteluun viittaavien sanojen esiintyminen kaksiosaisissa ylioppilaskokeissa.

Koe	Osoita	Perustele	Pätee	Tehtäviä
K2016	4	1		4
S2016	5			4
K2017	1		3	4
S2017	3	1	3	4

Ylioppilaskokeisiin tutustuessa huomattiin, kuinka vähän todistamistehtäviä esiintyy kokeissa, yhdeksän kappaletta 34 kokeessa. Todistustehtävään törmäämisen todennäköisyys kokeessa on siis vain vajaa 26,5% koko 2000-lukua tarkastellessa. Neljään kaksiosaiseen kokeeseen todistamistehtävä oli osunut kertaalleen. Todistamisajatteluun nojaavia tehtäviä kaksiosaisista kokeista löydettiin merkittävästi enemmän, näitä on ollut viimeisessä neljässä ylioppilaskokeessa tasaiset neljä kappaletta per kerta, joka vastaa noin 31% tehtävistä. Kaksiosaisissa kokeissa on ollut aina kaiken kaikkiaan 13 tehtävää. Todistaminen näkyy siis erittäin heikosti kirjoituksissa, mutta todistamisajattelu on tasaisen varmasti kokeissa läsnä.

6.3 Sähköisen ylioppilaskirjoitusten ympäristö

Tässä kappaleessa selvitetään kielentämistä hyödyntävien todistustehtävien soveltuvuutta sähköisiin ylioppilaskirjoituksiin. Luvussa 2.4. käytiin läpi sähköisten ylioppilaskirjoitusten teknistä ympäristöä ja sähköiseen ylioppilaskokeeseen liittyviä sisältöjä. Tutkimuskysymykseen liittyy keskeisesti kaksi osa-aluetta, jotka vaativat erillistä tarkastelua. Osa-alueet ovat sähköisen ylioppilaskokeen tehtävätyypit sekä ympäristön raamit. Mielenkiintoinen lisähuomio kaksi-osaista koetta ajatellen on se, että enää kokeessa ei voi taktikoida ja ottaa 10:tä perustehtävää laskettavakseen. Nykyisessä muodossa koe pakottaa tasokkaammankin opiskelijan tekemään haastavampia tehtäviä. On mielenkiintoista nähdä, tuleeko tähän muutoksia sähköisessä kokeessa. Vuodelle 2019 kaavaillun muutoksen jälkeen tiedetään asiasta varmasti lisää.

Sähköisen ylioppilaskirjoitusten ympäristö Abitti sai keväällä osakseen kaavaeditorin, jolla pystyy muutamia puutteita lukuun ottamatta tuottamaan matemaattisia merkintöjä. Editorin puuttuminen oli aiemmin suurin puute todistamistehtäviä ajatellen, koska vastausikkunassa itsessään ei pystynyt tuottamaan tarvittavia merkkejä ja tuottamiseen olisi tarvinnut käyttää esimerkiksi LibreOfficen työkaluja. Tällä hetkellä on siis teknisesti mahdollista vastata todistustehtäviin, myös formaalissa mielessä. Kielentämisen näkökulmasta puute ei ollut rajoittava tekijä. Kysymysmerkiksi jää tosin edelleen editorin lopullinen muoto, nykyisellään editorista löytyy kuitenkin lauselogiikan ja todistamisen kaipaamat merkistöt.

Jää myös nähtäväksi, tuleeko ympäristöön vielä uusia tehtävätyyppejä ennen ensimmäistä sähköistä matematiikan koetta. Kuten luvussa 2.4. mainittiin, ympäristö päivittyy jatkuvasti. Yksi kysymysmerkki ympäristössä on sovellusversiot, joista ei näytetä ilmoittavan missään, mutta sovellusversiot pyritään pitämään mahdollisimman ajantasaisina. Toinen tarkasteltava asia sähköisen ympäristön osalta ovat sen mahdollistamat materiaalit. Ympäristö mahdollistaa monenlaisia materiaaleja ja niiden hyödyntämismahdollisuudet avautuvat varmasti ajan kuluessa. Näidenkin voidaan katsoa toimivan ennemminkin mahdollistajina kuin rajoittajina. Yleisesti matematiikan näkökulmasta ne tarjoavat varmasti lisämahdollisuuksia tehtäviin, mutta todistamisen näkökulmasta niille ei löydy varmaankaan niin paljon käyttöä. Formaaleissa todistuksissa käytetään harvemmin aineistoja, mutta todistamisajattelua hyödyntävissä tehtävissä hyödyntäminen on todennäköisempää.

Toinen mainittu selvitettävä kokonaisuus oli sähköisen ylioppilaskokeen määräykset ja erityisesti tehtävätyypit. Kuten luvussa 2.4. mainittiin, matematiikan kokeessa tehtävätyyppejä on kolmea. Näistä valinta- ja yhdistely, sekä tuottamistehtäviä on jo nähty kaksiosaisessa kokeessa, mutta monipuolisimmat tehtävät nähdään varmaankin vasta sähköisessä kokeessa. Koska symbolinen laskenta vie huomiota pois mekaaniselta laskemiselta, tulee tehtävien kehittyä vastaamaan haasteeseen. Symbolisen laskennan osalta on mainittu, että vaikeustaso tulee tyypin 3 tehtävissä lisääntymään. Kielentäminen ja todistaminen mahdollistavat ehdottomasti tehtäviä ja tehtävätyyppejä, joita symbolinen laskenta ei karsi kokeesta pois. Seuraavassa luvussa esitetään tehtäviä, jotka on muodostettu tätä ajatellen. Kielentäminen mahdollistaa esimerkiksi yksinkertaisia tehtäviä, joissa ei vaadita laskemista, mutta kuitenkin matemaattisen osaamisen osa-alueen hallintaa, kuten käsitteellistä ymmärtämistä. Tietysti kokeen kaksiosaisuus myös vaikuttaa siihen, että symbolista laskentaa ei aina ole käytettävissä. Tämän varaan pystytään rakentamaan myös monipuolisesti tehtäviä. Tyypin 3 tehtävät tuovat varmasti kokeeseen erottuvimmat tehtävät. Näissä voidaan hyödyntää erilaisia aineistoja luovasti.

Luvun 6.2. perusteella nähdään myös kielentäminen ja todistamisajattelu ovat löytäneet kaksiosaisessa kokeessa paikkansa, vaikka todistaminen itsessään on marginaalisessa asemassa. Näitä osa-alueita hyödyntävien tehtävien esiintyminen tasaiseen tahtiin kertoo, että niihin on myös kokeen tekijän puolelta uskoa. Koska sähköinen ylioppilaskoe on ennemminkin mahdollistaja, ei ole syytä, miksi nämä tehtävätyypit putoaisivat pois. Seuraavassa luvussa esitellään, miten kielentämisen ja todistamisajattelun yhdistäminen mahdollistaa vielä uudemman tyyppisiä ja potentiaalisia tehtäviä.

7 MUODOSTETUT KIELENTÄMISTODISTUSTEHTÄVÄT

Tässä kappaleessa esitellään tehtävät, joita on kehitetty eteenpäin luvun 5.6. palautteen perusteella. Tehtävät hyödyntävät kielentämistä ja ne ovat luonteeltaan todistus- ja todistamisajattelutehtäviä. Pääpaino ei ole formaaleilla todistuksilla, vaan todistamisajattelussa, koska työssä tarkastellaan tehtäviä pakollisten pitkän matematiikan kurssien näkökulmasta. Tällöin ei voida olettaa, että opiskelijoilla olisi työkaluja formaalien todistusten tekemiseen. Formaalia todistamista eri todistustyyleineen käydään ylimääräisellä MAA11 kurssilla.

1. Alla on kuusi lyhyttä väittämää 1–6 ja todistusta (A)–(F). Valitse alasvetovalikosta jokaiselle väittämälle sitä vastaava todistus. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.	2.	3.	4.	5.	6.

1. Kahden rationaaliluvun välistä löytyy aina ainakin yksi rationaaliluku.
2. Kahden mielivaltaisen parittoman luonnollisen luvun summa on aina parillinen.
3. Kahden peräkkäisen parillisen kokonaisluvun tulo on parillinen.
4. Kahden parittoman luonnollisen luvun tulo on pariton.
5. Positiivisille murtoluvuille pätee, että $a < b$, jos $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
6. Kolmen peräkkäisen luonnollisen luvun summa on aina jaollinen kolmella.

(A) $a, b, c \in \mathbb{N}$. Nyt $a + b + c = a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3(a + 1)$.

(B) $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ ja $b > 0$. Olkoon $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, jolloin $\frac{b}{ab} > \frac{a}{ab}$. Nyt $\frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab} > 0$, eli $b > a$.

(C) $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Olkoon $a < b$ ja $a \neq b \neq 0$, jolloin $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ja jos $c = \frac{a+b}{2}$, niin $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$.

(D) $a, b \in \mathbb{N}$. Nyt $(2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$.

(E) $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tällöin $b = 2c$ ja $a = 2c + 2$, jolloin $ab = 2c(2c + 2) = 4cc + 4c = 2(2c^2 + 2c)$.

(F) $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Olkoon $a = 2c + 1$ ja $b = 2d + 1$. Nyt $ab = (2c + 1)(2d + 1) = 4cd + 2c + 2d + 1 = 2(2cd + c + d) + 1$.

KUVA 18. Ensimmäinen tehtävä (Hammack 2013, 118).

Ensimmäinen palautteen perusteella muokattu tehtävä on esitetty kuvassa 18. Tehtävässä väittämät esitellään ennen todistuksia, jotta heikompia opiskelijoita ei säikäytetä vaikean näköisellä symbolikielellä. Väittämät on pyritty valitseman samanlaisesta aihepiiristä, jotta väittämiä ei voi yhdistää todistuksiin pelkästään aihepiirin perusteella. Sähköisen ylioppilaskokeen tyypin 1 tehtävä pyrkii yhdistämään kielentämisen tehtävätyypeistä ratkaisusta tehtävä -tehtävää sekä koodinvaihtoa. Oppilaan tulee pystyä tulkitsemaan matemaattisella symbolikielellä esitetty todistus ja yhdistämään se luonnollisella kielellä annettuun väittämään. Matemaattisen osaamisen näkökulmasta tehtävässä opiskelijalta vaaditaan erityisesti konseptuaalista ymmärrystä sekä mukautuvaa päättelyä.

Toiseen tehtävään on kasattu kuusi erilaista monivalintatehtävää. Jokainen tehtävä alakohdassa on hyödynnetty erilaisia kielentämistehtävätyyppejä ja ne ovat vaikeustasoltaan erilaisia. Esimerkiksi E-kohdan sisältö ei kuulu lukion opetussuunnitelmaan ja opiskelija joutuu tällöin omaksumaan uutta asiaa. Tehtävät ovat sähköisen ylioppilaskokeen ensimmäisen tehtävätyypin tehtäviä.

Kuvassa 19 on toisen tehtävän A-kohta. Tehtävässä on annettu todistamisajattelun mukainen osoitus väittämälle. Ratkaisuun on piilotettu virhe, joka opiskelijan tulee löytää ja valita listalta. Kielentämistehtävätyypiltään kyseessä on virheenetsintätehtävä. Tehtävässä matemaattisella symbolikielellä ilmaistua sisältöä pitää pystyä tulkitsemaan ja seuraamaan sekä vertaamaan alun väittämään. Matemaattisen osaamisen näkökulmasta tehtävässä tarvitaan konseptuaalista ymmärtämistä sekä proseduraalista sujuvuutta.

2. **a)** Alla on osoitettu, että $f(x) \geq 0$, kun $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ ja $x > 0$. Mikä rivi ratkaisussa sisältää virheen? Vastausta ei tarvitse perustella.

- $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + 1 \geq 0$, kun $x > \sqrt[3]{2}$
- $\frac{1}{x^2} \geq 0$, kun $x \geq 0$
- $x \geq 0$, kun $x > 0$
- $f(x)$ on selvästi positiivinen, kun $x > 0$ ja myös aidosti kasvava pisteestä $\sqrt[3]{2}$ alkaen
- siis $f(x) \geq 0$, kun $x > 0$

KUVA 19. Toisen tehtävän A-osa.

Kuvassa 20 on toisen tehtävän B-kohta. Tehtävä on kielentämistyypiltään koodinvaihtotehtävä ja siinä mitataan osaamista konseptuaalisen ymmärtämisen ja mukautuvaa päättelyä. Tehtävässä on hyödynnetty ensimmäisen tehtävän sisältöjä ja tässäkin todistusta pitää pystyä tulkitsemaan. Tehtävän vaihtojen tulee olla riittävän samanlaisia, jotta tehtävässä on edes jonkinasteista haastetta. Tehtävän haasteellisuutta voidaan muokata valitsemalla siihen helpompia tai vaikeampia todistuksia. Lisäksi vaihtoehtojen määrää voitaisiin lisätä.

2. **b)** Valitse alla esitetylle todistukselle siihen parhaiten sopiva sanallinen kuvaus. Vastausta ei tarvitse perustella.

$a, b, c \in \mathbb{N}$. Olkoon $a = 2c$ ja $b = 2c + 1$. Nyt $ab = (2c)(2c + 1) = 4cc + 2c = 2(2cc + c)$.

- Kahden peräkkäisen luvun tulo on aina parillinen.
- Kahden mielivaltaisen parittoman luonnollisen luvun summa on aina parillinen.
- Kahden peräkkäisen parillisen kokonaisluvun tulo on parillinen.
- Kahden parittoman luonnollisen luvun tulo on pariton.

KUVA 20. Toisen tehtävän B-osa.

Kuvassa 21 on toisen tehtävän C-kohta, jossa hyödynnetään ensimmistä kertaa kielentämisen metatehtävätyyppiä sekä täydennystehtävätyyppiä. Tehtävässä mitataan opiskelijan konseptuaalista ymmärtämista sekä proseduraalista sujuvuutta. Opiskelijan on ymmärrettävä missä järjestyksessä kappaleiden piirejä vertaillaan. Yhdistämällä piin, saa vaihtoehdot alkuunsa rajattua neljään ja vertailujärjestyksellä päästään kahteen vaihtoehtoon. Vaihtoehtoisesti eri kombinaatiot voi laskea, mutta tällöin eteneminen on hitaampaa. Pelkkä looginen päättely riittää ratkaisuun pääsyyn.

2. **c)** Millä x:llä ja y:llä alla oleva tehtävä on tosi? Vastausta ei tarvitse perustella.

Oletetaan, että säännölliset kappaleet sijaitsevat $a \times a$ cm neliössä ja ovat pinta-alaltaan mahdollisimman suuria. Osoita, että kappaleiden x ja y piirien suhdeluku on $\frac{\pi}{3}$.

- x on tasasivuinen kolmio ja y on neliö.
- x on neliö ja y on ympyrä.
- x on ympyrä ja y on tasasivuinen kolmio.
- x on neliö ja y tasasivuinen kolmio.
- x on ympyrä ja y on neliö.
- x on tasasivuinen kolmio ja y on ympyrä.

KUVA 21. Toisen tehtävän C-osa.

Kuvassa 22 on toisen tehtävän D-kohta. Kielentämistyypiltään tehtävä on ratkaisusta tehtävä -tyyppiä. Konseptuaalisen ymmärtämisen lisäksi tehtävässä mitataan mukautuvaa päättelyä sekä proseduraalista sujuvuutta. Tehtävän voi ratkaista taas päättelemällä, laskematta kaikkia mahdollisia yhdistelmiä. Tärkeintä opiskelijalla on päästä ratkaisussa kiinni lukumääriin 13 ja 16, jotka määrittävät todennäköisyyksiä. Haasteellisuutta tehtävässä voidaan skenaarion valitsemisen lisäksi kontrolloida valitsemalla siihen sopiva määrä vastausvaihtoehtoja. Tehtävässä nähdään myös, miten aineistoa pystyy esimerkiksi hyödyntämään sähköisessä kokessa. Vaikka korttipakan luulisi olevan kaikille tuttu, ei sitä voida olettaa. Tällöin aineistossa voidaan antaa ilmiöön liittyvää tietoa opiskelijalle, jonka perusteella tehtävää voi sitte ratkoa muiden kanssa samalta viivalta. Vastaavasti jos tehtävässä käsiteltäisiin lottoa tai muuta vastaavaa skenaarioita, voitaisiin yleiset tiedot tapaukseen liittyen antaa taustamateriaalissa. Tällöin tehtävä ei tukkeutuisi annettavista tiedoista.

2. **d)** Valitse alla olevaan osoitukseen liittyvä oikea tehtävänanto. Tietoa korttipakan korteista löytyy aineistossa olevasta tekstitiedostosta. Vastausta ei tarvitse perustella.

$P(A_1) = \frac{4}{13} > P(A_2) = \frac{1}{4}$. Siis tapaus $P(A_1)$ on todennäköisempi.

- Osoita, että on todennäköisempää nostaa korttipakasta ruutu kuin ässä.
- Osoita, että on todennäköisempää nostaa korttipakasta kuvakortti kuin pata.
- Osoita, että on todennäköisempää nostaa korttipakasta kuvakortti kuin ruutu tai hertta.
- Osoita, että on todennäköisempää nostaa korttipakasta ässä kuin ruutu.
- Osoita, että on todennäköisempää nostaa korttipakasta pata kuin kuvakortti.
- Osoita, että on todennäköisempää nostaa korttipakasta ruutu tai hertta kuin kuvakortti.

KUVA 22. Toisen tehtävän D-osa.

Kuvassa 23 on toisen tehtävän E-kohta, joka on kielentämisen täydennystehtävätyyppiä sekä osin tiedonseulontaa. Opiskelijan täytyy tehtävässä sisäistää tietoa, johon ei todennäköisesti ole törmännyt opintojen aikana. Tehtävän kuvauksesta tulee löytää oleelliset tiedot ja sovittaa ne todistukseen. Vaikeustasoa on helppo kontrolloida tässä tehtävässä. Nyt puuttuvat kohdat ovat todistuksen alussa, joiden sisällöt pystyy päättelemään suhteellisen helposti. Siirtämällä puuttuvat kohdat myöhempiin kohtiin, lisättäisiin vaativuutta huomattavasti. Lisäksi vaativuutta saataisiin lisättyä sillä, että puutteellisia kohtia olisi useampia. Tehtävässä mitataan jälleen konseptuaalista ymmärtämistä, proseduraalista sujuvuutta sekä mukautuvaa päättelyä.

2. **e)** Valitse alla olevan Heronin kaavan todistuksen täydentävä vaihtoehto. Vastausta ei tarvitse perustella. Todistuksessa hyödynnetään kosinilauseen lisäksi kolmion alan kaavaa $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kaavaa $\sin\gamma^2 = 1 - \cos\gamma^2$ sekä relaatioita $a + b + c = 2s$, $a + b - c = 2(s - c)$, $a - b + c = 2(s - b)$ ja $-a + b + c = 2(s - a)$. Päättelyssä hyödynnetään useita kertoja myös kaavaa $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Todistus. $16T^2 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = (2ab)^2 - (2ab\cos\gamma)^2 =$

$(2ab)^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2 = (2ab - c^2 + a^2 + b^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2) =$
$((a + b)^2 - c^2))(-(a - b)^2 + c^2) = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) =$

$2s \times 2(s - c) \times 2(s - b) \times 2(s - a) = 16(s \times (s - c) \times (s - b) \times (s - a))$ ■

- $(4T)^2 = (2ab\, sin\, \gamma)^2$
- $(2T)^2 = (2ab\, sin\, \gamma)^2$
- $(4T)^2 = (2ab\cos\gamma)^2$
- $(2T)^2 = (2ab\cos\gamma)^2$
- $(4T)^2 = (2ab\tan\gamma)^2$
- $(2T)^2 = (2ab\tan\gamma)^2$

KUVA 23. Toisen tehtävän E-osa (Lehtinen 2017, 4).

Kuvassa 24 on toisen tehtävän viimeinen osa. Tehtävässä hyödynnetään kielentämisen metatehtävätyyppiä. Opiskelijan on selvitettävä tehtävässä, miten oletus vaikuttaa osoituksen pätevyyteen. Ratkaisu vaatii opiskelijalta proseduraalista sujuvuutta ja konseptuaalista ymmärtämistä. Koska monivalintatehtävät ovat sähköisen kokeen ensimmäisessä osassa, ei siinä voida käyttää symbolista laskinta. Yksinkertaisemmalla KCalc-laskimella voi laskea tarvittavat arvot, mutta funktion kulun tarkastelu on pakko hallita. Tarvittaessa suttupaperille voisi hahmotella funktion kulkua. Tehtävän vaikeustasoa voitaisiin tässä kasvattaa esimerkiksi sillä, että vastausvaihtoehdot eivät olisi yhteydessä suoraan nollakohtiin. Nyt vastausvaihtoehdoissa toistuvat nollakohdissa esiintyvien lukujen yhdistelmät.

2. **f)** Mikä on pienin a:n arvo, jolla alla oleva osoitus pätee? Vastausta ei tarvitse perustella.

Oletetaan, että $x > a$. Osoitetaan, että tällöin $f(x) = x^2 - 2x + 8 \geq 10$.

- $a = -1 - \sqrt{3}$
- $a = -1 + \sqrt{3}$
- $a = 0$
- $a = 1 - \sqrt{3}$
- $a = 1 + \sqrt{3}$

KUVA 24. Toisen tehtävän F-osa.

Kuvassa 25 on ensimmäinen yksinkertainen tuottamistehtävä, joka on kaksiosainen. Ensimmäisessä osassa täydennetään puutteellista ratkaisua ja etsitään ratkaisua vastaava tehtävä. Toisessa osassa etsitään ratkaisusta virhettä ja perustellaan valintaa omin sanoin. Tehtävässä hyödynnetään siis neljää kielentämistehtävätyyppiä. A-kohdassa on tunnistettava, että osoituksessa haetaan yhdistetyn derivaatan kaavaa ja derivaatan määritelmän tuntemalla täydentämään sitten osoitusta. Toisessa osassa testataan derivaatan ja integraalin tuntemusta sekä derivoinnin osaamista. Korjattu ratkaisu pitää myös pystyä perustelemaan omin sanoin. Tehtävässä pystytään mittaamaan osaamista aihepiiristä laajalti ja myös matemaattisen osaamisen näkökulmasta tarvitaan yritteliäisyyttä vaille kaikkien osa-alueiden hallintaa. B-kohta on tehtävässä selvästi helpompi osa, josta pitäisi saada suhteellisen helposti pisteitä kasaan. Jos tehtävä olisi laskimettomassa osassa, lisäisi tämä luonnollisesti erityisesti B-kohdan vaikeustasoa.

3. **a)** Täydennä alla olevan ratkaisun puuttuvat osat. Mitä ratkaisussa on osoitettu?

Olkoon $h = fg$. Tällöin

$h(x) - h(x_0) = f(x)[\dots\dots\dots\dots\dots\dots] + g(x_0)[f(x) - f(x_0)]$, jolloin

$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Määritelmän perusteella $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to$ ………… ja $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$.

Nyt $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = f(x)g'(x_0) +$ ………… .

b) Alla olevassa ratkaisussa on virheitä. Korjaa virheet ja perustele korjattu ratkaisu omin sanoin.

Osoitetaan, että $\int \ln x = x\,(\ln(x) - 1) + c$.

$x\,(\ln(x) - 1) = f(x)$, jolloin $f'(x) = (x + \ln x) - x = \ln x$.

On osoitettu, että $\int \ln x = x\,(\ln(x) - 1) + c$.

KUVA 25. Kolmas tehtävä (Thomson, Bruckner & Bruckner 2008, 408–409).

Kuvassa 26 on toinen yksinkertainen tuottamistehtävä. Tehtävässä etsitään ratkaisulle tehtävää ja järjestellään ratkaisua oikeaan järjestykseen sekä perustellaan ratkaisuja omin sanoin. Kahdessa osassa käsitellään erillisiä kokonaisuuksia, mutta yhtä hyvin A- ja B-kohdat voisivat olla täysin samasta aiheesta. Esimerkin vuoksi tuotetuissa tehtävissä pyritään erilaisuuteen ja vaihteluun. Tehtävä ei ole sisällöltään erityisen vaikea ja sen puolesta pitäisi soveltua alkupuolen tehtäviin, myös laskimettomaan osuuteen. Siltikin tehtävässä mitataan kattavasti matemaattista osaamista useilla osa-alueilla. A-kohdassa alkuun pääsee tunnistamalla laskuprosessin, B-kohdassa tunnistamalla ratkaisun x:n sekä y:n perusteella. Lopuksi ratkaisut pitää myös pystyä perustelemaan, joka tuo tehtävästä viimeiset pisteet. B-kohdan vaikeustasoa voitaisiin tarvittaessa kasvattaa valitsemalla monivaiheisempaa esitystä. Lisäksi B-kohdassa voitaisiin myös pyytää nimeämään sen tehtävänanto, kuten A-kohdassa.

4. **a)** Alla on annettu erään osoitustehtävän ratkaisu. Mitä tehtävässä on pyydetty alun perin osoittamaan? Perustele vastauksesi omin sanoin.

$$-z^2 + x^2 = -\frac{3}{8}\left(\frac{2}{3\sqrt{y}} - \sqrt{y}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3\sqrt{y}} + \sqrt{y}\right)^2 = \frac{3}{8}\left(-\frac{4}{9y} + \frac{4}{3} - y + \frac{4}{9y} + \frac{4}{3} + y\right) = \frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = 1$$

b) Alla olevan ratkaisun sisältö on väärässä järjestyksessä. Järjestä rivit oikeaan järjestykseen ja perustele vastauksesi omin sanoin.

$x = \frac{\ln(y+4)}{\ln e}$

$e^x = y + 4$

$x \ln e = \ln(y + 4)$

$e^x - 4 = y$

$x = \ln(y + 4)$

$\ln e^x = \ln(y + 4)$

KUVA 26. Neljäs tehtävä (Ylioppilastutkintolautakunta 2002).

Viides tehtävä oli toinen tehtävä, johon pyydettiin palautetta ja viimeinen yksinkertainen tuottamistehtävä. Tehtävä on esitetty kuvassa 27. Palautteen perusteella tehtävää uudelleen järjesteltiin niin, että jokainen tehtävän kohta muodostaa yhden kokonaisuuden. Tehtävään lisättiin samalla kolmas osio ja selkeytettiin kieliasua, jotta kysytyt asiat ovat selvempiä. Osiot itsessään sisältävät perinteisiä virhepäätelmiä, jotka seuraavat laskusääntöjen rikkomisesta. Tehtävässä testataan siis laskusääntöjen tuntemista ja ratkaisun tulkintakykyä. Kielentämisen näkökulmasta tehtävässä yhdistyy sekä virheen etsintä -tehtävätyyppi että ratkaisun argumentointi. Matemaattisen osaamisen näkökulmasta tehtävässä mitataan opiskelijan proseduraalista sujuvuutta, konseptuaalista ymmärtämistä sekä mukautuvaa päättelyä. Tehtävä sijoittuu sähköisen ylioppilaskokeen tehtävätyyppiin 2 ja edustaa näin suhteellisen yksinkertaista tuottamistehtävää. Tehtävä pystyisi myös olemaan sähköisen kokeen ensimmäisessä osassa tai toisen osan alkupään tehtävissä. Opiskelijalta vaadittaisiin tehtävässä tarkkuutta, jotta kaikkiin kysymyksiin huomataan vastata. Erityisesti A-kohdan kysymys vaatii pohdintaan.

5. **a)** Zaiga on nähnyt todistuksen, jossa osoitetaan että 0 = 1. Etsi alla esitetystä todistuksesta virhe ja perustele valintasi. Mitä virheestä seuraa?

Olkoon $a = b = 1$, jolloin

$ab = a^2$

$ab - b^2 = a^2 - b^2$

$b(a - b) = (a + b)(a - b)$

$b = (a + b)$

$0 = a = 1$

b) Myös Petteri on nähnyt erikoisen todistuksen, jossa väitetään että 1 = -1. Etsi alla esitetystä todistuksesta virhe ja perustele valintasi omin sanoin.

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$

c) Keijo on osoittanut, että $a = b$, kun a ja b ovat erisuuret ja c on niiden aritmeettinen keskiarvo. Tällöin

$a + b = 2c$
$(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$
$a^2 - 2ac = b^2 - 2bc$
$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$
$(a - c)^2 = (b - c)^2$
$a = b.$

Missä kohtaa päättelyssä tulee virhe ja miksi?

KUVA 27. Viides tehtävä (Rouse Ball 2008, 21–23).

Kuudes tehtävä oli kolmas tehtävä, johon pyydettiin palautetta. Tehtävä on kuvassa 28. Palautteen perusteella tehtävänantoa pyrittiin selkeyttämään ja lisäksi siinä annetaan pieni selvennys matemaattisella symbolikielellä annettua todistusta ajatellen. Opiskelijalle kerrotaan pisteen D sijainti suhteessa suoraan BC. Muutoksilla tehtävän A-kohta helpottui hiukan ja näin mahdollistui useammalle opiskelijalle sopivaksi. B- ja C-kohdat ovat edelleen haastavia. Kielentämisen näkökulmasta tehtävässä hyödynnetään koodinvaihto-, analogia- ja ratkaisun argumentointi -tehtävätyyppejä. Tehtävässä mitataan matemaattisen osaamisen osa-alueista käsitteellistä ymmärtämistä, strategista kompetenssia, mukautuvaa päättelyä ja vaatii myös yritteliäisyyttä. Tehtävä ei ole missään määrin mahdoton, mutta se vaatii varmasti opiskelijalta uskoa omaan tekemiseen ja ratkaisun yrittämistä. Sähköisessä ylioppilaskokeessa tehtävä olisi tyyppiä 3, ollen haastava tuottamistehtävä.

6. Eukleides todisti Pythagoraan lauseen yhdenmuotoisten kolmioiden avulla siten, että piste D on suoralla BC:

$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$ ja $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$. Nyt $AC^2 = BC \times CD$ ja $AB^2 = BC \times BD$,

jolloin $AB^2 + AC^2 = BC \times CD + BC \times \mathrm{BD} = BC \times (\mathrm{CD} + \mathrm{BD}) = BC^2 \Leftrightarrow A^2 + B^2 = C^2$.■

a) Esitä annettu todistus geometrisen mallin avulla.
b) Esitä perustelu a-kohdan todistukselle omin sanoin.
c) Esitä Pythagoraan lauseelle vaihtoehtoinen geometrinen todistus tai todista lause vektorien avulla. Esitä ratkaisussa riittävät perustelut.

KUVA 28. Kuudes tehtävä (Fei 2017).

Kuvassa 29 on esitetty seitsemäs tehtävä, joka edustaa sähköisen ylioppilaskokeen tehtävätyyppiä 3 eli monipuolisempaa tehtävää. Tehtävä on muista poiketen yksikohtainen ja yhdistelee useamman kurssin sisältöjä. Tehtävässä on annettu runkoa raja-arvon olemassaolon osoituksesta. Osoitus koostuu kahdesta erillisestä kokonaisuudesta, joista toinen on raja-arvolausekkeen muokkaaminen sellaiseen muotoon, josta raja-arvo voidaan ratkaista ja toisesta kohdasta, jossa selvitetään ongelmallisen raja-arvon arvo. Koska ylioppilaskokeessa ei sallita L'Hôpitalin säännön käyttöä, on raja-arvo selvitettävä toisella tapaa. Kun vastaus on saatu järjestettyä mielekkääseen järjestykseen, tulee se pysty vielä perustelemaan, jossa tehtävän haaste onkin. Tehtävässä vaaditaan jälleen kattavasti osaamista matemaattisen osaamisen eri osa-alueilta.

7. Alla on esitetty osoitus raja-arvon olemassaolosta. Ratkaisun välivaiheet ovat väärässä järjestyksessä ja siitä puuttuu perustelut. Järjestä ratkaisu loogiseen järjestykseen ja lisää jokaiseen kohtaan perustelut omin sanoin.

Osoitetaan, että

$\frac{1}{2}\tan x \geq \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}\sin x$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \sin x^{-1}}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \sin x^{-1}}{x} =$

Yksikköympyrää hyödyntäen voidaan nähdä, että

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}$

$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

KUVA 29. Seitsemäs tehtävä (Leino 2012, 13).

Kuvassa 30 on viimeinen kehittämistutkimuksessa konstruoitu tehtävä. Tehtävä on pääsääntöisesti tiedonseulontatehtävä, jossa vaaditaan vastaukseen luonnollisella kielellä perusteluja sekä ratkaisua tukeva kuviokielen malli. Tiedonseulontatehtävän periaatteen mukaisesti tehtävässä annetaan paljon tietoa, osin ylimääräistä, joita pitää hyödyntää ratkaisun tuottamiseen. Pyydetyn osoituksen voi tehdä monella tapaa ja hyödyntämällä vain osaa annetuista tiedoista. Opiskelijan mukautuva päättely nousee ratkaisevaan rooliin tehtävässä, kun ratkaisun perustetta ja rakennetta selvitetään. Mallikuvan aikaansaaminen tukee osaltaan ratkaisun rakentamista, joka myös näyttää nopeasti väittämän mahdottomuuden. Tehtävä on valitettavasi vielä aiheellinen. Kumma kyllä, näin vuonna 2017 vielä osa ihmisistä vakavissaan vielä kyseenalaistaa maapallon kaarevuuden. Koetilanne voi olla myös kasvattava ja opettava kokemus. Tehtävän sisällöt olisi mahdollista esittää esimerkiksi materiaalina olevassa artikkelissa.

8. Litteä Maa -teoriaa kannattavien mukaan maapallo on litteä kiekko, jonka keskustassa on Grönlanti ja reunan muodostaa Antarktis. Teorian kannattajien mukaan esimerkiksi NASA on mukana totuuden salailussa väittäessään Maan olevan pallomainen. Jotta väite voitaisiin todistaa vääräksi, suoritettiin alla kuvattu koejärjestely. Osoita salaliittolaisten väitteen mahdottomuus annettuja tietoja hyödyntäen. Perustele ratkaisusi ja tee perustelusi tueksi geometrinen mallikuva tilanteesta.

Tampereella mitattiin syyspäiväntasauksen aikaan metrin mittaisen mittakepin muodostaman varjon pituudeksi noin 1,94 metriä. Mittaus tehtiin hetkellä, jolloin Aurinko on zeniitissä eli täsmälleen kohtisuorassa päiväntasaajan yläpuolella ja päiväntasaajan ja Auringon välisen kuvitteellisen janan ja Maan pinnan välinen leikkauspiste on linjassa Tampereen kanssa. Tällöin mittakepin ja varjon viereisen sivun väliin muodostui noin 63 asteen kulma.

Tampereen etäisyys päiväntasaajasta on noin 6 800 kilometriä ja Grönlannista noin 2868 kilometriä Maan halkaisijan ollessa noin 12 756 km. Tiedämme, että Maan etäisyys Auringosta on noin yksi tähtitieteellinen yksikkö (149 597 870 kilometriä). Etäisyys Auringon ja Maan välillä vaihtelee välillä 147 095 000–152 100 000 kilometrin välillä. Maan etäisyys Kuusta on noin 384 400 kilometriä.

KUVA 30. Kahdeksas tehtävä.

8 JOHTOPÄÄTÖKSET

8.1 Tutkimuksesta

Tarkastellaan tutkimuksen luotettavuutta luvussa 5.2. esitetyn luottavuusanalyysin teorian pohjalta. Kehittämistutkimukselle ehdotettu luotettavuusanalyysi eroaa selvästi perinteisesti kvalitatiiviselle ja kvantitatiiviselle tutkimukselle sovelletusta. Käydään tässä läpi luotettavuusanalyysin yhdeksän kohtaa.

Tutkimuksen rajaus onnistui hyvin, lyhyt matematiikka rajattiin pois ja ajallisesti päädyttiin katsomaan pääosin nykytilaa ja tulevaa. Aineistomäärät pysyivät hallittavina. Kaksiosaiseen ylioppilaskokeeseen oli hyvä valinta, koska sähköinen ylioppilaskoekin noudattaa samaa jakoa ja näin lähemmäs sähköistä koetta ei vielä päästä. Tutkimus suoritettiin myös avoimesti, joka näkyy aukikirjoitetussa tutkimuksen kulussa. Lisäksi avoimia oltiin myös kehittämissyklissä mukana olleille LUMA-aineista auskultoineille opiskelijoille. Tutkimuslomakkeessa selvitettiin tarkasti, mihin tietoja käytetään ja miksi. Näiden lisäksi onnistuttiin myös tarkassa dokumentoinnissa. Kehittämissyklin lähtötuotokset on esitelty raportissa ja saatujen palautteiden yhteenveto löytyy myös työstä. Raportin perusteella pystyy seuraamaan tutkimuksen kulkua hyvin. Tutkimuksen arvioinnissa onnistuttiin aiempien kohtien lisäksi hyvin, arviointia näkee erityisesti tuotosten kohdalla, joista on aukikirjoitettu, miksi valittuihin ratkaisuihin on päädytty. Myös kyselylomakkeella saatu palaute nosti arvioinnin laadukkuutta, vaikka saatu palaute ei ole määrällisesti kovin laaja (N = 12).

Onnistumisten ja luotettavuuden lisäksi tutkimuksesta löytyy kehittämiskohtia. Tutkimuksen ongelma-analyysi oli alkuun vajavainen, mutta se kehittyi tutkimuksen etenemisen myötä, kun tietoa saatiin lisää. Mahdollisuus muokata tutkimuksen suuntaa nousikin Design-tutkimuksen vahvuudeksi ja mahdollisti mukautuvan etenemisen. Jatkuva kehittäminen tuntui olevan läsnä tutkimuksessa, etenemissuunta eli paljon tutkimuksen aikana. Suunnan hakeminen näkyy parhaiten siinä, millaisia tehtäviä työssä lähdettiin lopuksi tekemään. Tehtävillä haettava tyyli muuttui kahteen kertaan. Suurin heikkous tutkimuksessa on syklien lukumäärä, joka jäi yhteen sekä autenttisen testaamisen vajaus. Tehtäviä ei keretty testaamaan opiskelijoilla. Toinen sykli palautteen keräämiseen tehtävistä olisi kehittänyt varmasti tehtäviä vielä lisää ja tehtävien testaaminen abeilla olisi kertonut parhaimmin niiden soveltuvuudesta ylioppilaskirjoituksiin. Onneksi palautetta saatiin sentään tulevilta ja jo töissä olevilta opettajilta. Vastaajia palauteosiossa oli yhteensä 12 kappaletta. Viimeinen työn heikkous on teorioihin pyrkimys. Työn suuntana, kun oli luoda mahdollisia tehtäviä ylioppilaskirjoituksia varten. Lisäksi teoreettisen tiedon muodostus rajoittui kielentämiseen, jolle löydettiin kaksi uutta tehtävätyyppiä. Kokonaisuudessaan luotettavuutta tarkastellessa onnistuttiin kuitenkin kohtuullisen hyvin.

8.2 Löydöksistä

Löydöksistä saatiin varsin hyvä kuva kielentämisen ja todistamisen nykytilasta sekä osin tulevasta. Kielentäminen näkyy vahvemmin opetussuunnitelmassa ja ylioppilaskirjoituksissa kuin todistaminen. Todistamisajattelulla on merkittävämpi asema ylioppilaskirjoituksissa kuin todistamisella. Sekä kielentäminen ja todistamisajattelu näyttävät saaneen kiinteän jalansijan kirjoituksista. Tulevaisuus ei myöskään näytä kummankaan osalta huonolta.

Oli erittäin yllättävää, kuinka vähän todistamistehtäviä oli 2000-luvun ylioppilaskirjoituksissa. 2000-luvun alkupuolella oli kahdeksan vuotta kokeiden välillä, joissa mainittiin todistaminen jossain muodossa. Tämä olisi ymmärrettävää, jos MAA11-kurssia ei olisi ollenkaan olemassa. Nyt voi käydä niin, että kurssin käynyt ei pääse hyödyntämään osaamistaan varsinaisissa todistustehtävissä. Todistamisajattelutehtäviä kylläkin näyttää löytyvän aina. Olisi järkyttää, jos päättelyä ja perustelua vaativia tehtäviä ei kokeissa näkyisi. Tällöin koe täyttyisi pelkistä laskutehtävistä. On hyvä muistaa, kuinka vahvasti todistaminen näkyy matematiikan kasvamisessa nykyiseen muotoonsa, kuten tuotiin ilmi luvussa 3.1.

Opetussuunnitelmassa todistaminen näkyy erittäin vähän, käytännössä vain jo mainitussa MAA11-kurssin kuvauksessa. Muuten todistamiseen ei viitata suoraan, vaan se voidaan nähdä maininnoissa matematiikan rakenteesta tai esimerkiksi Pythagoraan lauseessa. Lause sisältää matemaattisen väittämän lisäksi myös kiinteästi sen todistuksen olemassaolon ja todistamisen tarpeen. Jos siis opetuksen osana on tarkoitus opettaa Pythagoraan lause, kuuluu tämä myös todistaa. Tällöin todistaminen tulee tutuksi opetuksessa ja kyseiseen lauseeseen liittyvissä tehtävissä voidaan myös käsitellä todistamista, ainakin todistamisajattelun näkökulmasta.

Kielentäminen ei myöskään näy suorana mainintana pitkän matematiikan vuoden 2015 opetussuunnitelman perusteissa. Sen sisältöihin kylläkin löytyy paljon viittauksia opetussuunnitelmasta, erityisesti matematiikan yleisessä kuvauksessa sekä tavoitteissa ja arvioinnissa. Onkin luonnollista, että matematiikan opetussuunnitelmassa arvostetaan eri matemaattisen ilmaisun muotojen hallintaa ja käyttöä, jotka ovat kielentämisen keskiössä. Ei riitä, että saa kirjattua paperiin kryptisiä symboleita, vaan pitää pystyä selittämään luonnollisella kielellä mitä on tehty ja miksi. Lisäksi uuden opetussuunnitelman hengen mukaisesti opetuksen pitäisi olla muutakin kuin opettajan yksinpuhelua, oppilaiden tulee osata kommunikoida matematiikan kielellä muiden kanssa.

Sähköiset ylioppilaskirjoitukset ovat lähteneet käyntiin muutaman aineen voimin ja matematiikka siirtyy sähköiseen kokeeseen vuonna 2019. Sähköinen ympäristö on kehittynyt tasaiseen tahtiin ja keväällä ympäristö sai osakseen matematiikkaeditorin, joka mahdollisti vastaamisen kysymykseen matemaattisen symbolikielen avulla. Ympäristöä kehitetään koko ajan, eikä pystytä sanomaan, mitä lisämahdollisuuksia järjestelmään lisätään vielä ennen matematiikan sähköistä koetta. Tällä hetkellä matematiikkaeditorin ansiosta pystytään vastaamaan kysymyksiin yhdestä paikasta jo kattavasti. Lisäksi matematiikan sähköinen koe tuo mukanaan uudenlaiset tehtävätyypit, joista esimerkiksi monivalintoja ja yhdistelytehtäviä on testattu kaksiosaisessa kokeessa. Näissä yhdistelytehtävissä on hyödynnetty jo nykyisellään kielentämistä. Huomauttamisen arvoista on myös se, että matematiikkaeditorissa voidaan vastata LaTeXia käyttäen. Tämä ei kuitenkaan missään muodossa sisälly lukion opetukseen, eikä sen osaamista voida olettaa. Onneksi editorin käyttö onnistuu lähtökohtaisesti hiirellä klikkaamalla. Opettajat arvostavat LaTeXia varmasti ympäristössä eniten.

Sähköinen ympäristö näyttäytyy ennemmin mahdollistajana matematiikassa kuin esteenä, tehtävien luonne tulee varmasti muuttumaan, kun symbolinen laskenta vie painoarvoa pois mekaaniselta laskemiselta. Kokeeseen voidaan liittää esimerkiksi aineisto, jossa selitetään tehtävään liittyvää ilmiötä. Haastavimmissa tehtävissä voidaan siten ottaa käsittelyyn ilmiöitä, jotka eivät ole tuttuja ja joihin pitää koetilanteessa tutustua. Todistamisen ja kielentämisen näkökulmasta ympäristöön voidaan tarjota näiden voimin uudenlaisia tehtäviä, joissa opiskelijoiden tulee osoittaa osaamistaan muillakin tavoin kuin vain laskemalla.

8.3 Tuotoksista

Tuotokset suunniteltiin ja toteutettiin siitä näkökulmasta, että niihin pystyttäisiin vastaamaan 10 pakollisen kurssin tiedoilla. Ajatuksena oli myös mitata mahdollisimman monipuolisesti vastaajan matemaattista osaamista sen eri osa-alueilla.

Matematiikan konkretisointi -tehtävätyypille ei löydetty työn rajoissa mielekästä toteutusta. Tehtävätyypissä haetaan vastinetta tai arkielämän käyttötarkoitusta. Vaikka arkielämässä todistuksia hyödynnetään tietojenkäsittelytieteissä, ei tehtävätyyppi tuntunut mielekkäältä tässä asiayhteydessä. Lisäksi voidaan myös ajatella, että matematiikan ollessa yhteydessä arkielämään, ei todistaminen ole siihen suoraan yhteydessä, vaan yhteys muodostuu matematiikan välityksellä.

Vaikeustasoa kielentävissä todistustehtävissä voidaan säädellä tehtävän jaottelulla. Jos tehtävässä halutaan testata yhtä osa-aluetta laajemmin, voidaan tehtävän jokaisessa alakohdissa pysyä saman kielentämistehtävän tai aihepiirin parissa. Vastaavasti, jos yhdessä tehtävässä halutaan pureutua syvälle jossain osa-alueessa, voidaan tehtävä muodostaa hyödyntämällä kielentämisen erilaisia tehtävätyyppejä. Esimerkiksi monivalinnassa tai yhdistelytehtävässä on luonnollista pysyä yhdessä aihepiirissä. Taas haastavammissa tuottamistehtävissä voidaan tehdä päinvastaista, yhdistäen esimerkiksi usean kurssin asioita yhteen kysymykseen. Yhdistelemällä kielentämisen tehtävätyyppejä päästään samalla mittaamaan useampaa matemaattisen osaamisen osa-aluetta. Kaikki kielentämistehtävätyyppien yhdistelmät eivät luonnollisestakaan ole mielekkäitä, mutta mahdollisia ja hyviä yhdistelmiä löytyy paljon. Tuotoksissa näitä yhdistelmiä on pyritty esittelemään. Lisäksi yksittäisiä tehtävätyyppejä voi käyttää luovasti.

Osana tutkimusta löydettiin kaksi uudenlaista tehtävätyyppiä, joita esiteltiin tuotos-osiossa. Tehtävätyypit ovat metatehtävä ja analogiatehtävä. Metatehtävä on haastava tehtävätyyppi lukion oppimäärää ajatellen, koska se soveltuisi parhaiten formaalimpiin todistuksiin, joissa tehdään kunnon oletuksia. Tehtävätyypin ajatuksena on pureutua ongelman reunoihin, eikä keskustaan, eli oletuksiin ja seurauksiin. Analogiatehtävätyypille löytyi enemmän ja mielenkiintoisempia käyttövaihtoehtoja. Matematiikassa voi usein esittää saman asian usealla tapaa ja todistaa väitteen pätevyyden myös monella tavalla. Analogiatehtävä pistää opiskelijan lähestymään ongelmaa toisesta suunnasta, esimerkiksi toisen kurssin tai aihepiirin näkökulmasta. Tehtävätyypillä saadaan tarvittaessa aikaiseksi vaativia ongelmia ja tehtäviä. Analogiatehtävätyyppi soveltuu myös muihinkin kuin todistustehtäviin. Tehtävässä ratkaisua voidaan pyytää pinta-alaan esimerkiksi geometrisesti ja integraaliin perustuen.

Tuotoksissa ei luonnollisestikaan esitetty kaiken kattavaa listausta tai edes kaikkien kurssien sisältöjä kattavaa tehtäväjoukkoa. Tarkoituksena oli näyttää, että kielentämisen ja todistamisen yhdistämällä saadaan mielenkiintoisia ja erilaisia tehtäviä aikaiseksi. Lisäksi tehtävissä saatiin yhdistettyä todistamista sekä lukion opetussuunnitelman sisältöä mielekkäästi. Tehtävien esityksen ulkoasussa pyrittiin huomioimaan myös sähköisen ylioppilaskirjoituksen ympäristö, jolloin niissä näkyi esimerkiksi monivalintalaatikot tai radiopainikkeet. Lisäksi tehtäviä tehtiin kaikkiin matematiikan sähköisen ylioppilaskokeen tehtävätyypeille. Tehtävät pystyisi siis esimerkiksi toteuttamaan heti Abitissa.

9 POHDINTA

Matematiikkaa pidetään itsestäänselvyytenä, ihmiset eivät ymmärrä miten paljon sitä arjessa todellisuudessa käytetään. Arjessa näkyvää matematiikkaa ei myöskään huomaa, jos ei omaa riittävää matemaattista ymmärrystä. Matematiikka on muutakin kuin laskemista, eikä lukionkaan matematiikka saisi kilpistyä pelkäksi laskuopiksi tai kaavakokoelmaksi. Todistamisen tähdellisyydestä rummutti Polya (1973) jo vuosikymmeniä sitten. Tästä syystä opetuksessa on myös paikallaan noteerata muutakin kuin laskemista, jos halutaan antaa kattava kuva matematiikan luonteesta.

Tutkimuksessa saatiin hyvä katselmus siihen, miten kielentäminen ja todistaminen näkyvät sekä lukion opetussuunnitelmassa, että ylioppilaskirjoituksissa. Tuotetuissa tehtävissä päästiin näyttämään, miten kielentäminen ja todistaminen voisivat sulautua yhteen sähköisessä ylioppilaskokeessa. Todistamisajattelu näytteli näkyvämpää osaa kuin formaalimpi todistaminen. On mielenkiintoista, että Malisen (1996) yli 20 vuotta sitten esittämä todistamisajattelu ei näy terminä sen enemmän matematiikan opetuksessa, vaikka sen henki näkyy varsinkin ylioppilaskokeen tehtävissä. Tämän lisäksi ei lukion opetussuunnitelmassa näy myöskään Mariotin (2006) mainitsema kansainvälinen konsensus todistamisen tärkeästä roolista opetuksen tavoitteena. Todistamisajattelua voitaisiin tästä näkökulmasta tuoda näkyvämmin osaksi opetussuunnitelmaa ja opetusta. Kielentäminen mahdollistaa myös todistamisen tuomisen osaksi tehtäviä niin, että tehtävistä saadaan tehtyä eri tasoisia. Todistamistehtävässä voidaan käyttää luonnollistakin kieltä, vaikka formaalille todistamisellekin on selvä paikkansa. Oli miellyttävää huomata, miten myös tehtäväpalautteista nousi ymmärrys todistamisen tärkeyteen. Tämä ei tietenkään yllätä, koska vastaajat opiskelevat tai ovat opiskelleet matematiikkaa yliopistossa.

Tutkimuksen lopuksi löytyy myös asioita, joihin voisi perehtyä lisää tai kehittää. Ehdoton tarve olisi testata luotuja tehtäviä lukion opiskelijoilla. Näin saataisiin käsitystä millaisia ajatuksia tehtävät herättävät ja osataanko niitä. Testaus mahdollistaisi tutkimuksen lähestymistavan kehittämisen ja sen mielekkyyden testaamisen. Lisäksi tutkimuksen laajentaminen kurssikohtaisiin sähköisiin kokeisiin on yksi mahdollinen jatkosuunta, jolloin testausta voitaisiin toteuttaa aivan eri mittakaavassa. Koska todistamisen hyödyntämisestä opetuksessa ei näytä löytyvän ainakaan tuoretta tutkimustietoa, voitaisiin myös sen vaikuttavuutta tutkia. Jatkotutkimuksissa voitaisiin myös kehittää todistamisajattelua eteenpäin ja etsien sille paikkaa yläkoulun opetuksessa.

LÄHTEET

Abitti. 2017a. Uudessa Abitti-versiossa uudistunut vastauseditori ja lisää laitetukea. Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://www.abitti.fi/blogi/2017/05/uudessa-abitti-versiossa-uudistunut-vastauseditori-ja-lisaa-laitetukea/

Abitti. 2017b. Kaavaeditorin kehitysversio. Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://math-demo.abitti.fi/

Abitti. 2017c. Mikä Abitti? Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://www.abitti.fi/fi/abitti/

Aksela, M. & Pernaa, J. 2013. Kehittämistutkimus pro gradu-tutkielman tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla. Opetus 2000 -sarja. PSkustannus, Jyväskylä, 181–201.

Digabi. 2014. Ohjelmistot. Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://digabi.fi/tekniikka/ohjelmistot/

Digabi. 2015. Digabi ylioppilastutkinto. Viitattu 17.10.2017
Saatavissa: https://digabi.fi/wordpress/wp-content/uploads/2014/02/flyer2015.pdf

Digabi. 2016. Käyttöjärjestelmä – kaikki samalla viivalla. Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://digabi.fi/materiaalit/digabi-os/

Digabi. 2017. Päätelaiteohje päivittyi – Näkemiin! Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://digabi.fi/2017/03/paatelaiteohje-paivittyi-nakemiin/

Ervasti, O. & Heikinheimo, R. 2017. EK Linjasi matematiikan koulutustavoitteet: työelämän ydintaitoa on välttämätöntä vahvistaa. Elinkeinoelämän keskusliitto. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: https://ek.fi/ajankohtaista/uutiset/2017/10/20/ek-linjasi-matematiikan-koulutustavoitteet-tyoelaman-ydintaitoa-on-valttamatonta-vahvistaa

Fei, B. 2017. How many ways are there to prove the Pythagorean theorem. TED-Ed. Viitattu 10.11.2017. Saatavissa: https://www.youtube.com/watch?v=YompsDlEdtc

Hanna, G. 1995. Challenges to the importance of proof. In For the Learning of mathematics. FLM Publishing association. Volume 15, issue 3, 42–49.

Hammack, R. 2013. Book of Proof. Virginia Commonwealth University, Virginia. Viitattu 30.10.2017. Saatavissa: https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/BookOfProof.pdf

Joutsenlahti, J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72, Turun opettajankoulutuslaitos, Turku, 188–196.

Joutsenlahti J. 2009. Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä. Teoksessa Raimo Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Lapin yliopisto, Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9, Rovaniemi, 71–86.

Joutsenlahti, J. 2010. Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen, P. ja Sormunen, K. (toim.) Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa, Matematiikka ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Publications of the University of Eastern Finland. University of Eastern Finland, Joensuu, 3–15.

Joutsenlahti, J. 2005. Pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen piirteitä. Teoksessa L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (toim.) Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto – haaste vai mahdollisuus? Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.-26.11.2004. Acta Universitatis Ouluensis E 80, Oulu, 71–79.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2015. Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksesta Kaartinen, T. (toim) Monilukutaito kaikki kaikessa. Tampereen yliopiston normaalikoulu, Tampere, 57–76.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010. Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E.Ropo & H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A31. Tampereen yliopisto, Tampere, 77–90.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2017. Multimodal Languaging as a Pedagogical Model—A Case Study of the Concept of Division in School Mathematics. Tampereen yliopisto. Julkaisussa Education Sciences 7, number 1, 9 p.

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. 2015. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa Kauppinen, M., Rautiainen, M., Tarnanen, M. (toim.) Rajaton Tulevaisuus: Kohti Kokonaisvaltaista Oppimista: Ainedidaktiikan Symposium Jyväskylässä 13-14.2.2014. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja 8, Suomen Ainedidaktinen Tutkimusseura ry, Helsinki, 45–62.

Joutsenlahti J., Sarikka, H., Kangas, J. & Harjulehto, P. 2013. Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa. Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Assosiation. Jyväskylä University Printing House, Jyväskylä, 59–70.

Katz, V. 2008. A History of Mathematics, An Introduction. 3rd edition. Pearson. 992 p.

Kilpatrick J. & Swafford J. & Findell B. 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academy press, Washington DC. 480 p.

Krantz, S. 2006. An Episodic History of Mathematics, Mathematical Culture through Problem Solving. MAA Textbooks. 471 p.

Kärki, H. 2013. Skandaali muhii matematiikan yo-kokeissa – paras arvosana ilman osaamista. Keskisuomalainen. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: http://www.ksml.fi/kotimaa/Skandaali-muhii-matematiikan-yo-kokeissa-%E2%80%93-paras-arvosana-ilman-osaamista/203479

Lahtinen, A. 2017. Sata matematiikan ylioppilastehtävää itsenäisyyden sadalta vuodelta. Dimensio. 81 vuosikerta, 5. numero, 25–29.

Leino, A. 2012. L'Hôpitalin sääntö: teoriaa ja sovelluksia. Kandidaattitutkielma. Tampereen yliopisto. 12 s.

Lehtinen, M. 2017. Nimekästä geometriaa. Viitattu 23.10.2017. Saatavissa: http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/nimgeom.pdf

Liiten, M. 2017. Lukio-opetus menee taas täysremonttiin, vaikka edellistä uudistusta alettiin toteuttaa vasta viime vuonna – ehdotus tulevaisuuden lukioksi lietsoo reaaliaineiden sotaa. Helsingin Sanomat. Viitattu 30.10.2017. Saatavissa: https://www.hs.fi/politiikka/art-2000005420409.html

Linnusmäki, J. 2015. Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere. 82 s.

Malinen, P. 1996. Selkeyttä todistamiseen koulumatematiikassa. Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti Dimensio. Vuosikerta 60, numero 5, 22–24.

Mariotti, M. 2006. Proof and proving in mathematics education. In Gutiérrez, A & Boero, P. (ed.) Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. Rotterdam: Sense, 173–204.

Merikoski, J., Virtanen, A. & Koivisto, P. 2004. Johdatus diskreettiin matematiikkaan. Tampere. 188 s.

Metsämuuronen, J. 2017. Oppia ikä kaikki – Matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Helsinki. 226 s.

Opetushallitus. 2015. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

Opetushallitus. 2016a. Ohjausryhmän asettaminen. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus/lops2016/103/0/ohjausryhman_asettaminen

Opetushallitus. 2016b. Lukion opetussuunnitelman perusteiden päivittämisen suuntaviivat. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus/lops2016/103/0/lukion_opetussuunnitelman_perusteiden_paivittamisen_suuntaviivat

Opetushallitus. 2017. Opetussuunnitelmien ja tutkintojen perusteet. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet

Oxford Dictionaries. 2017a. Mathematics. Oxford University Press. Viitattu 23.10.2017. Saatavissa: https://en.oxforddictionaries.com/definition/mathematics

Oxford Dictionaries. 2017b. QED. Oxford University Press. Viitattu 23.10.2017. Saatavissa: http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/qed

Pernaa, J. 2013. Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla. Opetus 2000 -sarja. PSkustannus, Jyväskylä, 9–26.

Pólya, G. 1973. How to Solve It, A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 253 p.

Reid, D. & Knipping, C. 2010. Proof in Mathematics Education, Research, Learning and Teaching. Sense Publishers, Rotterdam, Netherlands. 266 p.

Rouse Ball, W.W. 2008. Project Gutenberg's Mathematical Recreations and Essays. Viitattu 10.11.2017. Saatavissa: http://www.gutenberg.org/ebooks/26839

Ruoste, P. 2013. MAA YO K 2013 ja symbolinen laskin. Matematiikkalehti Solmu. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2013/laskin.pdf

Sarikka, H. 2014. Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere. 66s.

Silius, K., Pohjolainen S., Kangas J., Miilumäki T. & Joutsenlahti J. 2011. What can be done to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics?. Teoksessa Education Engineering (EDUCON), 2011 IEEE, 428–436.

Tampereen yliopisto. 2016. Tampereen yliopiston normaalikoulun lukio, opetussuunnitelma 2016. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: http://www.uta.fi/normaalikoulu/lukio/opsu_lukio/LOPS%2024052016.pdf

Thomson, B. S., Bruckner, J. B., & Bruckner, A. M. Elementary real analysis. 2008. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2nd ed., 735p.

Vanhala, L. 2012. Kaikki laskimet sallitaan yo-kokeissa – tuliko matematiikasta helppoa? Suomen kuvalehti. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: https://suomenkuvalehti.fi/jutut/kotimaa/kaikki-laskimet-sallitaan-yo-kokeissa-tuliko-matematiikasta-helppoa/

Vince, J. 2009. Applied Geometric Algebra. In Geometric Algebraic Systems For Computer Games And Animation. Springer, London. 139–182.

Vikberg, T. 2017. Valmistautuminen digitaaliseen matematiikan ylioppilaskokeeseen. Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti Dimensio. Vuosikerta 81, numero 3, 7–9.

Ylioppilastutkintolautakunta. 2002. Matematiikan koe, pitkä oppimäärä. Viitattu 13.11.2017. Saatavissa: https://matta.hut.fi/matta/yoteht/s02p.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. 2016a. Sähköinen ylioppilastutkinto – matematiikka. Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/fi_sahkoinen_matematiikka_28.11.2016.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. 2016b. Ylioppilastutkintolautakunnan tiedote. Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/Matematiikka_A-osa_tiedote.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. 2017a. Tietoa ylioppilastutkinnosta. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/tietopalvelut/tietoa-ylioppilastutkinnosta

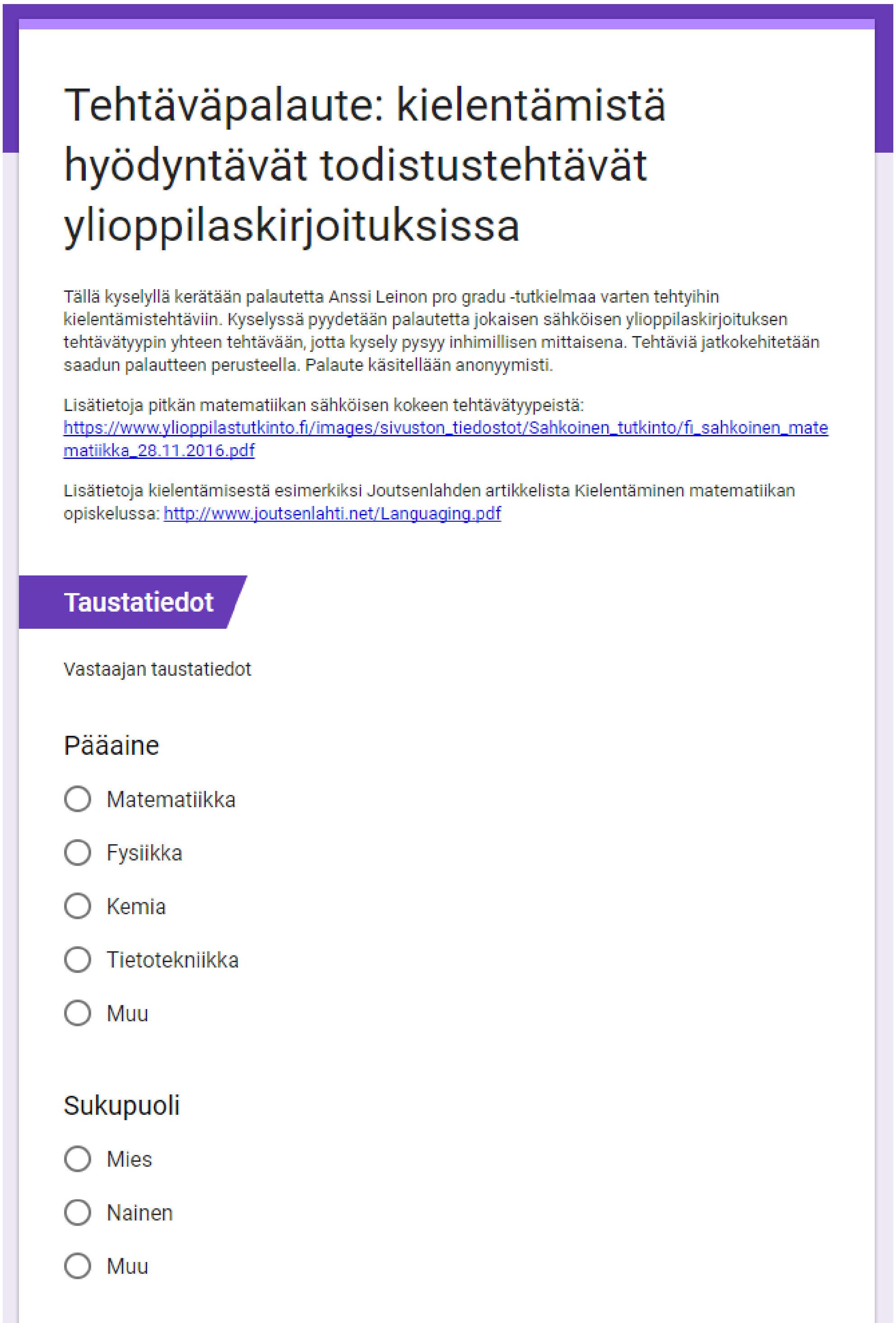
Ylioppilastutkintolautakunta. 2017b. Historia. Viitattu 21.10.2017. Saatavilla: https://www.ylioppilastutkinto.fi/tietopalvelut/tietoa-ylioppilastutkinnosta/historia

Ylioppilastutkintolautakunta. 2017c. Matematiikan kokeen määräykset. Viitattu 21.10.2017. Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/matematiikka_maaraykset_090217.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. 2017d. Vastauksia digitaalisia MAFYKE-kokeita koskevaan kyselyyn. Viitattu 17.10.2017. Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/mafyke-ytl-fi.pdf

LIITTEET

Liite 1: Palautekyselyn lomake



Tehtäväpalaute: kielentämistä hyödyntävät todistustehtävät ylioppilaskirjoituksissa

Tällä kyselyllä kerätään palautetta Anssi Leinon pro gradu -tutkielmaa varten tehtyihin kielentämistehtäviin. Kyselyssä pyydetään palautetta jokaisen sähköisen ylioppilaskirjoituksen tehtävätyypin yhteen tehtävään, jotta kysely pysyy inhimillisen mittaisena. Tehtäviä jatkokehitetään saadun palautteen perusteella. Palaute käsitellään anonyymisti.

Lisätietoja pitkän matematiikan sähköisen kokeen tehtävätyypeistä: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/fi_sahkoinen_matematiikka_28.11.2016.pdf

Lisätietoja kielentämisestä esimerkiksi Joutsenlahden artikkelista Kielentäminen matematiikan opiskelussa: http://www.joutsenlahti.net/Languaging.pdf

Taustatiedot

Vastaajan taustatiedot

Pääaine

- Matematiikka
- Fysiikka
- Kemia
- Tietotekniikka
- Muu

Sukupuoli

- Mies
- Nainen
- Muu

Tehtävä 1

Ensimmäistä tehtävää koskeva palaute.

Valinta- ja yhdistelytehtävä.

1. Alla on kuusi lyhyttä todistusta(A)-(F) ja väittämää 1-6. Valitse alasvetovalikosta jokaiselle väittämälle sen oikeellisuuden todistava todistus. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.	2.	3.	4.	5.	6.

(A) $a, b, c \in \mathbb{N}$. Nyt $a + b + c = a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3 = 3(a+1)$.

(B) $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ ja $b > 0$. Olkoon $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, jolloin $\frac{b}{ab} > \frac{a}{ab}$. Nyt $\frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab} > 0$, eli b>a.

(C) $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Olkoon $a < b$ ja $a \neq b \neq 0$ jolloin $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ja jos $c = \frac{a+b}{2}$, niin $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$.

(D) $a, b \in \mathbb{N}$. Nyt $(2a+1) + (2b+1) = 2a + 2b + 2 = 2(a+b+1)$.

(E) $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tällöin $b = 2c$ ja $a = 2c + 2$, jolloin $ab = 2c(2c+2) = 4cc + 4c = 2(2c^2 + 2c)$.

(F) $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Olkoon $a = 2c + 1$ ja $b = 2d + 1$. Nyt $ab = (2c+1)(2d+1) = 4cd + 2c + 2d + 1 = 2(2cd + c + d) + 1$.

1. Kahden rationaaliluvun välistä löytyy aina ainakin yksi rationaaliluku.

2. Kahden mielivaltaisen parittoman luonnollisen luvun summa on aina parillinen.

3. Kahden peräkkäisen parillisen kokonaisluvun tulo on parillinen.

4. Kahden parittoman luonnollisen luvun tulo on pariton.

5. Positiivisille murtoluvuille pätee, että $a < b$, jos $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

6. Kolmen peräkkäisen luonnollisen luvun summa on aina jaollinen kolmella.

Tehtävä soveltuu pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä mittaa oppilaan osaamista

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä on ymmärrettävä

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä sopii vaikeustasoltaan ylioppilaskokeeseen

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä erottelee eritasoiset oppilaat

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Vapaa kehittävä palaute tehtävälle

Your answer

NEXT

Page 1 of 3

Tehtävä 2

Toista tehtävää koskeva palaute.

Yksinkertainen tuottamistehtävä.

7. **a.** Keijo on nähnyt todistuksen, jossa osoitetaan, että 0 = 1. Etsi alla esitetystä todistuksesta virhe. Perustelua ei tarvita.

Olkoon $a = b = 1$, jolloin

$ab = a^2$

$ab - b^2 = a^2 - b^2$

$b(a - b) = (a + b)(a - b)$

$b = (a + b)$

$0 = a = 1$

b. Esitä perustelu a-kohdassa tehdylle virheelle. Mitä virheestä seuraa?

c. Myös Petteri on nähnyt erikoisen todistuksen, jossa väitetään, että 1 = -1. Etsi alla esitetystä todistuksesta virhe. Perustelua ei tarvita.

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$

d. Esitä peruste c-kohdassa tehdylle virheelle.

Tehtävä soveltuu pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä mittaa oppilaan osaamista

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä on ymmärrettävä

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä sopii vaikeustasoltaan ylioppilaskokeeseen

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä erottelee eritasoiset oppilaat

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Vapaa kehittävä palaute tehtävälle

Your answer

BACK NEXT

Tehtävä 3

Kolmatta tehtävää koskeva palaute.

Monipuolisempi matemaattisen ongelman ratkaisu.

8. Eukleides todisti Pythagoraan lauseen yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Todistus on esitetty alla:

$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$ ja $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$. Nyt $AC^2 = BC \times CD$ ja $AB^2 = BC \times \mathrm{BD}$, jolloin $AB^2 + AC^2 = BC \times CD + BC \times \mathrm{BD} = BC \times (\mathrm{CD} + \mathrm{BD}) = BC^2 \leftrightarrow A^2 + B^2 = C^2$.■

- **a.** Esitä annettu todistus geometrisesti.
- **b.** Esitä perustelu a-kohdan todistukselle käyttämällä luonnollista kieltä.
- **c.** Esitä Pythagoraan lauseelle vaihtoehtoinen geometrinen todistus tai todista lause vektorien avulla.

Tehtävä soveltuu pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä mittaa oppilaan osaamista

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä on ymmärrettävä

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä sopii vaikeustasoltaan ylioppilaskokeeseen

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Tehtävä erottelee eritasoiset oppilaat

	1	2	3	4	
Huonosti	○	○	○	○	Hyvin

Vapaa kehittävä palaute tehtävälle

Your answer

BACK SUBMIT